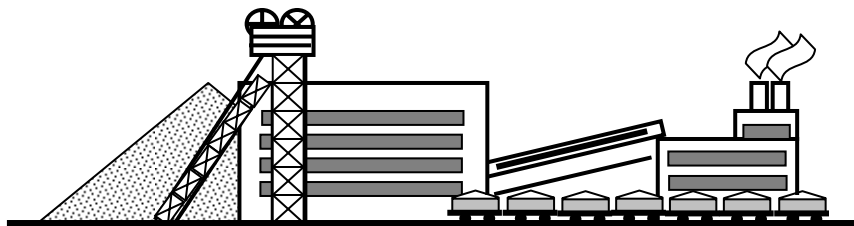


**Білецький В.С., Смирнов В.О.**

# **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН**



**Донецьк  
“Східний видавничий дім”  
2013**

ББК 33.4-4

УДК 622.7

**Білецький В.С., Смирнов В.О.**

**С 50 Моделювання процесів збагачення корисних копалин. –**

Донецьк: Східний видавничий дім, 2013. – 304 с.

**ISBN 978-966-317-191-3**

Викладені основи моделювання процесів збагачення корисних копалин. Зокрема описані методи фізичного і математичного моделювання процесів. Наведено математичні описи гранулометричного і фракційного складу, технологічних операцій – дезінтеграції, сепарації, зневоднення та ін., а також методи переходу від лабораторних показників до промислових. З використанням праць провідних вітчизняних і зарубіжних науковців наведені приклади моделювання підготовчих, основних та заключних процесів збагачення корисних копалин.

Книга може бути корисною для робітників дослідних лабораторій збагачувальних фабрик, науково-дослідних і проектних інститутів і геологічних організацій а також для студентів спеціальності “Збагачення корисних копалин”.

ББК 33.4-4

УДК 622.7

**Рецензенти:**

Пожидаєв В.Ф., доктор технічних наук, професор кафедри інформатики,  
Східноукраїнський національний університет ім. Володимира Даля  
Шпильовий Л.В., кандидат технічних наук, ТОВ «НПФ «Мінералтехніка»

*Рекомендовано до друку Вченою радою Науково-виробничого  
об'єднання «Хаймек», протокол № 61 від 5 вересня 2013 р.*

**ISBN 978-966-317-191-3**

© Білецький В.С., Смирнов В.О.  
© Макет, “Східний видавничий дім”,  
2013.  
© Донецьке відділення НТШ

# ЗМІСТ

Передмова .....	6
<b>1. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....</b>	<b>9</b>
1.1. Основні поняття .....	9
1.2. Основна мета, принципи та етапи моделювання технологічних процесів.....	18
1.3. Особливості моделювання процесів збагаченні корисних копалин .....	20
<b>2. ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ .....</b>	<b>23</b>
2.1. Теорія подібності.....	23
2.1.1. Рух в'язкої рідини.....	23
2.1.2. Умови застосування теорії подібності .....	32
2.1.3. Диференціальні рівняння теплообміну для моделі.....	36
2.1.4. Гідродинамічна подібність .....	38
2.1.5. Теплова подібність .....	41
2.1.6. Дифузійна подібність .....	44
2.1.7. Подібність деяких часткових випадків переносу .....	46
2.1.8. Узагальнення.....	48
2.2. Метод аналізу розмірностей.....	55
2.3. Моделювання на основі методу аналогій .....	64
2.3.1. Методи аналогій .....	64
2.3.2. Моделювання плоских потоків на основі електрогідродинамічної аналогії (ЕГДА).....	68
<b>3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ.....</b>	<b>73</b>
3.1. Статистичні методи оцінки експериментальних даних .....	73
3.1.1. Постановка задачі.....	73
3.1.2. Статистична оцінка імовірності досліджень .....	75
3.1.2.1. Оцінка помилок вимірювань .....	75
3.1.2.2. Статистичні критерії розходження.....	78
3.1.2.3. Критерій Ст'юдента (t-критерій) .....	80
3.1.2.4. Послідовний аналіз Вальда .....	84
3.1.2.5. Критерій Фішера (F-критерій) .....	86
3.1.2.6. Критерій Кохрена (G-критерій) .....	88
3.1.2.7. Критерій Пірсона ( $\chi^2$ -критерій) .....	89
3.2. Моделювання із застосуванням «активних» і «пасивних» методів експерименту.....	90
3.2.1. «Пасивні» методи моделювання із застосуванням дисперсійного, регресійного і кореляційного аналізів.....	94

3.2.1.1. Дисперсійний аналіз .....	94
3.2.1.2. Кореляційний і регресійний аналізи .....	102
3.2.2. «Активний» метод оптимального планування експериментів .....	113
3.2.2.1. Техніка постановки «активного» експерименту .....	113
3.2.2.2. Визначення критерію процесу та незалежних факторів .....	116
3.2.2.3. Вибір структури моделі і плану експерименту .....	120
3.2.2.4. Факторне планування експериментів.....	123
3.2.2.5. Метод крутого сходження.....	133
3.2.2.6. Еволюційне планування експериментів.....	136
3.2.2.7. Симплексний метод планування експериментів.....	142
3.2.2.8. Ротатбельне центральньо-композиційне планування експериментів .....	146
<b>4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. АНАЛІТИЧНІ, КОМБІНОВАНІ І СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН.....</b>	<b>150</b>
4.1. Аналітичні і комбіновані методи моделювання .....	150
4.2. Графічні методи .....	151
4.2.1. Факторні моделі .....	151
4.2.2. Феноменологічні моделі.....	152
4.2.3. Моделі-графи.....	153
4.3. Спеціальні методи моделювання.....	155
4.3.1. Моделювання на основі елементів прогнозування.....	155
4.3.2. Евристичне моделювання.....	158
4.3.3. Адаптаційне моделювання .....	162
4.4. Сепараційні характеристики збагачувальних процесів як математичні моделі.....	166
<b>5. ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН .....</b>	<b>173</b>
5.1. Опис вихідної мінеральної сировини.....	173
5.1.1. Математичний опис гранулометричного складу сипкої мінеральної сировини.....	174
5.1.2. Математичний опис фракційного складу сипкої мінеральної сировини.....	180
5.2. Моделювання підготовчих процесів збагачення корисних копалин .....	195
5.2.1. Моделювання процесів дезінтеграції (дроблення і подрібнення) .....	195
5.2.2. Моделювання процесу грохочення .....	206
5.2.3. Моделювання процесів гідравлічної класифікації.....	213



5.3. Моделювання основних процесів збагачення корисних копалин .....	223
5.3.1. Моделювання гравітаційних процесів .....	223
5.3.1.1. Моделювання процесу відсадки .....	223
5.3.1.2. Моделювання процесу важкосередовищної сепарації .....	231
5.3.1.3. Моделювання процесу гвинтової сепарації.....	233
5.3.1.4. Моделювання процесу концентрації на столах.....	236
5.3.1.5. Сепараційні характеристики як моделі процесів гравітаційного збагачення корисних копалин.....	239
5.3.2. Моделювання процесу флотації.....	243
5.3.3. Моделювання процесу магнітної сепарації .....	248
5.4. Моделювання заключних процесів збагачення корисних копалин .....	253
5.4.1. Моделювання процесу згущення у радіальному згущувачі.....	253
5.4.2. Моделювання процесу зневоднення фільтруванням .....	258
5.5. Моделювання технологічних схем збагачення корисних копалин .....	264
5.5.1. Постановка проблеми і загальні рішення .....	<b>264</b>
5.5.2. Аналіз сепараційних характеристик схем збагачення .....	267
5.5.3. Аналіз циркулюючих навантажень .....	271
5.6. Моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням комп'ютерних технологій.....	273
5.7. Практика чисельного (комп'ютерного) моделювання .....	275
5.7.1. Степеневі і показникові функції .....	276
5.7.2. Вибір емпіричної формули. Метод вирівнювання .....	278
5.7.3. Визначення коефіцієнтів емпіричної формули. Спосіб середніх .....	278
<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>289</b>
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>299</b>

## ПЕРЕДМОВА

При вивченні явищ, що відбуваються в природі, техніці і суспільстві наука широко використовує метод моделювання цих явищ.

Моделювання – це метод дослідження явищ і процесів, що ґрунтується на заміні конкретного об'єкта досліджень (оригіналу) іншим, подібним до нього (моделлю).

Моделювання в широкому сенсі — це особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об'єкта пізнання вибирає чи створює схожий із ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення. При цьому вивчення явищ на моделі можна здійснити значно простіше і повніше, ніж в натурі.

Однак результати експериментів на моделі можуть бути використані для рішення задач практики тільки у випадку, якщо при проведенні експериментів додержуються визначених законів моделювання.

Моделювання – складна, трудомістка і відповідальна наукова задача. Іноді дослідження за допомогою моделей є єдино можливим способом експериментального вивчення технологічних процесів. Так, процеси, які тривають багато років, можна вивчати на моделях протягом короткого проміжку часу. І навпаки, швидкоплинні процеси вивчаються на моделях протягом більш довгого часу.

Моделювання – це метод, а модель – форма, засіб наукового пізнання. До моделювання звертаються тоді, коли досліджувати реальний об'єкт з усією сукупністю його властивостей недоцільно, незручно або неможливо.

Моделювання у галузі збагачення корисних копалин має на меті, *по-перше*, створення спрощених, але адекватних відображень-моделей технологічних процесів, *по-друге*, вивчення технологічних процесів збагачення за допомогою одержаних моделей і, *по-третьє*, прогнозування їх результатів за різних умов, зміні характеристик перероблюваної сировини, що використовується як у практиці збагачення, так і при проектуванні збагачувальних фабрик, розробці раціональних та оптимальних технологічних режимів, автоматичному керуванні процесами тощо.

Об'єктами моделювання у галузі збагачення корисних копалин можуть бути збагачувальні машини і апарати, транспортні системи, технологічні операції і схеми, відділення, цехи і збагачувальна фабрика у цілому.

Моделювання різних фізичних процесів виходить з подібності явищ, що розглядаються. Два явища називаються подібними, якщо за характеристиками одного можна одержати характеристики іншого шля-

хом простого перерахунку. Умовами або критеріями подібності двох явищ є рівності деяких безрозмірних параметрів, які називаються числами або критеріями подібності. Визначення критеріїв подібності при моделюванні процесів, що вивчаються, потребує глибокого знання механізму цих процесів і є досить важкою задачею. При рішенні цієї задачі усі досліджувані процеси слід розділяти на дві суттєво різні групи. До першої групи потрібно віднести процеси і явища, які можна описати рівняннями, до другої, яка становить найбільший інтерес, – процеси і явища, які ще не мають математичного опису. У випадках, коли рівняння досліджуваних процесів невідомі, числа подібності можна знайти за теорією розмірностей. При наявності диференціальних рівнянь досліджуваних процесів числа подібності легко визначаються, як коефіцієнти рівнянь, які представлені в безрозмірному вигляді. Природно, що одержання критеріїв подібності при наявності рівнянь значно простіше, ніж при їх відсутності. Тому теорію розмірностей слід застосовувати для отримання критеріїв подібності тільки при дослідженні процесів, які не мають математичного опису.

Ефективність процесів збагачення корисних копалин в багатьох випадках визначається ефективністю експериментальних робіт як у лабораторних, так і у промислових умовах.

Експеримент у збагаченні дотепер є практично єдиним джерелом нової інформації, а уся робота технолога тією чи іншою мірою пов'язана з експериментом. Раціональне планування експерименту полягає у такій тактиці виконання робіт, яка давала б максимальну інформацію при обмеженому числі дослідів або дозволяла б виконати мінімальне число дослідів для рішення поставлених задач. Оптимальність експерименту зводиться до використання спеціальних планів і стиску інформації – представленню її у вигляді моделей, під якими частіше за все розуміють деяку сукупність рівнянь, що описують процес. Отримання моделі дозволяє пояснити властивості процесу, а також забезпечити подальшу роботу, яка полягає у відшукуванні найкращого результату або режиму [2].

Вибір оптимальної технологічної схеми підприємства є головною задачею, яка вирішується при проектуванні збагачувальної фабрики і визначає ефективність її подальшої експлуатації. Трудність правильного розрахунку і вибору схеми полягає у відсутності достатньої і достовірної інформації про технологічні властивості сировини і параметри апаратів, які працюють на даній сировині. Тому при проектуванні нової збагачувальної фабрики дослідження проводять у декілька етапів, при цьому основним методом досліджень є метод фізичного моделювання [4].

Попередні дослідження вибраних схем виконують в лабораторних умовах і на лабораторному обладнанні. В лабораторних умовах використовують повний і дробовий факторні експерименти, реалізують дисперсійні плани, які дозволять значно скоротити обсяг досліджень і отримати статистичну модель у вигляді полінома.

Наступним етапом є напівпромислові дослідження оптимального варіанта схеми, після чого результати досліджень перевіряють на діючій збагачувальній фабриці.

В промислових умовах застосовуються еволюційне планування, адаптаційні і евристичні методи одержання моделей, регресійний і кореляційний способи обробки.

В узагальнюючих роботах використовують аналітично побудовані моделі.

Дослідження тільки на основі фізичної моделі – процес трудомісткий, дорогий і тривалий.

Математичне моделювання у порівнянні з фізичним вносить гнучкість, достовірність і швидкість. Воно дозволяє без суттєвих витрат імітувати на ЕОМ різноманітні варіанти технологічних схем збагачення, шихтовок корисної копалини, навантажень на апарати, їхні типорозміри і т.п. При цьому математичне моделювання передбачає попередні експериментальні дослідження, органічно пов'язане з ними, так як без експериментальних даних, які дають інформацію про корисну копалину, апарат, умови процесу, моделювати схему неможливо. Основна вимога до математичної моделі – можливість технологічного розрахунку досліджуваних операцій і схем.

# 1. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

## 1.1. Основні поняття

*Модель* – дуже широке і ємне поняття, яке застосовується у різних аспектах. В широкому розумінні модель – речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи(та) характеристики об'єкта дослідження (оригіналу). В технічних задачах під моделлю розуміють математичний і логічний зв'язок між факторами і показниками процесу.

Модель – це об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу.

Аналіз досвіду використання моделей у природничих і технічних науках дозволяє зробити висновок, що модель – це наше уявлення про досліджуваний об'єкт, своєрідна форма кодування інформації про об'єкт.

За формальною класифікацією, яка часто будується за принципом дихотомій, розрізняють такі моделі: лінійні й нелінійні, зосереджені та розподілені системи, детерміновані (аналітичні) та стохастичні, статичні та динамічні, дискретні та безперервні. Можливі й змішані типи, наприклад, в одному відношенні зосереджені (по частині параметрів), в іншому – розподілені моделі, аналітично-статистичні і т.д.

Розрізняють такі основні різновиди моделей, які використовуються при дослідженні процесів збагачення корисних копалин:

– *описова модель* полягає в будь-якому техніко-технологічному опису об'єкта моделювання;

Приклад – опис *факторної моделі* технологічного процесу – схеми («чорного ящика»), яка показує всі фактори (чинники), що впливають на процес, вихідні параметри та зв'язок між вхідними та вихідними характеристиками потоків речовини та енергії.

Інший приклад – опис *феноменологічної моделі* – схеми, яка відображає послідовність та взаємозв'язок всіх елементарних фізичних та хімічних процесів (субпроцесів), які мають місце при проведенні технологічного процесу (наприклад, феноменологічна модель процесу флотації, флокуляції тощо). Вихідні величини кожного попереднього субпроцесу є вхідними для наступного. Вихідні величини останнього субпроцесу є вихідними величинами технологічного процесу в цілому.

– *евристична модель* полягає у формалізації моделей процесів, що сформувалися у людини, яка веде технологічний процес, в результаті численних особистих проб і спостережень;

– *графічна модель* представляє об'єкт моделювання у вигляді рисунків, креслень, графів, схем; Наприклад, *феноменологічна модель*, *факторна модель*, *граф* тощо;

– *фізична модель* являє собою змінений у визначеному масштабі (зменшення або збільшення) об'єкт моделювання;

– *математична модель* – опис об'єкта моделювання однією (*одноструктурна модель*) або декількома (*складноструктурна модель*) математичною залежністю; розрізняють *аналітичні*, *емпіричні* та змішані математичні моделі;

– *аналогова модель* використовує заміну об'єкта моделювання іншим, який відрізняється за своєю фізичною природою, але вони можуть бути описані одним й тим же диференціальним рівнянням;

– *імітаційна модель* – представлення об'єкта моделювання у вигляді рекурентних співвідношень і наступна імітація роботи об'єкта на ЕОМ.

*Математична модель* – система математичних співвідношень, які описують досліджуваній процес або явище.

У гірничій справі і зокрема збагаченні корисних копалин найчастіше застосовуються два способи математичного моделювання:

- аналітичний, що передбачає можливість точного математичного опису строго детермінованих систем,
- ймовірнісний, що дозволяє отримати не однозначне рішення, а його ймовірнісну характеристику (напр., параметрів шихти або яких-небудь параметрів технологічного процесу).

Для створення математичних моделей використовують різні математичні засоби — мову диференціальних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей, графи та інші.

Для будь якого об'єкта можна скласти велику кількість моделей, які будуть відрізнятися одна від іншої перш за все остаточною погрішністю (остаточною дисперсією), тобто будуть відтворювати реальний об'єкт з певною точністю.

Моделі бувають статичні  $y = f(x)$  і динамічні  $y = f(x, t)$ , де  $y$  – будь який вихідний показник процесу;  $x$  – фактор, що діє на вході процесу;  $t$  – поточний час.

Статичні моделі бувають:

– лінійні

$$y = a_0 + a_1x, \quad y = a_1\Delta x, \quad (1.1)$$

– нелінійні за фактором  $x$

$$y = a_0 + a_1x + a_{11}x^2, \quad (1.2)$$

– нелінійні за параметром, напр.,  $b$

$$y = ae^{-bx} \quad (1.3)$$

Частіше за все отримують багатомірні моделі, тобто  $y$  є функцією декількох факторів

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.4)$$

**Моделювання** – заміщення одного об'єкта іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою об'єкта-моделі. Моделювання – метод пізнання навколишнього світу, який можливо віднести до загальнонаукових методів, застосовуваним як на емпіричному, так і на теоретичному рівні пізнання.

Таким чином, базовим визначенням можна вважати таке: моделювання – це побудова (або вибір з вже існуючих) моделі, її вивчення і використання з метою отримання нових знань про досліджуваний об'єкт.

*Алгоритм моделювання* включає спочатку побудову особливої ідеальної конструкції, *змістовної моделі* (інші автори називають цей ідеальний об'єкт *концептуальна модель, уможлядна модель* або *передмодель*). При цьому фінальна математична конструкція називається *формальною моделлю* або просто математичною моделлю, отриманою в результаті формалізації даної змістовної моделі (передмоделі). Побудова змістовної моделі може проводитися за допомогою набору готових ідеалізацій, як у механіці, де ідеальні пружини, тверді тіла, ідеальні маятники, пружні середовища і т.п. дають готові структурні елементи для змістовного моделювання. У збагаченні корисних копалин змістовною перед моделлю може виступати згадана вище факторна і (або) феноменологічна модель технологічного процесу.

Теорія і практика моделювання оперує рядом понять: *об'єкт, процес, система, апріорна інформація, дослід, експеримент, фактор, область експериментування, цільова функція, похибка дослідів, обмеження та ін.*

*Об'єкт* (від лат. *objectum* – предмет) – все, на що спрямована діяльність людини. Будь-який об'єкт дослідження є нескінченно складним і характеризується нескінченним числом станів і параметрів.

*Процес* – послідовна зміна станів об'єкту в часі, а також певна сукупність ряду послідовних дій, спрямованих на досягнення певного результату.

*Система* – множина взаємопов'язаних елементів, відокремлена від середовища і яка взаємодіє з ним, як ціле. Система має конкретну структуру і цілком конкретне цільове призначення. Підсистемою називають складову частину системи, у якій можна виокремити інші складові.

*Елементом системи* називають найпростішу складову частину системи, яку умовно розглядають як неподільну.

*Зв'язком* називають співвідношення між компонентами системи, оснований на взаємозалежності і взаємообумовленості.

*Зовнішнє середовище* – множина існуючих поза системою (об'єктом) елементів будь-якої природи, що впливають на систему (об'єкт) або знаходяться під її (його) впливом.

*Гіпотеза* – наукове припущення, що висувається для пояснення будь-якого явища і потребує перевірки на досліді та теоретичного обґрунтування, для того щоб стати достовірною науковою теорією.

*Аналогія* – подібність, схожість у цілому відмінних предметів, явищ за певними властивостями, ознаками або відношеннями.

*Адекватність моделі* – збіг властивостей (функцій / параметрів / характеристик і т. п) моделі і відповідних властивостей модельованого об'єкта.

*Дослідом* називають однократне виконання усіх необхідних операцій для отримання одного експериментального результату. В результаті досліді отримують одне число або сукупність чисел, які характеризують декілька різнорідних даних [2, 3]. Дослід по суті – здійснення визначеного діяння на об'єкт і реєстрування одержаного результату. Дослід – це відтворення якого-небудь явища або спостереження за новим явищем у певних умовах з метою вивчення, дослідження.

*Експериментом* називають сукупність дослідів, об'єднаних однією системою їх постановки, взаємозв'язком результатів і способом їх обробки. В результаті експерименту отримують сукупність результатів, які допускають їхню сумісну обробку і зіставлення.

*Фактором (чинником)* називають умови, рушійну силу будь-якого процесу, явища. У нашому випадку фактор – незалежна змінна, яка може приймати в деякому інтервалі часу визначені значення. Звичайно, у процесах збагачення корисних копалин змінюють деякі конкретні величини, напр., масу навіски, витрати води і реагентів, тривалість досліді. Фактор звичайно позначають літерою  $x$ . Фактор повинний задовольняти визначеним вимогам:

– *первинність*, тобто як фактор доцільніше приймати таку величину, яка не є функцією декількох, у тому числі невідомих, величин. Вторинні фактори звичайно із достовірністю можна встановити на початку досліді, що й слід враховувати при інтерпретації результатів;

– *можливість управління* пов'язана з первинністю і полягає у тому, що фактор повинен встановлюватись на необхідному рівні, інакше план експерименту не буде реалізований у деякому досліді, в результаті чого робота не буде виконана або потребуватиме серйозного коректування;



– *операційність і вимірність* – це вимоги до однозначності (однотиповості) встановлення одного й того ж фактора на одному і тому ж рівні, а також до вказівок щодо послідовності операцій по максимально точному встановленню і контролю значення фактора.

– *незалежність* факторів один від одного;

– *безпека експерименту* вимагає передбачити і виключити до початку дослідів такі комбінації факторів, які можуть привести до вибуху, виділення токсичних компонентів, аварії на експериментальному пристрої.

*Область експериментування* – це сукупність запланованих значень факторів, яка охоплює деяку область гіперпростору. Усі результати і висновки на їх основі з відомою точністю належать саме до цієї області гіперпростору факторів. Інтерполяція значень і висновків усередині області експериментування є допустимою. Екстраполяція результатів і висновків за межами області експериментування можлива, але гарантувати визначену точність при цьому не можна.

*Цільова функція* – функція, що зв'язує мету (змінну  $y$ , що оптимізується) з керованими змінними. Цільова функція може містити:

– *безпосередньо виміряні величини*, напр., вихід  $y$  продукту і вміст  $\beta$  цінного компонента в ньому, у вигляді:

$$\gamma \rightarrow \gamma_{\max}; \beta = \beta_{\text{зад}}; \quad (1.5)$$

– *деякий обчислювальний показник*, який об'єднує декілька вихідних, безпосередньо вимірюваних показників досліду, напр., ефективність розділення  $E$ , що об'єднує вміст цінного компонента в концентраті  $\beta$  і у відходах  $\mathcal{D}$ ;

– *деякий обчислювальний показник*, який об'єднує як безпосередньо вимірювані показники  $\beta$  і  $\mathcal{D}$ , так і фактори напр., вміст цінного компонента у вихідній (перероблюваній) руді  $\alpha$ . Тоді для вилучення  $\varepsilon$  цільова функція набуває вигляду:

$$\begin{cases} \varepsilon = (\alpha - \mathcal{D})\beta / (\beta - \mathcal{D})\alpha \rightarrow \max \\ \beta = \beta_{\text{зад}} \end{cases} \quad (1.6)$$

Важливою особливістю цільової функції є неможливість забезпечення в рамках одного процесу, при одному і тому ж наборі факторів управління, максимального (мінімального) значення двох і більше показників.

Формулюючи оптимізуючий показник слід виділити і додати до нього усі необхідні обмеження і отримати тим самим доцільну цільову функцію.

*Обмеження* – це будь які умови, які накладаються на можливість зміни факторів, вихідних показників, вхідних збуджуючих впливів, ресурсів і часу. Обмеження бувають принципіві (умови фізичного здійснення), технічні, екологічні, економічні та умови техніки безпеки.

*Регресія* – форма зв'язку між випадковими величинами. Закон зміни математичного очікування однієї випадкової величини залежно від значень іншої. Розрізняють прямолінійну, криволінійну, ортогональну, параболічну та ін. регресії, а також лінію і поверхню регресії.

*Локальний екстремум* – екстремум в деякому довільно малому околі (області) гіперпростору.

*Глобальний екстремум* – екстремум в усій розглядуваній області гіперпростору. Передбачається, що глобальний екстремум один, а локальних екстремумів може бути багато.

*Апріорна інформація* – це інформація, якою володіє дослідник до початку експерименту. Апріорна інформація дозволяє: сформулювати цільову функцію; вибрати номенклатуру факторів, центр експерименту (номінальні або початкові значення факторів), інтервали варіювання; методично правильно виконати збір інформації.

*Точкові оцінки* – числа, які використовують для характеристики результатів дослідів. При цьому використовують не тільки безпосередньо виміряні дані, але й при необхідності деякі розраховують. Найважливіші з них:

– *середнє арифметичне*, або середнє, яке позначається рисою над літерою:

$$\bar{y} = \sum_{1}^{n} y_i / n, \quad (1.7)$$

де  $y_i$  – результат, отриманий в  $i$ -тому досліді;  $n$  – число дослідів;  $\bar{y}$  – середнє арифметичне результатів  $n$  дослідів;

– *середнє квадратичне відхилення*

$$S_y = \sqrt{[\sum_{1}^{n} (y_i - \bar{y})^2] / (n - 1)}; \quad (1.8)$$

– *дисперсія* – квадрат середнього квадратичного відхилення

$$S_y^2 = [\sum_{1}^{n} (y_i - \bar{y})^2] / (n - 1). \quad (1.9)$$

*Похибка дослідів* – це відхилення у результатах, які породжені усілякими відхиленнями умов дослідів від заданих.

*Випадкова похибка* – складова загальної похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином (як за знаком, так і за величиною) під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини. Випадкові похибки з'являються внаслідок невеликих, але численних відхилень при вико-

нанні досліду (їх причини – конструктивні та технологічні недосконало-сті вузлів та деталей приладів; випадкові коливання зовнішніх впли-вів — температури, вологості повітря, атмосферного тиску, напружено-сті зовнішніх електричних та магнітних полів тощо; нестабільність жи-влення електронних приладів; суб'єктивні помилки оператора; вібрації; теплові шуми в електронних приладах; просторова неоднорідність та часова нестабільність об'єкта вимірювання). Ці похибки обчислюють за формулою:  $\epsilon = \Delta - M(\Delta)$ , де  $\Delta$  — похибка вимірювання,  $M(\Delta)$  — ма-тематичне сподівання похибки.

*Систематична похибка* – складова загальної похибки вимірюван-ня, яка залишається постійною або закономірно змінюється під час по-вторних вимірювань однієї і тієї ж величини. Причинами виникнення систематичних похибок є: відхилення параметрів реальних засобів ви-мірювань від розрахункових значень, передбачених схемою; невіриво-важеність деяких деталей засобів вимірювань відносно їх осі обертання; пружна деформація деталей засобів вимірювань, які мають малу жорст-кість, що призводить до додаткових переміщень; похибки градуювання чи невеликий зсув шкали приладу; неточність мір фізичних величин; старіння матеріалів, із яких виготовлені засоби вимірювань; відхилення значень впливних величин (температури, вологості повітря, напружено-сті зовнішніх електричних та магнітних полів тощо) від їх значень під час градуювання засобів вимірювання. Виявити наявність систематич-ної похибки можна тільки порівнянням результату досліду з еталонним, тобто результатом, який не містить систематичної похибки. Більшість систематичних похибок може бути виявлена та оцінена шляхом теоре-тичного аналізу властивостей об'єкта, умов вимірювання, особливостей методу, характеристик застосовуваних засобів вимірювань тощо. Після встановлення наявності систематичної похибки визначають причину її виникнення і усувають цю причину. Якщо причину встановити або усу-нути не можна, вводять поправки, що враховують вплив цієї системати-чної похибки, яку не можна усунути.

*Число ступенів свободи  $f$*  – кількість незалежних значень резуль-татів дослідів, які використовуються для обчислення коефіцієнтів моде-лі, похибки відтворення, остаточної дисперсії і т.п. Чисельно  $f$  дорівнює різниці між кількістю даних, що є, і обчисленими за цими даними пока-зниками.

*Похибка відтворення* – це випадкова похибка, яка звичайно обчи-слюється у вигляді середнього квадратичного відхилення від середнього паралельних дослідів

$$S_{By} = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 \right] / (k - 1)}, \quad (1.10)$$

де  $k$  – число паралельних дослідів;  $\bar{y}$  – середнє значення результатів  $k$  паралельних дослідів (дослідів виконаних при одних і тих же значеннях факторів);  $y_i$  – результат  $i$ -того досліду;  $S_{By_i}$  – похибка відтворення результатів будь якого окремого досліду.

Похибка відтворення  $S_{By}$  середнього значення результату  $k$  дослідів буде менше і визначається за формулою

$$S_{By} = S_{By_i} / \sqrt{k}. \quad (1.11)$$

Ця властивість зниження похибки широко використовується для підвищення точності результатів експерименту.

Звичайно припускають, що похибка відтворення є результатом деякої неточності виконання усіх операцій досліду, у зв'язку з чим вона повинна бути розподілена за нормальним законом. Відповідно до нормального закону вважають, що в межах  $\pm S_{By}$  міститься 68 % похибки усіх дослідів; в межах  $\pm 2S_{By}$  – 95,5 % і в межах  $\pm 3S_{By}$  – 99,7 % усіх похибок. При обмеженій кількості дослідів використовують розподіл Ст'юдента, що враховує можливі похибки у визначенні  $S_{By_i}$  при малому числі даних. Таким чином, якщо задана довірча імовірність  $p$  (%) і відоме число ступенів свободи обчисленої похибки відтворення (звичайно  $f_B = k - 1$ ), можна знайти довірчі інтервали для похибки результатів.

*Довірчі інтервали* похибки результатів – це діапазон значень, в якому з прийнятою довірчою імовірністю може знаходитися конкретне значення похибки окремого досліду (або інших характеристик дослідів, напр., середніх результатів паралельних дослідів),

$$\pm \Delta y_i = \pm t S_{By_i}, \quad (1.12)$$

де  $\pm \Delta y_i$  – граничні значення похибок (максимальні позитивні і негативні) або довірчий інтервал;  $t$  – критерій Ст'юдента.

Із збільшенням довірчої імовірності довірчий інтервал розширюється, тобто при більшій довірчій імовірності гарантувати появу дослідних результатів можна тільки в більш широкому діапазоні.

*Промахи* – це випадкові похибки, які перевищують довірчі інтервали. Промахи виникають внаслідок грубого порушення умов досліду або особливо несприятливими обставинами. Як правило, їх відкидають, а дослід, якщо це можливо повторюють.

Промахи можуть бути як у гірший, так і у кращий бік, тому при появі дуже гарного результату, який розглядається як промах, необхідно проаналізувати умови його появи. В такому випадку промах може дати цінну інформацію для покращення результатів роботи.

Для виключення промахів з великої вибірки можна користуватися правилом  $2\sigma$  або  $3\sigma$ . Для промаху  $x^*$  розраховується абсолютне значення різниці  $|x^* - x'|$ . При довірчій імовірності  $P = 0,95$   $x^*$  відкидається, якщо  $|x^* - x'| > 2\sigma$ , а при  $P = 0,997$ , якщо  $|x^* - x'| > 3\sigma$ .

*Похибка зведеного показника* виконується при необхідності визначення похибки відтворюваності будь якого обчисленого (зведеного) показника вигляду  $z = f(y, x)$  з використанням формули:

$$S_{Bz}^2 = (\partial z / \partial y)_0^2 S_{By}^2 + (\partial z / \partial x)_0^2 S_{Bx}^2. \quad (1.13)$$

Вважають, що похибки  $S_{By}^2$  і  $S_{Bx}^2$  не залежать одна від одної. Нульові індекси при похідних означають, що конкретні чисельні значення похідних знаходяться при деяких номінальних значеннях  $x_0$  і  $y_0$ .

Для похибок відтворюваності, що спричиняються випадково, звичайно припускається, що коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Якщо необхідно розглянути відхилення показника  $z$ , які спричиняються відхиленнями його складових факторів  $x$  і  $y$ , то слід використовувати формулу:

$$S_z^2 = (\partial z / \partial y)_0^2 S_y^2 + (\partial z / \partial x)_0^2 S_x^2 + 2(\partial z / \partial y)_0 (\partial z / \partial x)_0 S_y S_x r_{x/y}, \quad (1.14)$$

де  $r_{x/y}$  – коефіцієнт кореляції між  $x$  і  $y$ .

*Встановлення різниці.* В результаті обробки даних експерименту робляться висновки, які формально зводяться до відповіді на одне з трьох питань:

- чи значимо відрізняються два (або більше) результати?
  - чи значимо відрізняються дві (або більше) похибки відтворюваності однорідних результатів?
  - чи значимо відрізняються кількості спостережених величин?
- Відповіді на ці питання отримують в результаті наступних дій:
- визначають розрахункове значення спеціального критерію  $K_p$ ;
  - задаються довірчою імовірністю  $p$  висновку;
  - знаходять у відповідних таблицях значення критерію  $K_T$  при заданій  $p$  і знайдених ступенях свободи  $f$ ;
  - порівнюють  $K_p$  і  $K_T$ ;
  - якщо  $K_p > K_T$  стверджують, що існуюча різниця між результатами не випадкова, тобто значима.

Для підтвердження значимості різниці звичайно задаються високою довірчою імовірністю більше 90 % (звичайно  $p = 95$  %). Якщо з прийнятою імовірністю  $p$  різниці не встановлено, стверджувати що її взагалі не існує не можна, тобто зворотний висновок невірний. Якщо

необхідно встановити ідентичність (відсутність різниці) показників, задаються довірчою імовірністю менше 10 % (звичайно  $p = 5 \%$ ).

## 1.2. Основна мета, принципи та етапи моделювання технологічних процесів

Створюючи модель об'єкта, дослідник пізнає об'єкт, тобто виокремлює його з навколишнього середовища і будує його формальний опис.

Моделювання виконують з метою:

- опису об'єкта;
- пояснення процесів, які відбуваються в об'єкті;
- прогнозування поведінки і властивостей об'єкта при різних зовнішніх впливах.

Модель об'єкта допомагає зрозуміти, як влаштований конкретний досліджуваний об'єкт, які його структура, внутрішні зв'язки, основні властивості, закони розвитку, саморозвитку і взаємодії з навколишнім середовищем. Ще одна мета – прогнозування поведінки і властивостей об'єкта – є частиною стратегічної мети – управляти об'єктом, визначаючи по моделі оптимальні керуючі впливи при заданих цілях і критеріях. Модель потрібна і для того, щоб прогнозувати наслідки різних впливів на об'єкт.

В основі моделювання лежить *теорія подібності*, згідно з якою абсолютна подібність можлива лише при заміні об'єкта іншим точно таким же. Цю ідею добре висловили А. Розенблют і Н. Вінер, коли сказали, що «найкращою моделлю kota є інший кіт, а ще краще – той же самий кіт». При моделюванні абсолютна подібність ніколи не досягається. Будь-яка модель не тотожна об'єкту-оригіналу і не є повною, так як при її побудові дослідник враховував тільки ті особливості об'єкта, які вважав найбільш важливими для вирішення конкретної задачі.

Реальна користь від моделювання може бути отримана при виконанні наступних умов:

- модель повинна бути адекватною оригіналу в тому сенсі, що повинна з достатньою точністю відображати основні характеристики оригіналу, які цікавлять дослідника;
- модель повинна усувати проблеми, пов'язані з фізичними вимірюваннями якихось сигналів або характеристик оригіналу.

Моделювання базується на таких основоположних принципах:

1. **Принцип інформаційної достатності** – при повній відсутності інформації про об'єкт побудова його моделі неможлива. Існує деякий рівень апіорної інформації про об'єкт, при досягненні якого може бути

побудована адекватна модель. При наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу.

2. **Принцип здійсненності** – створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження з імовірністю, яка суттєво відрізняється від нуля.

3. **Принцип множинності моделей** – створювана модель повинна відображати в першу чергу ті властивості реального об'єкта (системи), які цікавлять дослідника. Для повного дослідження об'єкту необхідна досить велика кількість моделей, що відображають досліджуваний об'єкт з різних сторін і з різним ступенем його деталізації.

4. **Принцип агрегування** – у більшості досліджень систему доцільно представити як сукупність підсистем, для опису яких виявляються придатними стандартні схеми.

5. **Принцип параметризації** – модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

Моделювання технологічних процесів – поетапний і циклічний процес. Виділяють чотири основних етапи моделювання.

*Перший етап* побудови моделі припускає наявність деяких знань про об'єкт. Пізнавальні можливості моделі обумовлюються тим, що модель відображає (відтворює, імітує) які-небудь істотні риси об'єкта-оригіналу. Причому, вивчення одних сторін модельованого об'єкта здійснюється ціною відмови від дослідження інших сторін. Тому будь-яка модель заміщає оригінал лише в строго обмеженому сенсі. Для одного об'єкта може бути побудовано декілька «спеціалізованих» моделей, які концентрують увагу на певних сторонах досліджуваного об'єкта або ж характеризують об'єкт з різним ступенем деталізації.

*На другому етапі* модель виступає як самостійний об'єкт дослідження. Однією з форм такого дослідження є проведення «модельних» експериментів, при яких свідомо змінюються умови функціонування моделі і систематизуються дані про її «поведінку». Кінцевим результатом цього етапу є сукупність знань про одержані різновиди моделі.

*На третьому етапі* здійснюється перенесення знань з моделі на оригінал – формування сукупності знань про об'єкт. Одночасно відбувається перехід з «мови» моделі на «мову» оригіналу. Процес перенесення знань проводиться за певними правилами. Знання про моделі повинні бути скориговані з урахуванням тих властивостей об'єкта-оригіналу, які не знайшли відображення або були змінені при побудові моделі.

*Четвертий етап* – практична перевірка отриманих за допомогою моделей знань та їх використання для побудови узагальнюючої теорії об'єкта, його перетворення або управління ним.

Циклічність процесу моделювання може проявлятися в тому, що за першим чотириетапним циклом може реалізовуватися другий, третій і т. д. При цьому знання про досліджуваний об'єкт розширюються і уточнюються, а вихідна модель поступово вдосконалюється. Недоліки, виявлені після першого циклу моделювання, зумовлені неповним знанням об'єкта або помилками в побудові моделі, можна виправити в наступних циклах.

### **1.3. Особливості моделювання процесів збагаченні корисних копалин**

Збагачення корисних копалин характеризується декількома особливостями, які суттєво впливають на моделювання технологічних процесів.

По-перше, вхідні параметри описують, як правило, сипкі багатокомпонентні продукти різної крупності. При цьому виникає специфічна задача визначення (оцінки) розкриття і відкриття корисної компоненти в процесі дроблення та подрібнення.

По-друге, опрацьовано різні методи визначення збагачуваності корисної копалини гравітаційними, флотаційними, магнітними тощо та комбінованими способами. Під *збагачуваністю* розуміють гранично можливу точність розділення корисної копалини на відповідні продукти, яка не залежить від ефективності роботи збагачувальної установки. Збагачуваність є технологічною оцінкою можливого ступеня вилучення і концентрації мінеральних компонентів при збагаченні корисних копалин і залежить від їх мінерального складу, текстури і структури.

По-третє, для різних технологічних процесів збагачення визначають сепараційні характеристики операції або схеми – функції, що показують вилучення елементарних фракцій у концентрат в залежності від їх фізичних (хімічних) властивостей. Такі характеристики по суті вже є своєрідними моделями цих технологічних процесів, операцій чи схем.

*Основні етапи* дослідження корисних копалин і моделювання процесів збагачення, як правило, такі:

- збір апріорної інформації про сировину, пошук аналогів,
- розробка схеми обробки проб і дослідження властивостей сировини (гранулометричний, фракційний, мінералогічний і хімічний склад, зольність, вологість, міцність руди, гідрофільно-гідрофобні властивості поверхні компонент та ін.),
- аналіз побудованих кривих збагачуваності,
- пошук можливих методів збагачення і розробка технологічної схеми (за даними виконаних аналізів і апріорною інформацією),



- вибір критеріїв ефективності прийнятих процесів збагачення,
- розробка плану експериментальних робіт,
- виконання експериментів, обробка отриманих даних і одержання моделей технологічних процесів збагачення,
- розробка з використанням отриманих моделей раціональних технологічних режимів процесів,
- експериментальна перевірка і коректування розробленої схеми і режимів на діючій фабриці, розробка вихідних даних для економічного аналізу переробки досліджуваної сировини.

Складність моделювання вихідної мінеральної сировини і самих процесів збагачення обумовлена їх багатофакторністю, ймовірним характером більшості технологічних процесів, постійною неконтрольованою зміною властивостей сировини, наявністю в сировині частинок з проміжними властивостями (зростки), недосконалістю розділових процесів і т.д.

Випадковий характер причин, що впливають на процес, їхня масовість спричиняють необхідність використання для оцінки розділення сировини ймовірнісні характеристики. Усі технологічні показники збагачувальних процесів є, таким чином, не чим іншим, як інтегральними або усередненими характеристиками. Тому процеси збагачення найчастіше можуть адекватно описуватися тільки моделями зі статистично визначеними параметрами. З цієї причини більшість досліджень у збагаченні проводяться на основі планування експериментів. Уперше у збагаченні цей метод застосував А.Доренфельд, який указував, що на збагачувальній фабриці є тільки одна постійна характеристика – мінливість факторів – і тільки статистичні методи дозволяють упорядкувати результати цього безладдя. За допомогою статистичної обробки можна оцінити ймовірність визначеного значення факторів і результатів збагачення. Тому статистичні методи моделювання процесів мають особливе значення в галузі збагачення корисних копалин.

Різноманіття технологій збагачення корисних копалин обумовлює необхідність обробки при моделюванні процесів таких основних типів числової інформації:

- *характеристики* вхідних матеріальних та енергетичних потоків сировини, реагентів і т.п., напр., густина мінералів, реагентів, твердість мінералів, їх гранулометричний і фракційний склад тощо,
- *характеристики устаткування* – питома продуктивність, робоча площа (об'єм), установлена потужність електродвигунів і т.п.,
- *параметри процесу* – густина і в'язкість пульпи, розпушеність постелі, витрата реагентів, температура і т.п.,

– *вміст компонентів* у сировині, промпродуктах, концентраті і відходах,

– *технологічні показники* – вихід продуктів, вилучення, якість кінцевих продуктів, коефіцієнт збагачення, селективності та ін.,

– *економічні показники* – собівартість продукції, рентабельність виробництва, строк окупності, основні витрати, енергоємність процесу та ін.,

– *екологічні показники* – вміст шкідливих викидів у відходах, скидній воді, оборотній воді, викидах у атмосферу тощо.

До апріорної (первинної) інформації, яку вивчають при моделюванні технологічних процесів, відносять, зокрема, дані про тип, марку сировини, її речовинний склад, існуючі способи збагачення подібної сировини, характеристики машин тощо. До апріорних даних зараховують також увесь попередній досвід і технологічні знання, що дозволяють до початку експерименту вибрати відповідні варіанти схем і режимів збагачення. Іншими словами, апріорна інформація дозволяє попередньо вибрати раціональну *експериментальну область*.

Після збору апріорної інформації про досліджувану сировину й обґрунтування аналогів (сировина – технологія) проводять *попередні* дослідження, що включають мінералогічний, фракційний, гранулометричний аналізи, а також деякі визначення фізичних властивостей матеріалів, лабораторні, стендові технологічні експерименти по збагаченню мінеральної сировини. Результати цих досліджень дозволяють уточнити раціональну *експериментальну область*, створити факторні та феноменологічні моделі процесів, попередньо рейтингувати фактори за значимістю, виділивши групи найбільш і найменш значимих.

Крім того, збір апріорної інформації дозволяє прийняти рішення про застосування того чи іншого методу моделювання процесів збагачення або вибрати декілька методів моделювання.

## 2. ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ

### 2.1. Теорія подібності

Теорія подібності дає можливість вивчати складні процеси і теоретично, й експериментально. Але, тільки чисте експериментування, без теоретичних узагальнень, не дозволяє розповсюдити висновки, отримані таким шляхом, на інші недосліджені випадки. З іншого боку – тільки теоретичний метод не може охопити усього різноманіття умов фізичного процесу і, крім того, дуже часто приводить до складних математичних рівнянь, які важко розв'язати.

Труднощі, що зустрічаються при вирішенні багатьох задач за допомогою диференціальних рівнянь з частковими похідними, примусили шукати необхідні рішення експериментальним шляхом [9, 10].

За дослідними даними, які отримані на одному апараті, робились приблизні висновки про можливу роботу іншого, – такого ж, але більшого за габаритами апарата. Це й привело до ідеї моделювання процесів і апаратів на основі теорії подібності.

Теорія подібності – наука про подібність явищ.

Основні технологічні процеси збагачення корисних копалин протікають, головним чином, внаслідок руху в'язких (стисливих і нестисливих) рідин, а також в результаті теплообміну і дифузії, внаслідок чого при їхньому моделюванні особливе значення мають гідродинамічна, теплова і дифузійна подібність.

Тому перш ніж перейти до розгляду теорії подібності і методу аналізу розмірностей необхідно розглянути рівняння гідродинаміки, теплообміну і дифузії.

#### 2.1.1. Рух в'язкої рідини

Розглянемо несталий рух рідини, при якому швидкості і тиски в кожній точці потоку змінюються з часом [9, 10, 11].

Виділимо в потоці рухомої рідини елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$  (рис. 2.1).

Внаслідок нерозривності потоку, увесь об'єм виділеного паралелепіпеда буде постійно заповнений рухомою рідиною. При цьому маса стислої рідини, яка надходить і виходить з паралелепіпеду, у загальному випадку буде різною, що обумовлено непостійністю величин швидкості  $w$  і густини  $\rho$ .

Через ліву грань  $A$ , паралельну площині  $YOZ$ , рідина рухається під впливом складової швидкості  $v_x$ , паралельної вісі  $OX$ . Будемо вважати

цю складову, а також густину  $\rho$  постійними в усіх точках цієї грані і рівними їхнім значенням у точці  $A$ :

$$v_x = f_1(x, y, z, t),$$

$$\rho = f_2(x, y, z, t),$$

де  $t$  – час.

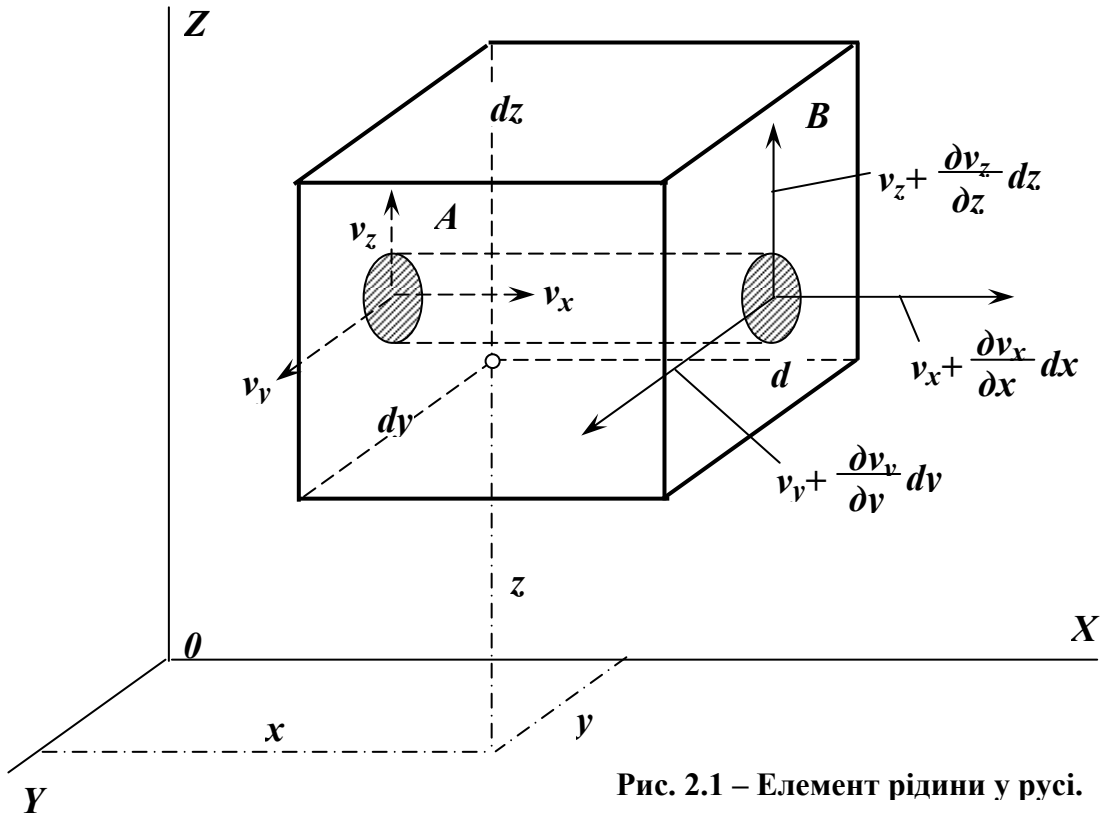


Рис. 2.1 – Елемент рідини у русі.

У той же момент часу для протилежної правої грані  $B$  ці величини будуть:

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx; \quad \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx.$$

Через площадку  $dydz$  лівої грані за одиницю часу витікає кількість рідини (в одиницях маси):

$$dM_{x1} = \rho v_x dydz.$$

Маса рідини, що витікає через протилежну грань за цей час буде:

$$dM_{x2} = \left[ \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \right] dydz.$$

Таким чином, приріст маси рідини за одиницю часу у паралелепіпеді, є причиною різниці значень  $v_x$  і  $\rho$  на лівій і правій його гранях, він дорівнює:

$$\Delta M_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dy dz.$$

Аналогічно отримуємо для напрямків перпендикулярних осям  $OY$  і  $OZ$ :

$$\Delta M_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) dx dy dz;$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dx dy dz.$$

Повний приріст маси рідини в паралелепіпеді за одиницю часу буде:

$$\Delta M = \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] dx dy dz. \quad (2.1)$$

При нерозривності потоку зміна маси в об'ємі  $dx dy dz$  спричиняється зміною густини рідини у цьому об'ємі, тобто:

$$\Delta M = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz. \quad (2.2)$$

Після прирівнювання рівнянь (2.1) і (2.2) і ділення на  $dx dy dz$  отримуємо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (2.3)$$

Отримане рівняння називається рівнянням нерозривності або суцільності.

У окремих випадках рівняння суцільності приймає такий вигляд:  
– для краплинної рідини ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

або у векторній формі

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Тобто, при нерозривному русі рідини об'єм її, який втікає у деяку обмежену частину простору, дорівнює об'єму, який витікає з нього за той же час;

– для однорідного газу [ $\rho = f_2(t)$ ]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

або у векторній формі

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

– для сталого руху  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

або у векторній формі

$$\operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0.$$

З рівняння (2.3) за умови  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$  знаходимо, що для даного простору при сталому русі рідини не змінює своєї маси, тобто маси рідини, яка втікає і витікає, рівні між собою.

В будь якій точці рухомого потоку повинна мати місце рівновага сил, які обумовлюють рух. Такими силами є сила ваги, сили тиску (перепад тиску) і сили тертя. Для одержання рівняння руху виділимо у рідині, яка знаходиться в русі, елементарний паралелепіпед об'ємом  $dW$  з ребрами  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$ .

Знаходимо проєкції на вісь  $OX$  (рис. 2.2) сили ваги, сили тиску і сили тертя, які діють на цей елементарний об'єм.

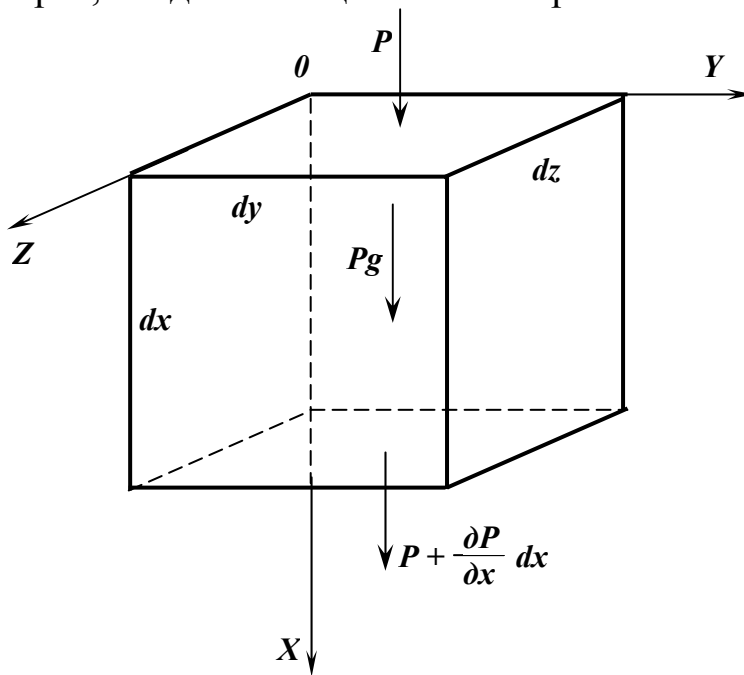


Рис. 2.2 – Сили, які діють на елементарний об'єм рідини.

Для сили ваги, яка прикладена в центрі ваги елемента  $dW$ , маємо:

$$g_x \rho dW = g_x \rho dx dy dz, \quad (2.4)$$

де  $g_x$  – проєкція прискорення сили ваги ( $m/c^2$ ) на  $OX$ .

Позначимо питомий тиск рідини  $p$   $kg/m^2$ , тоді сила тиску рідини на верхню грань елемента буде дорівнювати  $p dy dz$ , а на нижню:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz,$$

де  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$  – зміна гідростатичного тиску в напрямку осі  $OX$  по всій довжині ребра  $dx$ ; ця сила діє проти напрямку руху рідини.

Проєкція рівнодіючої сил тиску буде:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (2.5)$$

Дію сили тертя розглянемо спочатку на прикладі руху плоского ламінарного потоку, в якому проєкція швидкості  $v_x$  залежить тільки від  $y$ . У цьому випадку сила тертя виникає тільки на бокових гранях елемента.

Напрямки і величина сил тертя показані на рис. 2.3.

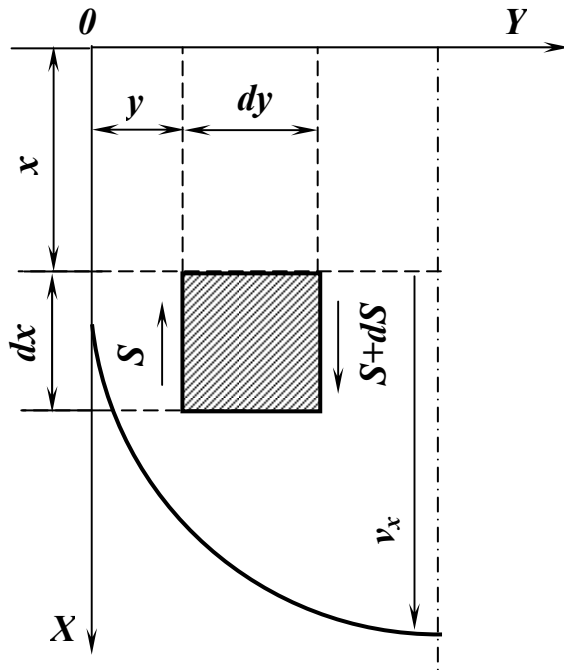


Рис. 2.3 – Напрямки і величина сил тертя.

У перетині  $y$  сила тертя дорівнює  $-Sdx dz$  і направлена проти руху, тому що швидкість рідини тут менше, ніж у самому елементі. В перетині  $y+dy$  сила тертя дорівнює

$$\left( S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz$$

і направлена у бік руху, оскільки у цьому випадку швидкість рідини більша, ніж у самому елементі.

Проекція рівнодіючих цих сил визначається як:

$$\left( S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz - S dx dz = \frac{dS}{dy} dx dy dz, \quad (2.6)$$

де  $S$  – сила тертя на одиницю поверхні.

Але за законом Стокса

$$S = \mu \frac{dw_x}{dy}, \quad (2.7)$$

де  $\mu$  – в'язкість середовища.

Після сумісного рішення рівнянь (2.6) і (2.7) маємо:

$$\frac{dS}{dy} dW = \mu \frac{d^2 v_x}{dy} dW.$$



У загальному випадку, коли швидкість  $v_x$  змінюється в усіх трьох напрямках, проекція сили тертя на вісь  $OX$  буде:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dW = \mu \nabla^2 v_x dW, \quad (2.8)$$

де символ  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа, який позначає суму

других часткових похідних від проекції швидкості на вісь  $OX$ .

Сумуючи проекції (2.4), (2.5) і (2.8), отримуємо проекцію рівнодіючої усіх сил, прикладених до об'єму  $dW$ , на вісь  $OX$ :

$$\left[ \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] dW. \quad (2.9)$$

Ця рівнодіюча дорівнює добутку маси елемента  $dW$  на його прискорення  $\frac{Dv_x}{dt}$ :

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} dW = \rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] dW. \quad (2.10)$$

Символ  $\frac{Dv_x}{dt}$  називається повною або субстанціональною похідною  $v_x$  по  $t$ . Цю похідну слід розуміти таким чином: швидкість зміни  $v_x$  в даній точці характеризується частковою (або локальною) похідною  $v_x$  по  $t$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(M, t + \Delta t) - v_x(M, t)}{\Delta t}, \quad (2.11)$$

де  $M$  позначає будь яку постійну геометричну точку у просторі.

Щоб охарактеризувати зміну  $v_x$  для даної частинки рідини за проміжок часу  $\Delta t$ , слід за приріст  $v_x$  прийняти різницю між значеннями функції  $v_x$  в момент  $t + \Delta t$  в тому положенні частинок  $M'$ , в якому вона знаходиться у той момент, і значенням функції  $v_x$  в момент  $t$  у початковому положенні її  $M$ . Межа відношення цього прирощення до  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  й називається субстанціональною похідною.

Зв'язок між частковою і повною похідними полягає у тому, що, коли складається повна похідна від функції  $v(x, Y, Z, t)$  вважають  $x, y, z$  функціями від  $t$ , тому що частинка, яка мала в момент  $t$  координати  $x, y, z$ , за час  $\Delta t$  переміститься по деякій кривій.

З використанням рівнянь (2.9) і (2.10) отримуємо:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (2.12)$$

Аналогічно отримуємо рівняння для рівнодіючих проєкцій сил на вісі  $OY$  і  $OZ$ .

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.14)$$

Рівняння (2.12), (2.13) і (2.14) утворюють систему диференціальних рівнянь руху нестисливої рідини Нав'є-Стокса; ця система справедлива як для ламінарного, так і для турбулентного руху.

Якщо в'язкість  $\mu$  постійна, рівняння (2.12), (2.13) і (2.14) можна звести до одного векторного:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathcal{G} \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.15)$$

де  $\mathcal{G} = \frac{\mu}{\rho}$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості, м<sup>2</sup>/с.

Рівняння Нав'є-Стокса можуть бути отримані також і для стисливих рідин. Рівняння відносно вісі  $OX$  має такий вигляд:

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \quad (2.16)$$

Такі ж рівняння мають місце у напрямках  $OY$  і  $OZ$ .

До цих рівнянь додаємо ще й рівняння теплового балансу. Тепло, яке надходить у одиничний об'єм при сталому стані, дорівнює такій же кількості тепла, що видаляється з цього ж об'єму. До даного об'єму, так як і в рівнянні (2.12), тепло підводиться внаслідок теплопровідності і за допомогою матеріальних частинок, які протікають через одиничний об'єм при одночасному його охолодженні. Якщо температура  $\tau$  цього об'єму не змінюється з часом, то спільна кількість підведеного тепла

повинна дорівнюватися нулю, і якщо врахувати наявність джерела тепла з інтенсивністю  $q_i$  (ккал/м<sup>3</sup>), то отримуємо таке рівняння:

$$c\rho\left(v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right) + q_i, \quad (2.17)$$

де  $c$  – теплоємність,  $\rho$  – густина,  $\lambda$  – теплопровідність.

У лівій частині рівняння (2.17) представлена кількість тепла в одиничному об'ємі, яке використовується для нагрівання на  $d\tau$  частинок, що протікають через паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Це тепло покривається за рахунок підводу тепла з оточуючого середовища (перший член правої частини рівняння) і за рахунок джерела тепла  $q_i$ . Після ділення обох частин рівняння на  $c\rho$  отримаємо:

$$v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right) + \frac{q_i}{c\rho} \quad (2.18)$$

або у векторній формі

$$(\vec{v}, \text{grad} \tau) = a\nabla^2 \tau + \frac{q_i}{c\rho}. \quad (2.19)$$

Система з п'яти диференціальних рівнянь (2.3), (2.12), (2.13), (2.14) і (2.18) з частковими похідними сумісно з межовими і початковими умовами повністю описує процес руху в'язкої рідини.

Поблизу стінок потік є ламінарним, відповідно, передача тепла відбувається в результаті теплопровідності:

$$dq = -\lambda\left(\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)_F dF, \quad (2.20)$$

де  $dF$  – поверхня теплообміну;  $n$  – нормаль до  $dF$ ;  $\left(\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)_F$  – температурний градієнт рідини безпосередньо біля стінки.

Кількість тепла, що передається звичайно виражають за допомогою коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha$  (ккал/м<sup>2</sup>·год·град), з використанням формули Ньютона:

$$Q = \alpha(\tau_F - \tau_0)F \tau, \text{ ккал} \quad (2.21)$$

або

$$\frac{Q}{t} = q = \alpha(\tau_F - \tau_0)F, \text{ ккал/год.} \quad (2.22)$$

Незважаючи на те, що коефіцієнт тепловіддачі не входить у рівняння (1.3) – (2.20), він часто застосовується у теплових розрахунках. Після диференціювання рівняння (2.22) отримуємо:

$$dq = \alpha(\tau_F - \tau_0)dF = -\lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F dF, \quad (2.23)$$

де  $\tau_F$  – температура стінки;  $\tau_0$  – температура рідини.

Таким чином, маємо:

$$\alpha = -\frac{\lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F}{\tau_F - \tau_0}. \quad (2.24)$$

Ця залежність дозволяє коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  ввести у систему диференціальних рівнянь для конвективної теплопередачі. Оскільки температурний градієнт  $\left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F$  у формулі (2.24) залежить від температур стінки і рідини і від товщини пограничного шару, тобто від характеру (режиму) руху, то, відповідно, й коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  залежить від усіх величин, які містяться в рівняннях (2.3) – (2.20).

### 2.1.2. Умови застосування теорії подібності

У випадку *геометричної подібності* двох фігур відношення усіх відповідних розмірів цих фігур постійне. Геометричні фігури подібні між собою, якщо їхні відповідні кути рівні, а сторони пропорційні, тобто:

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{l'_3}{l_3} = A, \quad (2.25)$$

де  $A$  – коефіцієнт пропорційності, або константа подібності.

Таким чином, умова (2.25) є математичним формулюванням геометричної подібності двох фігур (моделі і виробничого апарата).

У двох кінематичних схемах буде мати місце *кінематична подібність*, якщо їхні схожі частинки переміщуються по геометрично подібним шляхам в проміжки часу, що відрізняються постійним множником, тобто у цьому випадку можна говорити про подібність руху, наприклад

двох потоків рідини. При *динамічній подібності* багатокутники сил, побудовані для пари схожих частинок, розташованих подібним чином у просторі і часі, повинні бути подібні, тобто розрізнятися тільки масштабом. Поняття подібності можна також поширити на теплові і фізико-хімічні процеси.

З використанням цього поняття можна вирішити багато практично важливих задач. Але для використання понять про подібність необхідно знайти умови подібності явищ, які розглядаються. При цьому виникають такі питання:

- чи можна відомі експериментальні дані, наприклад, такі, що пов'язані з температурним полем, отримані шляхом вимірювання на одному апараті (на моделі), перенести на інший апарат (виробничий);
- які повинні бути умови, що допускають таке перенесення або перерахунок;
- що слід зробити, щоб отримані під час експерименту на моделі дані були правильно застосовані для виробничого апарата.

Перенесення експериментальних даних з моделі на виробничий апарат можливе у таких випадках, де існує подібність обох процесів. Ця подібність не повинна обмежуватися тільки геометричними формами; усі інші величини, які впливають на процес, повинні в моделі і у промисловому апараті знаходитися у визначених відношеннях.

Визначення умов подібності здійснюється таким чином: порівнюються такі два випадки, при яких потоки для усіх величин, що зустрічаються в рівняннях (2.3) – (2.24), подібні.

1. Такими є координати  $x, y, z$  промислового апарата, які відносно  $x', y', z'$  моделі можуть бути рівномірно збільшені. Отже порівнюються потоки, які проходять через геометрично подібні тіла або навколо них. Тоді усі відрізки потоку  $l_1, l_2, l_3 \dots$  виробничого апарата, які відповідають  $l'_1, l'_2, l'_3 \dots$  моделі, будуть збільшені у визначеній пропорції:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \dots = \frac{l'}{l} = A_l. \quad (2.26)$$

Кути між відповідними відрізками залишаються незмінними.

2. Поле швидкостей у промисловому апараті і моделі повинно бути подібним. У відповідних точках з координатами  $x', y', z'$  і  $x, y, z$  відношення

$$\frac{v'}{v} = A_v \quad (2.27)$$

повинно бути однаковим, і крім того, напрямок відповідних швидкостей промислового апарата і моделі повинен бути одним і тим же (рівність

кутів). Отже не можна намагатися знайти подібність між ламінарним і турбулентним потоками, тому що розподіл швидкостей в обох потоках різний. Можна порівнювати тільки ламінарні потоки між собою і турбулентні потоки між собою.

3. Наступною важливою величиною є температурний градієнт  $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial z}$ . Розподіл градієнтів повинний бути подібним, тобто

$$\frac{\partial \tau' / \partial x'}{\partial \tau / \partial x} = \frac{\partial \tau' / \partial y'}{\partial \tau / \partial y} = \frac{\partial \tau' / \partial z'}{\partial \tau / \partial z} = A_{grad \tau}. \quad (2.28)$$

З рівнянь (2.26) і 2.28) маємо:

$$d\tau' = A_{grad \tau} \cdot A_l d\tau = A_\tau d\tau \quad (2.29)$$

де

$$A_{grad \tau} \cdot A_l = A_\tau. \quad (2.30)$$

Після інтегрування рівняння (2.29) отримуємо:

$$\tau' - \tau'_0 = A_\tau (\tau - \tau_0) \quad (2.31)$$

або

$$\frac{\tau' - \tau'_0}{\tau - \tau_0} = A_\tau, \quad (2.32)$$

де температури  $\tau'_0$  і  $\tau_0$  – довільні постійні інтегрування для відповідних, але довільно вибраних точок  $x'_0, y'_0, z'_0$  і  $x_0, y_0, z_0$ . В моделі і промисловому апараті температури  $\tau'_0$  і  $\tau_0$  можуть бути вибрані, наприклад, поблизу вводу в трубопровід або на великій відстані від стінки залежно від доцільності. В рівняння подібності температурних полів входять, таким чином, не власне температури, а їхні різниці по відношенню до температури вибраної точки.

З рівнянь (2.26), (2.28) і (2.29) випливає:

$$\frac{\partial \tau' / \partial x'}{\partial \tau / \partial x} = \frac{A_\tau}{A_l}, \quad \frac{\partial^2 \tau' / \partial x'^2}{\partial^2 \tau / \partial x^2} = \frac{A_\tau}{A_l^2} \quad (2.33)$$

У багатьох випадках має значення дотримання подібності градієнтів концентрацій в матеріальних потоках, які проходять через апарати.

Умови подібності концентраційних і температурних градієнтів аналогічні.

4. Статичний тиск представлений у диференціальних рівняннях зокрема у вигляді градієнтів  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ; за аналогією з температурним полем можна написати умови подібності для поля тиску:

$$\frac{p' - p'_0}{p - p_0} = A_p. \quad (2.34)$$

5. Подібність полів фізичних властивостей середовища обумовлює такі постійні співвідношення для усіх відповідних точок виробничого (промислового) апарата і моделі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha'}{\alpha} = A_\alpha; \quad \frac{\rho'}{\rho} = A_\rho; \quad \frac{g'}{g} = A_g \\ \frac{c'}{c} = A_c; \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = A_\lambda; \quad \frac{\mu'}{\mu} = A_\mu \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Слід відмітити, що при виконанні умов подібності не всі масштабні множники (числа) (2.28) – (2.35) можуть бути довільно вибрані. Інші визначаються після вибору деяких небагатьох основних величин. Тобто число незалежних масштабних множників у порівнянні з наведеними у рівняннях (2.26) – (2.35) може суттєво скоротитися внаслідок додаткових умов.

Якщо дві системи подібні, то в межах кожної системи відношення будь-яких схожих величин, що характеризують той або інший стан, є безрозмірним і постійним для обох систем. Так, наприклад, фізичний стан однієї із систем характеризується деякими величинами  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , а іншої подібної системи – величинами  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Тоді умова подібності потребує рівності:

$$R_1/R_2 = r_1/r_2 = i. \quad (2.36)$$

Тобто відношення схожих величин в одній системі дорівнює їхньому відношенню в подібній системі. Ці постійні безрозмірні відношення називаються *інваріантами подібності* і позначаються символом  $i$ .

Інваріанти подібності, які є відношеннями простих однорідних величин, наприклад, лінійних розмірів  $l/d$ , тисків  $p_1/p_2$ , в'язкостей  $\mu_1/\mu_2$  і т.п., називаються *симплексами подібності*.

Інваріанти подібності можуть бути виражені й більш складними безрозмірними відношеннями, складеними з декількох простих параме-

трів, наприклад  $dV\rho/\mu$ . У цьому випадку вони називаються критеріями подібності, які можуть бути визначальними і невизначальними. Визначальними критеріями є такі, у яких величини задані наперед умовами однозначності. Критерії, що містять шукану величину, називаються невизначальними.

В основі теорії подібності лежать три теореми, які формулюються таким чином:

*I теорема.* Якщо фізичні процеси подібні один одному, однойменні критерії подібності цих процесів мають однакову величину.

*II теорема.* Рівняння, які описують фізичні процеси, можуть бути представлені у вигляді функціонального зв'язку між критеріями подібності.

*III теорема.* Для того щоб фізичні процеси були подібні один одному, необхідно і достатньо, щоб ці процеси були якісно однакові, а їхні однойменні визначальні критерії – чисельно однакові.

### 2.1.3. Диференціальні рівняння теплообміну для моделі

Диференціальні рівняння теплообміну для моделі напишемо у відповідності з рівняннями п. 2.1.1 але у даному випадку усі вхідні величини забезпечимо штрихами, на відміну від величин для виробничого апарата [9, 11].

Вважаючи, що  $q_i = q'_i = 0$ , отримуємо (для осі  $OX'$ ):

$$\frac{\partial(\rho'v'_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho'v'_y)}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho'v'_z)}{\partial z'} = 0; \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \rho' \left( v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) &= \rho' g'_x - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \\ &+ \mu' \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Подібні рівняння можна скласти й для проєкцій на вісі  $OY'$  і  $OZ'$ . Аналогічно рівнянню (2.18) маємо:

$$v'_x \frac{\partial \tau'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \tau'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial \tau'}{\partial z'} = a' \left( \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z'^2} \right); \quad (2.39)$$



$$\alpha = -\frac{\lambda' \left( \frac{\partial \tau'}{\partial n'} \right)_F}{\tau'_F - \tau'_0} . \quad (2.40)$$

У ці рівняння відповідно до співвідношень (2.28) – (2.35) можна підставити  $x' = A_l x$ ,  $v' = A_v v$ ,  $\rho' = A_\rho \rho$ , де величини без штриха відносяться до виробничого апарата. Таким чином, з рівняння (2.37) отримуємо:

$$\frac{A_\rho A_v}{A_l} \rho \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0 , \quad (2.41)$$

а з рівняння (2.38) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{A_\rho A_v^2}{A_l} \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) &= A_\rho A_g \rho g_x - \frac{A_p}{A_l} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{A_\mu A_v}{A_l^2} \mu \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Аналогічні рівняння отримують і для напрямків  $OY$  і  $OZ$ . З рівняння (2.39) маємо:

$$A_v \frac{A_\tau}{A_l} \left( v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + \dots \right) = \frac{A_\lambda A_\tau}{A_c A_\rho A_g A_l^2} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \dots \right) , \quad (2.43)$$

а з рівняння (2.40) отримуємо:

$$A_\alpha \alpha = -\frac{A_\lambda}{A_l} \cdot \lambda \frac{\left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F}{\tau_F - \tau_0} . \quad (2.44)$$

Подібними вважають тільки такі процеси, для яких масштабні значення  $A_l$ ,  $A_v$ ,  $A_\tau$  та ін. є такими, що множники, які стоять перед дужками в рівняннях (2.41) – (2.44) однакові, тобто:

$$\frac{A_\rho A_v^2}{A_l} = A_\rho A_g = \frac{A_p}{A_l} = \frac{A_\mu A_v}{A_l^2} ; \quad (2.45)$$

$$A_v \frac{A_\tau}{A_l} = \frac{A_\lambda A_\tau}{A_c A_\rho A_g A_l^2} ; \quad (2.46)$$

$$A_\alpha = \frac{A_\lambda}{A_l} . \quad (2.47)$$

Отже, якщо чисельні значення задовольняють рівнянням (2.45) – (2.47), то в рівняннях (2.41) – (2.44) масштабні множники можуть бути скорочені і для моделі залишається система диференціальних рівнянь, які повністю ідентичні рівнянням для виробничого апарата, а саме – рівнянням (2.3), (2.12), (2.13), (2.16), і (2.18).

Інтегралі диференціальних рівнянь для апарата і моделі також будуть ідентичні. Це означає, що тільки у цьому випадку поширення потоків з швидкісними і температурними полями у просторі моделі і промислового апарата відбувається однаково.

Звідси витікає наступне положення: подібними процесами теплообміну у сталому стані при відсутності джерел тепла є тільки такі, у яких масштабні множники задовольняють рівнянням (2.45) – (2.47). Таким чином, з числа масштабних множників п'ять виражаються через інші за допомогою рівнянь (2.45) – (2.47).

Далі представимо рівняння (2.45) – (2.47) в більш зручній формі – у вигляді рівнянь в критеріях подібності.

#### 2.1.4. Гідродинамічна подібність

Для з'ясування умов, при дотриманні яких рівняння руху будуть подібні, або рухи подібні, розглянемо рівняння Нав'є-Стокса (2.12) – (2.14) для випадку плоского потоку в безрозмірному вигляді. За масштаб довжини вибираємо будь-який характерний розмір тіла (напр., діаметр або радіус труби), а за масштаби швидкостей, тисків, густин, температур та ін. – їхні характерні значення (на нескінченності, середні за об'ємними, масовими витратами та ін.) [9].

Позначимо безрозмірні величини тими ж буквами, що й розмірні, але з ризикою і зробимо таку заміну:

$$x = l\bar{x}, \quad y = l\bar{y}, \quad \rho = \rho_0\bar{\rho}, \quad v_x = V_0\bar{v}_x, \quad v_y = V_0\bar{v}_y,$$

$$\vartheta = \vartheta_0\bar{\vartheta}, \quad t = t_0\bar{t}, \quad X = g\bar{X}, \quad Y = g\bar{Y}, \quad p = p_0\bar{p}.$$

За масштаб часу прийнятий час, характерний для даного руху, а за масштаб масових сил, віднесених до одиниці маси, – прискорення сили тяжіння.

Після підстановки вказаних величин у рівняння (2.12) – (2.14) одержимо рівняння плоского руху і рівняння нерозривності для нестисливої рідини у безрозмірній формі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l} \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \right) &= g\bar{X} - \frac{p_0}{\rho_0 l} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{g_0 V_0}{l^2} \bar{g} \nabla^2 \bar{v}_x; \\ \frac{V_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l} \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) &= g\bar{Y} - \frac{p_0}{\rho_0 l} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{g_0 V_0}{l^2} \bar{g} \nabla^2 \bar{v}_y; \\ \frac{V_0}{l} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (2.48)$$

Розділимо перші два рівняння на  $\frac{V_0^2}{l}$ , а третє на  $\frac{V_0}{l}$  і опустимо для простоти риси над безрозмірними величинами, після чого отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{l}{V_0 t_0} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= \frac{gl}{V_0^2} X - \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g_0}{V_0 l} g \nabla^2 v_x; \\ \frac{l}{V_0 t_0} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= \frac{gl}{V_0^2} Y - \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g_0}{V_0 l} g \nabla^2 v_y; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

З цієї системи рівнянь витікає, що якщо два потоки подібні, тобто вони описуються однаковими рівняннями з однаковими граничними (крайовими) і початковими умовами, представленими в безрозмірному вигляді, то для них повинні бути однаковими за величиною такі безрозмірні величини, які мають свої власні назви:

$\frac{l}{V_0 t_0} = Sh$  – число Струхаля характеризує залежність складових інерційних сил від часу;

$\frac{V_0}{\sqrt{gl}} = Fr$  – число Фруда відбиває відношення сил інерції до сил гравітації;

$\frac{p_0}{\rho V_0^2} = Eu$  – число Ейлера відбиває відношення сил тиску й сил інерції;

$\frac{V_0 l}{\nu} = Re$  – число Рейнольдса відбиває відношення сил інерції й в'язкості.

Для повного моделювання необхідна повна подібність процесів, тобто рівність чисел подібності. При використанні даних, отриманих на моделі, повинні бути виконані для всіх відповідних точок на моделі і у виробничому апараті три умови:

$$Re = \text{idem}; \quad Eu = \text{idem}; \quad Sh = \text{idem}. \quad (2.49)$$

Однак теорія і практика показують, що при однорідних потоках в моделі і виробничому апараті встановлюються такі профілі швидкостей, які подібні між собою. Тому, для того щоб упевнитися в подібності процесів, немає необхідності перевіряти наявність умов (2.49) для усіх подібних точок. Якщо, наприклад, у трубопроводі по його осі знайдено, що  $Re = \text{idem}$  для виробничого апарата і моделі, то відповідно цьому  $Re = \text{idem}$  також для інших точок перетину потоку. Однорідними потоками називають такі, які мають подібні режими руху (турбулентний, ламінарний), початкові умови (профіль швидкостей на вході у апарат), крайові умови. Остання умова у відношенні до швидкостей завжди виконується внаслідок того, що швидкості біля стінки як у моделі, так і у виробничому апараті завжди рівні нулю.

Інші умови подібності – *геометрична подібність* (у тому числі й шорсткість поверхні) та інші повинні бути також виконані. Але виникає питання: чи можливе взагалі дотримання усіх умов подібності і якщо так, то при яких обставинах.

Якщо, наприклад, при протіканні рідини в трубопроводі з'являються вільні поверхні рідини, то для їхнього врахування було б необхідно ввести додаткові умови подібності, які визначаються фізичними законами їхнього утворення. Тобто при вільних поверхнях неможливо одночасно виконати усі умови подібності. Те ж саме відбудеться, якщо властивості речовини (в'язкість, густина та ін.) не є постійними і змінюються з температурою вздовж потоку.

Для потоків, де ці труднощі не мають місця, число умов подібності можна скоротити, виходячи з наступних міркувань. Для стаціонарних процесів числа  $Sh$  не мають значення. Перепад тиску в потоці буде за-

лежати від швидкісних характеристик потоку, тобто  $Eu = f(Re)$ . Таким чином, при вивченні руху рідини найбільш істотним буде число  $Re$ . Число  $Re$  має вирішальне значення при визначенні структури потоків (ламінарих і турбулентних). Структура потоку визначає процес переносу маси, кількості руху, тепла.

Тобто, як правило, використовують приблизне моделювання, при якому подібність зберігається за числами найбільш характерними для даного процесу.

### 2.1.5. Теплова подібність

Аналогічно гідродинамічній подібності розглянемо умови теплової подібності. По-перше розглянемо випадок чистої теплопровідності, тобто переносу тепла молекулярним способом без конвекції [11]. У цьому випадку рівняння переносу тепла має вигляд:

$$c_p \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \tau, \quad (2.50)$$

де  $c_p$  – питома теплоємність рідини.

Приведемо це рівняння до безрозмірного вигляду, для чого введемо такі безрозмірні величини:

$$c_p = \bar{c}_p c_{p0}; \quad \rho = \bar{\rho} \rho_0; \quad \tau = \bar{\tau} \tau_0; \quad \lambda = \bar{\lambda} \lambda_0; \quad x = \bar{x} l; \quad t = \bar{t} t_0,$$

де  $\bar{c}_p, \bar{\rho}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{t}$  – безрозмірні величини;  $c_{p0}, \rho_0, \tau_0, \lambda_0, l, t_0$  – характерні розмірні величини (масштаби).

Розглянемо одномірний рух, тобто  $\tau = \tau(t, x)$ , тоді

$$c_p \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

Після підстановки прийнятих співвідношень у рівняння переносу тепла отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{p0} \rho_0 \tau_0}{t_0} \bar{c}_p \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\lambda_0 \tau_0}{l^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}, \\ \bar{c}_p \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\lambda_0}{c_{p0} \rho_0} \cdot \frac{t_0}{l^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

де  $\alpha_\tau = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  – коефіцієнт теплопроводності, а

$\frac{\alpha_\tau t}{l^2} = Fu$  – число Фур'є, яке характеризує нестационарність процесу молекулярного переносу тепла.

Далі розглянемо випадок конвективного переносу тепла. Для випадку одномірного сталого руху відповідне рівняння буде:

$$v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} = \alpha_\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

Після введення безрозмірних величин отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_0 \tau_0}{l} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\alpha_0 \tau_0}{l^2} \bar{\alpha}_\tau \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2} \\ \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\alpha_0 \tau_0}{V_0 l} \bar{\alpha}_\tau \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

або

Тобто для подібності процесів необхідно дотримуватися рівності величини  $\frac{\alpha_0}{V_0 l}$ , а зворотна їй величина називається числом Пекле.

$\frac{V_0 l}{\alpha_\tau} = Pe$  – число Пекле характеризує конвективний перенос тепла.

Очевидно, що малі значення числа  $Pe$  відповідають дуже малому конвекційному переносу у загальному переносі тепла. Отже, при значеннях чисел  $Pe < 1$  спостерігається тільки молекулярний перенос, тобто теплопроводність, тоді як при великих значеннях числа  $Pe$  роль молекулярного переносу буде незначна.

Перенос тепла з поверхні  $F$  при різниці температур в потоці і на стінці

$\tau_l - \tau_w$  можна представити у вигляді:

$$Q = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial n} Ft = \alpha (\tau_l - \tau_w) Ft, \quad (2.53)$$

де  $\tau_1$  – температура оточуючого середовища;  $\tau_w$  – температура стінки;  $\alpha$  – коефіцієнт теплопереносу.

Для густини теплового потоку маємо:

$$q = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial n} = \alpha(\tau_1 - \tau_w). \quad (2.54)$$

Запишемо рівняння (2.54) в безрозмірному вигляді:

$$-\frac{\lambda_0 \tau_0}{l} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{n}} = \alpha_0 \tau \bar{\alpha} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w)$$

і після ділення на  $\frac{\lambda_0 \tau_0}{l}$  одержимо:

$$-\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{n}} = \frac{\alpha_0 l}{\lambda_0} \bar{\alpha} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w),$$

звідси отримуємо число Нуссельта:

$$\frac{\alpha_0 l}{\lambda_0} = Nu \text{ – число Нуссельта, яке можна розглядати як відно-}$$

шення дійсного теплового потоку, який визначається величиною коефіцієнта теплопереносу  $\alpha$ , до питомого теплового потоку, що мав би місце в умовах чистої теплопровідності в шарі товщиною  $l$ , тобто:

$$Nu = \frac{\alpha}{\lambda/l}.$$

Якщо поділити число  $Pe$  на число  $Re$ , одержимо *число Прандтля*:

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{\mathcal{G}_0}{\alpha_\tau} = \frac{\mathcal{G}_0 \rho_0 c_p}{\lambda_0} = \frac{c_p \mu_0}{\lambda_0} = Pr. \quad (2.55)$$

Число  $Pr$  характеризує відношення двох характеристик молекулярного переносу: кінематичної в'язкості  $\mathcal{G}$  і коефіцієнта температуропровідності  $\alpha_\tau$ . Перенос імпульсу, пов'язаний з величиною  $\mathcal{G}$ , визначається різницею швидкостей, а перенос тепла, пов'язаний з величиною  $\alpha_\tau$ , визначається температурою. Отже, число  $Pr$  явно містить тільки величини, які визначають фізичні властивості середовища, і у дійсності характеризує відношення між полями швидкостей і температур. Тоді залежність  $Nu = f(Re, Pr)$  можна трактувати таким чином: кількість те-

пла, яке переноситься ( $Nu$ ) залежить від виду швидкісного поля ( $Re$ ) і його зв'язку з полем температур ( $Pr$ ).

Приведені вище рівняння дійсні тільки у тому випадку, якщо величини  $\lambda, c, \rho, \mu, g$  та ін. по довжині потоку залишаються постійними, тому що тільки при цьому забезпечується постійність масштабних множників. Внаслідок того, що температура впливає на  $\lambda, \rho, \mu$ , точне виконання умов подібності має місце дуже рідко.

### 2.1.6. Дифузійна подібність

Числа подібності для дифузійних процесів можна одержати з рівняння дифузії речовини [9, 11]. Для одномірного руху рівняння молекулярної дифузії має вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.56)$$

Після заміни у цьому рівнянні усіх величин безрозмірними і характерними значеннями (масштабами) отримуємо:

$$c = c_0 \bar{c}, \quad t = t_0 \bar{t}, \quad x = \bar{x} l;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \frac{D c_0}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \frac{D t_0}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

або

Безрозмірне число  $\frac{D t_0}{l^2}$  називається дифузійним числом Фур'є.

$$\frac{D t_0}{l^2} = Fo \quad - \text{дифузійне число Фур'є аналогічне тепловому числу}$$

Фур'є, але характеризує нестационарність процесу молекулярного переносу речовини.

При конвекційному переносі речовини для одномірного руху скористаємося рівнянням:



$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.58)$$

Після виконання аналогічних операцій маємо:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = \frac{D}{V_0 l} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2}.$$

$\frac{V_0 l}{D} = Pe_\partial$  – дифузійне число Пекле, яке подібно числу  $Re$  визначає структуру потоку.

Залежно від величини числа  $Pe_\partial$  у порівнянні з одиницею можна судити про характер переносу речовини. Якщо  $Pe_\partial > 1$  молекулярною дифузією можна знехтувати у порівнянні з конвекційним переносом речовини. Якщо  $Pe_\partial < 1$ , навпаки молекулярна дифузія є визначальною.

Ділення числа  $Pe_\partial$  на число  $Re$  дозволяє отримати *дифузійне число Прандтля*  $Pr_\partial$ :

$$\frac{Pe_\partial}{Re} = \frac{\mathcal{G}_0}{D} = Pr_\partial. \quad (2.59)$$

Дифузійне число Прандтля характеризує відношення двох характеристик переносу: кінематичної в'язкості  $\mathcal{G}$  і коефіцієнта дифузії  $D$ .

Коефіцієнт кінематичної в'язкості у рухомих рідинах типу води складає біля  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, а коефіцієнт дифузії молекул і йонів у водних розчинах має порядок  $D = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с, макромолекул –  $D = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с. Тому у воді і подібних до неї рідинах  $Pr_\partial \approx 10^3$ . При зростанні в'язкості коефіцієнт дифузії зменшується за законом:

$$D = \frac{const}{\mathcal{G}}, \quad (2.60)$$

тому число  $Pr_\partial$  зі збільшенням в'язкості зростає пропорційно її квадрату. У в'язких рідинах число  $Pr_\partial$  досягає значення  $10^6$  й більше.

Запишемо рівняння переносу речовини стосовно до різниці концентрацій на стінці і в оточуючому середовищі:

$$W = -D \frac{\partial c}{\partial n} = \alpha_\partial (c_1 - c_w),$$

де  $\alpha_{\partial}$  – коефіцієнт переносу маси;  $c_1$  – концентрація речовини в оточуючому середовищі;  $c_w$  – концентрація речовини на стінці.

Після заміни у цьому рівнянні усіх величин безрозмірними і характерними значеннями (масштабами) отримуємо:

$$\text{або} \quad \left. \begin{aligned} -\frac{Dc_0}{l} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{n}} &= \alpha_{\partial} c_0 (\bar{c}_1 - \bar{c}_w) \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{n}} &= \frac{\alpha_{\partial} l}{D} (\bar{c}_1 - \bar{c}_w) \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

З останнього рівняння отримуємо *локальне число Нуссельта*:

$$\frac{\alpha_{\partial} l}{D} = Nu_{\partial}. \quad (2.62)$$

Аналогічно тепловому числу  $Nu$  можна з використанням середнього коефіцієнта переносу речовини  $\alpha_{cp,\partial}$  отримати середнє дифузійне число Нуссельта.

### 2.1.7. Подібність деяких часткових випадків переносу

Відомо, що на тіло, занурене у рідину діє гідростатична або архімедова сила. Її величина дорівнює вазі витиснутої тілом рідини і направлена у бік протилежний напрямку сил ваги [9]. Архімедова сила має важливе значення у тих випадках коли у рідинах є частинки з густиною, яка відрізняється від густини середовища. У цьому випадку критерієм подібності буде *число Архімеда*:

$$Ar = \frac{l^3}{g^2} g \frac{\rho - \rho_1}{\rho} = \frac{l^3}{g^2} g \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (2.63)$$

де  $\rho$  і  $\rho_1$  – густини частинок і рідини.

Співвідношення між гравітаційними силами і сили в'язкості характеризує *число Галілея*:

$$Ga = \frac{gl^3}{\nu^2}. \quad (2.64)$$

Якщо зміна густини рідини спричинена зміною температури, то у цьому випадку критерієм подібності буде *число Грасгофа*:

$$Gr = \frac{l^3}{g^2} g\beta\Delta\tau, \quad (2.65)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт об'ємного розширення, який визначається із співвідношення:

$$\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}.$$

Для спільності найменувань доцільно число Грасгофа називати тепловим числом Архімеда.

Гідростатична сила може виникнути й при різниці концентрації домішки у середовищі. У цьому випадку критерієм подібності буде *дифузійне число Архімеда*:

$$Ar_{\partial} = \frac{l^3}{g^2} g\xi\Delta c, \quad (2.66)$$

де  $\Delta c$  – різниця концентрацій речовини у середовищі і на стінці;  $\xi$  – коефіцієнт (аналогічний  $\beta$ ), який характеризує відносну зміну густини у залежності від концентрації:

$$\xi = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\rho}{\Delta c}.$$

Динамічне, теплове і дифузійне числа Архімеда можуть бути одержані з відповідного аналізу рівняння руху у такому вигляді:

$$\rho \frac{dV}{dt} = g\Delta\rho - \rho g\beta\Delta\tau - \rho g\xi\Delta c + \mu\nabla^2 V. \quad (2.67)$$

Після виконання відповідних операцій з рівнянням (2.67) одержимо *динамічне число Нуссельта*:

$$Nu = \frac{\alpha_1 l}{\mu}. \quad (2.68)$$

У тих випадках, коли в рідині великі сили поверхневого натягу, основним критерієм подібності буде *число Вебера*:

$$We = \frac{\rho V^2 l}{\sigma}, \quad (2.69)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу.

Число  $We$  виражає собою відношення сил інерції до сил поверхневого натягу. Число  $We$  має суттєве значення при вивченні процесів перемішування взаємно нерозчинних рідин. Імовірність дроблення крапель у мішалках визначається у залежності від числа  $We$ , представлено-го у вигляді:

$$We = \frac{\rho n^2 d^3}{\sigma}, \quad (2.70)$$

де  $n$  і  $d$  – число обертів і діаметр мішалки;  $\sigma$  – міжфазний натяг.

Зі збільшенням числа  $We$  діаметр крапель зменшується і міжфазна поверхня росте.

### 2.1.8. Узагальнення

Легко бачити, що теплове і динамічне числа Пекле за фізичним змістом і формою аналогічні числам Рейнольдса. Отже, можна ввести три числа Рейнольдса: динамічне, теплове і дифузійне:

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{V_0 l}{\mathcal{G}_0}; \\ Re_\tau &= Pe = \frac{V_0 l}{\alpha_\tau}; \\ Re_\partial &= Pe_\partial = \frac{V_0 l}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

У знаменнику цих формул знаходяться відповідно кінематична в'язкість, температуропровідність і коефіцієнт дифузії, тобто величини, які залежать від в'язкості. Тому при зменшенні в'язкості усі числа Рейнольдса будуть рости, а при наближенні величини в'язкості до нуля динамічне, теплове і дифузійне числа Рейнольдса будуть наближатися до нескінченності.

Аналогічно можна одержати динамічне, теплове і дифузійне числа Фур'є.

При вивченні теплових і дифузійних процесів суттєве значення мають числа Прандтля, які можна отримати, як відношення відповідних чисел Рейнольдса:

$$\left. \begin{aligned} Pr_{\tau} &= \frac{Re_{\tau}}{Re} = \frac{\vartheta}{\alpha_{\tau}}; \\ Pr_{\partial} &= \frac{Re_{\partial}}{Re} = \frac{\vartheta}{D}; \\ Pr_{зм} &= \frac{Re_{\partial}}{Re_{\tau}} = \frac{\alpha_{\tau}}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Перше число Прандтля називається тепловим, друге – дифузійним, третє – змішаним.

Перше число Прандтля являє собою відношення кінематичної в'язкості (перенесення імпульсу) і коефіцієнта температуропровідності (перенесення тепла). Таким чином, теплове число Прандтля явно містить тільки величини, що визначають фізичні властивості середовища, тобто характеризують співвідношення поля швидкостей і поля температур. Це значить, такі поля будуть подібні тільки при числі  $Pr = 1$ .

Аналогічні міркування можна повністю перенести на дифузійне число Прандтля. Воно характеризує співвідношення між полем швидкостей і полем концентрацій. А змішане число Прандтля – відношення температурного поля до поля концентрацій.

На завершення наведемо зведену таблицю чисел подібності процесів переносу кількості руху, тепла і речовини в рідинах і газах [9].

**Таблиця 2.1 – Числа подібності процесів переносу.**

Число подібності	Прандтля	Архімеда	Нуссельта	Фур'є	Рейнольдса
Динамічне	–	$Ar = gl^3 \Delta\rho/v^2\rho$	–	$Fu = vt/l^2$	$Re = Vl/v$
Теплове	$Pr_{\tau} = v/\alpha_{\tau}$	$Ar_{\tau} = gl^3 \beta \Delta\tau/v^2$	$Nu_{\tau} = \alpha l/\lambda$	$Fu_{\tau} = \alpha_{\tau}/l^2$	$Re_{\tau} = Vl/\alpha_{\tau}$
Дифузійне	$Pr_{\partial} = v/D$	$Ar_{\partial} = gl^3 \zeta \Delta c/v^2$	$Nu_{\partial} = \alpha_{\partial}/D$	$Fu_{\partial} = Dt/l^2$	$Re_{\partial} = Vl/D$

**Приклад 2.1.** Для проведення досліджень розрахувати модель тракту суспензії, що тече по трубопроводу у бак кондиційної суспензії.

Поведінка потоку в даному випадку може бути описана рівнянням Нав'є-Стокса і рівнянням нерозривності. Розглянемо випадок одномірного руху:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

Перший член рівняння Нав'є-Стокса при сталому русі дорівнює нулю  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ , рівняння нерозривності  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$  також додаткових умов не вносить. Перепишемо перше рівняння у безрозмірній формі:

$$\frac{V_0^2}{l_0} \cdot \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}'} = g_0 \bar{X}' - \frac{\rho_0}{\rho_0 l_0} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}'} \cdot \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{\mathcal{G}_0 u_0}{l_0^2} \cdot \bar{\mathcal{G}}' \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}'^2}.$$

Після перетворення маємо:

$$\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}'} = \frac{Ga}{Re^2} \cdot \bar{X}' - Eu \cdot \frac{1}{\bar{\rho}'} \cdot \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{1}{Re} \cdot \bar{\mathcal{G}}' \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}'^2}.$$

Таким чином, маємо три критерії подібності: Галілея  $Ga = \frac{gl^3}{\mathcal{G}^2}$ ,

Ейлера  $Eu = \frac{p}{\rho V^2}$  і Рейнольдса  $Re = \frac{Vl}{\mathcal{G}}$ . Отже швидкість потоку є

функцією п'яти параметрів:

$$u = f(\rho, \mathcal{G}, p, V, l).$$

Перевіряємо, чи достатня кількість критеріїв подібності, для чого записуємо розмірності усіх величин, що входять в три критерії, що отримані:  $[\rho] = [кг/м^3]$ ;  $[\mathcal{G}] = [м^2/с]$ ;  $[p] = [Па] = [кг \cdot м/с^2]$ ;  $[V] = [м/с]$ ;  $[l] = [м]$ .

Основних розмірних величин  $m = 3$  (кг, м, с); число критеріїв подібності повинно бути:

$$n = k + 1 - m,$$

де  $k$  – число параметрів, від яких залежить швидкість потоку  $u$ , у цьому прикладі  $k = 5$ , це  $\rho, \mathcal{G}, p, V, l$ , тоді  $n = 5 + 1 - 3 = 3$ . Тобто рішення вірно і кількість критеріїв подібності достатня для розрахунку моделі.

Величини показників тракту суспензії (натури) наведені в табл. 2.2.

**Таблиця 2.2 – Величини показників тракту суспензії (натури)**

Показник	Позначення	Од. вимір.	Величина
Густина суспензії	$\rho_n$	кг/м <sup>3</sup>	1800
Кінематичний коефіцієнт в'язкості суспензії	$\vartheta_n$	м <sup>2</sup> /с	$1,15 \cdot 10^{-6}$
Лінійний розмір (діаметр трубопроводу)	$l_n$	м	0,15
Швидкість течії суспензії в трубопроводі	$V_n$	м/с	3,0
Тиск в трубопроводі	$p_n$	МПа	0,2

Розрахунок моделі виконується з урахуванням рівності критеріїв подібності натури і моделі. Як моделюючу рідину вибираємо, наприклад, гас з густиною  $\rho_m = 800 \text{ кг/м}^3$  і кінематичною в'язкістю  $\vartheta_m = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Результати розрахунку масштабних коефіцієнтів для побудови моделі наведені в табл. 2.3.

**Таблиця 2.3 – Результати розрахунку масштабних коефіцієнтів**

Параметр, що моделюється	Позначення	Звідки отримано	Масштабний коефіцієнт	
			Формула	величина
Фізичні властивості	$\rho$	Фізичні властивості натури і моделі	$m_\rho = \frac{\rho_n}{\rho_m}$	0,44
	$\vartheta$		$m_\vartheta = \frac{\vartheta_n}{\vartheta_m}$	0,69
Лінійний розмір (діаметр трубопроводу)	$l$	Із: $Ga: \left(\frac{gl^3}{\vartheta^2}\right)_n = \left(\frac{gl^3}{\vartheta^2}\right)_m$	$m_l = m_\vartheta^{2/3}$	0,78
Швидкість течії	$V$	Із: $Re: \left(\frac{Vl}{\vartheta}\right)_n = \left(\frac{Vl}{\vartheta}\right)_m$	$m_V = m_\vartheta \cdot m_l^{-1}$	0,88
Тиск в трубопроводі	$p$	Із: $Eu: \left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_n = \left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_m$	$m_p = m_\rho \cdot m_V^2$	0,62

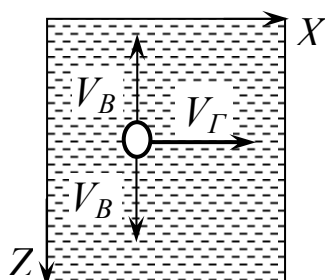
З урахуванням масштабних коефіцієнтів виконується розрахунок параметрів моделі (табл. 2.4), її побудова і проведення для неї необхідного комплексу досліджень.

**Таблиця 2.4 – Величини показників моделі**

Показник	Позначення	Од. вимір.	Величина
Густина рідини	$\rho_m$	кг/м <sup>3</sup>	800
Кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини	$\mathcal{D}_m$	м <sup>2</sup> /с	$0,8 \cdot 10^{-6}$
Лінійний розмір (діаметр трубопроводу)	$l_m$	м	0,12
Швидкість течії рідини в трубопроводі	$V_m$	м/с	2,64
Тиск в трубопроводі	$p_m$	МПа	0,12

**Приклад 2.2.** З використанням моделі визначити параметри руху частинок різної густини в суспензії заданої густини і основний лінійний розмір важкосередовищного сепаратора.

В сепараторі на частинку діють інерційні сили, під дією яких вона рухається в горизонтальному напрямку, і гравітаційні сили, під дією яких частинка у залежності від густини рухається у вертикальному напрямку. Отже, частинка переміщується в площині XZ (рис. 2.4) в горизонтальному напрямку із швидкістю  $V_{\Gamma}$  потоку суспензії і у вертикальному напрямку із швидкістю  $V_B$ , яка залежить від різниці в густині частинки і суспензії.



**Рис. 2.4 - Розподіл швидкостей руху частинки в робочій зоні сепаратора.**

Таким чином, оскільки на частинку діють інерційні і гравітаційні сили, подібність може бути збережена при рівності критеріїв Рейнольдса і Архімеда:



$Re = \frac{V_0 l}{\vartheta}$  – число Рейнольдса показує відношення сил інерції до сил

до сил в'язкості.

$Ar = \frac{l^3}{\vartheta^2} g \frac{\Delta\rho}{\rho}$  – число Архімеда показує відношення сил гравітації

до сил до сил в'язкості.

Отже швидкість руху є функцією чотирьох параметрів:

$$u = f(\rho, \vartheta, V, l).$$

Перевіряємо, чи достатня кількість критеріїв подібності, для чого записуємо розмірності усіх величин, що входять в три отримані критерії:  $[\rho] = [\text{кг}/\text{м}^3]$ ;  $[\vartheta] = [\text{м}^2/\text{с}]$ ;  $[V] = [\text{м}/\text{с}]$ ;  $[l] = [\text{м}]$ .

Основних розмірних величин  $m = 3$  (кг, м, с); число критеріїв подібності повинно бути:

$$n = k + 1 - m,$$

де  $k$  – число параметрів, від яких залежить швидкість потоку  $u$ , у цьому прикладі  $k = 4$ , це  $\rho, \vartheta, V, l$ , тоді  $n = 4 + 1 - 3 = 2$ . Тобто рішення правильне і кількість критеріїв подібності достатня для розрахунку моделі.

У моделюємому апараті з довжиною робочої зони  $l = 2$  м тече модельна рідина (вода з густиною  $\rho_m = 1000$  кг/м<sup>3</sup> і кінематичною в'язкістю  $\vartheta = 1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с) зі швидкістю  $V = 0,40$  м/с. На моделі досліджувалося розділення суміші сферичних ебонітових ( $\rho_e = 1150$  кг/м<sup>3</sup>) і дерев'яних ( $\rho_d = 900$  кг/м<sup>3</sup>) частинок діаметром  $d = 10$  мм. При русі в горизонтальному напрямку ебонітові (важкі) частинки опускаються в рідині зі швидкістю  $V_B = 0,20$  м/с, а дерев'яні (легкі) спливають з швидкістю  $V_D = 0,16$  м/с.

Необхідно розрахувати аналогічні параметри для натури, тобто промислового апарата з суспензією густиною  $\rho_n = 1600$  кг/м<sup>3</sup> і кінематичною в'язкістю  $\vartheta = 2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

Розрахунок натури виконується з урахуванням рівності критеріїв подібності натури і моделі. Результати розрахунку масштабних коефіцієнтів для побудови моделі наведені в табл. 2.5.

З урахуванням масштабних коефіцієнтів виконується розрахунок параметрів натури (табл. 2.6), і проведення на ній необхідного комплексу робіт.

Багато процесів, які зустрічаються у практиці, бувають настільки складними, що не можуть бути безпосередньо описані диференціальними рівняннями [9, 10, 11]. Створення фізичних (матеріальних) моделей таких процесів теж утруднене. У таких випадках дуже цінним прийомом

для виявлення співвідношень між змінними величинами служить аналіз розмірностей.

**Таблиця 2.5 – Результати розрахунку масштабних коефіцієнтів**

Параметр, що моделюється	Позначення	Звідки отримано	Масштабний коефіцієнт	
			Формула	величина
Фізичні властивості	$\rho$	Фізичні властивості природи і моделі	$m_\rho = \frac{\rho_M}{\rho_H}$	1,6
	$g$		$m_g = \frac{g_M}{g_H}$	2,0
Лінійний розмір (довжина робочої зони)	$l$	Із: $Ar$ : $\left(\frac{gl\Delta\rho}{g^2\rho}\right)_M = \left(\frac{gl\Delta\rho}{g^2\rho}\right)_H$	$m_l = m_g^{2/3}$	1,6
Швидкість руху	$V$	Із: $Re$ : $\left(\frac{Vl}{g}\right)_M = \left(\frac{Vl}{g}\right)_H$	$m_V = m_g \cdot m_l^{-1}$	3,1

**Таблиця 2.6 – Величини показників природи**

Показник	Позначення	Од. вимір.	Величина
Густина рідини	$\rho_M$	кг/м <sup>3</sup>	1600
Кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини	$g_M$	м <sup>2</sup> /с	$2 \cdot 10^{-6}$
Лінійний розмір (довжина робочої зони)	$l_M$	м	3,2
Швидкість течії суспензії в сепараторі	$V_M$	м/с	1,24
Густина легкої частинки	$\rho_L$	кг/м <sup>3</sup>	1440
Швидкість руху легкої частинки в вертикальному напрямку (уверх)	$V_L$	м/с	0,50
Густина важкої частинки	$\rho_B$	кг/м <sup>3</sup>	1740
Швидкість руху важкої частинки в вертикальному напрямку (вниз)	$V_B$	м/с	0,62

## 2.2. Метод аналізу розмірностей

Цей метод можна розглядати як віртуальний аналог фізичного моделювання процесу, але за допомогою засобів розмірностей фізичних величин.

Суть методу полягає в тому, що з параметрів, які характеризують систему, складається вираз-модель, що має потрібну розмірність і певним чином відтворює (емулює, імітує) функціонування фізичної системи. Часто саме складена за правилом розмірності формула і виявляється шуканим співвідношенням (з точністю до безрозмірного множника).

Цей метод не дає повних відомостей про співвідношення між змінними, яке, у кінцевому рахунку, повинно бути виявлене експериментально. Тим не менше цей метод дозволяє значно скоротити обсяг експериментальних робіт.

Таким чином, ефективне застосування методу розмірностей можливе тільки при комбінуванні його з експериментом; при цьому повинні бути відомі усі фактори або змінні величини, які впливають на досліджуваний процес.

Аналіз розмірностей дає логічний розподіл величин по безрозмірних групах. У загальному вигляді функціональна залежність  $N$  може бути представлена у вигляді формули, яка називається *формулою розмірності*:

$$\begin{array}{l} \text{або} \\ N = f(v, L, \rho, \mu, g, p, \dots) \\ N = f(n_1, n_2, n_3, \dots) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} N = f(v, L, \rho, \mu, g, p, \dots) \\ N = f(n_1, n_2, n_3, \dots) \end{array}} \right\} \quad (2.73)$$

Сюди входить  $(k+1)$  величин з включенням і величини  $N$ . Вони можуть бути змінними, постійними, розмірними і безрозмірними. Однак у даному випадку необхідно, щоб для числових величин, які входять у рівняння, що характеризує фізичне явище, була би прийнята одна й та ж система основних одиниць вимірювання. При дотриманні цієї умови рівняння залишається справедливим при довільно вибраній системі одиниць вимірювання. Далі, ці основні одиниці повинні бути незалежними за своїми розмірностями, а число їх таким, щоб була можливість представити через них розмірності усіх інших величин, які входять у функціональну залежність (2.73).

Такими одиницями вимірювання можуть бути будь-які три величини, що входять у рівняння (2.73) і є незалежними одна від одної у відношенні розмірності. Якщо прийняти, наприклад, за одиниці вимірювання довжину  $L$  і швидкість  $V$ , тим самим маємо заданими одиницю

довжини  $L$  і одиницю часу  $T = L/V$ . Таким чином, для третьої одиниці вимірювання не можна приймати величину, розмірність якої містить тільки довжину і час, як, наприклад, прискорення, тому що ця величина вже є заданою в результаті вибору одиниці довжини і швидкості. Тому додатково повинна бути вибрана будь-яка величина, в розмірність якої входить маса, наприклад, густина, в'язкість, сила і т.п.

На практиці, наприклад, при гідравлічних дослідженнях, виявляється доцільним прийняти наступні три одиниці вимірювання: швидкість  $V_0$  будь-якої частинки потоку, будь-яку довжину (діаметр трубопроводу  $D$  або його довжину  $L$ ), густину  $\rho$  вибраної частинки.

Розмірність цих одиниць вимірювання:

$$[V_0] = \text{м/с}; \quad [L] = \text{м}; \quad [\rho] = \text{кг/м}^3.$$

Таким чином, рівняння для розмірностей у відповідності до функціональної залежності (2.73) може бути представлено у такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \text{або} \quad [N] &= [V_0]^x \cdot [L_0]^y \cdot [\rho_0]^z \\ [n_i] &= [V_0]^{x_i} \cdot [L_0]^{y_i} \cdot [\rho_0]^{z_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Значення  $N_i$  і  $n_i$ , взяті у системі основних одиниць (метр, секунда, кілограм), можна виразити безрозмірними числами:

$$\pi = \frac{N}{V_0^x \cdot L_0^y \cdot \rho_0^z}; \quad \pi_i = \frac{n_i}{V_0^{x_i} \cdot L_0^{y_i} \cdot \rho_0^{z_i}}.$$

Отже, замість рівняння (2.73) можна написати рівняння, у якому всі величини виражені у відносних одиницях (по відношенню до  $V_0$ ,  $L_0$ ,  $\rho_0$ ):

$$\frac{N}{V_0^x \cdot L_0^y \cdot \rho_0^z} = f \left( \frac{n_1}{V_0^{x_1} \cdot L_0^{y_1} \cdot \rho_0^{z_1}}, \frac{n_2}{V_0^{x_2} \cdot L_0^{y_2} \cdot \rho_0^{z_2}}, \frac{n_3}{V_0^{x_3} \cdot L_0^{y_3} \cdot \rho_0^{z_3}} \right). \quad (2.75)$$

Оскільки  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  являють собою, відповідно,  $V_0$ ,  $L_0$ ,  $\rho_0$ , то перші три члени рівняння перетворюються в три одиниці і функціональна залежність приймає вигляд:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \dots, \pi_k). \quad (2.76)$$

У відповідності до  $\pi$ -теорема будь-яке співвідношення між розмірними величинами можна сформулювати як співвідношення між безрозмірними величинами. При дослідженнях ця теорема дозволяє визначити зв'язок не між самими змінними, а між деякими безрозмірними їх співвідношеннями, складеними за визначеними законами.

Отже, функціональна залежність між  $k + 1$  розмірними величинами  $N$  і  $n_i$  ( $v, L, \rho, \mu, g, \dots$ ) у загальному випадку виражається як співвідношення між  $(k + 1 - 3)$  величинами  $\pi$  і  $\pi_i$  ( $i = 4, 5, \dots, k$ ), кожна з яких є безрозмірна степенева комбінація величин, які входять у функціональну залежність. Безрозмірні числа  $\pi$  носять характер критеріїв подібності, як це видно з наступного прикладу.

**Приклад 2.3.** Визначити функціональну залежність для сили опору  $F$  ( $H = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ), яку випробує пластина при обтіканні її рідиною у позаддовжньому напрямку.

Функціональну залежність сили опору можна представити у вигляді функції від ряду незалежних змінних і визначити її в критеріях подібності:

$$F = f(V, S, \rho, \mu, g, p, \frac{a}{L}, \beta),$$

де  $V$  – швидкість обтікання, м/с;  $S$  – площа пластини,  $\text{м}^2$ ;  $\rho$  – густина рідини,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості, Па·с ( $[\text{Па}\cdot\text{с}] = \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}$ );  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  $p$  – тиск, Па ( $\text{Па} = \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}$ );  $\frac{a}{L}$  – відношення висоти пластини до її довжини;  $\beta$  – кут нахилу пластини до напрямку потоку.

Таким чином, величини  $\frac{a}{L}$  і  $\beta$  – безрозмірні, інші шість – розмірні, три з них:  $V$ ,  $S$  і  $\rho$  прийняті за основні. У відповідності до  $\pi$ -теорема тут можливі тільки три безрозмірних співвідношення, отже:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \frac{a}{L}, \beta)$$

або

$$\frac{F}{V^x S^y \rho^z} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{V^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}}, \frac{g}{V^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}}, \frac{p}{V^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}}, \frac{a}{L}, \beta\right).$$

Враховуючи рівність розмірностей для чисельника і знаменника, знайдемо показники степенів:

для сили опору:

$$[F] = [V^x S^y \rho^z]$$

або

$$кг \cdot м / с^2 = (м / с)^x (м^2)^y (кг / м^3)^z,$$

звідки

$$1 = z \text{ (показники зліва і справа при кг);}$$

$$-2 = -x \text{ (показники зліва і справа при с);}$$

$$1 = x + 2y - 3z \text{ (показники зліва і справа при м).}$$

Рішення цих рівнянь дає:  $x = 2$ ;  $y = 1$ ;  $z = 1$ .

Функціональна залежність:

$$\pi = \frac{F}{V^2 S \rho}.$$

Аналогічно одержимо:

– для в'язкості:

$$[\mu] = [V^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}]$$

маємо  $x_1 = 1$ ;  $y_1 = 0,5$ ;  $z_1 = 1$ .

Функціональна залежність:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{V \rho \sqrt{S}};$$

– для прискорення вільного падіння:

$$[g] = [V^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}]$$

маємо  $x_2 = 2$ ;  $y_2 = -0,5$ ;  $z_2 = 0$ .

Функціональна залежність:

$$\pi_5 = \frac{g \sqrt{S}}{V^2};$$

– для тиску:

$$[p] = [V^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}]$$

маємо  $x_3 = 2$ ;  $y_3 = 0$ ;  $z_3 = 1$ .

Функціональна залежність:

$$\pi_6 = \frac{P}{V^2 \rho}.$$

Очевидно, що  $\pi_4 = Re$ ,  $\pi_5 = Fr$ ,  $\pi_6 = Eu$ . Тоді шукана функціональна залежність має вигляд:

$$\frac{F}{V^2 S \rho} = f(Re, Fr, Eu, \frac{a}{L}, \beta).$$

Звідси можна зробити висновок, що після дослідження даного процесу при деяких розмірах, швидкостях і т.п., можна встановити як він буде протікати при інших розмірах і швидкостях у тому випадку, якщо безрозмірні відношення, складені з цих змінних, для обох випадків будуть однакові. Отже, висновки, отримані при експериментах з тілами даних розмірів, що рухаються з даною швидкістю і т.п., будуть, очевидно, справедливі і для будь-яких інших розмірів тіла, швидкості і т.д. за умови рівності безрозмірних відношень  $\pi$  з тими, що спостерігалися при експериментах.

**Приклад 2.4.** На основі попередніх досліджень на лабораторному пристрої визначити функціональну залежність потужності  $N$  ( $Вт = кг \cdot м^2 / с^3$ ) електродвигуна мішалки, яка необхідна для перемішування пульпи з реагентами у контактному чані.

Для подібності двох змішувальних систем потрібно:

- геометрична і гранична подібність, при якій відношення величин для систем, що розглядаються повинні бути рівні між собою;
- кінематична подібність, де швидкості у відповідних точках повинні бути у такому ж відношенні, як і швидкості у інших відповідних точках, тобто шляхи руху пульпи повинні бути подібними;
- динамічна подібність, яка вимагає, щоб відношення сил у відповідних точках було б рівним відношенню сил в інших відповідних точках.

Якщо граничні умови фіксовані, можна подати одну змінну величину через інші змінні, тобто функціональну залежність потужності електродвигуна мішалки можна представити у вигляді функції від ряду незалежних змінних величин і визначити її в критеріях подібності:

$$N = f(D, \rho, \omega, \mu, g),$$

де  $D$  – діаметр мішалки, м;  $\rho$  – густина пульпи,  $кг/м^3$ ;  $\omega$  – швидкість обертання мішалки,  $с^{-1}$ ;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості, Па·с ( $Па \cdot с = кг/м \cdot с$ );  $g$  – прискорення вільного падіння,  $м/с^2$  кут нахилу пластини до напрямку потоку.

Таким чином, маємо п'ять розмірних величин, три з них:  $D$ ,  $\rho$  і  $\omega$  прийняті за основні. У відповідності до  $\pi$ -теорема тут можливі тільки два безрозмірних співвідношення, отже:

$$\pi = f(1,1,1, \pi_4, \pi_5)$$

або

$$\frac{N}{D^x \rho^y \omega^z} = f\left(1,1,1, \frac{\mu}{D^{x_1} \rho^{y_1} \omega^{z_1}}, \frac{g}{D^{x_2} \rho^{y_2} \omega^{z_2}}\right).$$

Враховуючи рівність розмірностей для чисельника і знаменника, знайдемо показники степені:

для потужності електродвигуна мішалки :

$$[N] = [D^x \rho^y \omega^z]$$

або

$$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^3 = (\text{м})^x (\text{кг} / \text{м}^3)^y (1 / \text{с})^z,$$

звідки

$$3 = z \text{ (показники зліва і справа при с);}$$

$$1 = y \text{ (показники зліва і справа при кг);}$$

$$2 = x - 3y \text{ (показники зліва і справа при м).}$$

Рішення цих рівнянь дає:  $x = 5$ ;  $y = 1$ ;  $z = 3$ .

Функціональна залежність:

$$\pi = \frac{N}{D^5 \rho \omega^3}.$$

Аналогічно одержимо:

– для в'язкості:

$$[\mu] = [D^{x_1} \rho^{y_1} \omega^{z_1}]$$

маємо  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 1$ ;  $z_1 = 1$ .

Функціональна залежність:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{D^2 \rho \omega};$$

– для прискорення вільного падіння:

$$[g] = [D^{x_2} \rho^{y_2} \omega^{z_2}]$$



маємо  $x_2 = 1$ ;  $y_2 = 0$ ;  $z_2 = 1$ .

Функціональна залежність:

$$\pi_5 = \frac{g}{D\omega^2};$$

Очевидно, що  $\pi_4 = D^2 \cdot Re$ ,  $\pi_5 = Fr$ . Тоді шукана функціональна залежність має вигляд:

$$\frac{N}{D^5 \rho \omega} = f(D^2 Re, Fr).$$

Звідси можна зробити висновок, що після знаходження функціональної залежності потужності електродвигуна мішалки при деяких її параметрах, можна встановити якою вона буде й при інших розмірах і швидкостях і т.п. у тому випадку, якщо безрозмірні відношення для обох випадків будуть однакові. Отже, висновки, отримані на експериментальному пристрої будуть справедливими і для будь-яких інших при умові рівності безрозмірних відношень  $\pi$  з тими, що спостерігалися при експериментах.

**Приклад 2.5.** Досліджується процес збагачення у важкосередовищному сепараторі. На параметричній схемі процесу важкосередовищної сепарації (рис. 2.5) вказані вхідні, вихідні і контрольовані параметри, а також можливі переешкоди:

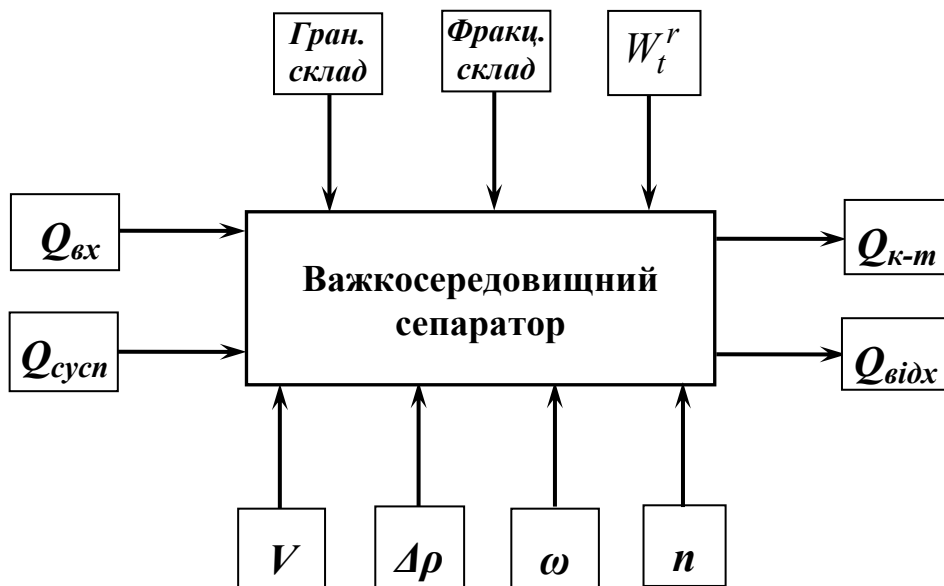


Рис. 2.5 - Параметрична модель важкосередовищної сепарації.

– вхідні і контрольовані параметри:  $Q_{\text{вх}}$  – продуктивність сепаратора по вихідному матеріалу;  $Q_{\text{сусп}}$  – витрати суспензії;  $V$  – об'єм ковша;  $\Delta\rho$  – різниця у густинах суспензії і вилучаємої фракції;  $\omega$  – швидкість обертання елеваторного колеса;  $n$  – число ковшів елеваторного колеса;

– вихідні і контрольовані параметри:  $Q_{\text{к-т}}$  – продуктивність сепаратора по концентрату;  $Q_{\text{відх}}$  – продуктивність сепаратора по відходах;

– перешкоди (невраховані параметри, що впливають на процес): вологість, гранулометричний і фракційний склад.

У прикладі, що розглядається:

Перевіряємо, чи достатня для розрахунку моделі кількість параметрів, для чого записуємо розмірності усіх величин:  $[Q_{\text{вх}}] = \text{кг/с}$ ;  $[Q_{\text{сусп}}] = \text{м}^3/\text{с}$ ;  $[\Delta\rho] = \text{кг/м}^3$ ;  $[V] = \text{м}^3$ ;  $[\omega] = \text{с}^{-1}$ ;  $[Q_{\text{відх}}] = \text{кг/с}$ ;  $[n] = 8$ .

Основних розмірних величин  $t = 3$  (кг, м, с), тому у розрахунках може бути використано:

$$n = t + 1 = 4 \text{ параметри, тобто } Q_{\text{відх}}, V, \Delta\rho, \omega.$$

Оскільки враховані не всі параметри, у функціональну залежність між обраними параметрами додається коефіцієнт  $k$ :

$$Q_{\text{відх}} = k(V, \omega, \Delta\rho, n)$$

або з використанням основних одиниць вимірювання  $M, L, T$ :

$$\frac{M}{T} = k \left( (L^3)^x \left( \frac{1}{T} \right)^y \left( \frac{M}{L^3} \right)^z \right)$$

звідки

$$\begin{aligned} 0 &= 3x - 3z \text{ (показники зліва і справа при } L); \\ -1 &= -y - 3z \text{ (показники зліва і справа при } T); \\ 1 &= z \text{ (показники зліва і справа при } M). \end{aligned}$$

Таким чином,  $x = 1$ ;  $y = -2$ ;  $z = 1$ , тобто функціональна залежність продуктивності сепаратора по відходах від об'єму ковша, швидкості обертання елеваторного колеса і різниці в густині суспензії і вилучаємої фракції має вигляд:

$$Q_{\text{відх}} = k \frac{V \cdot \Delta\rho \cdot n}{\omega^2}.$$

Величина коефіцієнта  $k$  визначається на основі попередніх досліджень при фіксованих параметрах:  $V = 0,25 \text{ м}^3$ ;  $\Delta\rho = 100 \text{ кг/м}^3$ ;  $\omega = 0,035 \text{ с}^{-1}$ ;  $n = 8$ , в результаті яких встановлено, що  $Q_{\text{відх}} = 42 \text{ кг/с}$ :

$$k = \frac{Q}{V \cdot \Delta\rho \cdot \omega^{-2} \cdot n} = \frac{42}{0,25 \cdot 100 \cdot 0,035^{-2} \cdot 8} = 1,9 \cdot 10^{-4}.$$

Формула  $Q_{\text{відх}} = 1,9 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{V \cdot \Delta\rho \cdot n}{\omega^2}$  є математичною моделлю

процесу, який досліджувався.

Слід мати на увазі, що чим менше значення коефіцієнта  $k$ , тим більше значення розглянутих параметрів.

**Приклад 2.6.** Досліджується процес транспортування концентрату крупністю 0,5 – 13 мм зневоднюючим елеватором багер-зумпфа:

– вхідні і контрольовані параметри:  $\omega$  – місткість ковша елеватора по твердому;  $\rho$  – густина живлення;  $V$  – швидкість руху ланцюга елеватора;

– вихідний і контрольований параметр:  $Q$  – продуктивність зневоднюючого елеватора багер-зумпфа по класу 0,5 – 13 мм;

– постійний параметр: коефіцієнт заповнення ковшів  $\varphi = 0,5$ .

У прикладі, що розглядається:

Перевіряємо, чи достатня для розрахунку моделі кількість параметрів, для чого записуємо розмірності усіх величин:  $[\omega] = \text{м}^3$ ;  $[\rho] = \text{кг/м}^3$ ;  $[V] = \text{м/с}$ .

Основних розмірних величин  $t = 3$  (кг, м, с), тому у розрахунках може бути використано:

$$n = t + 1 = 4 \text{ параметри, тобто } Q, V, \rho, \omega.$$

Оскільки враховані не всі параметри, у функціональну залежність між обраними параметрами додається коефіцієнт  $k$ :

$$Q = k(V, \omega, \rho)$$

або з використанням основних одиниць вимірювання  $M, L, T$ :

$$\frac{M}{T} = k \left( (L^3)^x \left( \frac{L}{T} \right)^y \left( \frac{M}{L^3} \right)^z \right)$$

звідки

$$\begin{aligned} 0 &= 3x + y - 3z \text{ (показники зліва і справа при } L); \\ -1 &= -y \text{ (показники зліва і справа при } T); \end{aligned}$$

$I = z$  (показники зліва і справа при  $M$ ).

Таким чином,  $x = 2/3$ ;  $y = 1$ ;  $z = 1$ , тобто функціональна залежність продуктивності зневоднюючого елеватора багер-зумпфа по класу 0,5 – 13 мм від об'єму ковша, швидкості руху ланцюга елеватора і густини живлення має вигляд:

$$Q = kV\omega\sqrt[3]{\delta^2}.$$

Величина коефіцієнта  $k$  визначається на основі попередніх досліджень при фіксованих параметрах:  $V = 0,25$  м<sup>3</sup>/с;  $\rho = 1400$  кг/м<sup>3</sup>;  $\omega = 50 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup> в результаті яких встановлено, що  $Q = 1,5$  кг/с, крім того, слід врахувати коефіцієнт заповнення ковшів  $\varphi = 0,5$  і тоді:

$$k = \frac{Q}{\varphi \cdot V \cdot \omega \cdot \rho^{2/3}} = \frac{1,5}{0,5 \cdot 0,25 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1400^{2/3}} = 8,32.$$

Формула  $Q = 8,32 \cdot V\omega\sqrt[3]{\delta^2}$  є математичною моделлю процесу транспортування концентрату крупністю 0,5 – 13 мм зневоднюючим елеватором багер-зумпфа.

Слід мати на увазі, що чим менше значення коефіцієнта  $k$ , тим більше значення розглянутих параметрів.

## 2.3. Моделювання на основі методу аналогій

### 2.3.1. Методи аналогій

Якщо два або декілька явищ, різних за своєю фізичною природою, можуть бути описані одним й тим же диференціальним рівнянням із збереженням граничних умов, то ці явища називають аналогічними. Метод аналогій розширює можливості вивчення явищ і уже давно одержав широке розповсюдження [9, 13].

М.С. Жуковський ще в 1900 р. у своїй доповіді на засіданні Московського математичного товариства говорив, що «встановлення математичної аналогії між двома явищами приносить подвійну користь. Ми можемо на основі знайденої аналогії усі вирішені задачі з однієї галузі фізичних явищ перетворити у відповідні задачі іншої і отримати, таким чином, їхнє рішення. З іншого боку, якщо одне з двох математично аналогічних явищ складне і важко спостережуване, а інше може бути здійснене на простому приладі, який дозволяє виміряти параметри, що характеризують явища, то експериментальне вивчення другого явища може розширити наше знайомство з першим, на дивлячись на те, що явища можуть представляти нерозв'язну математичну задачу».

Сьогодні у багатьох галузях технічної механіки взагалі і в механіці рідин та газів зокрема успішно використовуються електричні, газогідравлічні, акустичні, магнітні, теплові та інші аналогії. В гідродинаміці застосовують такі аналогії: електрогідродинамічна (ЕГДА), газогідравлічна (ГАГА), гідромагнітна (МАГА), мембранна, ламінарна, тепла і дифузійна.

Перші п'ять аналогій належать до аналогій безвихрового руху ідеальної нестисливої рідини, потенціал швидкості і функція течії якого задовольняють рівнянню Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

Граничні умови для тіла яке обтікається потенціальним потоком ідеальної рідини будуть:

– на поверхні тіла внаслідок непроникності твердої стінки нормальна складова швидкості дорівнює нулю, тобто:

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0; \quad (2.78)$$

– на нескінченності при плоскопаралельному потоці, направлено-му вздовж осі  $x$ :

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_1 \quad \text{і} \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.79)$$

*Електрогідродинамічна аналогія (ЕГДА)* базується на тому, що електричний потенціал  $\varphi_e$  і функція течії  $\psi_e$  задовольняють рівнянню Лапласа (2.77).

Граничні умови в електричному полі залежать від того, чи є тіло провідником, чи діелектриком. Якщо тіло, яке знаходиться у електричному полі, діелектрик, то граничні умови будуть:

– на поверхні тіла:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial s} = 0; \quad (2.80)$$

– на нескінченності:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = q_1 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = 0, \quad (2.81)$$

де  $q_1$  – напруженість електричного поля на нескінченності.

Якщо модель виготовлена з електропровідного матеріалу, то граничні умови будуть:

– на поверхні тіла:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial s} = 0; \quad (2.82)$$

– на нескінченності:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = q_1. \quad (2.83)$$

Порівнюючи наведені граничні умови, можна легко бачити, що для здійснення аналогії повинні дотримуватися такі відповідності:

– якщо у електричному полі помістити тіло з непровідного матеріалу, то гідродинамічним величинам – потенціалу швидкості, функції течії і швидкості на нескінченності – відповідають електричний потенціал, функція течії і напруженість електричного поля на нескінченності. Будемо називати цю аналогію аналогією *A*. Очевидно, що при аналогії *A* лінії течії електричного і гідродинамічного полів збігаються, а вектори електричного струму мають той же напрямок, що й вектори швидкості;

– якщо тіло провідник, то потенціалу швидкостей і функції течії у гідродинамічному полі відповідає потенціал і функція течії у електричному полі. Відповідність швидкості і напруженості електричного поля на нескінченності залишається таким самим, як і у попередньому випадку. Будемо називати цю аналогію аналогією *B*. При дотриманні її вектори електричного струму і швидкості в усьому полі ортогональні.

Однорідне електричне поле, у якому вивчається обтікання профілю, може бути створене в рідкому електроліті, налитому у ванну, за допомогою електропровідного паперу, фольги, тонкого шару електропровідної фарби та ін. В практиці частіше за все використовуються ванни, заповнені чистою водопровідною водою, розчинами мідного купоросу, сірчаної і соляної кислоти. Концентрація розчинів повинна бути дуже

малою (0,002 – 0,005 %), тому що в протилежному випадку відбуваються електрохімічні процеси і склад електроліту змінюється.

На рис. 2.6 наведені схеми електролітичних ванн для моделей, виготовлених з провідних (рис. 2.6 а) і невідідних (рис. 2.6 б) матеріалів.

При вивченні потоків в патрубках, колінах, дифузорах та інших елементах машин форма ванни визначається формою досліджуваного елемента.

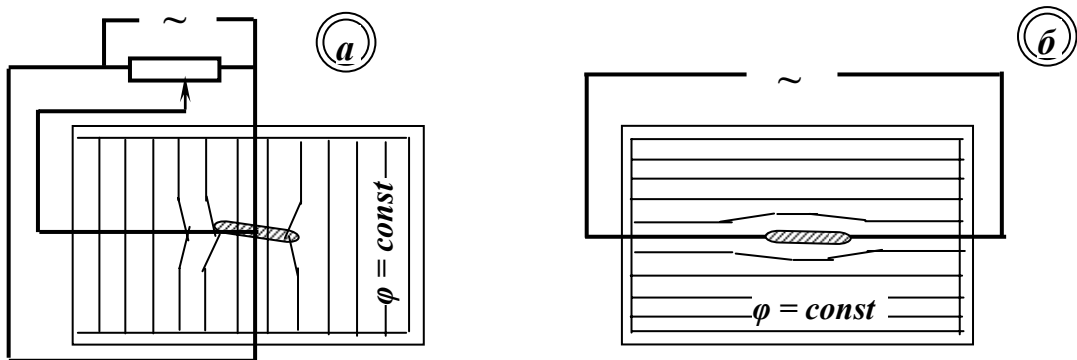


Рис. 2.6 - Схеми електролітичних ванн для моделей з провідних (а) і невідідних (б) матеріалів.

Гідромагнітна аналогія (МАГА) основана на тому, що скалярний потенціал магнітного поля  $\varphi_m$  задовольняє при постійному значенні магнітної проникності рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0. \quad (2.84)$$

Оскільки компоненти напруженості магнітного поля дорівнюють:

$$H_x = -\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x}; \quad H_y = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y}, \quad (2.85)$$

то, відповідно, при виконанні однакових граничних умов магнітному потенціалу буде відповідати гідродинамічний потенціал, а проєкціям швидкості в потоці будуть відповідати проєкції вектора напруженості магнітного поля.

Ця аналогія через складності вимірювань параметрів магнітного поля поки що не отримала широкого розповсюдження.

Мембранна аналогія основана на тому, що прогин ненавантаженої мембрани  $z$  задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (2.86)$$

тобто прогин відповідає гідродинамічній функції  $\psi$ . Тоді швидкість плоского потоку нестисливої рідини можна визначити через прогин у вигляді:

$$v_x = -\frac{\partial z}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (2.87)$$

і

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.88)$$

Рівняння навантаженої мембрани є рівнянням Пуассона і має вигляд:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{\tau}, \quad (2.89)$$

де  $p$  – залишковий тиск на мембрану;  $\tau$  – натяг мембрани.

Останнє рівняння має у гідродинаміці своїм аналогом рівняння функції течії плоского вихрового потоку ідеальної нестисливої рідини в обертовій системі координат:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\varpi, \quad (2.90)$$

де  $\varpi$  – кутова швидкість обертання системи координат.

При використанні мембранної аналогії частіше за все застосовують мильні, білкові й гумові плівки. Апаратура і методика мембранної аналогії добре розроблені.

*Ламінарна аналогія* оснований на тому, що для ламінарного руху в'язкої рідини між двома близько розташованими пластинками існує потенціал середніх швидкостей. Відповідно, якщо між пластинами помістити будь-яке тіло, то спектр обтікання його буде відповідати обтіканню цього тіла ідеальною рідиною.

Ламінарна аналогія у порівнянні з розглянутими має ту перевагу, що вона дає візуалізацію ліній течії, в тому числі й для нестационарних процесів. Її недолік – менша точність вимірювань і деяке відхилення за рахунок адгезії (прилипання) рідини до обтічних тіл.

### 2.3.2. Моделювання плоских потоків на основі електрогідродинамічної аналогії (ЕГДА)

Математичним аналогом поля швидкості у потоці ідеальної рідини може служити як стаціонарне електричне поле в потоці однорідного провідного середовища (аналогія  $v, E$ ), так і органічно зв'язане з ним



поле густини струму (аналогія  $v, j$ ). Оскільки звичайно на електричних моделях безпосередньо вимірюють величини  $E$  і  $\varphi$  (а не величини  $j$  і  $\varphi_j$ ), то слід скористатися аналогією  $v, E$ , однак аналогія  $v, j$  є більш повною [13]. Дійсно, на поверхні провідника, по якому протікає струм, дотична складова вектора  $E$  залишається безперервною і тут розподілені тільки джерела електричного поля, у той час як на межі рухомої рідини безперервна нормальна складова її швидкості і тут розподілені вихори вектора. Таким чином, реальним поверхневим вихорам вектора  $v$  на межі потоку відповідають лише фіктивні вихори вектора  $E$  другого роду на поверхні обтічного струмом провідника. Між тим поле густини струму повністю локалізоване всередині провідника, на поверхні якого існують реальні вихори вектора  $j$ , аналогічні вихорам вектора  $v$ . Величини, які порівнюються в аналогії  $v, j$ , наведені в табл. 2.7.

**Таблиця 2.7 – Величини, які порівнюються в аналогії  $v, j$ .**

Поле швидкості в ідеальній рідині	Поле густини струму в однорідному провідному середовищі
1. Швидкість течії рідини $v$	Густина струму $j$ або лінійна густина струму $i$ $j = \frac{1}{\rho} E; \quad i = \frac{1}{R} E,$ де $\rho$ – питомий опір середовища; $R$ – питомий поверхневий опір провідного шару.
2. Потенціал швидкості $V$ .	Потенціал вектора $j$ або потенціал вектора $i$ $\varphi_j = \frac{1}{\rho} \varphi; \quad \varphi_i = \frac{1}{R} \varphi.$
3. Співвідношення між швидкістю і її потенціалом $v = -grad V$	Співвідношення між густиною струму і її потенціалом $j = -grad \varphi_j; \quad i = -grad \varphi_i.$
4. $\Delta V = 0$	$\Delta \varphi_j = 0; \quad \Delta \varphi_i = 0.$

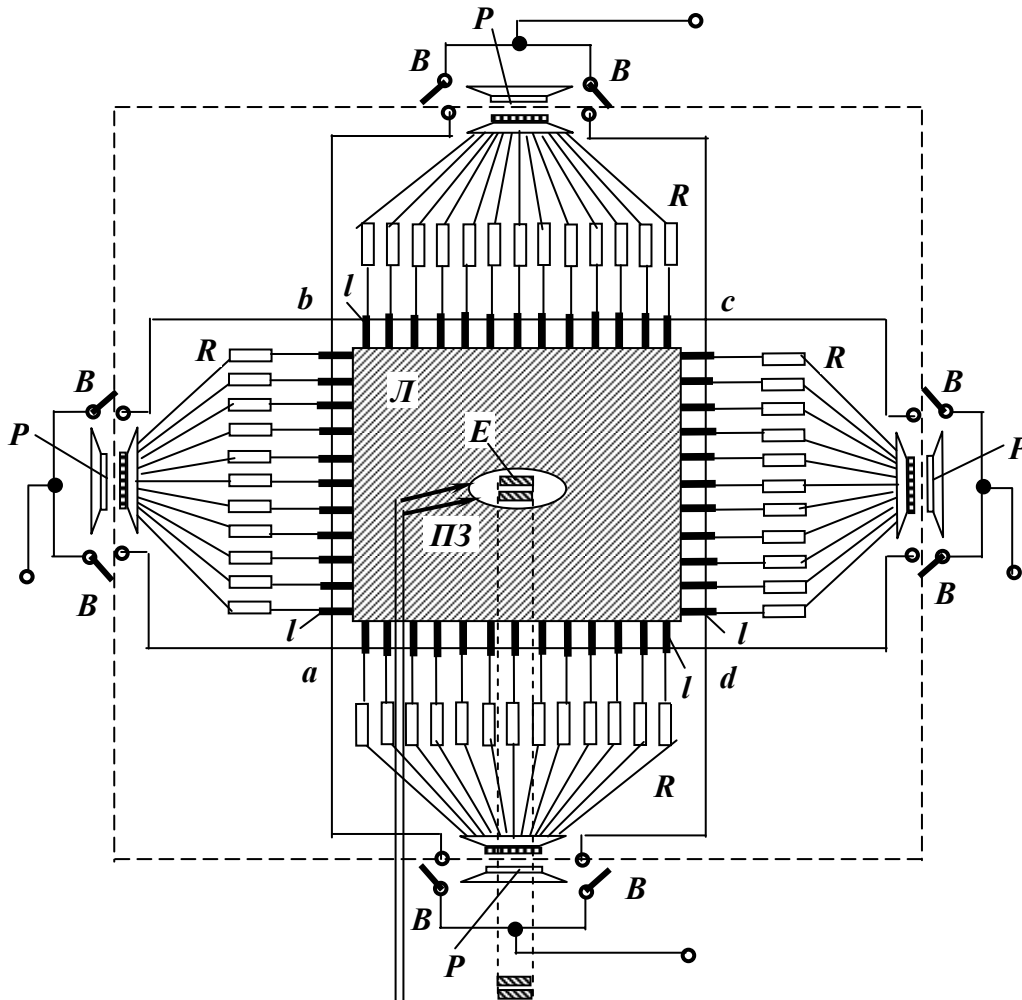
При побудові моделі використовують алюмінієву фольгу або провідний папір, у вигляді прямокутного аркуша з рамкою із мідного дроту діаметром:

$$d \approx 1,1\sqrt{\rho a / R}, \quad (2.91)$$

де  $\rho$  – питомий опір дроту;  $R$  – питомий поверхневий опір провідного аркуша;  $a$  – діаметр робочої зони у середній частині аркуша.

Рамка міцно притискається до аркуша болтами, при цьому її присутність не буде заважати створенню в аркуші подовжнього або попе-

речного зовнішнього однорідного поля. Для цього лише необхідно включити відповідні сторони рамки у ланцюг паралельно провідному аркушу і досягти в них такого ж розподілення потенціалу, яке встановлюється на аркуші без рамки. При цьому живлення аркуша здійснюється за допомогою рівномірно розподілених електродів, включених через достатньо великий опір (рис. 2.7).



**Рис. 2.7** - Принципова схема пристрою для накладення зовнішнього однорідного електричного поля і вихрового електричного поля торіодальних електромагнітів із застосуванням аркушів фольги (*Л*) розміром 200x50 см і товщиною 12 мк; *abcd* - рамка спаяна з мідного дроту діаметром 2,25 мм; *l* - латунні електроди, встановлені з кроком 2 см; - опір каналів; *B* - вимикачі; *P* - перемикачі режиму роботи; *ПЗ* - подвійний зонд; *Е* - торіодальний електромагніт.

У подовжньому режимі роботи відношення довжини підвідних дротів до довжини сторін рамки *bc* і *da* повинно дорівнювати відношенню сумарного опору живильних каналів до опору провідного аркуша. Відповідно у поперечному режимі відношення довжини підвідних дротів до довжини сторін рамки *ab* і *cd* повинно дорівнювати відношенню сумарного опору «поперечних» каналів до опору моделі при цьому способі включення її у ланцюг.

Розглянемо область двомірного електричного поля обмежену зовнішнім контуром  $abcd$  і внутрішнім контуром  $L$  (рис. 2.8), на яких виконуються граничні умови:

$$\varphi_{ab} = \varphi_1; \quad \varphi_{cd} = \varphi_2; \quad (2.92)$$

$$\psi_{da} = \psi_2; \quad \psi_{cd} = \psi_2; \quad (2.93)$$

$$E_n|_L = 0; \quad (2.94)$$

$$\oint_L E_l dl = 0, \quad (2.95)$$

при цьому усередині області мають місце рівності:

$$\operatorname{div} E = 0; \quad (2.96)$$

$$\operatorname{rot}_n E = 0, \quad (2.97)$$

де  $n$  – нормаль до площини вектора  $E$ .

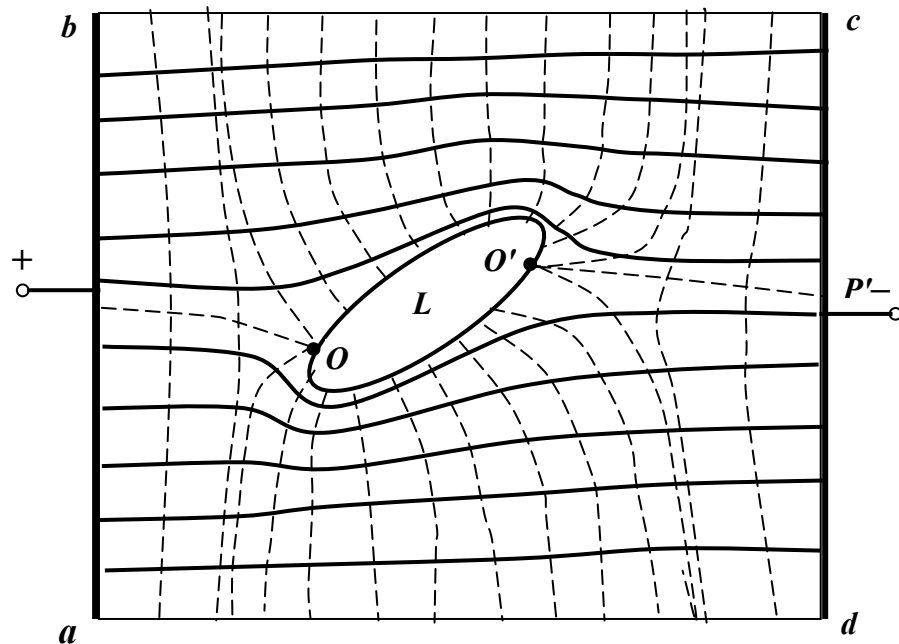


Рис. 2.8 - Пряма модель, на зовнішньому контурі якої ( $abcd$ ) виконуються граничні умови (2.92) і (2.93), на внутрішньому ( $L$ ) - умови (2.94) і (2.95).

Для того щоб відтворити це поле на прямій моделі, потрібно на листі провідного паперу заклеїти область обмежену профілем  $L$ . Підготовлений до роботи пристрій підключається до вторинної обмотки знижувального трансформатора. Лінійна густина струму повинна бути порядку 1 А/см. Накривши фольгу папером на ній олівцем проводять з постійним інтервалом силові лінії. Після побудови на прямій моделі ізопотенціальних ліній з потенціалом  $\varphi_L$ , знаходять особливі точки поля  $O$  і

$O'$ , які розділяють контур на дві частини; в одну з них струм входить, з іншої виходить. Вимірюють розподіл потенціалу вздовж контуру  $L$  з урахуванням співвідношення:

$$\psi^* = -\varphi; \quad \varphi^* = \psi. \quad (2.98)$$

На ділянці  $olo'$  відбувається падіння функції  $\psi$ , а на ділянці  $o'lo$  – її збільшення до попереднього значення. При цьому у точках  $O$  і  $O'$  функція  $\psi$  приймає відповідно максимальне і мінімальне значення, які дозволяють знайти відношення сили струму, що протікає через контур  $L$  на прямій моделі  $I_{oo'}$  до спільного струму в ній  $I$ :

$$\frac{I_{oo'}}{I} = \frac{\varphi_o^* - \varphi_{o'}^*}{\varphi_o^* - \varphi_b^*} = \frac{\varphi_o^* - \varphi_{o'}^*}{U^*}. \quad (2.99)$$

Таким чином, описаний пристрій дає можливість імітувати поле швидкості і обтікання тіла будь-якого профілю у необмеженому рідкому середовищі (напр., частинки в робочому каналі збагачувальної машини).

### **3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ**

#### **3.1. Статистичні методи оцінки експериментальних даних**

Одержання статистичних математичних моделей передбачає необхідність використання методів математичної статистики при дослідженнях мінеральної сировини на збагачуваність, створенні систем автоматичного управління технологічними процесами, прогнозуванні результатів збагачування корисних копалин на діючих збагачувальних фабриках.

Статистичні методи дозволяють визначити рівняння зв'язку вхідних і вихідних параметрів, аналізувати параметри технологічного процесу, побудувати математичну модель процесу, або, іншими словами, установити взаємну залежність між різними факторами і технологічними результатами процесу.

Статистичне дослідження промислового процесу включає:

- визначення законів розподілу параметрів процесу для виявлення можливості застосування тих або інших статистичних методів обробки результатів;
- визначення тісноти і форми зв'язку між окремими параметрами процесу;
- рейтингування вхідних величин за ступенем їх впливу на процес (функцію відгуку) ;
- отримання статистичної моделі процесу у вигляді регресійного рівняння і оцінка його адекватності;
- визначення динамічних характеристик процесу.

##### **3.1.1. Постановка задачі**

Збільшення споживання промисловістю металів, вугілля та інших корисних копалин ставлять задачі пошуку і освоєння нових видів мінеральної сировини (в тому числі важкозбагачуваних руд), розробки нових ефективних технологій збагачення корисних копалин і вдосконалення, оптимізації існуючих. Складність технологічного процесу збагачення, недостатній рівень розвитку теорії і необхідність урахування великої кількості факторів не дозволяють систематизувати різноманітну інформацію про збагачуваність різних типів корисних копалин і запропонувати спосіб апріорної оцінки збагачуваності на основі мінералогопетрографічного опису. Як правило, існує декілька прийнятних режимів збагачення, серед яких важко вибрати оптимальний [8, 14, 15].

Необхідність постановки великої кількості експериментів, множина методик досліджень, погана відтворюваність експериментів і суттєвий вплив на їхні результати великої кількості параметрів, що не реєструються, вносить елемент випадковості у результати оцінки збагачуваності корисної копалини. Досвід і кваліфікація дослідника, набір використаних апаратури і реагентів, термін досліджень і навіть пора року можуть вплинути на оцінку збагачуваності і вибір технологічної схеми переробки корисної копалини.

*Головними задачами* при дослідженні корисних копалин на збагачуваність є:

- дослідження властивостей сировини,
- розробка схеми збагачення з урахуванням комплексного використання сировини,
- відпрацювання технологічної режимної карти процесів,
- удосконалення технологічної схеми на діючій фабриці,
- випробовування розроблених режимів на діючій фабриці,
- випробовування нових реагентів,
- з'ясування механізмів дії і ступеня впливу основних факторів на результати збагачення і роботу машин,
- одержання вихідних даних для техніко-економічного обґрунтування будівництва нової фабрики (цеху) або модернізації діючої для збагачення досліджуваної сировини.

З усіх методів оцінки збагачуваності, що застосовуються у теоретичних, технологічних і проектних дослідженнях, експеримент вважається найбільш достовірним і розповсюдженим. Але навіть прямий лабораторний метод визначення збагачуваності дає можливість встановити тільки якісну оцінку впливу різних параметрів на технологічні показники, тому що досліди, як правило, мають погану відтворюваність. Аналогічні труднощі виникають у дослідженнях на напівпромислових установках і фабриках. Тут також немає стандартної методики порівняння різних режимів і оцінки надійності отриманих результатів, а суб'єктивні фактори і оцінки, хоча й меншою мірою, відіграють суттєву роль. Крім того, на результати досліджень суттєво впливають різні неконтрольовані чинники, що важко піддаються урахуванню (напр., знос обладнання, дрібні аварії, ненадійність усереднення проб, точність хімічних аналізів і т.д.).

*Послідовність статистичного дослідження процесів збагачення корисних копалин* може бути сформульована наступним чином:

- постановка мети дослідження, вибір параметрів оптимізації процесу, аналіз їхнього взаємозв'язку і областей застосування тих або інших параметрів;

- вибір методики експериментів, аналіз відтворювання й оцінка кількості паралельних вимірів для одержання результатів з необхідною вірогідністю;
- виділення факторів, що впливають на досліджуваний процес;
- складання плану експериментів, його реалізація й одержання статистичної моделі процесу і раціональних режимів його ведення;
- одержання кінетичної або динамічної моделі процесу (при необхідності).

### 3.1.2. Статистична оцінка результатів досліджень

#### 3.1.2.1. Оцінка похибок вимірювань

Відтворюваність лабораторних дослідів має велике значення при дослідженнях на збагачуваність, теоретичному вивченні процесів збагачення та їх моделюванні. У відповідності до теорії похибок розрізняють:

- *грубі похибки (промахи)* – результати, що різко відрізняються від інших вимірювань і є наслідком порушення умов вимірювання;
- *систематичні похибки*, що зв'язані з дефектом приладу або методу; їхня величина однакова при усіх вимірюваннях. До одного виду систематичних похибок відносяться похибки, природа яких відома і величину яких можна визначити (поправки), до другого – похибки, що виявляються тільки іншими методами вимірювання тієї ж величини;
- *випадкові похибки*, які залежать від множини факторів, що не контролюються. Випадкові похибки врахувати неможливо, їхню величину можна визначити тільки повторними вимірюваннями і статистичною обробкою результатів. Величина випадкової похибки характеризує відтворюваність вимірювання [8].

У відповідності до теорії імовірності випадкові похибки підпорядковуються нормальному закону розподілу (закону Гауса), за яким імовірність похибки:

$$P(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.1)$$

де  $\sigma^2$  – дисперсія розподілу;  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення.

Імовірність відхилення від середнього значення показана на рис. 3.1.

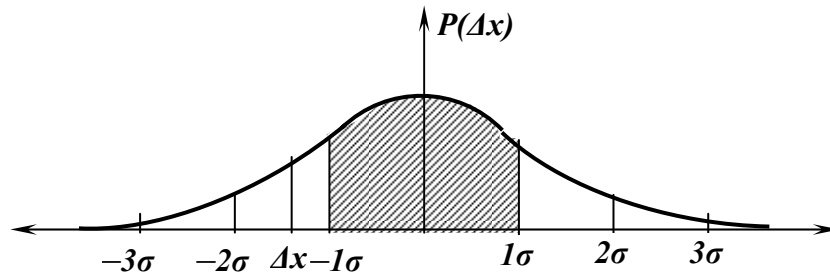


Рис. 3.1 – Імовірність відхилення від середнього значення на величину  $\sigma$  (заштрихована площа).

Оскільки істинне значення вимірюваної величини  $\mu$  і дисперсія  $\sigma^2$  невідомі, використовують їхні статистичні оцінки  $\bar{x}$  і  $S^2$ . Для ряду випадкової величини  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$   $\Delta x = \mu - x_i$ .

Середнє арифметичне  $\bar{x}$  для  $n$  значень величини  $x_i$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.2)$$

При обробці дуже великого матеріалу розрахунки можна спростити, якщо  $n$  спостережених значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  згрупувати у  $m$  інтервалів з середніми  $t_1, t_2, \dots, t_m$  при одній довжині інтервалу  $\Delta t$ . Якщо кожному з цих інтервалів відповідають частоти спостережень  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ , то середнє визначається виразом:

$$\bar{x} \approx \bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^m t_j \nu_j}{\sum_{j=1}^m \nu_j}. \quad (3.3)$$

Різниця між  $\bar{x}$  і  $\bar{t}$  буде невеликою, якщо число спостережень велике, а інтервали групувань малі. Кожну з частот ( $\nu_1, \nu_2$  і т.д.) можна назвати вагою відповідного значення, а  $\bar{x}$  буде середньозваженим значенням.

Вибіркова дисперсія (математичне сподівання):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad (3.4)$$



де  $S$  – середня квадратична похибка (стандартне відхилення).

Відносна квадратична похибка виражена у відсотках від випадкової величини, називається коефіцієнтом варіації:

$$V_x = 100S_x / \bar{x}, \% \quad (3.5)$$

Імовірність того, що результат вимірювань відрізняється від істинного значення на величину не більшу ніж  $\Delta x$ ,

$$P(\bar{x} - \Delta x < X < \bar{x} + \Delta x) = A \quad (3.6)$$

називається довірчим інтервалом або коефіцієнтом надійності.

Інтервал значень від  $\bar{x} - \Delta x$  до  $\bar{x} + \Delta x$  називається довірчим інтервалом, тобто з імовірністю, рівною  $A$ , результат не виходить за межі довірчого інтервалу від  $\bar{x} - \Delta x$  до  $\bar{x} + \Delta x$ . Чим більший довірчий інтервал задається, тим імовірніше, що результати вимірювань не вийдуть за його межі. Таким чином, для характеристики величини випадкової похибки необхідно задати два числа: величину похибки (або довірчого інтервалу) і величину довірчої імовірності.

За законом Гауса середній квадратичній похибці  $\sigma$  відповідає довірча імовірність 0,68, подвоєній середній квадратичній похибці  $2\sigma$  – довірча імовірність 0,95, потроєній середній квадратичній похибці  $3\sigma$  – довірча імовірність 0,997. При технічних дослідженнях, як правило, приймають довірчий інтервал при довірчій імовірності  $P = 0,95$ .

За законом випадкових похибок, якщо величина  $z$ , що вимірюється, є сумою або різницею двох випадкових величин  $X$  і  $Y$ , то:

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2 \quad \text{або} \quad S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}. \quad (3.7)$$

Закон складання дисперсій зберігається для будь-якого числа доданків, звідки витікає, що середня квадратична похибка середнього арифметичного:

$$S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n}. \quad (3.8)$$

Довірчий інтервал визначається за допомогою  $t$ -розподілу Ст'юдента (додаток А), що залежить від довірчої імовірності  $P$  і числа ступенів свободи  $f = n - 1$ :

$$\Delta x = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}. \quad (3.9)$$

Величина  $t_p$  дуже сильно залежить від  $f$  при малих її значеннях  $n$  ( $n < 30$ ), при великих значеннях  $n$  ( $n > 30$ ) ця залежність значно менше. З формули (3.9) при  $\Delta x = \delta$  випливає:

$$n \geq \frac{t_p^2 S_x^2}{\delta^2} . \quad (3.10)$$

Статистичні оцінки випадкової величини (середнє арифметичне  $\bar{x}$  і стандартне відхилення  $S_x$ ) розраховуються з припущення, що вибірка  $x_i$  не містить грубих похибок (промахів). Для виключення промахів з великої вибірки можна користуватися правилом  $2\sigma$  або  $3\sigma$ . Для промаху  $x^*$  розраховується абсолютне значення різниці  $|x^* - \bar{x}|$ . При довірчій імовірності  $P = 0,95$   $x^*$  відкидається, якщо  $|x^* - \bar{x}| > 2\sigma$ , а при  $P = 0,997$ , якщо  $|x^* - \bar{x}| > 3\sigma$ .

Для невеликих вибірок, коли  $S_x$  суттєво відрізняється від  $\sigma$  користуються критерієм Ст'юдента, при цьому порівнюють:

$$t = \frac{|x^* - \bar{x}|}{S_x} \quad (3.11)$$

з табличним значенням  $t_p$  (додаток А). Якщо  $t > t_p$ , то з довірчою імовірністю  $P$  можна вважати, що вимірювання  $x^*$  є груба похибка, але й при  $t \leq t_p$  не можна говорити про відсутність грубої похибки, а можна тільки говорити про недостатні підстави для виключення даного вимірювання. Після виключення грубої похибки оцінки  $\bar{x}$  і  $S_x$  необхідно знов перерахувати та розглянути питання про промахи у вибірці, що залишилась.

### 3.1.2.2. Статистичні критерії розходження

В ході досліджень, особливо промислових, накопичується значний обсяг експериментального матеріалу у вигляді показників збагачення, характеристик корисної копалини і т.д., які відповідають однаковим або різним технологічним режимам, конструкціям апаратів і типам корисних копалин. При цьому виникають наступні запитання:

– чи однорідні показники збагачення, що отримані при різних режимах або конструкціях апаратів, чи ці вибірки відносяться до різних статистичних сукупностей;

– чи однаково стабільні результати, що отримані при різних режимах, чи у якомусь випадку показники менш стабільні і розкид даних більше;

- чи відноситься та або інша проба корисної копалини або результат до даної статистичної сукупності;
- чи відповідає даний емпіричний розподіл тому або іншому теоретичному розподілу;
- чи адекватна вибрана математична модель експериментальним даним.

Ці запитання вирішуються перевіркою статистичної гіпотези про приналежність усіх отриманих даних до однієї генеральної сукупності. Загальний підхід полягає у перевірці нульовій гіпотези  $H_0$  про відсутність реального розходження між експериментальними результатами, розкид яких пояснюється випадковими факторами, що обумовлюють помилку відтворюваності [6, 8].

*Нульовою гіпотезою ( $H_0$ )* називається висунута гіпотеза, відхилення від якої вважаються випадковими, протилежна їй гіпотеза ( $H_1$ ) – *альтернативною або конкуруючою*.

*Критерій перевірки гіпотези* дозволяє виявити за результатами дослідів вірна чи невірна дана гіпотеза. Критерій складається на основі статистики  $Q_n = Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , розподіл якої відомий (нормальний,  $t$ ,  $F$  або  $\chi^2$ ). Критерій поділяє множину можливих значень статистики на область прийняття гіпотези та область її неприйняття (критичну). У випадку попадання статистики критерію у область неприйняття гіпотези  $H_0$  вона відкидається. Можливі такі випадки:

- гіпотеза  $H_0$  вірна і приймається у відповідності з критерієм;
- гіпотеза  $H_0$  невірна і відкидається у відповідності з критерієм;
- гіпотеза  $H_0$  вірна, але її відкидають у відповідності з критерієм (*похибка першого роду*);
- гіпотеза  $H_0$  невірна, але її приймають (*похибка другого роду*).

Справедливість нульової гіпотези перевіряється розрахунком імовірності того, що внаслідок випадковості вибірки розходження може досягнути фактично спостережної величини; якщо ця імовірність виявиться дуже малою, то нульова гіпотеза відкидається (тобто малоімовірно, що розходження спричиняється випадковими величинами, а не реальним розходженням). Імовірність  $P$ , яку приймають за основу при статистичній гіпотезі, визначає рівень значимості.

За результатами, що одержані для двох вибірок, розраховують значення деякої контрольної величини  $\lambda$  і визначають область  $A$ , в середині якої слід очікувати  $\lambda$  з визначеною імовірністю  $P$ . Якщо контрольна величина  $\lambda$  лежить поза областю  $A$ , то вибрана гіпотеза відкидається, розходження між одержаними величинами вважається статистично значимим. Якщо контрольна величина  $\lambda$  лежить в області  $A$ , то вибрана гіпотеза приймається. Відкинути або прийняти статистичну гіпотезу вирішують на основі вибіркових вимірювань, тому слід оцінити можли-

вість похибки. Якщо, наприклад, з імовірністю  $P$  відкидають гіпотезу про те, що два середніх значення  $x_1$  і  $x_2$  належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності, то з цього можна зробити висновок про розходження цих значень. Імовірність того, що обоє середніх значення належать однієї і тієї ж генеральної сукупності, буде  $\alpha = 1 - P$ .

Як правило, задають імовірність похибки першого роду  $\alpha$ , яку називають *рівнем значимості*, похибка другого роду визначається імовірністю  $1 - \beta$ , де  $\beta$  – імовірність того, що похибка не буде допущена, це – *міцність критерію*. Рівень значимості  $\alpha$  приймають рівним  $0,05$ ;  $0,1$ ;  $0,01$  або  $0,005$ . Вибір довірчої імовірності  $P$  визначається конкретними задачами дослідження. При цьому слід урахувати, що зі зменшенням  $\alpha$  зростає імовірність похибки другого роду.

При прийнятті або відкиданні гіпотези використовують три правила:

– гіпотеза, що перевіряється, відкидається, якщо похибка першого роду може проявитися у менше ніж  $100\alpha = 1\%$  усіх випадків, тобто  $P \geq 0,99$ . Тоді розглянута різниця є значимою;

– гіпотеза, що перевіряється, приймається, якщо похибка першого роду може проявитися у більше ніж  $100\alpha = 5\%$  усіх випадків, тобто  $P \leq 0,95$ . Тоді розглянута різниця є незначимою;

– гіпотезу, що відкидається, слід додатково обговорити, якщо число можливих похибок першого роду лежить в інтервалі між  $5$  і  $1\%$  ( $0,95 < P < 0,99$ ). Необхідно провести додаткові дослідження.

Суть похибок першого і другого роду можна пояснити таким прикладом. Нехай нульова гіпотеза  $H_0$  означає, що вміст корисного компонента у концентраті задовольняє вимогам споживача (умови постачання). Якщо поставка концентрату відхиляється, хоча  $H_0$  вірна, то ризкує виробник – похибка першого роду. Якщо поставка концентрату приймається, хоча  $H_0$  невірна, то ризкує споживач – похибка другого роду.

Таким чином, гіпотеза або приймається, або відкидається. Прийняття гіпотези не означає того, що вона є єдино правильною. Прийнята статистична гіпотеза – це вірогідне твердження, що не суперечить досліду.

### 3.1.2.3. Критерій Ст'юдента (t-критерій)

#### *Порівняння середніх значень*

При порівнянні середніх значень сумісно розглядають довірчі інтервали двох статистичних сукупностей. Для оцінки довірчого інтервалу використовують  $t$ -критерій [2, 6, 8].

Нехай є дві статистичні вибірки:  $x$  – з параметрами  $\bar{x}$  і  $S_x$ , що одержані при  $n_x$  вимірювань і  $y$  – з параметрами  $\bar{y}$  і  $S_y$  при  $n_y$  вимірювань.

Розподіли  $x$  і  $y$  близькі до нормального. Нульова гіпотеза полягає у припущенні, що математичні очікування  $\mu_x$  і  $\mu_y$  рівні, тобто  $\mu_x - \mu_y = 0$ .

Якщо дисперсії  $S_x^2$  і  $S_y^2$  розрізняються незначно, розраховують середньозважене двох дисперсій і параметр  $t$ :

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}; \quad (3.12)$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}}. \quad (3.13)$$

Число ступенів свободи:

$$f = n_x + n_y - 2. \quad (3.14)$$

Якщо  $t > t_{95\%}$ , розходження між  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$  незначиме.

**Приклад 3.1.** При опробуванні двох збагачувальних блоків були отримані такі результати по зольності вугільних концентратів (табл. 3.1).

**Таблиця 3.1 – Результати опробування блоків**

$n$	I блок			II блок		
	$x_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$y_i$	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2$
1	7,10	-0,06	0,0025	6,95	0,05	0,0025
2	7,05	-0,10	0,0100	6,80	-0,10	0,0100
3	7,20	0,05	0,0025	7,05	0,15	0,0225
4	7,15	-	-	7,00	0,10	0,0100
5	7,30	0,15	0,0225	6,90	-	-
6	7,15	-	-	6,70	-0,20	0,0400
7	7,10	-0,05	0,0025	6,85	-0,05	0,0025
8	-	-	-	6,95	0,05	0,0025
$\Sigma$	50,05	-	0,0400	55,20	-	0,0900
Середнє	7,15	-	-	6,90	-	-

Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

\*Вибіркові дисперсії блоків I і II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,0400}{7 - 1} = 0,0067;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{0,0900}{8 - 1} = 0,0129.$$

*\*Середньозважена двох дисперсій:*

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} = \frac{(7 - 1) \cdot 0,0067 + (8 - 1) \cdot 0,0129}{7 + 8 - 2} = 0,0100.$$

*\*Критерій Ст'юдента*

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}} = \frac{7,15 - 6,90}{0,010} \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot 8}{7 + 8}} = 4,83.$$

При  $f = n_x + n_y - 2 = 7 + 8 - 2 = 13$  по таблиці значень критерію Ст'юдента (додаток А) знаходимо  $t_{0,95} = 2,16$ .

Таким чином, отримане значення параметру  $t$  більше табличного  $i$ , відповідно, й розходження між зольністю в блоках потрібно вважати значимим.

### **Порівняння сполучених пар**

Роботу двох апаратів або два технологічних режими часто доводиться порівнювати в різних умовах, наприклад при зміні якості корисної копалини, температурі пульпи і т.п. Попарне порівняння дозволяє виключити варіацію, що пов'язана з впливом інших факторів.

При цьому оцінюється не розходження середніх  $\bar{x} - \bar{y}$ , а різницю пар спостережень  $\Delta_i = x_i - y_i$ . Варіаційний ряд  $\Delta$  розглядається як самостійний з середнім  $\bar{\Delta}$ , дисперсією  $S_{\Delta}^2$  і числом ступенів свободи  $f = n - 1$ , де  $n$  – число сполучених пар спостережень. Тоді розраховують дисперсію і критерій Ст'юдента:

$$S_{\bar{\Delta}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)} ; \quad (3.15)$$

$$t_{\bar{\Delta}} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\bar{\Delta}}} \succ t_p. \quad (3.16)$$

Якщо  $t_{\bar{\Delta}} \succ t_p$ , розходження вважають значимим, і навпаки.

**Приклад 3.2.** Порівнювались два режими флотації вугільних шлаків. При однакових за вихідною сировиною та вилученням умовах отримані концентрати з зольністю, що наведена у табл. 3.2.

**Таблиця 3.2 – Результати опробування режимів флотації**

$n$	$x_i$	$y_i$	$\Delta_i = x_i - y_i$	$\Delta_i - \bar{\Delta}$	$(\Delta_i - \bar{\Delta})^2$
1	10,1	9,3	0,8	0,1	0,01
2	9,8	9,1	0,7	–	–
3	11,0	9,5	0,5	–0,2	0,04
4	11,3	9,8	0,5	–0,2	0,04
5	10,5	10,0	0,5	–0,2	0,04
6	9,2	9,0	0,2	–0,5	0,25
7	10,8	10,2	0,6	–0,1	0,01
8	10,6	9,6	1,0	0,3	0,09
9	10,4	9,7	0,7	–	–
10	11,3	9,8	1,5	0,8	0,64
$\Sigma$	105,0	96,0	7,0	–	1,12
Середнє	10,5	9,6	0,7	–	–

Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

\*Вибіркова дисперсія варіаційного ряду  $\bar{\Delta}$  :

$$S_{\bar{\Delta}}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1,12}{10(10-1)}} = 0,11.$$

\*Критерій Ст'юдента :

$$t_{\Delta} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\Delta}} = \frac{0,7}{0,11} = 6,36.$$

При  $f = n - 1 = 10 - 1 = 9$  по таблиці значень критерію Ст'юдента (додаток А) знаходимо  $t_{0,99} = 3,25$ .

Таким чином, отримане значення параметру  $t$  більше табличного  $i$ , відповідно, й розходження потрібно вважати значимим.

### 3.1.2.4. Послідовний аналіз Вальда

Якщо при дослідженні технологічного процесу кожний експеримент достатньо складний і трудомісткий, виникає задача зведення до мінімуму кількості таких експериментів за умови підтвердження гіпотези  $\bar{y} \geq \bar{x} + \Delta$  із заданою довірчою імовірністю  $P$  [8, 15]. Тут  $\Delta$  – наперед задана величина, яка приймається експериментатором виходячи з технологічних, економічних та ін. міркувань.

При використанні методу послідовного аналізу Вальда математична обробка результатів виконується не після завершення серії дослідів, а після кожного досліду. У результаті цієї обробки з'ясовується, чи можна прийняти одну з конкуруючих гіпотез (і яку саме) або продовжити дослідження. Число необхідних спостережень при цьому у середньому у три рази менше, ніж при класичному аналізі. Вальд показав, що при заданні похибки першого роду  $\alpha$  і похибки другого роду  $\beta$ , можна отримати у координатах  $\Sigma y_i - n_y$  три області, як показано на рис. 3.2.

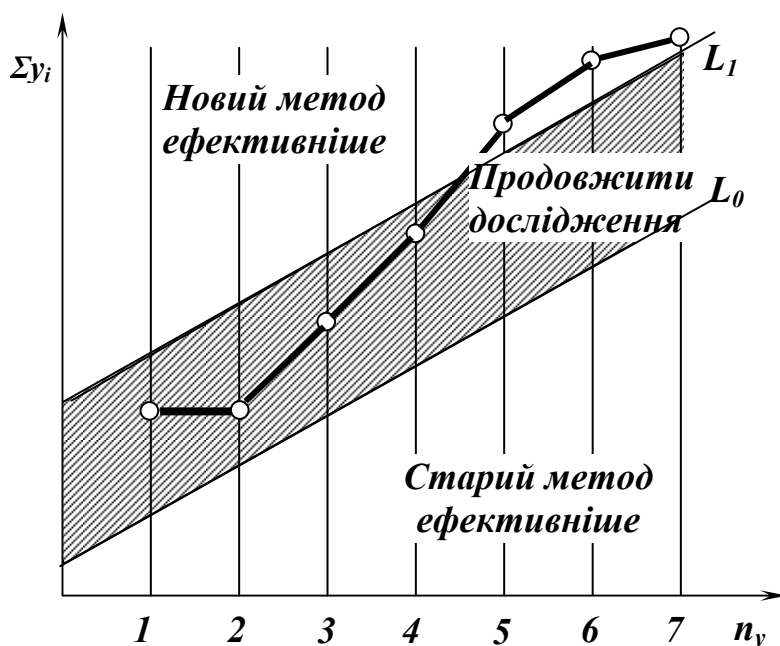


Рис. 3.2 – Порівняння варіантів при послідовному аналізі Вальда.



Рівняння ліній описуються рівняннями:

$$L_0 = an - b; \quad (3.17)$$

$$L_1 = an + b, \quad (3.18)$$

де

$$a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}; \quad b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}. \quad (3.19)$$

**Приклад 3.3.** Витрати при впровадженні системи автоматизації одного з технологічних вузлів збагачувальної фабрики окупляться, якщо вилучення корисного компоненту підвищиться не менше, ніж на  $\Delta\varepsilon = \bar{y} - \bar{x} = 2$  %. Середнє вилучення по фабриці складає  $\bar{x} = 82$  % при стандартному відхиленні  $\bar{S}_x = 0,8$  %. Оскільки дослідження з метою встановлення раціональності впровадження системи автоматизації технологічного вузла виявилися трудомісткими, було прийняте рішення використати метод Вальда.

Виконуємо розрахунки наступних параметрів:

\*Дисперсія  $S_y$  розраховується з використанням коефіцієнта варіації  $V_x$ :

$$V_x = S_{\bar{x}} / \bar{x} = 0,8 / 82 = 0,00976 = 0,976 \%$$

Прийmemo, що у будь-якому випадку  $V_y \leq V_x$ , тоді при

$$\bar{y} = \bar{x} + \Delta\varepsilon = 82 + 2 = 84$$

дисперсія  $S_y$ :

$$S_y = \bar{y} \cdot V_x = 84 \cdot 0,00976 = 0,82 \%$$

Виберемо  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$  та розрахуємо коефіцієнти  $a$  і  $b$ .

$$a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} = \frac{82 + 84}{2} = 83,$$

$$b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} = \frac{0,82^2}{2} \cdot \ln \frac{0,99}{0,01} = 1,55$$

Результати розрахунків статистичної оптимізації процесу наведені у табл. 3.3

**Таблиця 3.3 – Результати дослідження статистичної оптимізації процесу**

№ досліду	1	2	3	4	5	6
$Y_i$	83,1	83,5	83,8	84,2	84,0	84,3
$L_1=an+b$	84,55	167,55	250,55	333,55	416,55	499,55
$L_0=an-b$	81,45	164,45	247,45	330,45	413,45	496,45
$\Sigma Y_i$	83,1	166,6	250,4	334,6	418,6	502,9

Результати досліджень показують, що впровадження автоматизації технологічного процесу є доцільним, тому що вже на четвертому досліді система оптимізації показує ефект (вилучення корисного компоненту  $Y_i$  досягає максимуму 84,2%), а п'ятий і шостий досліді підтверджують наявність ефекту.

### 3.1.2.5. Критерій Фішера (F-критерій)

#### *Парне порівняння дисперсій*

Дві вибіркові сукупності можуть не розрізнятися значимо за своїм середнім значенням, але розрізнятися за стандартними відхиленнями (або дисперсіями). Задача порівняння дисперсій виникає при порівнянні точності різних приладів або методів вимірювання, а також в розглянутих вище застосуваннях  $t$ -критерію, коли доводиться попередньо перевіряти рівність дисперсій [8, 15].

Якщо різниця між ними лежить у межах можливих випадкових коливань, то ці вибірки належать до однієї генеральної сукупності. Нуль-гіпотеза полягає у припущенні, що  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . Для вирішення питання про випадкове або не випадкове розходження дисперсій розглядають відношення більшої емпіричної дисперсії до меншої:

$$S_1^2 / S_2^2 = F \succ 1. \quad (3.20)$$

Потім задають бажану надійність висновку  $P = 0,95$  або  $P = 0,99$  і по таблиці (додаток Б) критичне значення відношення  $F$ , що відповідає даним числам ступенів свободи  $f_1$  і  $f_2$  (число ступенів свободи  $f_1$  відноситься до більшої емпіричної дисперсії). Якщо відношення (3.20), розраховане за результатами досліджень, буде більше критичного значення, то розходження дисперсій вважають не випадковим (значимим) з надійністю  $P$ .

**Приклад 3.4.** При визначенні вмісту міді в концентраті використані два методи аналізу. Першим методом аналізу виконано 5 вимірювань, другим – 8. Результати дослідження методів аналізу наведено у табл. 3.4.

**Таблиця 3.4 – Результати дослідження методів аналізу**

n	I аналіз			II аналіз		
	$x_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$y_i$	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2$
1	27,5	0,04	0,0016	27,9	0,85	0,7225
2	27,0	- 0,44	0,1936	26,5	- 0,55	0,3025
3	27,3	- 0,14	0,0196	27,2	0,15	0,0225
4	27,6	0,16	0,0256	26,5	- 0,55	0,3025
5	27,8	0,36	0,1296	27,0	- 0,05	0,0025
6	–	–	–	27,4	0,35	0,1225
7	–	–	–	27,3	0,25	0,0625
8	–	–	–	26,8	0,25	0,0625
$\Sigma$	137,2	–	0,3700	216,4	–	1,6000
Середнє	27,44	–	–	27,05	–	–

Нуль-гіпотеза полягає у припущенні, що між методами аналізу немає розходження у відношенні відтворюваності результатів аналізів. Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

\*Вибіркові дисперсії I і II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,37}{5 - 1} = 0,0925;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{1,60}{8 - 1} = 0,2657.$$

\*Відношення більшої емпіричної дисперсії до меншої:

$$F = S_y^2 / S_x^2 = 0,2657 / 0,0925 = 2,87.$$

При  $f_x = 4$  і  $f_y = 7$  по таблиці значень критерію Фішера (додаток Б) знаходимо  $F_{(0,95; 4; 7)} = 6,09$ .

Таким чином, отримане значення параметру F менше табличного і, відповідно, припущення, що між методами аналізу немає розходження у відношенні відтворюваності результатів аналізів правильне.

### 3.1.2.6. Критерій Кохрена (G-критерій)

#### *Порівняння декількох дисперсій*

Якщо серед декількох приладів (або декількох серій вимірювань) виявлений прилад (серія вимірювань), емпірична дисперсія  $S_1^2$  якого помітно відрізняється від інших, необхідно з'ясувати, чи можна вважати відмінність виділеної дисперсії  $S_1^2$  від інших випадковою чи цю відмінність слід вважати значимою [8, 15]. Для відповіді на це питання кожним з  $m$  досліджуваних приладів роблять однакове число  $n$  вимірювань, підраховують емпіричні дисперсії  $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$  (при цьому  $S_1^2 < S_i^2$ ) і порівнюють найбільшу дисперсію з сумою усіх дисперсій:

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2} \cdot \quad (3.21)$$

Якщо відношення (3.21) буде більше критичного (додаток В), то відмінність першої дисперсії від інших вважається суттєвою, тобто перший прилад (перша серія вимірювань) володіє меншою точністю, ніж інші. У протилежному випадку для такого твердження немає достатніх підстав.

**Приклад 3.5.** *Кожна з чотирьох лабораторій виконала аналіз 17 проб шихти для коксування для визначення процентного вмісту сірки при одних і тих же умовах. Дисперсії виявилися рівними відповідно 0,40; 0,25; 0,34 і 0,21. Чи можна вважати, що усі вимірювання забезпечують однакову відтворюваність результатів, тобто розходження між дисперсіями незначиме?*

*Виконуємо розрахунок критерію G:*

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} = \frac{0,40}{0,40 + 0,25 + 0,34 + 0,21} = 0,3333.$$

*При числі ступенів свободи  $f = 16$  і числі вибірок  $k = 4$  по таблиці значень критерію Кохрена (додаток В) знаходимо  $G_{(0,95; 17; 4)} = 0,4884$ .*

*Таким чином, отримане значення параметру G менше табличного і можна зробити висновок, що розходження між дисперсіями незначиме і усі вимірювання забезпечують однакову відтворюваність результатів.*

### 3.1.2.7. Критерій Пірсона ( $\chi^2$ -критерій)

#### *Порівняння розподілу ймовірностей*

Критерій узгодженості Пірсона (критерій  $\chi^2$  або "критерій хі-квадрат") використовується для перевірки гіпотези про закон розподілу. Якщо необхідно порівняти не тільки основні параметри вибірки, а й увесь розподіл ймовірностей, застосовують критерій Пірсона  $\chi^2$  (додаток Г). Цим критерієм можна довести приналежність даної вибірки до нормального розподілу, довести, що два емпіричних розподіли належать до одного й того ж типу, визначити чи значимо відрізняється частота появи якої-небудь події від очікуваного значення у всіх інтервалах, де ці значення передбачені на основі теоретичних уявлень або математичної моделі [8, 15].

Нуль-гіпотеза полягає у припущенні, що між емпіричними і теоретичними розподілами не існує ніякого розходження. Вибірку з  $n$  значень ділять на  $m$  класів (інтервалів), при цьому повинно бути  $m \approx \sqrt{n}$ . Для кожного такого класу визначають абсолютну частоту  $h$  значень вимірюваної величини і порівнюють її з частотою  $h_t$ , що теоретично очікується у відповідності з моделлю:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t}. \quad (3.22)$$

Якщо теоретично знайдене значення  $h_t$  для окремих класів (інтервалів) достатньо велике ( $h_t > 5$ ), то воно буде належати  $\chi^2$ -розподілу з числом ступенів свободи  $f = m - k$ . При цьому  $k$  задається числом параметрів, що необхідні для характеристики вибірки. Для нормального розподілу  $k = 3$ .

Якщо  $\chi^2 > \chi_{(P; f)}^2$ , то гіпотеза, яка перевіряється, відкидається, тобто між емпіричним і теоретичним розподілами ймовірностей існує значиме розходження. Розходження незначиме, якщо  $\chi^2 < \chi_{(P; f)}^2$ .

**Приклад 3.6.** На збагачувальній фабриці за добу трьома змінами випущено надпланової продукції відповідно: 2, 13 і 15 т. Чи можна вважати розходження між кількістю надпланової продукції по змінах випадковим? Дані про роботу змін наведені у табл. 3.5.

**Таблиця 3.5 – Результати роботи змін**

Випуск надпланової продукції	Зміна			Разом
	I	II	III	
Фактичний	2	13	15	30
Очікуваний	10	10	10	30

*Очікувана кількість надпланової продукції повинна бути однаковою для кожної зміни і дорівнює  $h_t = 30/3 = 10$ .*

*Виконуємо розрахунок критерію  $\chi^2$ :*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t} = \frac{(2-10)^2}{10} + \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(15-10)^2}{10} = 9,8.$$

*Для рівня значимості  $\alpha = 0,05$  і числа ступенів свободи  $f = 3 - 1 = 2$  за табл. в додатку Г визначаємо параметр  $\chi^2 = 6,0$ . Значить випуск надпланової продукції значимо залежить від зміни.*

### **3.2. Моделювання із застосуванням «активних» і «пасивних» методів експерименту**

У практиці досліджень, оснований на плануванні експерименту і математичній обробці їх результатів одержали широке розповсюдження «пасивні» і «активні» методи експерименту.

Під «пасивним» експериментом звичайно розуміють одержання інформації про процес або об'єкти в умовах поточної експлуатації, при якій реєструються випадкові входні і вихідні параметри. Експериментатор знаходиться в становищі пасивного спостерігача. Завдання планування в цьому випадку зводиться до оптимальної організації збору інформації та вирішення таких питань, як вибір кількості та частоти вимірювань, вибір методу обробки результатів вимірювань. Методи обробки результатів «пасивного» експерименту базуються на класичних дисперсійному, кореляційному і регресійному аналізах.

На відміну від «пасивного» «активний» експеримент передбачає наперед заплановану зміну входних параметрів, що дозволяє значно скоротити кількість дослідів. Методи планування оптимальних експериментів базуються на так званій «активній статистиці» або «активному експерименті», які використовують методи крутого сходження, симплексного, еволюційного і ротатбельного центрально-композиційного планування [5].

Застосовують два методи планування експерименту: класичний (метод Зайделя-Гауса) і статистичний.

При *класичному методі* по чергово змінюється кожний фактор до визначення часткового максимуму при постійному значенні усіх інших факторів. Число дослідів необхідне для знаходження оптимальних умов процесу, залежить від числа факторів, взаємного впливу факторів і числа варіацій кожного з них. Мінімальне число дослідів буде відповідати припущенню, що взаємодія факторів відсутня, а максимальне число дослідів буде відповідати припущенню, що оптимальне значення будь-якого фактора буде суттєво змінюватись залежно від поєднання інших. Наприклад, при чотирьох факторах і п'яти варіаціях мінімально необхідне число дослідів буде  $5^4 = 625$ .

При дослідженні комплексних руд роблять вибірково постановку окремих серій дослідів. При цьому у більшості випадків удається підібрати не оптимальний режим збагачення, а тільки деяке наближення до нього. Постановка ж повного експерименту для урахування взаємодії факторів, якщо й можлива, то малокорисна, тому що до часу закінчення експериментів результати перших виявляються непорівнянні з останніми внаслідок неконтрольованих змін властивостей вихідних матеріалів, обладнання і т.д. Крім того, більшість результатів, що отримані у таких громіздких експериментах, не являють інтересу, так як немає необхідності знати залежність параметра оптимізації в області, яка знаходиться далеко від оптимальних умов досліджуваного процесу.

Область застосування класичного методу обмежується знаходженням часткових залежностей між двома-трьома параметрами. Ці залежності являють інтерес, головним чином для теоретичної інтерпретації, особливо у випадку наявності двох або декількох екстремумів. У цьому випадку необхідно отримати експериментальні точки в усьому діапазоні зміни параметра.

Якщо метою дослідження є встановлення оптимальних умов процесу, класичний метод неефективний. Крім того, складні системи, наприклад флотаційні, часто взагалі не допускають зміни одного фактора внаслідок їхнього внутрішнього взаємозв'язку. Зміна одного фактора може служити причиною зміни інших.

Методи *статистичного планування експериментів* оснований на одночасній зміні багатьох факторів, при цьому плани експериментів допускають таку наступну статистичну обробку даних, яка дозволяє виділити вплив кожного окремого фактора і їхньої сукупності на зміну вихідних параметрів процесу. Метод статистичного планування можна застосовувати при таких обмежуючих умовах:

– існує вихідний параметр (цільова функція, функція відгуку) процесу, що кількісно і однозначно визначає його ефективність (можливо при обмеженнях, що накладаються на інші вихідні параметри);

- функція відгуку безперервна, тобто при зміні значень факторів ця функція змінюється безперервно;
- функція відгуку має один екстремум, тобто існує одне оптимальне співвідношення факторів, при якому цільова функція має максимальне (мінімальне) значення;
- відомі усі фактори, що суттєво впливають на процес, а фактори, що плануються у експерименті, управляються, тобто можна змінювати їхнє значення за раніше складеним планом;
- результати експериментів відтворювані. Похибка відтворюваності суттєво менше зміни вихідного параметра під впливом заданої зміни значень вхідних факторів.

Експериментально-статистичні методи дозволяють навіть при низькому рівні теоретичних знань про механізм процесу одержати математичну модель, яка включає усі суттєві фактори незалежно від їхнього фізичного смислу. Ці методи дозволяють при значному скороченні кількості дослідів отримати більшу інформацію, ніж при класичному методі. Статистика дозволяє оцінити надійність отриманих результатів, розрахувати довірчі інтервали окремих дослідів, екстремальних точок і коефіцієнтів рівнянь.

Припустимо, що на процес впливає тільки один фактор, тоді зміна параметра оптимізації  $y$  в залежності від фактора  $x$  може бути представлена графічно у вигляді кривої  $ab$  (рис. 3.3) і аналітично:

$$Y = f(X). \quad (3.23)$$

Така функція називається функцією відгуку, екстремум якої має координати  $x_{opt}$  і  $y_{opt}$ . При плануванні першої серії дослідів рівень фактора  $x_0$  називається нульовим рівнем,  $\Delta x$  – інтервал варіювання,  $x_n$  – нижній рівень (кодується «-»),  $x_e$  – верхній рівень (кодується «+»). В результаті перших двох дослідів можна зробити висновок, що значення  $x$  необхідно збільшувати.

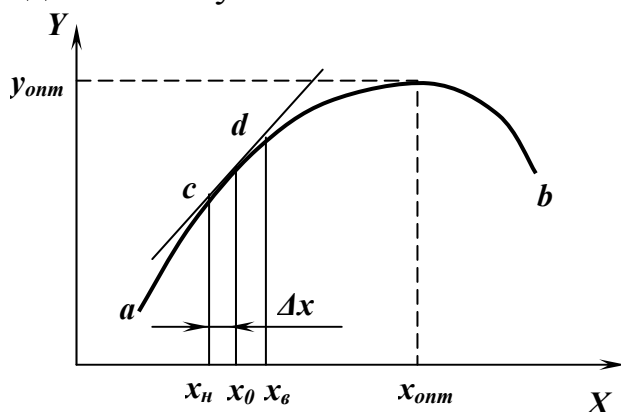


Рис. 3.3– Одномірна функція відгуку.



При двох факторах функція відгуку графічно може бути представлена як поверхня у тримірному просторі або рівнянням:

$$Y = f(X_1, X_2). \quad (3.24)$$

На рис. 3.4 нанесені криві рівного значення параметра оптимізації для двох змінних  $X_1$  і  $X_2$ .

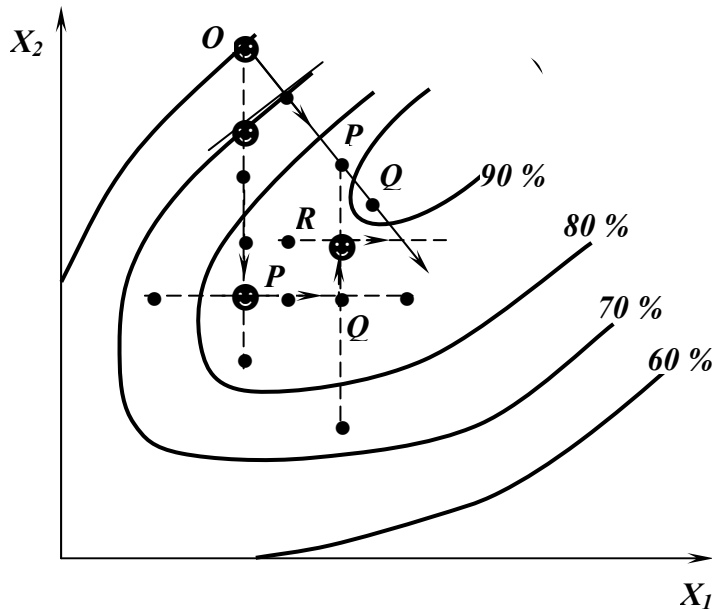


Рис. 3.4 – Рух до максимуму поверхні відгуку методами однофакторного експерименту і крутого сходження.

При класичному методі спочатку дослідник фіксує змінну  $X_1$ , рухається з точки  $O$  в напрямку змінної  $X_2$  і визначає точку  $P$ , що відповідає екстремальному значенню параметра оптимізації. В точці  $P$  фіксується змінна  $X_2$  і починається рух у напрямку осі  $X_1$ . Що дозволяє знайти точку  $Q$ . Знову фіксується  $X_1$  і продовжується рух по  $X_2$  і т.д. до досягнення оптимуму. Очевидно, що більш ефективним є план, за яким первісно визначається напрямок  $Q$ , а докладніше вивчення поверхні відгуку здійснюється в оптимальній області.

У випадку великого числа факторів графічне представлення функції неможливе, а загальний вигляд аналітичного рівняння, яке її описує:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.25)$$

Ефективність планування особливо відчутна при вивченні і моделюванні багатфакторних процесів.

Досліди повинні бути рандомізовані, тобто виконуватися у послідовності, яка встановлюється за допомогою таблиці випадкових чисел, або будь-якої процедури, що забезпечує випадковий характер проведення дослідів. Рандомізація дозволяє нівелювати систематичні (напр., періодичні) впливи факторів, що не контролюються.

### 3.2.1. «Пасивні» методи моделювання із застосуванням дисперсійного, регресійного і кореляційного аналізів

Обробка експериментальних даних при «пасивному» експерименті здійснюється з використанням дисперсійного, кореляційного і регресійного аналізів.

#### 3.2.1.1. Дисперсійний аналіз

В основу дисперсійного аналізу покладено принцип: якщо на випадкову величину діють взаємно незалежні фактори А, В, ..., то загальна дисперсія дорівнює сумі дисперсій, зумовлених дією окремо кожного з факторів:  $\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \dots$ . Таким чином, дисперсійний аналіз використовує властивість адитивності дисперсії випадкової величини, що обумовлено дією незалежних факторів.

У збагаченні корисних копалин похибка відтворюваності технологічних експериментів, яка оцінюється за допомогою дисперсії, може бути наслідком не однієї, а декількох причин або операцій. Так, наприклад, при дослідженні якості корисних копалин і продуктів їх збагачення дисперсія результатів може складатися з ряду компонентів: хімічного аналізу, відбору проби та збагачувального експерименту. Якщо відома величина компонентів дисперсії, удосконалюють відповідні операції, щоб найбільш ефективно знизити сумарну помилку експерименту [5, 8].

При напівпромислових та промислових дослідженнях важливість роздільної оцінки дисперсій, пов'язаних з варіацією сортності корисної копалини, точністю підтримки режиму збагачення і помилкою аналізу, визначається необхідністю підбору такого режиму збагачення, який одночасно з високими середніми показниками забезпечує високу стабільність результатів при зміні якості корисної копалини.

Рішення подібних задач складає предмет дисперсійного аналізу. За допомогою дисперсійного аналізу визначаються дисперсії, що обумовлені дією кожного фактора окремо і їх взаємодією, і оцінюється статистична значимість цих величин з урахуванням похибки відтворюваності.

Дисперсійний аналіз можна виконувати тільки при наступних умовах:

- серії вимірювань можна розглядати як випадкові вибірки з генеральних сукупностей, які підпорядковані нормальному розподілу;
- дисперсії, що обумовлені похибками відтворюваності, для усіх серій вимірювань однорідні. Якщо такої упевненості немає, необхідно перевірити однорідність дисперсій з використанням критеріїв Кохрена або Фішера.

### Однофакторний дисперсійний аналіз

У випадку дії на процес одного фактора (найпростіший випадок), задачу можна сформулювати таким чином: нехай спостерігають  $m$  незалежних нормально розподілених величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , та при цьому припускають, що усі вони мають одне й теж середнє квадратичне відхилення  $S$ . На кожному рівні (значенні) змінного вхідного фактора виконується  $n$  спостережень (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 – Результати спостережень

№ випробування, $i$	№ приладу (рівні фактора), $j$			
	1	2	3	$m$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1m}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2m}$
...	...	...	...	...
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nm}$
Групова середня, $\bar{x}_{2pj}$	$\bar{x}_{2p1}$	$\bar{x}_{2p2}$	...	$\bar{x}_{2pm}$

У задачі необхідно на рівні значимості  $\alpha$  перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх при допущенні, що групові генеральні дисперсії хоча й невідомі, але однакові.

Для рішення цієї задачі вводяться:

– *спільна сума* квадратів відхилень спостережених значень ознаки від спільної середньої:

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2; \quad (3.26)$$

– *факторна сума* квадратів відхилень групових середніх від спільної середньої (характеризує розсіювання між групами):

$$S_{факт} = m \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{2pj} - \bar{x})^2; \quad (3.27)$$

– *залишкова сума* квадратів відхилень спостережених значень групи від своєї групової середньої (характеризує розсіювання всередині груп):

$$S_{зал} = S_{cn} - S_{факт}. \quad (3.28)$$

Для обчислення спільної і факторної сум зручні такі формули:

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m P_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn}, \quad (3.29)$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn}, \quad (3.30)$$

де  $P_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}^2$  – сума квадратів спостережених значень ознаки на рівні  $m_j$ ;

$R_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$  – сума спостережених значень ознаки на рівні  $m_j$ .

Якщо спостережені значення ознаки є порівняно великими числами, то для спрощення обчислень віднімають з кожного значення одне й теж число  $C$ , яке приблизно дорівнює спільній середній. Якщо зменшені значення  $y_{ij} = x_{ij} - C$ , то

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (3.31)$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (3.32)$$

де  $Q_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}^2$  – сума квадратів зменшених значень ознаки на рівні  $m_j$ ;

$T_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$  – сума зменшених значень ознаки на рівні  $m_j$ .

Факторну і залишкову суми ділять на відповідне число ступенів свободи і знаходять факторну і залишкову дисперсії:

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{m-1}, \quad (3.33)$$

$$S_{зал}^2 = \frac{S_{зал}}{m(n-1)}. \quad (3.34)$$

Після цього порівнюють факторну і залишкову дисперсії по критерію Фішера:

$$F_{\text{спост}} = S_{\text{факт}}^2 / S_{\text{зал}}^2 . \quad (3.35)$$

Якщо  $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$  – розходження групових середніх незначиме.

Якщо  $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$  – розходження групових середніх значиме.

Якщо факторна дисперсія виявиться меншою залишковою, то звідси випливає справедливність нульової гіпотези про рівність групових середніх, тому подальші обчислення (порівняння дисперсій за допомогою критерію  $F$ ) зайві.

Однофакторний аналіз вимагає не менше трьох градацій фактора і не менше двох випробувань у кожній градації.

**Приклад 3.7.** При сумісному аналізі точності групи вимірювальних приладів (потенціометрів) вирішується питання: чи можна вважати їхні систематичні похибки однаковими. Число потенціометрів –  $m$  ( $m = 3$ ) і кожний з них вимірює рН однієї і тієї ж пульпи  $n$  раз ( $n = 4$ ). Результати досліджень наведені у табл. 3.7.

**Таблиця 3.7 – Результати досліджень**

Число вимірювань $n$	Число рівнів фактора (число потенціометрів) $m$		
	1	2	3
1	13,5	13,0	12,1
2	13,2	12,4	12,2
3	13,1	12,6	13,4
4	13,0	12,0	13,1
$\Sigma$	58,2	50,0	50,8
Середнє	13,2	12,5	12,7

Для спрощення обчислень віднімаємо з кожного спостереженого значення спільну середню  $\bar{x} = (13,2 + 12,5 + 12,7) / 3 = 12,8$  і переходимо до зменшених величин, напр.,  $y_{11} = x_{11} - 12,8 = 13,5 - 12,8 = 0,7$  і т.д.

Складають розрахункову таблицю (табл. 3.8) та з використанням підсумкового стовпця обчислюють спільну, факторну і залишкову суми квадратів відхилень при числі рівнів фактора  $m = 3$  і числі вимірювань на кожному рівні  $n = 4$ .

**Таблиця 3.8 – Розрахункова таблиця**

№ до- сліду	Рівні фактора						Підсум- ковий стовпець
	$m_1$		$m_2$		$m_3$		
	$y_{i1}$	$y_{i1}^2$	$y_{i2}$	$y_{i2}^2$	$y_{i3}$	$y_{i3}^2$	
1	0,7	0,49	0,2	0,04	- 0,7	0,49	
2	0,4	0,16	- 0,4	0,16	- 0,6	0,36	
3	0,3	0,09	- 0,2	0,04	0,6	0,36	
4	0,3	0,04	- 0,8	0,64	0,3	0,09	
$Q_j$		0,78		0,88		1,30	$\Sigma Q_j = 2,96$
$T_j$	1,6		- 1,2		- 0,4		$\Sigma T_j = 0$
$T_j^2$	2,56		1,44		1,69		$\Sigma T_j^2 = 5,69$

*Виконуємо розрахунок наступних параметрів:*

*\*Спільна сума квадратів відхилень:*

$$S_{cn} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = 2,96 - 0 = 2,96 .$$

*\*Факторна сума квадратів відхилень:*

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = \frac{5,69}{4} - 0 = 1,42 .$$

*\*Залишкова сума квадратів відхилень:*

$$S_{зал} = S_{cn} - S_{факт} = 2,96 - 1,42 = 1,54 .$$

*\*Факторна дисперсія:*

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{m-1} = \frac{1,42}{3-1} = 0,71 .$$

*\* Залишкова дисперсія:*

$$S_{зал}^2 = \frac{S_{зал}}{m(n-1)} = \frac{1,54}{3(4-1)} = 0,17 .$$

*Порівняння факторної і залишкової дисперсії за допомогою критерію Фішера:*

$$F_{\text{спост}} = S_{\text{факт}}^2 / S_{\text{зал}}^2 = 0,71/0,17 = 4,17.$$

По таблиці значень критерію Фішера (додаток Б) при числі ступенів свободи чисельника  $f_1 = 2$ , а знаменника  $f_2 = 9$  знаходимо  $F_{(0,95; 2; 9)} = 4,26$ .

Так як  $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$  немає підстав для відкидання нуль-гіпотези і, відповідно, розходження між груповими середніми незначиме, тобто усі групи спостережень вилучені з однієї генеральної сукупності.

### Двофакторний дисперсійний аналіз

При збільшенні числа факторів, що впливають на результати дослідження, процедура дисперсійного аналізу принципово не змінюється, однак розрахунки ускладнюються [2, 4, 8, 21].

Задача двофакторного дисперсійного аналізу (двоступінчастої класифікації, крос-класифікації) пов'язана з експериментом, у якому одночасно діють два фактори  $A$  і  $B$ , що варіюють на  $k$  і  $t$  рівнях відповідно.

Оцінку відтворюваності результатів досліджень за допомогою двофакторного дисперсійного аналізу розглянемо на прикладі.

**Приклад 3.8.** Досліджувались три реагентних режими флотаційного процесу (фактор  $A$ ) для чотирьох проб корисної копалини (фактор  $B$ ). На кожній пробі з кожним режимом було проведено по два досліди. Необхідно оцінити вплив цих факторів на зміну вилучення корисного компонента у концентрат. Результати досліджень наведені у розрахунковій табл. 3.9.

**Таблиця 3.9 – Результати опробування і розрахунку**

№ режиму (фактор $A$ )	№ проби корисної копалини (фактор $B$ )				$X_A$	$X_B$
	1	2	3	4		
1	2	3	2	4	22	484
	2	4	3	2		
	$X_{11} = 4$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 5$	$X_{14} = 6$		
2	1	0	1	- 1	2	4
	2	- 1	1	- 1		
	$X_{21} = 3$	$X_{22} = - 1$	$X_{23} = 2$	$X_{24} = - 2$		
3	3	6	- 2	1	18	324
	2	5	1	2		
	$X_{31} = 5$	$X_{32} = 7$	$X_{33} = - 1$	$X_{34} = 3$		
$X_B$	12	17	6	7	42	1764
$X_B^2$	144	289	36	49	518	300/160

Розрахунок виконується за формулами наведеними в табл. 3.10, де  $X_A$  – сума усіх значень варіантів рядка  $A$ ;  $X_B$  – сума усіх значень варіантів стовпця  $B$ ;  $X$  – сума усіх значень варіантів таблиці;  $n$  – число варіантів у кожній клітинці.

**Таблиця 3.10 – розрахункові формули**

Розсіювання	Сума квадратів	Число ступенів свободи	Дисперсія
Між стовпцями $A$	$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{X^2}{km}$	$f_A = k - 1$	$S_A^2 / f_A$
Між рядками $B$	$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{X^2}{km}$	$f_B = m - 1$	$S_B^2 / f_B$
Взаємодія факторів $AB$	$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X - \frac{X^2}{km} - (S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2)$	$f_{AB} = (k - 1)(m - 1)$	$S_{AB}^2 / f_{AB}$
Відтворюваність	$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2}{n}$	$f_Z = km \times (n - 1)$	$S_Z^2 / f_Z$
Сума	$S^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{X^2}{kmn}$	$f = km \times (n - 1)$	$S^2 / f$

З використанням формул табл. 3.10 виконуємо розрахунок наступних параметрів:

\*Середні арифметичні:

$$X = \sum_{a=1}^k X_A = \sum_{b=1}^m X_B = 22 + 2 + 18 = 12 + 17 + 6 + 7 = 42;$$

$$\sum_{a=1}^k X_A^2 = 484 + 4 + 324 = 812;$$

$$\sum_{b=1}^m X_B^2 = 144 + 289 + 36 + 49 = 518;$$



$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2 = 4^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + (-1)^2 + 3^2 = 300;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 1^2 + 2^2 = 160.$$

\*Сума квадратів, що характеризують розсіювання окремих спостережень під впливом:

– фактора А:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{\left( \sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} = \frac{812}{4 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 28,00;$$

– фактора В:

$$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{\left( \sum_{b=1}^m X_B \right)^2}{kmn} = \frac{518}{3 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 12,83;$$

– випадкових похибок:

$$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2}{n} = 160 - \frac{300}{2} = 10,00;$$

– взаємодії факторів:

$$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\left( \sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} - \left( S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2 \right) =$$

$$= 160 - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} - (28 + 12 + 10) = 36,50.$$

\*Число ступенів свободи:

$$f_A = k - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$f_B = m - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$f_{AB} = f_A \cdot f_B = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$f_Z = km(n-1) = 3 \cdot 4 \cdot (2-1) = 12.$$

\* Середньозважені вибірккові дисперсії:

$$\bar{S}_A^2 = S_A^2 / f_A = 28 / 2 = 14,00;$$

$$\bar{S}_B^2 = S_B^2 / f_B = 12,83 / 3 = 4,28;$$

$$\bar{S}_{AB}^2 = S_{AB}^2 / f_{AB} = 36,5 / 6 = 6,10;$$

$$\bar{S}_Z^2 = S_Z^2 / f_Z = 10 / 12 = 0,83.$$

\* Оцінка значимості факторів  $A$ ,  $B$  і  $AB$  за величиною розрахованого параметра Фішера:

$$F_{A/Z} = \bar{S}_A^2 / \bar{S}_Z^2 = 14 / 0,83 = 16,87;$$

$$F_{B/Z} = \bar{S}_B^2 / \bar{S}_Z^2 = 4,28 / 0,83 = 3,55;$$

$$F_{AB/Z} = \bar{S}_{AB}^2 / \bar{S}_Z^2 = 6,1 / 0,83 = 7,35.$$

Порівнюємо розрахункові і табличні  $F$ -параметри і робимо висновки про значимість впливу досліджуваних параметрів на флотаційний процес.

Результати дисперсійного аналізу наведені у табл. 3.11.

**Таблиця 3.11 – Результати дисперсійного аналізу**

Розходження	$S^2$	$f$	$\bar{S}^2$	$F_p$	$F_{99}$
По реагентних режимах ( $A$ )	28,00	2	14,00	16,87	6,93
По якості проб руди ( $B$ )	12,83	3	4,28	3,55	5,95
По взаємодії ( $AB$ )	36,50	6	6,10	7,35	4,82
Випадкове	10,00	12	0,83		
Повне	87,33				

Порівняння  $F$ -параметрів показує, що вплив факторів  $A$  і  $AB$  значимий ( $F_p > F_{99}$ ), фактора  $B$  – незначимий ( $F_p < F_{99}$ ).

### 3.2.1.2. Кореляційний і регресійний аналізи

Дисперсійний аналіз дозволяє підтвердити вплив тих або інших факторів на досліджувану результативну ознаку, але він не дає можливості визначити, ні ступінь їхнього впливу (тісноти зв'язку), ні форму залежності. Для вирішення цих питань використовують кореляційний

аналіз. Щоб вивчити характер впливу однієї величини  $x$  на іншу  $y$ , виконують експеримент, при якому вимірюють значення величини  $y$  при різних значеннях величини  $x$ . Якщо дві змінні величини  $x$  і  $y$  залежать одна від одної так, що кожному значенню однієї з них відповідає цілком визначене значення іншої, то між ними є функціональний зв'язок. Цей зв'язок може бути виражений рівняннями, вид яких визначається характером існуючого зв'язку [2, 4, 8, 21].

Кореляційний аналіз дозволяє оцінювати тісноту зв'язку різних параметрів і факторів, що впливають на процес. Цей метод широко застосовується при дослідженнях промислових процесів. При визначенні коефіцієнту кореляції, якщо він достатньо високий, можна одержати інформацію, яка дозволяє вибрати основні регульовальні впливи на процес, точки і методи вимірювання факторів і установити мінімально необхідне число параметрів, що вимірюються. Якщо коефіцієнт лінійної кореляції за абсолютною величиною малий, це свідчить про більш складну (нелінійну) залежність між вимірюваними параметрами або про суттєвий вплив на них інших параметрів. У цьому випадку необхідно обчислення більш складної залежності у вигляді нелінійного рівняння. Одержання таких рівнянь методом найменших квадратів є основою регресійного аналізу.

Для кореляційного і регресійного аналізів, як правило, використовуються дані промислового процесу (записи у робочих журналах, відстежені вхідні і вихідні параметри процесів у базах даних комп'ютерів диспетчера та операторів окремих технологічних операцій) і дані спеціального опробування та спеціальних досліджень.

Регресійні моделі можна використовувати, головним чином, для аналізу впливу окремих факторів або їхньої взаємодії. Крім того, на регресійному аналізі ґрунтується планування експериментів для об'єктів, статична характеристика яких за певними каналами має екстремум.

### ***Метод найменших квадратів***

Метод найменших квадратів застосовується у тих випадках, коли шукані величини не можна вимірити безпосередньо або представити у вигляді функцій вимірюваних величин. Для знаходження  $n$  невідомих величин достатньо виконати  $m$  серій спостережень ( $m > n$ ), щоб скласти число рівнянь, необхідне для визначення невідомих величин [8, 11, 21].

При експериментальному вивченні залежності однієї величини  $y$  від іншої величини  $x$  виконують ряд вимірювань величини  $y$  при різних значеннях величини  $x$ . Наприклад, на збагачувальній фабриці отримані різні вилучення при різній тривалості флотації  $t$ . Результати дослідження, що представлені точками в координатах  $\varepsilon - t$ , створюють кореляційне поле (рис. 3.5).

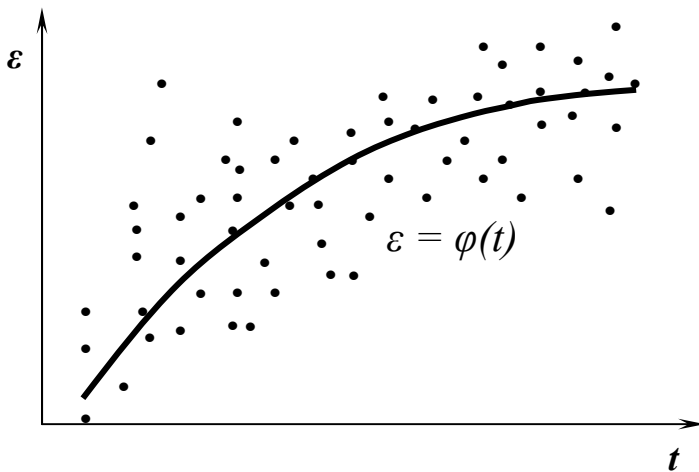


Рис. 3.5 – Кореляційний зв'язок між тривалістю флотації і вилученням.

Через це поле можна провести криву і підібрати формулу, що описує існуючу стохастичну залежність таким чином, щоб параметри цієї кривої були найкращими (з усіх інших кривих). Наявність випадкових похибок вимірювання вказує на недоцільність підбору формули, яка точно би описувала усі дослідні значення, тобто графік шуканої функції не повинен проходити через усі точки (рис. 3.5), а повинен згладжувати випадкові похибки.

Аналітичні вирази, що вибираються на основі теоретичних уявлень, мають вигляд:

$$y = b_1x + b_0; \quad (3.36)$$

$$y = b_2x^2 + b_1x + b_0; \quad (3.37)$$

$$y = b_1e^{b_2x} + b_0; \quad (3.38)$$

$$y = 1/(b_1x + b_0) \quad \text{і т.д.} \quad (3.39)$$

У загальному вигляді:

$$y = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (3.40)$$

Оцінка параметрів  $b_0, b_1, \dots, b_n$  визначається з умови, щоб сума квадратів відхилень вимірюваних значень  $y_n$  від розрахункових  $\varphi(x_n, a_0, a_1, \dots, a_n)$ , тобто величина

$$S^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - \phi(x_n, b_0, b_1, \dots, b_n)]^2, \quad (3.41)$$

приймала найменше значення.

Величина  $S^2$  називається залишковою дисперсією і являє собою суму квадратів відстаней від кожної точки кореляційного поля до лінії регресії по вертикалі. Знаходження значень параметрів  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , при яких функція набуває найменшого значення

$$S^2 = S^2(b_0, b_1, \dots, b_n) \rightarrow \min, \quad (3.42)$$

полягає в рішенні системи рівнянь:

$$\frac{\partial S^2}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_1} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_n} = 0. \quad (3.43)$$

Система рівнянь (3.43) вирішується залежно від виду функцій (3.36) – (3.39). Найбільш вдалим є той вид формули, для якого мінімальна залишкова дисперсія  $S_{ad}^2$  (дисперсія адекватності) є мінімальною.

Точність апроксимації оцінюється залишковою дисперсією  $S_{ad}^2$ , яка визначається помилкою вимірювання величини  $y$  при кожному значенні  $x$  і, відповідно, не повинна суттєво відрізнятися від дисперсії відтворюваності  $y$   $S_{відтв}^2$ . Порівняння за критерієм Фішера

$$F = S_{ad}^2 / S_{відтв}^2 \leq F_{P, f_1, f_2} \quad (3.44)$$

вказує на адекватність регресійної моделі.

Як міра оцінки інформативності рівняння регресії прийнято відношення дисперсій:

$$F = S_{(\bar{y})}^2 / S_{ad}^2, \quad (3.45)$$

де  $S_{\bar{y}}^2$  – розсіювання відносно середньоарифметичного;

$$S_{(\bar{y})}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \text{середній квадрат відхилень (по ординаті) то-}$$

чок кореляційного поля від лінії  $\bar{y} = C$ ;

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \phi(x_i)]^2 - \text{середній квадрат відхилень (по ординаті)}$$

точок кореляційного поля від емпіричної лінії регресії.

При оцінці практичної цінності рівняння регресії важливий не так статистичний рівень значимості, тобто перевищення  $F_m$ , як числове значення  $F$ . Не має смислу користуватися рівнянням регресії, для якого  $F = 1,4$ , навіть якщо воно формально значимо. Справді, якщо квадратична похибка, яка визначає розсіювання результатів спостережень відносно рівняння регресії, менше, ніж похибка, яка характеризує розсіювання результатів відносно середнього, усього в  $\sqrt{1,4} \approx 1,2$  рази, то зрозуміло, що переваги рівняння регресії у порівнянні з рівнянням  $y = \bar{y}$  несуттєві.

Регресійні моделі технологічних процесів, що отримані як в результаті активного експерименту, так і в результаті пасивної обробки даних, можуть служити для розрахунку оптимальних значень параметрів. Математичні моделі містять також суттєву інформацію про вплив окремих факторів і ефектів взаємодії факторів. Величина коефіцієнтів рівняння оцінює ступінь впливу даного параметра або їхньої взаємодії. Суттєву інформацію дає знак, якій показує напрям зміни параметра оптимізації (його зменшення «-» або збільшення «+»).

### **Кореляція**

Про наявність або відсутність зв'язку між двома випадковими величинами у першому наближенні судять по кореляційному полю [2, 5, 8, 11, 12].

Для характеристики тісноти зв'язку між величинами  $X$  і  $Y$  використовують безрозмірну величину – коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$ , що змінюється у межах  $-1 < r_{xy} < +1$ . Позитивна кореляція між випадковими величинами характеризує таку імовірнісну залежність між ними, коли при зростанні однієї друга у середньому теж буде зростати. Негативна кореляція характеризує залежність, коли при зростанні однієї випадкової величини друга у середньому зменшуватиметься. Величина коефіцієнта кореляції визначає тісноту зв'язку між випадковими величинами: чим більше значення  $r_{xy}$ , тим тісніше статистичний зв'язок. Близьке до нуля значення  $r_{xy}$  свідчить про відсутність лінійного зв'язку.

Коефіцієнт парної кореляції визначається за формулами:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}, \quad (3.46)$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3.47)$$

$$r_{xy} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \right] - \bar{x} \bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}. \quad (3.48)$$

де  $n$  – число вимірювань;  $S_{\bar{x}}$  і  $S_{\bar{y}}$  – середньоквадратичні відхилення:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad \text{і} \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}. \quad (3.49)$$

Надійність статистичних характеристик слабшає зі зменшенням обсягу вибірки. Принципово можливі випадки, коли відхилення отриманої величини коефіцієнта кореляції від нуля виявляється статистично незначимим. Зв'язок можна вважати достовірним, якщо:

$$|r| \geq t S_r, \quad (3.50)$$

де  $r$  – абсолютне значення коефіцієнта кореляції;  $t$  – критерій Ст'юдента;  $S_r$  – середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції:

$$S_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}. \quad (3.51)$$

Критерій надійності коефіцієнта кореляції:

$$\mu = |r| / S_r. \quad (3.52)$$

Якщо  $\mu > 2,6$ , зв'язок між змінними вважається значимим.

Практично в усіх випадках статистичного дослідження реального процесу коефіцієнт кореляції є досить грубою оцінкою тісноти зв'язку, який має смисл тільки при лінійній залежності між параметрами.

**Приклад 3.9.** На збагачувальну фабрику надходить руда, яка містить два корисних компоненти – мінерали  $X$  і  $Y$ . При цьому в партіях сировини з підвищеним вмістом  $X$  звичайно спостерігається й більш високий вміст  $Y$ , тому є підстави очікувати, що ці величини знаходяться у зв'язку між собою. Аналізи 10 проб руди наведені у стовпцях 2 і 3 розрахункової таблиці 3.12.

**Таблиця 3.12 – Вихідні дані і результати розрахунку**

$n$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$	$y_{обч}$
1	2	3	4	5	6	7
1	6,7	2,4	44,89	5,76	16,08	2,15
2	5,4	1,5	29,16	2,25	8,10	1,84
3	7,2	2,3	51,84	5,29	16,56	2,27
4	6,4	1,9	40,96	3,61	12,16	2,07
5	3,9	1,6	15,21	2,56	6,24	1,48
6	2,2	1,1	4,84	1,21	2,42	1,07
7	5,8	2,0	33,64	4,00	11,60	1,93
8	4,3	1,6	18,49	2,56	6,88	1,57
9	4,6	1,7	21,16	2,89	7,82	1,64
10	3,4	1,3	11,56	1,69	4,42	1,36
$\Sigma$	49,9	17,4	271,75	31,82	92,28	17,38
Середнє	4,99	1,74	-	-	-	1,74

Виконуємо розрахунок наступних параметрів:

\*Середні квадратичні відхилення:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{271,75}{10} - 4,99^2} = 1,51;$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{31,82}{10} - 1,74^2} = 0,40.$$

\*Коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 \right] - \bar{x} \bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}} = \frac{\frac{92,28}{10} - 4,99 \cdot 1,74}{1,51 \cdot 0,40} = 0,90.$$

Одержаний коефіцієнт кореляції достатньо високий, що вказує на наявність тісного зв'язку між вмістом мінералів  $X$  і  $Y$ . Знайдемо рівняння регресії, яке дозволяє обчислити найбільш імовірний вміст одного з мінералів, якщо відомий вміст іншого.

\*Коефіцієнт регресії:

$$r \frac{S_y}{S_x} = \frac{0,90 \cdot 0,40}{1,51} = 0,24.$$



\*Рівняння регресії  $Y$  по  $X$ :

$$Y = 1,74 + 0,24(X - 4,99) = 0,54 + 0,24X.$$

З використанням рівняння регресії обчислюють значення  $y_{обч}$  і порівнюють з заданими значеннями  $y_i$ . У даному випадку результат порівняння задовільний.

### Множинна регресія

При вивченні множинної регресії аналітичні вирази у загальному вигляді, що вибираються на основі теоретичних уявлень про процес, мають вигляд:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (3.53)$$

Наприклад, при вивченні зв'язку між трьома змінними, дві з яких ( $x_1$  і  $x_2$ ) приймаються за незалежні, третя ( $y$ ) – за функцію, їхня лінійна регресія визначається залежністю:

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_0. \quad (3.54)$$

З геометричної точки зору це рівняння визначає площину у просторі змінних  $x_1, x_2, y$ . Для визначення параметрів  $b_0, b_1, b_2$  використовують спосіб найменших квадратів. Сума квадратів відхилень фактичних аплікату  $y_i$  від обчислених  $y_{обч,i}$  повинна мати найменше значення:

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{обч,i})^2 \rightarrow \min. \quad (3.55)$$

Функція  $\phi$  буде мати мінімум, якщо  $b_0, b_1, b_2$  задовольняють системі рівнянь:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_2} = 0. \quad (3.56)$$

Диференціювання функції  $\phi$  по змінних  $b_0, b_1, b_2$  дозволяє одержати рівняння множинної регресії:

$$y_i - \bar{y} = b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_2), \quad (3.57)$$

де коефіцієнти  $b_1, b_2$  визначають із застосуванням системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}). \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Для оцінки тісноти зв'язку застосовують коефіцієнт множинної кореляції, який визначається через суми квадратів відхилень :

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 - 2b_1b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.59)$$

або через парні коефіцієнти кореляції:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx1}r_{yx2}r_{x1x2}}{1 - r_{x1x2}^2}}, \quad (3.60)$$

де парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{x1y} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i}y_i) \right] - \bar{x}_1\bar{y}}{S_{\bar{x}_1}S_{\bar{y}}}; \quad (3.61)$$

$$r_{x2y} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{2i}y_i) \right] - \bar{x}_2\bar{y}}{S_{\bar{x}_2}S_{\bar{y}}}; \quad (3.62)$$

$$r_{x1x2} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i}x_{2i}) \right] - \bar{x}_1\bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1}S_{\bar{x}_2}}. \quad (3.63)$$

Зв'язок можна вважати достовірним, якщо:

$$|R| \geq tS_R, \quad (3.64)$$

де  $|R|$  – абсолютне значення коефіцієнта кореляції;  $t$  – критерій Ст'юдента;  $S_R$  – середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}}. \quad (3.65)$$

Критерій надійності коефіцієнта кореляції:

$$\mu = |R|/S_R. \quad (3.66)$$

**Приклад 3.10.** В результаті опробування процесу флотації необхідно встановити залежність між вмістом корисного компонента в концентраті ( $\beta$ ) і відходах ( $\vartheta$ ) та вилученням корисного компонента в

концентрат ( $\varepsilon$ ). Результати опробування і розрахункові дані наведені у табл. 3.13.

З використанням вихідних даних табл. 3.13 складають рівняння множинної регресії:

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon} + b_1(\beta_i - \bar{\beta}) + b_2(\vartheta_i - \bar{\vartheta})$$

і виконують розрахунок коефіцієнтів і складають рівняння регресії:

$$\begin{cases} b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) + b_2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 = \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}), \end{cases}$$

тобто:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot 0,971 - b_2 \cdot 0,258 &= 11,780; \\ -b_1 \cdot 0,258 + b_2 \cdot 0,0854 &= -3,590, \end{aligned}$$

звідки:  $b_1 = 4,86$ ;  $b_2 = -27,38$ .

$$\varepsilon_i = 75,9 + 4,86(\beta_i - 7,78) - 27,38(\vartheta_i - 0,60)$$

$$\text{або } \varepsilon_i = 54,52 + 4,86\beta_i - 27,38\vartheta_i.$$

Оцінка тісноти зв'язку за коефіцієнтом множинної кореляції:

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 - 2b_1b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta})}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}},$$

тобто:

$$R = \sqrt{\frac{4,86^2 \cdot 0,971 + (-27,38)^2 \cdot 0,0854 - 4,86 \cdot (-27,38) \cdot (-0,258)}{162,9}} = 0,86$$

Таблиця 3.13 – Результати опробування і попередні розрахунки

$n$	$\beta_i$	$\vartheta_i$	$\varepsilon_i$	$\beta_i - \bar{\beta}$	$\vartheta_i - \bar{\vartheta}$	$\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$	$(\beta_i - \bar{\beta})^2$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2$	$(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\vartheta_i - \bar{\vartheta})$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$\varepsilon_{обч}$
1	8,0	0,48	82	0,22	-0,12	6,1	0,0484	0,0144	37,21	-0,0264	1,342	-0,732	80,26
2	8,3	0,52	81	0,52	-0,08	5,1	0,2704	0,0064	26,01	-0,0416	2,652	-0,408	80,62
3	8,1	0,47	80	0,32	-0,13	4,1	0,1024	0,0169	16,81	-0,0416	1,312	-0,533	81,02
4	8,0	0,53	78	0,22	-0,07	2,1	0,0484	0,0049	4,41	-0,0154	0,462	-0,147	78,89
5	7,9	0,62	76	0,12	0,02	0,1	0,0144	0,0004	0,01	0,0024	0,012	0,003	75,93
6	7,7	0,59	75	-0,08	-0,01	-0,9	0,0064	0,0001	0,81	0,0008	0,072	0,009	75,79
7	7,5	0,65	74	-0,28	0,05	-1,9	0,0784	0,0025	3,61	-0,0140	0,532	-0,095	73,17
8	7,6	0,69	72	-0,18	0,09	-3,9	0,0324	0,0081	15,21	-0,0162	0,702	-0,351	72,75
9	7,4	0,74	71	-0,38	0,14	-4,9	0,1444	0,0196	24,01	-0,0532	1,862	-0,686	70,72
10	7,3	0,71	70	-0,48	0,11	-5,9	0,2304	0,0121	34,81	-0,0528	2,832	-0,649	70,56
$\Sigma$	77,8	6,00	759	-	-	-	0,9710	0,0854	162,90	-0,2580	11,780	-3,590	759,71
Сер	7,78	0,60	7,59	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76,0

Величина коефіцієнта кореляції досить велика, що свідчить про тісний зв'язок досліджуваних параметрів.

Для встановлення достовірності розраховують середньоквадратичну помилку коефіцієнта кореляції:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}} = \frac{1 - 0,86^2}{\sqrt{10}} = 0,08.$$

При  $f = n - 1 = 9$  по таблиці значень критерію Ст'юдента (додаток А) знаходимо  $t_{0,95} = 2,26$ .

Оскільки

$$|R| > S_R \cdot t, \text{ тобто } 0,86 > 0,08 \cdot 2,26$$

отримана залежність достовірна з коефіцієнтом надійності (значимості):

$$\mu = R/S_R = 0,86/0,082 = 10,5 \quad i \quad \mu > t.$$

Таким чином, зв'язок між вмістом корисного компонента в концентраті ( $\beta$ ) і відходах ( $\vartheta$ ) та вилученням корисного компонента в концентрат ( $\varepsilon$ ) слід вважати значимим. Отримане рівняння регресії дозволяє з достатнім ступенем надійності розраховувати взаємозв'язані технологічні показники ( $\beta, \vartheta, \varepsilon$ ) у залежності один від одного.

### **3.2.2. «Активний» метод оптимального планування експериментів**

Існує декілька методів оптимального планування експериментів, які дозволяють при мінімальній кількості дослідів отримати максимальну інформацію про досліджуваний об'єкт.

#### **3.2.2.1. Техніка постановки «активного» експерименту**

##### ***Термінологія і основні поняття***

Далі ми будемо мати справу з деяким абстрактним об'єктом, на якому здійснюється експеримент. В процесі експерименту дослідник ставить досліди.

Дослід – здійснення визначеної дії на об'єкт і реєстрація одержаного результату.

На об'єкт діють *фактори*. Фактором називається вхідна незалежна змінна, яка може приймати в деякому інтервалі часу визначені значення. Кожний фактор має область визначення (або існування). Ця область може бути безперервною або дискретною, а сам фактор кількісним або якісним.

Приклад кількісного фактора – вміст твердого в пульпі, а якісного фактора – сорт руди, тип реагенту, спосіб флотації і т.п.

До кожного фактора в активному експерименті висувають такі вимоги:

- фактор повинен бути *керованим*;
- фактор повинен бути *операційним*, тобто повинні бути вказані послідовність і спосіб його установки і контролю;
- фактор повинен бути *первинним*, тобто безпосередньо діяти на об'єкт, а не бути функцією інших, більш елементарних діянь;
- фактор повинен бути *незалежним* від інших факторів;
- фактор повинен бути *вимірним* достатньо точно.

До сукупності факторів висувається вимога сумісності, тобто всі їхні комбінації здійснимі, безпечні і незалежні.

Важливим поняттям є *область визначення фактора*. Ця область визначається обмеженнями. Обмеженнями можуть бути:

- *принципові*, напр., температура не може бути менше абсолютного нуля, для конкретного апарата може бути неможливою подача негативної кількості води, вміст компонента не може бути менше нуля і т.п. (це умови фізичної здійсненності);
- *технічні*, пов'язані з можливостями апаратури, дозаторів і т.п.
- *економічні*, пов'язані з дефіцитністю компонентів, тривалістю експерименту і т.п.

Зміна вхідних факторів приводить до зміни прийнятого критерію досліджуваного процесу (*критерій ефективності, параметр оптимізації, цільова функція*).

Критерій ефективності процесу – це вихідна величина, зміна якої цікавить експериментатора. Звичайно прагнуть досягти екстремального значення цього критерію. У багатьох випадках екстремум може бути технічно недосяжний, тоді знаходять найбільше (або найменше) значення критерію.

Наприклад, якщо прагнуть отримати максимальне вилучення, то саме вилучення – цільова функція, якщо прагнуть отримати максимальне вилучення при заданій якості концентрату, то фактично відшукується умовний екстремум.

Між параметрами оптимізації і факторами звичайно існує деякий функціональний зв'язок, напр.:  $Y = f(X_1, X_2 \dots X_n)$ .

Геометрично, функція для  $Y$  може бути представлена у вигляді поверхні, розташованої у багатомірному факторному просторі. Така, поверхня називається *гіперповерхнею*, а якщо функція  $f$  – лінійна, то *гіперплощиною*. Геометричне трактування функцій виявляється корисним, тому що у цьому випадку процес руху до екстремуму може бути ототожнений з підйомом (або спуском) на гору, правда, теж багатомірну.

Якщо залежність  $Y = f(X_n)$  достатньо точно описує досліджуваний процес в області, яка цікавить експериментатора, то ця залежність називається *статичною моделлю процесу*.

Якщо у залежність включений час, тобто  $Y = f(X_n, \tau)$ , то така залежність називається *динамічною моделлю процесу*. Модель – це приблизний математичний опис процесу. Якість цього наближення оцінюється *помилками*.

Результат якого-небудь досліду часто називають *відгуком*, а гіперповерхню – *функцією відгуку*.

У відповідності з цим на відміну від фізичного закону модель може бути доброю або поганою. Більше того, очевидно, існує багато моделей, які описують об'єкт. Різниця між ними буде проявлятися тільки у величині помилки.

*Порівняльні експерименти.* Метою багатьох робіт не є встановлення деяких абсолютних змінних величин, а тільки встановлення того факту, що деякий набір факторів краще іншого. У цьому випадку, якщо постійно спостерігається різниця між наборами вихідних факторів (тобто рейтинг їх впливу близький або змінюється), можна не вимагати точних вимірювань, а з використанням методів статистики, тільки з необхідною імовірністю встановити факт, що нас цікавить.

### ***Етапи планування експерименту***

Розглянуті раніше методи регресійного аналізу базуються на обробці результатів «пасивного експерименту», напр., даних опробування промислового процесу, при цьому математичні методи застосовують тільки на останньому етапі – при обробці результатів спостережень. Планування експерименту передбачає постановку дослідів за деякою раніше складеною схемою (*матрицею*), яка має спеціальні властивості.

Планування експерименту передбачає застосування математичних методів на усіх етапах: при аналізі апріорної інформації, плануванні експерименту, обробці його результатів і прийнятті рішень на проміжних етапах (для вибору стратегії досліджень) і у кінці роботи (для інтерпретації даних).

З ускладненням об'єктів досліджень ефективність традиційного підходу до здійснення активного експерименту, відповідно до якого варіювався один фактор, а інші підтримувались на постійному рівні, різко знизилася. У традиційному підході не враховувався взаємний вплив факторів, вплив середовища та наявність зворотних зв'язків. Крім того, при традиційному підході було потрібно проведення великого числа дослідів.

При активному плануванні експерименту усі фактори, що визначають процес, змінюють (варіюють) одночасно у відповідності з правилами планування, а результати експерименту подають у вигляді математичної моделі. Виділяють такі етапи планування:

- збір і аналіз апріорної інформації;
- обґрунтування критерію ефективності досліджуваного процесу;
- вибір залежних і незалежних змінних, області зміни незалежних змінних (факторного простору);
- визначення методів контролю параметрів;
- вибір типу математичної моделі;
- розробка методики і плану (послідовність проведення) експериментів;
- розробка схеми і методики випробування;
- визначення методу аналізу експериментальних даних;
- здійснення експерименту та перевірка статистичних передумов для отримання даних;
- обробка результатів отримання математичної моделі та її інтерпретація;
- видача рекомендацій.

Розглянемо докладніше деякі етапи експериментування.

### **3.2.2.2. Визначення критерію процесу та незалежних факторів**

#### ***Вибір критерію ефективності процесу***

Критерій ефективності, оптимізації, цільова функція, вихідний параметр – усе це формалізований зміст наших прагнень і ступінь ро-



зуміння, що добре, а що погано у конкретному технологічному процесі. У будь-яких дослідженнях вибір критерію визначає їхній успіх.

Вибір критерію ефективності – складна і важлива задача. Будь-який збагачувальний процес характеризується рядом вихідних показників. Серед них:

– безпосередньо вимірювані, такі як вихід продуктів, вміст корисного компонента в продуктах, обсяги переробки, зольність вугілля тощо,

– технологічні критерії, що обчислюються: вилучення, коефіцієнт селективності і ряд інших,

– техніко-економічні, що обчислюються з використанням перших двох груп, цін і витрат: собівартість переробки, рентабельність, прибуток, продуктивність праці і т.д.

Вилучення у концентрат цінного продукту є однією з найважливіших характеристик збагачувальних процесів. Продуктивність процесу по готовому продукту – другий найважливіший показник. Третя характеристика процесу розділення – якість концентрату. Зазначені критерії процесу пов'язані між собою так, що ріст ефективності кожного з них знижує якоюсь мірою ефективність інших. Очевидно, що один показник, напр., вилучення, не може бути критерієм розділення без врахування якості концентрату. Інакше, вигідніше буде не збагачувати руду, оскільки вилучення у цьому випадку буде 100%.

Проф. Барський Л.А. сформулював вимоги до критеріїв ефективності процесу:

- а) критерій повинен бути чисельним і однозначним,
- б) критерій має враховувати кінцеву мету виробництва,
- в) критерій має бути максимально простим і, за можливістю, мати фізичний сенс.

Сьогодні існує понад 100 критеріїв і жоден з них не задовольняє повністю сформульованим вимогам.

У кожному конкретному випадку залежно від поставленої мети приймають найбільш універсальний критерій.

При плануванні екстремальних експериментів часто як критерій приймається два показники. Один з них – основний, за яким відшукується раціональний режим (екстремум), і додатковий, котрий враховує, як правило, які-небудь обмеження. Напр., при дослідженні процесу збагачення вугілля, критерієм можна прийняти умову:

$$A_{\text{відх}} \rightarrow \max$$

$$A_{\text{к-т}} < 8\% \text{ (будь-яке припустиме значення),}$$

де  $A_{\text{відх}}$ ,  $A_{\text{к-т}}$  – зольність відходів та концентрату, відповідно.

У цьому випадку при пошуку екстремуму, або найбільшого значення ( $A_{відх}$ ) експерименти припиняють при досягненні граничного значення ( $A_{к-м}$ ).

### ***Визначення незалежних факторів***

При дослідженні збагачувальних процесів дуже важливо виявити усі фактори, що впливають на процес, а також оцінити ступінь їхнього впливу. Якщо який-небудь із значимих факторів не включений у розгляд, але має випадкові відхилення у деякому діапазоні значень, то погрішності результатів експерименту різко зростають. З одного боку, включення до плану досліджень усіх факторів, що суттєво впливають на процес, дуже важливе, тому що експеримент, направлений на відшукання оптимальних умов, може втратити сенс, якщо один або декілька важливих (значимих) факторів не враховані. З іншого боку, включення до програми досліджень усіх факторів, що суттєво впливають на процес, ускладнює задачу – збільшує кількість експериментів і утруднює одержання адекватної моделі [4, 8, 21].

Ступінь впливу різних факторів на процес неоднакова; звичайно тільки декілька факторів суттєво впливають на кінцеву величину, а інші впливають на неї значно менше. Задача полягає у виявленні й ідентифікації суттєвих факторів на «нульовому» фоні усіх інших, при цьому необхідно ураховувати як якісні, так і кількісні характеристики суттєвих факторів. Виділити суттєві фактори можна на основі аналізу, публікацій і опитування думок спеціалістів (експертна оцінка). Для аналізу такої апріорної інформації застосовують різні методи: дисперсійний аналіз, використання дробових і повних насичених планів експерименту, методи випадкового балансу і розгалуженої стратегії. При виборі факторів необхідно витримувати наступні умови:

- діапазони зміни факторів повинні бути технологічні і «розумні», не можна допускати таких значень, при яких можливі випуск браку або аварія;
- фактори в середині діапазону повинні підпорядковуватися усім передумовам методу найменших квадратів;
- при дуже вузькому діапазоні модель може бути неінформативною.

Остання обставина може бути проілюстрована таким прикладом: відомо, що вилучення горючої маси у флотаційний вугільний концентрат залежить від питомої витрати збирача і змінюється за експоненціальним законом (рис. 3.6). Однак при аналізі зміни вилучення  $\epsilon$  в ді-

апазоні витрати збирача  $q = 1,7 - 2$  кг/т можна зробити парадоксальний висновок про незалежність вилучення від витрати збирача.

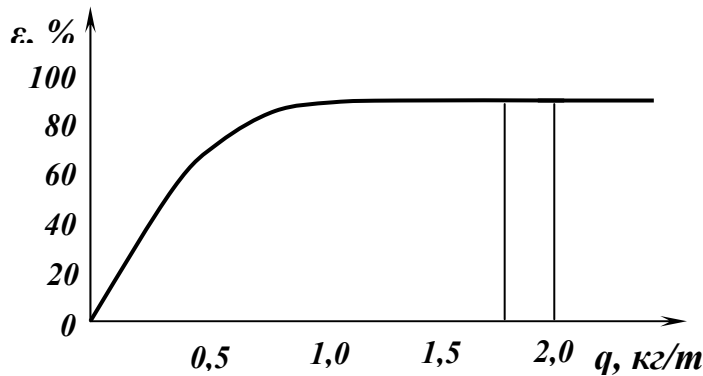


Рис. 3.6 – Залежність вилучення горючої маси від питомої витрати збирача.

Фактори можуть мати і якісні відмінності, наприклад різні реагенти, різні конструкції і т.п.

При експериментах на обладнанні, що працює у безперервному режимі, необхідно визначити *тривалість перехідного процесу* після зміни значення будь-якого фактора. Відбір проб, зняття показань можна робити тільки в сталому режимі. Опробування слід робити тільки після закінчення часу  $t$  (рис. 3.7).

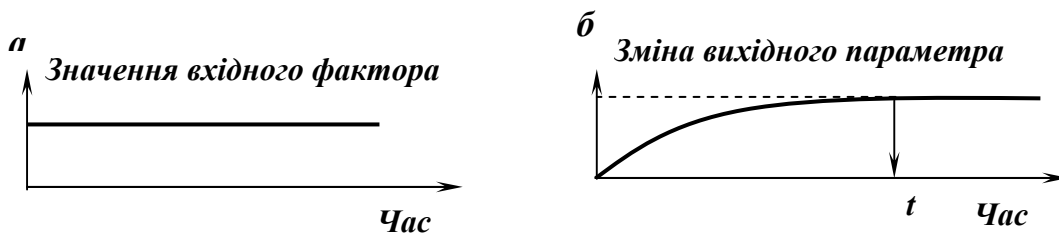


Рис. 3.7 – Поведінка вихідного параметра при зміні вхідного фактора.

При дослідженні необхідно вибрати залежну змінну, або відгук (функцію відгуку) на вплив факторів. Відгук залежить від мети і специфіки досліджень. Він може бути технологічним (вилучення корисного компонента у концентрат, індекс селективності і т.п.), економічним (прибуток, рентабельність і т.п.), статистичним і т.д. Відгук повинен бути чутливим до зміни факторів, легко обчислюваним, виражатися одним числом, мати фізичний смисл тощо.

Структуру моделі дослідник вибирає на основі апріорних знань та інтуїції, при цьому вибір моделі залежить також від знань про об'єкт досліджень, математичного апарату і мети досліджень. Якщо вигляд функції відгуку невідомий, її розкладають у степеневі ряди і подають у вигляді поліному. Поліноміальні моделі дуже ефективні, за

певних умов розкладення у степеневі ряди можливе для усіх функцій. З використанням експериментальних даних отримують оцінки параметрів моделі:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (3.67)$$

де  $\hat{y}$  – оцінка відгуку;  $b$  – оцінки коефіцієнтів.

Для визначення оцінок коефіцієнтів застосовують метод найменших квадратів. Щоб переконатися у правильності оцінки, здійснюють статистичний аналіз, при якому перевіряють значимість коефіцієнтів і адекватність моделі. Під перевіркою значимості коефіцієнту мають на увазі перевірку гіпотези про рівність його нулю, під адекватністю розуміють відповідність моделі дослідним даним.

### 3.2.2.3. Вибір структури моделі і плану експерименту

Завдяки можливості використання ЕОМ можна вибирати структуру моделі у відповідності до концепції «віяла моделей». Традиційно при дослідженнях розглядалася одна модель або сукупність різних моделей і з них вибиралася єдина (т.зв. дискримінація). Концепція «віяла моделей» полягає у тому, що модель, яка придатна для прогнозування значень відгуку, часто виявляється непридатною для екстраполяції, а модель, яка добре описує процес у лабораторних умовах, виявляється непридатною для промислових умов. Все це й обумовило необхідність розгляду різних моделей без їхньої дискримінації [14].

Наприклад, спочатку розглядають достатньо просту модель, що враховує тільки лінійні ефекти:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i. \quad (3.68)$$

Потім розглядають ефекти взаємодії факторів, тобто  $x_i x_j$  при  $i \neq j$ :

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} x_i x_j, \quad (3.69)$$

після чого враховують квадратичні ефекти  $x_i^2$ ; здійснюють перебудову незалежних змінних:  $\ln x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x^{3/2}$ ,  $e^x$  і т.п.

Розглянемо методи побудови моделей виду (3.69) із застосуванням ідеї активного планування експерименту.

Після вибору моделі (або їх сукупності) здійснюють експеримент, за результатами якого визначають параметри вибраної моделі. Активне планування експерименту передбачає проведення дослідів у відповідності з планом експерименту.

План експерименту визначає розташування дослідних точок у просторі незалежних змінних (факторному просторі), тобто умови проведення дослідів. План експерименту задається у вигляді матриці плану, напр., у вигляді таблиці кожний рядок якої відповідає умовам дослідів, а стовпчик – значенням незалежної змінної у кожному досліді. З використанням матричних позначень модель (3.69) можна записати як:

$$\hat{Y} = XB, \quad (3.70)$$

де  $\hat{Y}$  – вектор-стовпець оцінок відгуку;  $X$  – матриця плану;  $B$  – вектор-стовпець оцінок коефіцієнтів.

Модель (3.69) має вигляд:

$$Y = XB + E, \quad (3.71)$$

де  $Y$  – вектор-стовпець спостережених значень відгуку;  $E$  – вектор-стовпець погрешностей.

Стандартний шлях визначення значень  $B$  – застосування методу найменших квадратів:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (3.72)$$

У статистичному аналізі фундаментальну роль відіграє інформаційна матриця  $(X^T X) / s_y^2$ , а також зворотна до неї дисперсійна матриця. Вибором елементів матриці плану (матриці  $X$ ) можна формувати статистичні властивості моделі.

Для подання планів у стандартній формі їх звичайно центрують з переносом початку координат у центр факторного простору. Крім того, при складанні матриці плану  $X$ , незалежні змінні  $x$  нормують і задають факторний простір:

$$-1 \leq x_i \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad x_i = (x_i^* - x_{i0}^*) / \Delta x_i^*, \quad (3.73)$$

де  $x_i^*$  – значення  $i$ -того фактору в натуральному масштабі;  $x_{i0}^*$  – значення координат  $i$ -го фактору у центрі плану в натуральному мас-

штабі, тобто  $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*)/2$ ;  $\Delta x_i^*$  – інтервал варіювання  $i$ -го фактору, тобто  $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*)/2$ .

При складанні матриці плану можна задатись умовою ротативності, яка полягає у тому, що дисперсія оцінки функції відгуку не залежить від відстані  $r$  точки  $x$  від центру плану. Згідно з рівнянням (3.72) ця умова може бути записана так:

$$\begin{cases} Y^T (X^T X)^{-1} Y = const; \\ r = \sqrt{(x - x_0)^T (x - x_0)} = const. \end{cases} \quad (3.74)$$

План є насиченим, якщо число дослідів дорівнює числу коефіцієнтів моделі, і ненасиченим, якщо число дослідів більше числа коефіцієнтів.

Таким чином, планування експерименту полягає у тому, щоб до постановки дослідів забезпечити оптимізацію аналізу даних, ігнорування якої значно ускладнює обчислення та інтерпретацію даних.

Поняття оптимальності плану можна трактувати по-різному. Одну й ту ж задачу можна вирішувати за допомогою різних планів. Якщо властивості плану відомі, можна здійснити експеримент і аналіз даних з найбільшою ефективністю.

Критерії оптимальності планів пов'язані з властивостями інформаційної і дисперсійної матриць. Плани можна формувати з використанням критеріїв оптимальності оцінок коефіцієнтів, напр., з мінімізацією узагальненої дисперсії коефіцієнтів. Узагальнена дисперсія коефіцієнтів моделі визначається як дисперсія вектора коефіцієнтів, вона задається визначником дисперсійної матриці. Чим менше узагальнена дисперсія, тим менше визначник. Для ортогональних планів узагальнена дисперсія дорівнює добутку дисперсій коефіцієнтів моделі. Подібна оптимальність називається *D-оптимальністю* (за першою буквою слова *Determinant* – визначник). При *D-оптимальності* точність визначення одного коефіцієнта може бути підвищена за рахунок зниження точності визначення інших. Якщо експериментатора не задовольняє ситуація, у якій він ризикує отримати деякі коефіцієнти з дуже великими дисперсіями оцінок, то він може застосувати інші критерії оптимальності. Наприклад, використати *A-оптимальні плани* (від слів *Average value* – середнє значення), для яких характерна мінімальна середня дисперсія оцінок коефіцієнтів. При цьому точність

оцінок усіх коефіцієнтів буде однаковою. *A*-оптимальним планам відповідає мінімум сліду дисперсійної матриці, тобто мінімум суми діагональних елементів. Можна задатися вимогою, щоб дисперсії оцінок коефіцієнтів не були дуже великі. Цим вимогам відповідають *E*-оптимальні плани (від слів *Eigen value* – власне значення), у яких мінімізується максимальне власне число дисперсійної матриці. Використовують також інші критерії оптимальності планів. Серед критеріїв оптимальності планів, пов'язаних з прогнозними властивостями моделі, можна назвати *G*-критерій, який мінімізує максимальну дисперсію прогнозу. До планів, пов'язаних з прогнозними властивостями моделі, належать ротатабельні плани.

При реалізації будь-якого експерименту природне бажання експериментатора – скоротити число експериментів, спростити розрахунки, перейти від простої моделі, напр., першого порядку, до більш складних з використанням результатів попередніх дослідів (властивість композиційності плану) – ці вимоги необхідно враховувати при виборі того або іншого плану.

Але є небагато планів, які одночасно задовольняють багатьом критеріям оптимальності. Часто критерії оптимальності суперечливі, тому слід шукати компромісні плани: оптимальний по одному критерію і квазіоптимальний по іншим.

Розглянемо декілька найбільш показових планів експерименту, які можуть бути використані при дослідженні збагачувальних процесів і апаратів.

#### **3.2.2.4. Факторне планування експериментів**

Факторне планування дозволяє оцінювати лінійні та нелінійні ефекти взаємодії при великому числі незалежних змінних і отримувати моделі, що зв'язують залежну і незалежні змінні.

##### ***Повний факторний експеримент***

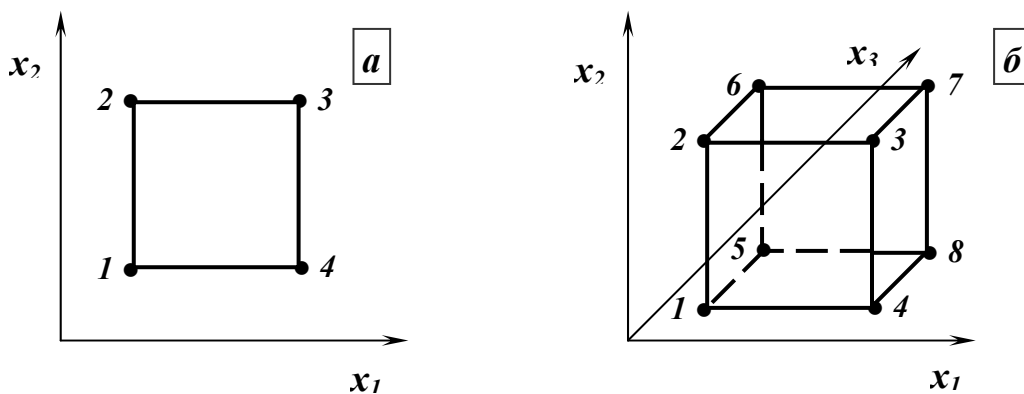
У повному факторному експерименті (ПФЕ) для кожного фактора вибирається визначене число рівнів і потім здійснюються усі можливі їхні комбінації [8, 15, 21]. У факторних експериментах варіюють одночасно усіма змінними. Недоліком ПФЕ є необхідність постановки великого числа дослідів, тому що з ростом числа факторів число дослідів зростає за ступенем показника:

$$N = k^n, \quad (3.75)$$

де  $N$  – число дослідів;  $k$  – число факторів;  $n$  – число рівнів кожного фактора.

Усі можливі комбінації варіювання двох факторів на двох рівнях будуть вичерпані при постановці чотирьох дослідів ( $N = 2^2$ ), а трьох факторів на двох рівнях – при постановці восьми дослідів ( $N = 2^3$ ). Геометрична інтерпретація ПФЕ показана на рис. 3.8.

План експериментів формально представляється матрицею, де кожен рядок відповідає одному досліді і визначає його умови. При реалізації матриці кожен фактор може приймати тільки два значення – «верхнє» і «нижнє». Знаки «+1» або «-1» означають, на якому рівні знаходяться значення факторів («+1» – на верхньому рівні, «-1» – на нижньому).



**Рис. 3.8 – Геометрична інтерпретація повного факторного експеримента:**  
 **$a$  – план типу  $2^2$ ;  $b$  – план типу  $2^3$ .**

При заповненні матриці керуються правилом: частота зміни знака (рівня) кожного наступного фактора удвічі менше попереднього. Якщо в матриці перебрані всі можливі комбінації значень факторів, то матриця подає повний факторний експеримент «ПФЕ».

Наприклад: матриця повного факторного експерименту при трьох факторах наведена у табл. 3.14, відповідно число рядків матриці –  $N = 2^3 = 8$ . У матриці умовно не показані числа «1» (але вони там присутні).



**Таблиця 3.14 – Повний факторний експеримент для трьох незалежних змінних (планування типу  $2^3$ )**

№ дослідю	Фактори			Параметр оптимізації
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	-	-	-	$Y_1$
2	+	-	-	$Y_2$
3	-	+	-	$Y_3$
4	+	+	-	$Y_4$
5	-	-	+	$Y_5$
6	+	-	+	$Y_6$
7	-	+	+	$Y_7$
8	+	+	+	$Y_8$

Перед реалізацією матриці планування задаються основними рівнями факторів (у натуральних одиницях: %, г/л, кг/т і т.д.) та інтервалами варіювання для кожного фактора. Основний рівень позначають:  $X_{oi}$ , інтервал варіювання –  $\Delta x$  (або  $\lambda$ ). Кодове позначення основного, верхнього і нижнього рівнів відповідно «0», «+1» і «-1».

Тоді для матриці (табл. 3.14) умови проведення першого, другого і третього дослідів (значення факторів):

$$\begin{array}{lll}
 X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\
 X_1 = X_{o1} + \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\
 X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} + \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \quad \text{і т.д.}
 \end{array}$$

Повний факторний експеримент для трьох факторів дозволяє окремо оцінити основні ефекти  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ефекти взаємодії першого порядку  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  і ефект взаємодії другого порядку  $ABC$ .

Вибір нульової точки (центру експерименту) відповідає оптимальним значенням факторів на основі апріорної інформації, досвіду експериментатора і результатів збагачення аналогічних корисних копалин. При виборі інтервалу варіювання  $\Delta x$  керуються наступним:

- усі значення факторів у матриці повинні бути реалізованими, тобто повинні знаходитись в області існування даних факторів;
- величина інтервалу від «+1» до «-1» повинна суттєво перевищувати помилку фіксування даного фактора;
- інтервал варіювання даного фактора повинен забезпечувати вплив на вихідні параметри процесу.

При постановці експерименту досліди слід рандомізувати. Рандомізація полягає у випадковому виборі черговості постановки дослідів. Для випадкового вибору номерів дослідів можна використовувати таблицю випадкових чисел або лотерею. Рандомізацію застосовують для виключення можливої систематичної помилки дослідів.

Функція відгуку представлена поліномом першого порядку з урахуванням парних взаємодій факторів:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Завдяки ортогональності планів ПФЕ, їхньої симетричності коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулами:

$$b_0 = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u ; \quad (3.76)$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n ; \quad (3.77)$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} ; \quad i \neq j ; \quad (3.78)$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku} ; \quad i \neq j \neq k , \quad (3.79)$$

де  $x_{ijk}$  – елементи матриці планування (+1 або -1), в якій  $ij$  – номер фактора, а  $u$  – номер дослідів.

Різні знаки при коефіцієнтах свідчать про прямо- чи обернено-пропорційний вплив відповідних членів рівняння (поліному) на функцію відгуку. Якщо коефіцієнти мають один знак, то одночасна зміна факторів більше впливає на функцію відгуку, ніж індивідуальна зміна кожного фактора.

Гіпотезу про однорідність вибіркової дисперсії відтворюваності перевіряють за критерієм Кохрена  $G_{табл.}$  зі ступенями свободи  $f_1 = m - 1$  ( $m$  – число дослідних даних у кожній серії дослідів),  $f_2 = N$  і мірою ризику  $\alpha$  :

при 
$$G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_1^n S_y^2} < G_{табл} \quad (3.80)$$

гіпотеза про однорідність (рівність вибірових дисперсій одна одній) не відкидається. Розраховується оцінка дисперсії відтворюваності з ступенем свободи  $f = f_1 \cdot f_2$ :

$$S^2 = \left( \sum_1^n S_y^2 \right) / N . \quad (3.81)$$

У випадку неприйняття гіпотези про однорідність оцінки дисперсій відтворюваності можна збільшити число паралельних дослідів для варіантів варіювання з більшими значеннями вибірових дисперсій або визнати невідтворюваність експерименту. Для виявлення джерел неоднорідності застосовують методи дисперсійного аналізу.

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряють за допомогою критерію Ст'юдента. Коефіцієнт значимий, якщо:

$$|b_i| \geq t S_{b_i} . \quad (3.82)$$

Можливі такі причини незначимості коефіцієнта регресії:

- інтервал варіювання фактора близький до оптимуму;
- інтервал варіювання вузький; чим менше інтервал варіювання, тим імовірніше, що навіть фактор з сильним впливом не виявить себе як істотний;
- параметр оптимізації процесу не залежить від варіювання фактору.

Якщо має місце перша або третя причина, значення фактора стабілізується на визначеному рівні; у другому випадку збільшують інтервал варіювання.

Після виключення незначимих коефіцієнтів перевіряють адекватність моделі – з'ясовують співвідношення між дисперсією адекватності  $S_{ad}^2$  і дисперсією відтворюваності дослідних даних  $S^2$ . Дисперсія адекватності  $S_{ad}^2$  характеризує розсіяння результатів спостережень поблизу рівняння регресії, що оцінює істинну функцію відгуку:

$$S_{ad}^2 = m^{-1} (N - d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 , \quad (3.83)$$

де  $m$  – число паралельних дослідів;  $d$  – число оцінюваних параметрів в рівнянні регресії. Дисперсія адекватності оцінюється з  $f = N - d$  ступенями свободи.

Якщо  $S_{ad}^2$  не перевищує погрішності експерименту, оцінкою якої є  $S^2$ , то вважається, що модель адекватна, а якщо  $S_{ad}^2 > \delta^2$ , то модель не можна вважати придатною. Адекватність перевіряється за критерієм Фішера з рівнем значимості  $1 - \alpha$  і ступенями свободи  $f_1 = N - d$  і  $f_2 = N(m - 1)$ :

$$\text{якщо відношення} \quad F = S_{ad}^2 / S^2 < F_{кр}, \quad (3.84)$$

модель визнається адекватною. У випадку неприйняття гіпотези про адекватність моделі переходити до розгляду більш складної моделі не слід, доцільніше, якщо це можливо, провести експеримент з меншим інтервалом варіювання факторів.

Використання повного факторного експерименту не завжди доцільне, тому що з одного боку необхідне велике число дослідів, а з іншого – на першому етапі дослідження не потрібна висока точність рівнянь апроксимуючої поверхні. Тому частіше використовують дробовий факторний експеримент «ДФЕ».

**Приклад 3.11.** На збагачувальній фабриці були проведені дослідження процесу фільтрування магнетитового концентрату на дисковому вакуум-фільтрі. Вивчали вплив вмісту твердого у пульні ( $X_1 = 30 - 60 \%$ ), величини вакууму ( $X_2 = 0,03 - 0,09$  МПа) і частоти обертання дисків ( $X_3 = 0,2 - 0,5$  хв<sup>-1</sup>) на питому продуктивність вакуум-фільтру ( $Y$ , т/год·м<sup>2</sup>).

Для планування експерименту був використаний ПФЕ типу 2<sup>3</sup>, який дозволив оцінити усі лінійні ефекти і усі їхні взаємодії. Матриця планування і результати експериментів наведені у табл. 3.15.

Функцію відгуку моделювали поліномом першого порядку з урахуванням парних взаємодій факторів:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулами:

$$b_0 = N^{-1} = \sum_{u=1}^N \bar{y}_u; \quad b_0 = 1,21;$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} ; \quad b_1 = -0,099; \quad b_2 = 0,129; \quad b_3 = -0,179;$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} ; \quad b_{12} = -0,019 ; b_{13} = 0,024; \quad b_{23} = -0,054 ;$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku} ; \quad b_{123} = -0,001.$$

Рівняння регресії приймає вигляд:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,019x_1x_2 + \\ + 0,024x_1x_3 - 0,054x_2x_3 - 0,001x_1x_2x_3.$$

Перевірка гіпотези про однорідність вибірових дисперсій відтворюваності. Критерій Кохрена  $G_{табл.}$  з ступенями свободи:  $f_1 = m - 1 = 6 - 1 = 5$ ,  $f_2 = N = 8$  і мірою ризику  $\alpha = 0,05$  :  $G_{табл.} = 0,4387$

при 
$$G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_1^n S_y^2} = 0,326 < G_{табл.}$$
 гіпотеза про однорідність

(рівність одна одної) не відкидається.

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряють за допомогою критерію Ст'юдента. Коефіцієнт значимий, якщо  $|b_i| \geq tS_{bi}$ .

$$S_{bi} = \sqrt{S^2 / Nm} = \sqrt{7,125 / 8 \cdot 6} = 0,0121.$$

$$\text{При } \alpha = 0,05 \text{ і } f = N(m-1) = 40 \quad t = 2,0211.$$

$$b_{кр} = tS_{bi} = 2,0211 \cdot 0,0121 = 0,0244.$$

Таблиця 3.15 – Матриця планування і результати експерименту

Інтервали варіювання. № досліду	Рівні факторів			Взаємодія факторів			Дослідні дані		Розрахунок $\hat{y}$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$\bar{y}$		$S_y^2 \cdot 10^3$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Основний рівень $x_i = 0$	45	0,06	0,4							
Інтервал варіювання $\Delta x$	15	0,03	0,2							
Верхній рівень $x_i = +1$	60	0,09	0,6							
Нижній рівень $x_i = -1$	30	0,03	0,2							
№ досліду:										
1	+	+	+	+	+	+	+	1,01	2,2	1,01
2	-	+	+	-	-	+	-	1,20	5,5	1,21
3	+	-	+	-	+	-	-	0,90	7,4	0,85
4	-	-	+	+	-	-	+	1,01	9,1	1,05
5	+	+	-	+	-	-	-	1,43	18,6	1,47
6	-	+	-	-	+	-	+	1,71	3,2	1,67
7	+	-	-	-	-	+	+	1,10	0,9	1,11
8	-	-	-	+	+	+	-	1,31	10,1	1,30

Примітка. У стовпці 9 наведені середні значення функції відгуку  $\bar{y}$  (питома продуктивність вакуум-фільтру, т/год·м<sup>2</sup>); у стовпці 10 – дисперсія відтворюваності дослідних даних в кожній серії дослідів ( $t = 6$ ); у стовпці 11 – результати розрахунку питомої продуктивності фільтру за отриманим рівнянням.

Таким чином, коефіцієнти  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  і  $b_{123}$  є незначимими і рівняння регресії приймає вигляд:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,054x_2x_3.$$

Перевірка адекватності моделі:

$$S_{ad}^2 = m^{-1}(N - d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 = [6 \cdot (8 - 5)]^{-1} \cdot 100,8 \cdot 10^{-3} = 5,6 \cdot 10^{-3}.$$

Адекватність перевіряється за критерієм Фішера. При рівні значимості  $1 - \alpha = 95\%$  і ступенях свободи  $f_1 = N - d = 3$  і  $f_2 = N(m - 1) = 40$  критерій Фішера  $F_{кр} = 2,84$ .

Відношення:  $F = S_{ad}^2 / S^2 = 5,6 \cdot 10^{-3} / 7,125 \cdot 10^{-3} = 0,79 < F_{кр}$ , модель визнається адекватною.

### **Дробовий факторний експеримент**

При збільшенні числа факторів число варіантів варіювання в ПФЕ зростає за степеневим законом, напр., для дослідження 15 факторів із застосуванням ПФЕ потрібна постановка як мінімум  $2^{15} = 32768$  дослідів.

Реалізувати стільки експериментів практично неможливо, перш за все через значні витрати часу і коштів. Але якщо останні й знайдуться, то за час проведення дослідів відбудуться неконтрольовані зміни сировини, обладнання та інших факторів, внаслідок чого отримані результати виявляться непорівняними. Крім того, при проведенні досліджень у багатьох випадках достатньо одержати тільки лінійну апроксимацію функції відгуку без оцінки деяких факторів взаємодії [2, 4, 6, 8].

Зменшити необхідне число дослідів можна введенням у план  $2^n$  більшої кількості факторів, ніж передбачається матрицею планування, тобто насиченням плану до числа дослідів кратного двом, напр., для трифакторного плану потрібно поставити чотири досліди ( $2^2$ ). Для скорочення числа дослідів у матрицю планування слід ввести додаткові стовпці, що характеризують ефекти взаємодії, якими можна знехтувати. Наприклад, для трифакторного плану потрібно ввести фіктивний фактор  $x_3$  і варіювати його як вектор-стовпець  $x_1x_2$ . Таким чином, можна поставити чотири досліди замість  $2^3 = 8$ .

Звичайно плани дробового факторного експерименту (ДФЕ) позначають  $2^{n-p}$ . З множини  $n$  факторів відбирають  $p$  допоміжних і  $n - p$  основних факторів, для яких будують повний факторний план. Цей план потім доповнюють  $p$  стовпцями, що відповідають факторам, які залишилися.

Спосіб утворення кожного з  $p$  стовпців визначається генераторами плану ДФЕ – добутками основних факторів. У випадку плану  $2^{n-p}$  повинно бути  $p$  генераторів. У випадку плану  $2^{3-1}$  генератор плану рівний  $x_3 = x_1x_2$ .

Отриманий план (табл. 3.16) є напівреплікою (половиною) повного факторного плану, при цьому усі властивості повного факторного експерименту збережені.

**Таблиця 3.16 – Дробовий факторний експеримент для трьох незалежних змінних (планування типу  $2^{3-1}$ )**

№ досліду	Фактори			Параметр оптимізації
	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1x_2$	$y$
1	-	-	+	$y_1$
2	-	+	-	$y_2$
3	+	+	+	$y_3$
4	+	-	-	$y_4$

Матриця ДФЕ являє собою  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  і т.д. репліку, у якій стовпець одного з ефектів отримують перемноженням стовпців інших ефектів.

При виборі дробових реплік необхідно визначити і проаналізувати з урахуванням апріорної інформації змішування оцінок коефіцієнтів моделі. Для цього розраховують визначний контраст ДФЕ. Пояснимо його на прикладі дробової репліки  $2^{3-1}$ . Для добутку трьох стовпців матриці виконується співвідношення  $x_1x_2x_3 = +I$  – це і є визначний контраст. Таким чином, контраст – це добуток лівої і правої частин рівняння, що визначає генератори плану. Наприклад, для плану  $2^{5-2}$  як генератори слід узяти співвідношення  $x_4 = x_1x_3$  і  $x_5 = x_1x_2x_3$ . Визначні контрасти плану –  $x_1x_3x_4$  і  $x_1x_2x_3x_5$ .

Узагальнюючий контраст плану будується з визначних контрастів та їхніх добутків у всіх можливих поєднаннях  $n = 2, 3, \dots, p$ . При перемноженні контрастів з урахуванням, що  $x^2 = I$ , отримують ще один контраст  $x_2x_4x_5$ . Таким чином, узагальнюючий контраст рівний  $x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5$ .

При перемноженні усіх складових узагальнюючого контрасту на фактори з урахуванням, що  $x^2 = I$ , отримують правило змішування коефіцієнтів:

$$x_1 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5;$$

$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_5;$$

$$x_3 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5;$$



$$x_4 = x_1x_3 = x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5;$$

$$x_5 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4 = x_1x_2x_3;$$

$$x_{12} = x_2x_3x_4 = x_1x_4x_5 = x_3x_5;$$

$$x_{23} = x_1x_2x_4 = x_3x_4x_5 = x_1x_5,$$

тобто  $b_1 = \beta_{34} + \beta_{1245} + \beta_{235} + \beta_1$  і т.п.

Залежно від вибору генераторів отримують дробові факторні плани з різною вирішувальною здатністю. Число елементів у контрасті визначає вирішувальну здатність плану.

Слід віддавати перевагу дробовим факторним планам з найбільшою вирішувальною здатністю – головним дробовим факторним планам.

Для оцінок коефіцієнтів і аналізу моделей з використанням ДФЕ і ПФЕ застосовують одні й ті ж формули.

### 3.2.2.5. Метод крутого сходження

Факторне планування може успішно застосовуватись тільки тоді, коли дослідник знаходиться у оптимальній області. Вибір переважних факторів і оцінка їхньої значимості за коефіцієнтами лінійної регресії дозволяє спланувати наступні експерименти для досягнення оптимальної області найкоротшим шляхом [2, 4, 8, 15, 21].

Найкоротша відстань до максимуму (мінімуму) безперервної однозначної функції відгуку з будь-якої точки визначається градієнтом – прямою, яка перпендикулярна ізолініям параметру оптимізації (див. рис. 3.4):

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial X_j} \bar{j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_m} \bar{m}, \quad (3.85)$$

де  $\partial f / \partial X_i$  – частинна похідна функції відгуку по  $i$ -му фактору;  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{m}$  – одиничні вектори у напрямку координатних осей факторного простору.

Оцінками частинних похідних  $\partial f / \partial X_i$  є коефіцієнти лінійної регресії  $b_i$ , отже, для руху по градієнту необхідно змінювати фактори пропорційно їхньому коефіцієнту регресії та у той бік, куди вказує знак коефіцієнту. Цю зміну факторів називають кроком крутого сходження. У більшості випадків за крок крутого сходження кожного фактора можна приймати його коефіцієнт в моделі, виражений в одиницях вимірювання фактора. Для цього обчислюється добуток коефіцієнтів на інтервалі варіювання  $b_i \Delta x_i$ , і

фактор з максимальним добутком приймається за базовий  $b_{iB}$ . Для нього вибирають крок варіювання  $\Delta x_{iB}$ . Пропорційно до базового визначають кроки й по інших факторах:

$$\Delta x_i = \Delta x_{iB} b_i / b_{iB}, \quad (3.86)$$

де  $\Delta x_i$  – новий крок варіювання для  $i$ -го фактора.

Кроковий процес руху по поверхні відгуку продовжується доти, доки дослідник не потрапить в екстремальну область, де лінійне наближення вже виявляється недостатнім. Момент переходу через екстремум буде супроводжуватися погіршенням значення вихідного параметра (параметра оптимізації). Таким чином, визначається оптимальна область.

Базовий крок варіювання визначається на основі тих же уявлень, що й первинний інтервал варіювання. Для якісних факторів на двох рівнях або фіксується кращий рівень, або градієнт реалізується двічі для кожного рівня окремо. Незначні фактори стабілізуються на будь-якому рівні у інтервалі  $\pm I$ . Якщо немає спеціальних зауваг, вибирають нульовий рівень. Якщо ж, наприклад, за економічними міркуваннями доцільно підтримувати нижній рівень, то вибирають його. У русі по градієнту ці фактори не беруть участь.

Рух по градієнту можливий і у випадку отримання неадекватної моделі. У експеримент можуть бути включені й деякі фактори, коефіцієнти при яких виявилися незначимими, але вони важливі з технологічних міркувань. Причиною незначимості коефіцієнтів може бути невірний вибір інтервалів варіювання.

**Приклад 3.12.** *Необхідно визначити оптимальні умови флотації цинкової руди.*

*Фактори, їхні основні рівні й інтервали варіювання вибирали з урахуванням умов роботи збагачувальної фабрики. Вивчали вплив шести факторів ( $x_1$  – тривалість перемішування з мідним купоросом, хв.;  $x_2$  – витрата бутилового ксантогенату, г/т;  $x_3$  – витрата мідного купоросу, г/т;  $x_4$  – тривалість аерації, хв.;  $x_5$  – тривалість флотації, хв.;  $x_6$  – витрата дітіофосфату, г/т) на індекс селективності – параметр  $y$ :*

$$y = \sqrt{\varepsilon(1-R) / [R(1-\varepsilon)]}, \quad (3.87)$$

де  $\varepsilon = \gamma\beta / \alpha$  – вилучення корисного компонента у концентрат, частки од.;  $\alpha, \beta$  – вміст металу у вихідному продукті і концентраті, частки од.;  $\gamma$  – вихід концентрату, частки од.;  $R$  – вилучення породного компонента у концентрат, частки од.

$$R = \sqrt{\frac{\varepsilon(1-R)}{R(1-\varepsilon)}}. \quad (3.88)$$

Використано 1/4 репліки від факторного експерименту  $2^{6-2}$ , реалізовано 16 дослідів.

За даними результатів ДФЕ (табл. 3.17) отримані оцінки коефіцієнтів регресії для вибраного параметру оптимізації у. Статистичний аналіз отриманого рівняння регресії показав, що воно адекватне з надійністю 95 %.

**Таблиця 3.17 – Результати проведення ДФЕ**

Фактор	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$
Основний рівень	3	15	50	7,5	8	10
Крок варіювання	–	10	–4	–1	1	3,5
Інтервал варіювання	2	10	15	7,5	2	6
Коефіцієнти регресії	0,3	0,768	–0,196	–0,197	0,31	0,44

Послідовність застосування методу крутого сходження пояснюється табл. 3.18.

**Таблиця 3.18 – Результати, що отримані при оптимізації цинкової флотації методом крутого сходження**

№ дослідіду	Фактори						Індекс селективності
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	
1	5	25	46	6,5	9	13,5	–
2	5	35	42	5,5	10	17,0	14,86
3	5	45	38	4,5	11	20,5	16,43
4	5	55	34	3,5	12	24,0	17,65
5	5	65	30	2,5	13	27,5	15,83
6	5	75	26	1,5	14	31,0	14,36

За базовий прийнятий фактор  $x_2$ , тому що добуток коефіцієнта  $b_2$  на інтервал його варіювання ( $\Delta x_2 = 10$ ) дорівнює 7,68, тобто максимальний. Фактор  $x_1$  у розрахунках не враховується і його рівень фіксований:  $\tilde{x}_1 = 5$ . Реалізація експериментів у точках 1 – 6 методу крутого сходження дозволила істотно покращити процес: досягти індексу селективності 17,65.

*Таким чином, методом крутого сходження були визначені оптимальні умови процесу флотації цинкової руди: витрати бутилового ксантогенату, мідного купоросу і дітіофосфату – відповідно 55, 34 і 24 г/т; тривалість аерації, флотації і перемішування з мідним купоросом – відповідно 3,5; 12 і 5 хв (незначимий фактор). Визначення оптимальних умов флотації з урахуванням шести факторів потребувало постановки 22 дослідів (16 дослідів по ДФЕ  $2^{6-2}$  і 6 дослідів крутого сходження).*

### **3.2.2.6. Еволюційне планування експериментів**

Метод крутого сходження особливо ефективний при проведенні лабораторних досліджень, але у промислових умовах похибки вимірювань збільшуються у зв'язку із впливом додаткових неврахованих факторів. Крім того, не завжди можна варіювати змінними у великому діапазоні.

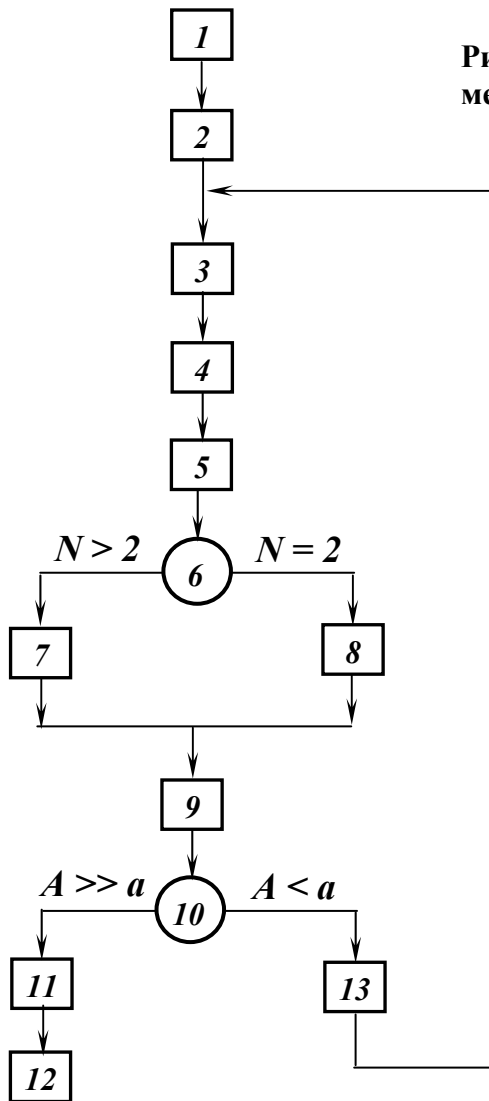
Еволюційне планування є подальшим розвитком методу крутого сходження. В промислових умовах на фоні впливу багатьох випадкових факторів (так званих шумів) необхідно встановити вплив досліджуваних факторів і при цьому не порушити виробничий процес. У таких умовах доцільно використовувати метод еволюційного планування.

При еволюційному плануванні, як і при методі крутого сходження, вибирається матриця планування і рівні варіювання. Досліди проводяться декількома послідовними циклами. Кожний цикл являє собою одноразову постановку усіх дослідів за прийнятою матрицею досліджень. Серії однакових циклів складають фази досліджень. Після закінчення кожної фази можна змінити рівні варіювання матриці планування, перенести центр експериментів у кращу точку і ввести нові незалежні змінні. При еволюційному плануванні велику роль відводять технологічному аналізу отриманих результатів і обговоренню результатів кожної фази планування. Обробка результатів експериментів виконується тільки для циклів однієї фази. Фази при еволюційному плануванні математично не залежать одна від одної. Для усіх циклів кожної фази матриця планування і рівні варіювання залишаються незмінними.

Основним недоліком методу еволюційного планування є необхідність постановки великої кількості дослідів, тобто  $nN$ , де  $N$  – кількість циклів. Збільшення часу досліджень веде до нових труднощів, тому що змінюються характеристики сировини, обладнання та ін. Для запобігання впливу цих факторів виконують так зване блокове планування.

Блок-схема логічної послідовності виконання етапів досліджень при еволюційному плануванні наведена на рис. 3.9.

Рис. 3.9 - Схема проведення досліджень методом еволюційного планування.



1. Визначити фактори дослідження і цільову функцію. Кожний фактор і цільова функція повинні мати чисельні визначення. Прийняти верхній  $x_j^+$  і нижній  $x_j^-$  рівні варіювання для кожного фактора. Вибрати матрицю планування дослідів. Доповнити матрицю дослідями в центральній точці.

2. Реалізувати за матрицею планування два дублюючих цикли дослідів.

3. Знайти середній результат з усіх  $N$  циклів (у першому випадку з двох циклів –  $N = 2$ ) по кожному  $i$ -тому режимному рівню (точці) матриці планування:

$$\bar{y}_i^{(N)} = \frac{\sum_{k=1}^N y_{ik}}{N}, \quad (3.89)$$

де  $k$  – номер циклу;  $N$  – число циклів.

4. Знайти ефекти по кожному  $j$ -тому фактору  $A_j$  і ефект зміни в середньому  $A_0$ :

$$A_j = \frac{2 \sum_{i=1}^n y_i^{(N)} x_{ij}}{n}; \quad A_o = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}^{(N)} - n\bar{y}_0^{(N)}}{n-c}, \quad (3.90)$$

де  $\bar{y}_i^{(N)}$  – середній результат по  $i$ -тому режиму з усіх поставлених циклів;  $n$  – число точок матриці планування (без центральної точки);  $c$  – число дослідів, які поставлені в центральній точці.

5. Знайти різницю  $r_i$  між середнім значенням попередніх циклів  $\bar{y}_i^{(N-1)}$  і результатом даного циклу  $Y_i^{(N)}$  по кожній  $i$ -тій режимній умові:

$$r_i = \bar{y}_i^{(N-1)} - Y_i^{(N)}. \quad (3.91)$$

У першому випадку визначається різниця між результатами першого і другого циклів, у другому – різниця між середнім першого і другого циклів і результатом третього і т.д.

За мінімальним і максимальним значеннями  $r_i$  визначають розмах:

$$R = r_{\max} - r_{\min}. \quad (3.92)$$

За даними  $R$  і  $k$  (табл. 3.19) знаходять похибки дослідів  $\sigma_y = Rk$ .

6. Якщо поставлено більше двох циклів ( $N > 2$ ). Знаходять помилку

$$\text{по усіх циклах: } \bar{\sigma}_y = \frac{\sum_{k=1}^N \sigma_{yk}}{N-1}. \quad (3.93)$$

7. Якщо циклів два ( $N = 2$ ),  $\bar{\sigma}_y$  не визначається, тому що по першому в другому циклам можна знайти тільки середньоквадратичне відхилення  $\sigma_y$ .

**Таблиця 3.19 – Значення коефіцієнта  $k$**

Число циклів $N$	Число дослідів в матриці планування з урахуванням центральної точки ( $n + c$ )								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,63	0,42	0,34	0,30	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23
3	0,72	0,48	0,40	0,35	0,32	0,30	0,29	0,27	0,26
4	0,77	0,51	0,42	0,37	0,34	0,32	0,30	0,29	0,28
5	0,79	0,53	0,43	0,38	0,35	0,33	0,31	0,30	0,29
6	0,81	0,54	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,31	0,30
7	0,82	0,55	0,45	0,40	0,37	0,34	0,33	0,31	0,30
8	0,83	0,55	0,45	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31	0,30
9	0,84	0,56	0,46	0,40	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
10	0,84	0,56	0,46	0,41	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
11	0,84	0,56	0,46	0,41	0,38	0,35	0,33	0,32	0,31
12	0,85	0,57	0,47	0,41	0,38	0,35	0,34	0,32	0,31

8. Знаходять довірчий інтервал для ефектів:

$$a = \frac{t\sigma_y}{2^{0,5m-1}\sqrt{N}}; \quad a_0 = 0,9a, \quad (3.94)$$

де  $t$  – критерій Ст'юдента для  $f = n(N - 1)$ ;  $m$  – число факторів.

9. Перевіряють достовірність ефекту  $A^* = A \pm a$ .

10. Якщо значення коефіцієнта  $A > a$ , можна визначити регулюючу дію  $\Delta_j = A_j k^*$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, який береться з урахуванням можливостей процесу і уявлення про нього.

11-12. Поставити дослід з коректованими значеннями факторів і проаналізувати з технологічної точки зору отримані результати, після чого намітити нову фазу досліджень або поставити ще один дослід з коректованим значенням факторів  $x_j^{нов} = x_j^{попер} + \Delta_j$ .

13. Якщо значення коефіцієнтів менше або порівнянне з інтервалами  $A < a$ , отримане значення ефекту випадкове, вплив факторів не виявлений і потрібно повторити цикл при тих же режимах матриці планування.

**Приклад 3.13.** Досліджується робота збагачувальної фабрики. Необхідно вибрати оптимальне співвідношення двох типів руд в шихті  $x_1$  і  $x_2^m$ . Результати дослідів оцінюються ступенем вилучення  $\varepsilon$ .

1. Намічаємо матрицю планування дослідів з однією центральною точкою і вибираємо для першої фази варіювання факторів нижні рівні  $x_1^- = 20$ ,  $x_2^- = 20$  і верхні рівні  $x_1^+ = 30$ ,  $x_2^+ = 40$ . Знаходимо значення основного рівня для центральної точки:  $x_1^0 = 25$ ,  $x_2^0 = 30$ .

2. Виконуємо дослідів відповідно до режимів матриці планування (перший цикл), а потім повторюємо їх (другий цикл). Отримані результати дослідів наведені в табл. 3.20.

**Таблиця 3.20 – Результати дослідів I і II циклів**

№ режиму (дослід)	Матриця планування			Результати дослідів в циклах $\varepsilon$ , %		
	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
Центральний	$x_1^0$	$x_2^0$		60	64	64
1	$x_1^-$	$x_2^-$	+	37	25	31
2	$x_1^+$	$x_2^+$	+	75	73	80
3	$x_1^+$	$x_2^-$	–	54	72	62
4	$x_1^-$	$x_2^+$	–	52	46	51

3. Розраховуємо середнє значення результатів першого і другого циклів  $\bar{y}_i^2$  і різницю в результатах першого і другого циклів по кожному режиму. Результати розрахунків представлені таблицею 3.21.

**Таблиця 3.21 – Середнє значення результатів дослідів I і II циклів**

Показники	Режим опиту				
	0	1	2	3	4
Результат циклу:					
першого $y_2^1$ .....	60	37	75	54	52
другого $y_1^2$ .....	64	25	73	72	46
Різниця $r_i$	-4	12	2	-18	-6
Середній результат з урахуванням I і II циклів	62	31	74	64	49

За найбільшим негативним значенням  $r_{\min} = -18$  і найбільшим позитивним  $r_{\max} = 12$  визначаємо розмах:  $R = 12 - (-18) = 30$ .

4. Визначаємо ефекти по кожному фактору за формулою (3.90):

$$A_1 = \frac{2 \cdot (-31 + 74 + 64 - 49)}{4} = 29; \quad A_{12} = \frac{2 \cdot (31 + 74 - 64 - 49)}{4} = -4;$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot (-31 + 74 - 64 + 49)}{4} = 14; \quad A_0 = \frac{2 \cdot (31 + 74 + 64 + 49 - 4 \cdot 62)}{4 + 1} = -6.$$

5. За даними табл. 2.26 для  $N = 2$  і  $n = 4 + 1 = 5$  знаходимо значення коефіцієнта  $k = 0,30$  і визначаємо помилку дослідів  $\sigma_y = 30 \cdot 0,3 = 9$ .

6. З використанням додатка A при рівні значимості  $P = 0,05$  знаходимо критерій Ст'юдента ( $t = 2,77$ ) і за формулою (3.94) для отриманих ефектів визначаємо довірчі інтервали:

$$a_1 = a_2 = \frac{2,77 \cdot 9}{2^{0,5 \cdot 2} \cdot \sqrt{2}} = 17,63 \approx 18; \quad a_0 = 0,9 \cdot 18 = 16,2.$$

Отриманий для ефектів довірчий інтервал дуже великий ( $a > A$ ), тому не можна стверджувати, що розраховані значення ефектів є наслідком впливу факторів, а не випадковою величиною внаслідок похибок дослідів.



7. При тих же умовах ставиться новий цикл дослідів. Результати третього циклу наведені в табл. 3.22.

**Таблиця 3.22 – Результати дослідів III циклу**

Показники	Режим досліду				
	0	1	2	3	4
Середній результат попередніх дослідів $\bar{y}_i^2$	62	31	74	64	49
Результат III циклу $y_i^3$	64	31	80	62	51
Різниця $r_i$	-2	0	-6	+2	-2
Новий середній результат з урахуванням I, II і III циклів $\bar{y}_i^3$	63	31	77	63	50

8. Після розрахунку нового середнього результату визначають розмах, який тепер дорівнює:  $R = 2 - (-6) = 8$ .

9. Нова похибка досліду складає  $\sigma_y = 8 \cdot 0,35 = 2,8$ .

10. Визначаємо нові значення ефектів:

$$A_1 = \frac{2 \cdot (-31 + 77 + 63 - 50)}{4} = 29,5; \quad A_{12} = \frac{2 \cdot (31 + 77 - 63 - 50)}{4} = -2,5;$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot (-31 + 77 - 63 + 50)}{4} = 16,5;$$

$$A_0 = \frac{2 \cdot (31 + 77 + 63 + 50 - 4 \cdot 63)}{4 + 1} = -6,2.$$

11. Визначаємо середню помилку:  $\sigma_y = (9 + 2,8) / 2 = 5,9$ .

12. Визначаємо нові довірчі інтервали:

$$a_1 = a_2 = \frac{2,3 \cdot 5,9}{\sqrt{3}} = 7,8; \quad a_0 = 0,9 \cdot 7,8 = 7,0.$$

13. Отримані значення для довірчих інтервалів менше ніж значення факторів  $A^* = 29,5 \pm 7,8$ ,  $A_2^* = 16,5 \pm 7,8$ . Ефект взаємодії зменшився у порівнянні з попереднім циклом, але його величина не виходить за межі довірчого інтервалу  $A_{12}^* = 2,5 \pm 7,8$ . Тому можна вважати, що взаємодії факторів немає і отримане значення, яке дорівнює 2,5, випадкове, тобто фактично  $A_{12} = 0$ .

14. Ефект зміни у середньому  $A_0 = -6,2$  порівнюється з помилкою  $a = 7,0$ . Це вказує на те, що область досліджень знаходиться далеко від оптимуму, для визначення якого значення факторів можна змінювати за

лінійним законом. Приймаємо коефіцієнт пропорційності для зміни факторів,  $k^* = 0,35$ , тоді регулююча дія для них буде:

$$\Delta_1 = k^* A_1 = (29,5 \pm 7,8) \cdot 0,35 = 10,3 \pm 2,7 \approx 10 \pm 3;$$

$$\Delta_2 = k^* A_2 = (16,5 \pm 7,8) \cdot 0,35 = 5,8 \pm 2,7 \approx 6 \pm 3.$$

Коректоване значення факторів повинно знаходитись в межах:

$$x_1 = x_1^0 + \Delta_1 = 25 + (10 \pm 3) = 38 - 32;$$

$$x_2 = x_2^0 + \Delta_2 = 30 + (6 \pm 3) = 39 - 33.$$

Незважаючи на те, що отримане статистично достовірне значення факторів, похибка дослідів приводить до великого діапазону їхнього коректування. Для зниження цих меж доцільно поставити четвертий цикл дослідів. Обробка результатів для нього аналогічна.

### 3.2.2.7. Симплексний метод планування експериментів

Симплексний метод планування експериментів у порівнянні з методом крутого сходження при аналізі одного параметра оптимізації більш громіздкий і менш точний, але більш простий [6, 8, 15].

Сутність симплексного методу полягає у тому, що перша серія експериментів ставиться так, щоб точки, які відповідають умовам проведення дослідів, створювали правильний (регулярний) симплекс у багатомірному просторі. Правильний симплекс – це множина  $n + 1$  рівновіддалених одна від одної точок у  $n$ -мірному просторі. Для  $n = 2$  це рівнобічний трикутник, для  $n = 3$  – тетраедр і т.д. Правильний симплекс з центром на початку координат у  $n$ -мірному просторі задається матрицею:

$$\begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ -R_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ 0 & -R_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & R_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

де  $k_i = 1/\sqrt{2i(i+1)}$ ;  $R_i = 1/\sqrt{2(i+1)}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

У матриці кожний рядок відповідає одному з дослідів серії. У стовпчиках вказані кодовані значення факторів при одиничній довжині ребра симплексу. Наприклад, для двомірного простору  $k_1 = 0,5$ ;  $R_1 = 0,5$ ;  $k_2 =$

0,2887;  $R_2 = 0,4082$ . Вершини початкового симплексу мають такі координати:  $(-0,5; -0,2887)$ ;  $(0,5; -0,2887)$ ;  $(0; 0,4082)$ . Перед проведенням експериментів необхідно вибрати інтервал варіювання кожного фактора і прийняти його рівним одиниці. Після побудови вихідного симплексу і проведення дослідів результати аналізують і вибирають вершину симплексу, в якій отримане найменше значення цільової функції (при пошуку максимуму).

Для руху до оптимуму необхідно поставити дослід у точці, яка є дзеркальним відображенням точки з мінімальним значенням функції відносно протилежної грані симплекса.

Для визначення умов проведення дослідів у відображеній точці використовують формулу:

$$x_{ij}^{n+2} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{ij} - x_{ij}^* \quad (3.96)$$

де  $x_{ij}^{n+2}$  – координата нової точки;  $x_{ij}^*$  – координата точки, яка відпо-

відає найгіршому результату;  $\sum_{i=1}^n (x_{ij})$  – сума координат усіх точок симплексу крім найгіршої.

На рис. 3.10 ілюструється рух правильного симплекса до екстремуму поверхні відгуку, представлений лініями рівного значення критерію ефективності двофакторного процесу (фактори  $X_1$  і  $X_2$ ).

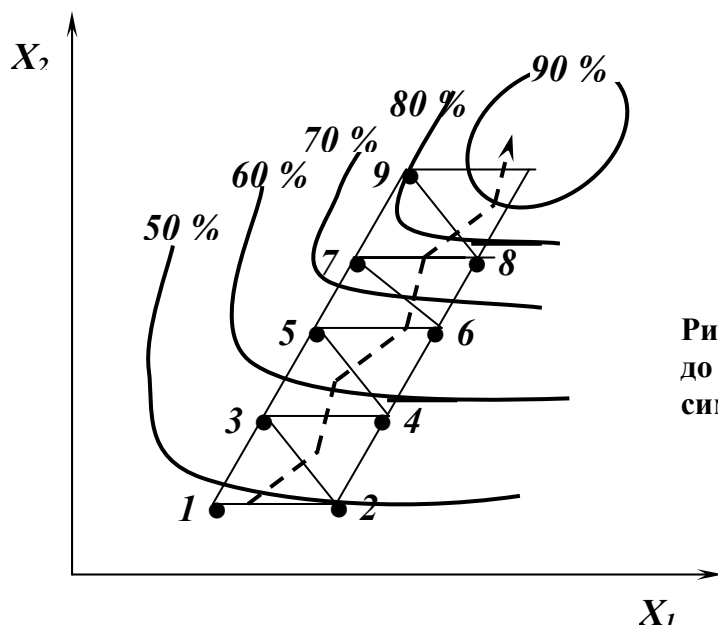


Рис. 3.10 – Схема руху до оптимальної області симплексним методом.

Досліди, поставлені у вершинах симплексу 1,2 і 3 показали, що найгіршим результатом виявився дослід 1. Наступний дослід ставиться у вершині 4, яка є дзеркальним відбиттям вершини 1 і створює з вершинами 1 і 2 новий симплекс. Далі порівнюються досліди у вершинах 2, 3 і 4. Найгі-

рший результат (вершина 2) замінюють новою – вершиною 5, де проводиться наступний експеримент і т.д. При досягненні області оптимуму розмір симплекса зменшують. Умова досягнення оптимуму така:

$$\left( \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y_i - y_m)^2} \right) / n \leq \varepsilon, \quad (3.97)$$

де  $\varepsilon$  – задана мала величина;  $y_m$  – середнє значення відгуку у вершинах симплекса.

Доцільно у кожній вершині симплекса досліди повторити декілька разів і в подальшому враховувати математичне очікування функції відгуку.

До переваг послідовного симплексного методу відносять простоту, високу ефективність (підвищується зі збільшенням числа параметрів оптимізації), можливість застосування у випадку тимчасового дрейфу характеристик об'єкта і поєднання вивчення поверхні функції відгуку з рухом симплекса до екстремуму. Недоліки даного методу – у неможливості опису поверхні відгуку (однак за даними, що отримані в результаті руху симплексів, можна побудувати рівняння регресії) і неможливості урахування якісних змін факторів.

Незважаючи на переваги, метод часто характеризується слабкою збіжністю і порівняно високою похибкою визначення оптимальних значень факторів в області екстремуму цільової функції, які обумовлені, головним чином, суб'єктивним вибором інтервалу зміни факторів, а також відбиттям симплексу без урахування поведінки цільової функції у досліджуваній області.

**Приклад 3.14.** *Необхідно із застосуванням симплекс-методу знайти оптимальну область флотації вугілля (табл. 2.23).*

*Двовірність факторного простору дозволила показати на рис. 3.11 схему руху симплекса у процесі пошуку. Факторами оптимізації  $x_1$  і  $x_2$  є витрати відповідно збирача і спінювача. Цільова функція – вилучення горючої маси у концентрат  $\varepsilon$ . Інтервали зміни витрати збирача і спінювача складають відповідно 200 г/т і 10 г/т. Центр плану –  $x_1 = 1000$  г/т і  $x_2 = 50$  г/т.*

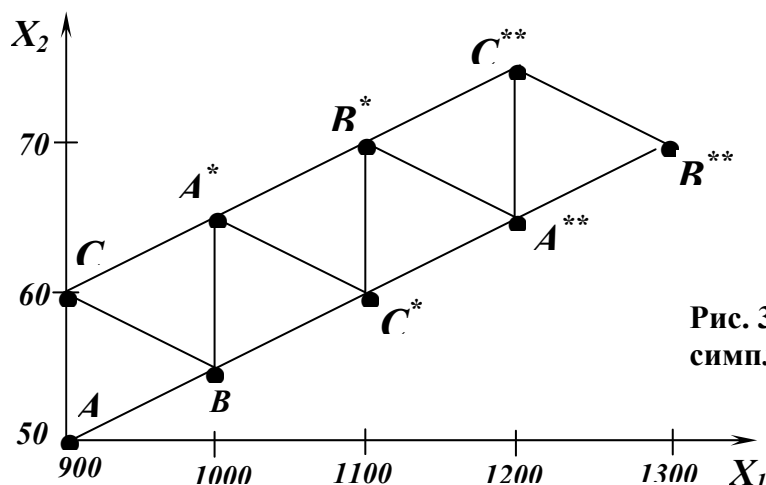


Рис. 3.11 – Схема руху симплекса.

Після реалізації експериментів у точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  вихідного симплексу, тобто з умовами, які задані координатами цих точок, очевидно, що найгірший технологічний результат  $\varepsilon_1 = 80\%$  отримано у точці  $A$ , при цьому результати у точках відрізняються. На наступному кроці застосована операція відображення координат точки  $A$ .

Координати нової точки експерименту  $A^*$  розраховують за формулою (3.96):

$$x_1^{A^*} = \frac{2(0 - 0,5)}{2} - (-0,5) = 0; \quad x_2^{A^*} = \frac{2(0,5 + 1)}{2} - 0 = 1,5.$$

Таблиця 3.23 – Застосування симплекс-методу для оптимізації флотації вугілля

№ досліду	Симплекс		Витрата				Вилучення $\varepsilon$ , %
	вихідний	вершина	збирача		спінювача		
			У код. од.	г/т			
1	ABC	A	-0,5	900	0,0	50	80
2	ABC	B	0,0	1000	0,5	55	83
3	ABC	C	-0,5	900	1,0	60	82
4	ABC	$A^*$	0,0	1000	1,5	65	86
5	$A^*BC$	$C^*$	1,5	1100	1,0	60	89
6	$A^*BC^*$	$B^*$	1,5	1100	2,0	70	91
7	$A^*B^*C^*$	$A^{**}$	2,0	1200	1,5	65	93
8	$A^{**}B^*C^*$	$C^{**}$	2,0	1200	2,5	75	92
9	$A^{**}B^*C^{**}$	$B^{**}$	2,5	1300	2,0	70	91

У наступному симплексі з вершинами  $A^*$ ,  $B$ ,  $C$  найгірший результат у точці  $B$ , для цього симплексу за тією же формулою (3.96) визначають

координати точки  $C^*$  ( $x_1^{C^*} = 1,5$ ;  $x_2^{C^*} = 1$ ). Таким же чином визначають і інші точки симплекс-методу.

Результат дослід у вершині  $A^{**}$ :  $\varepsilon = 93$ . Продовження дослідження показує, що приросту функції  $\varepsilon$  практично немає. Можна зробити висновок, що симплекс досяг екстремальної області. Продовження пошуку призводить до «обертання» симплекса. Приймаємо координати максимуму: витрати збирача  $X_1 = 1200$  г/т, витрати спінювача  $X_2 = 65$  г/т, при цьому вилучення складає  $\varepsilon = 93$  %.

Якщо досліджувати вихідну модель на максимум, наприклад, за допомогою часткових похідних, то одержимо координати екстремуму, що мало відрізняються від знайдених симплекс-методом. Деяка розбіжність у результатах пов'язана з кінцевими розмірами симплекса, але якщо прийняти його меншим (зменшити кроки варіювання), точність підвищиться.

### **3.2.2.8. Ротатабельне центрально-композиційне планування експериментів**

Для одержання статистичної моделі при плануванні експерименту в області оптимальних значень параметрів необхідно детально вивчити функцію відгуку [5, 8]. З цією метою її звичайно задають у вигляді полінома другого, а іноді й більшого ступеня. На основі поліноміальної моделі можна вирішувати різні задачі:

- інтерполяційні – прогнозування значення функції відгуку у середині досліджуваного факторного простору у будь-якій його точці;
- екстраполяційні – прогнозування функції відгуку для точки, розташованої поза факторним простором;
- оптимізаційні – визначення оптимальних значень параметрів на основі максимізації або мінімізації цільової функції.

Поліноміальна модель дозволяє оцінити ступінь впливу на функцію відгуку різних факторів, мінімізувати ресурси і побудувати різні графіки і діаграми. Математична модель майже стаціонарної області допомагає об'єктивно представити і досліджувати більш точно екстремальну поверхню відгуку. У більшості випадків екстремальну область можна описати поліномами другого порядку.

Розглянуте раніше факторне планування типу ПФЕ  $2^n$  не дозволяє оцінити коефіцієнти при квадратичних членах моделі. Потрібно використовувати планування типу  $3^n$ , але воно складне і потребує великого числа дослідів. Для досягнення цієї мети існує декілька методів планування експериментів – ортогональне центрально-композиційне, ротатабельне центрально-композиційне й ін. Останнє має більше переваг, тому що до-

зволяє одержати однакову точність моделі у всіх напрямках факторного простору. В основі цих методів лежить факторне планування типу ПФЕ  $2^n$ , матриця якого доповнюється, так званими, «зоряними точками» ( $\alpha$ ) і нульовими (центральними) точками. Метод дозволяє одержати модель у вигляді:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2, \quad (3.98)$$

де  $b_0$  – вільний член,  $b_i$  – коефіцієнти при лінійних членах,  $b_{ij}$  – коефіцієнти при взаємодіях,  $b_{ii}$  – коефіцієнти при квадратичних членах моделі,  $X_i$  – фактори.

Новий план експериментів розбивається як би на 2 частини, перша з яких (ПФЕ) дозволяє знайти коефіцієнти  $b_0, b_j$  і  $b_{ji}$ , друга – при квадратичних членах.

Характеристика ротатабельного центрально-композиційного планування наведена у табл. 3.24.

**Таблиця 3.24 – Характеристика ротатабельного центрально-композиційного планування**

Число факторів	Число точок				$\alpha$
	ПФЕ	зоряних	центральных	загальне	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,682
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Величина плеча зоряних точок розраховується за формулою:

$$\alpha = 2^{n/4},$$

де  $n$  – число факторів.

Центральний ротатабельний композиційний план другого порядку для трьох факторів наведений у табл. 3.25.

У першій частині матриці представлений план ПФЕ  $2^3$ , у другій – зоряні точки, а у третій частині – нульові центральні точки.

Розрахунок коефіцієнтів моделі виконується за формулами:

$$b_0 = 0,166(o_y) - 0,057 \sum_{j=1}^n (j_j y), \quad (3.99)$$

$$b_j = 0,073(j_y), \quad (3.100)$$

$$b_{jj} = 0,0625(jjy) + 0,0069 \sum_{j=1}^n (jjy) - 0,0568(oy), \quad (3.101)$$

$$b_{ju} = 0,125(juy), \quad (3.102)$$

де  $(oy) = \sum_i y_i$ ;  $(jjy) = \sum_i X_{ji}^2 y_i$ ;  $(jy) = \sum_i X_{ji} y_i$ ;  $(juy) = \sum_i X_{ji} X_{ui} y_i$ .

**Таблиця 3.25 - Ротатабельний центрально-композиційний план для трьох факторів**

Матриця планування			Матриця обчислення					
X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup>	X <sub>2</sub> <sup>2</sup>	X <sub>3</sub> <sup>2</sup>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
+1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
-1	+1	-1	1	1	1	-1	1	-1
+1	+1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	+1	1	1	1	1	-1	-1
+1	-1	+1	1	1	1	-1	1	-1
-1	+1	+1	1	1	1	-1	-1	1
+1	+1	+1	1	1	1	1	1	1
-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Регресійний аналіз моделі здійснюється аналогічно плануванню ПФЕ 2<sup>n</sup>, але дисперсії коефіцієнтів моделі розраховуються за іншими формулами:



$$b_0 = AN^{-1} \left\{ 2\lambda_1^2 [n+2] \sum_{\mu=1}^n y_\mu - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_\mu \right\}; \quad (3.103)$$

$$b_i = \lambda_2 N^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} y_\mu; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.104)$$

$$b_{ij} = \lambda_2^2 N^{-1} \lambda_1^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} x_{j\mu} y_\mu; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j; \quad (3.105)$$

$$b_{ij} = AN^{-1} \left\{ \lambda_2^2 [(n+2)\lambda_1 - n] \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_\mu + \right. \\ \left. + \lambda_2^2 (1 - \lambda_1) \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_\mu - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{\mu=1}^N y_\mu \right\}; \quad (3.106)$$

$$\lambda_1 = (2^{n-p} N)(2^{n-p} + 2\alpha^2)^2; \quad (3.107)$$

$$\lambda_2 = (2^{n-p} + 2\alpha^2)^{-1} N; \quad (3.108)$$

$$A = \{2\lambda_1 [(n+2)\lambda_1 - n]\}^{-1}. \quad (3.109)$$

Ротатабельне центрально-композиційне планування експериментів раціонально використовувати тільки за умови отримання однорідної дисперсії оцінки цільової функції.

## 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. АНАЛІТИЧНІ, КОМБІНОВАНІ І СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

### 4.1. Аналітичні і комбіновані методи моделювання

В основі аналітичних моделей технологічних процесів лежать фундаментальні закони енерго- і масопереносу, виражені у вигляді функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегрально-диференціальних, кінцево-різницевих і т.д.). Тому аналітичні моделі описують і розкривають сутність процесів і явищ, що протікають в досліджуваному об'єкті та визначають його властивості і поведінку.

Методи дослідження аналітичних моделей: аналітичні (отримують загальне рішення в явному вигляді і підставляють в нього значення граничних та початкових умов) і чисельні (загальні рішення в явному вигляді замінюються наближеними).

В якості прикладу аналітичних моделей можна назвати диференціальні рівняння. Фізичні процеси у загальному випадку можуть бути описані диференціальними рівняннями у часткових похідних. Для спрощення моделі об'єкт представляють у вигляді набору (системи) частин, які описуються функціями тільки однієї змінної – часу. При цьому задачі, що вирішуються у збагаченні корисних копалин, як правило, допускають лінеаризацію, яка спрощує моделі процесів – у такому випадку аналітична модель являє собою лінійне диференціальне рівняння.

Якщо технологічний процес має одну вхідну величину (вплив)  $x(t)$  і одну вихідну величину  $y(t)$ , то лінійне диференціальне рівняння, що описує його властивості, має такий загальний вигляд:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x}{dt^m} \quad (4.1)$$

Рішення диференціальних рівнянь-моделей шукаються в замкнутому вигляді, у вигляді функціональних залежностей. Такі аналітичні моделі технологічних процесів зручні при аналізі сутності фізичних (хімічних) процесів, але пошук їх рішень буває вельми складним. Громіздкість аналітичних виразів суттєво зменшує їх застосування у інженерній практиці.

Тобто, при якісному аналізі процесів, компаративному (порівняльному) підході застосування аналітичних моделей більш виправдане, ніж у випадку необхідності отримання конкретних числових оцінок вихідних параметрів об'єкта.

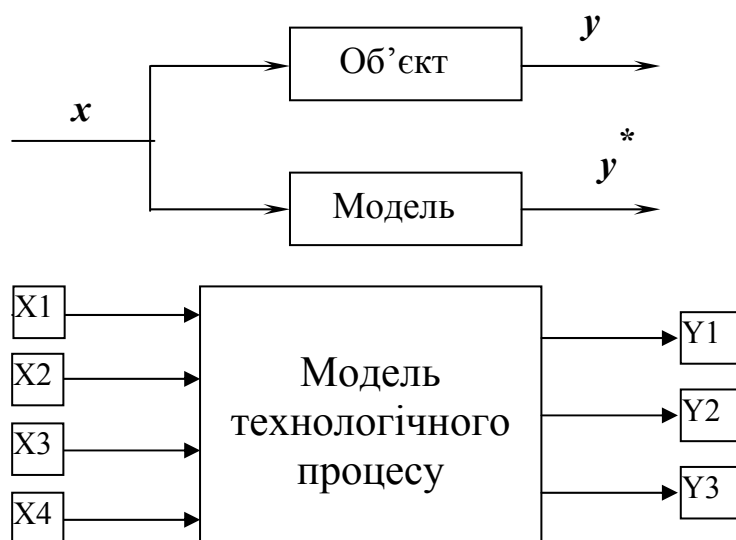
Якщо окремі елементи моделі (наприклад, коефіцієнти у аналітичному рівнянні) отримані статистичними (емпіричними) методами, то відповідні моделі є *аналітично-емпіричними*. Аналітичні методи іноді поєднують з графічними, одержуючи таким чином *графоаналітичні моделі*.

Нижче при розгляді моделювання окремих процесів збагачення корисних копалин ми розглянемо їх аналітичні і комбіновані моделі.

## 4.2. Графічні методи моделювання

### 4.2.1. Факторні моделі

Застосування факторної моделі використовує прийом типу «чорний ящик» й ілюструється рис. 4.1.



**Рис.4.1. Схема одержання моделі об'єкту:  
 $X_n$  – вхідні фактори;  $Y_n$  – вихідні фактори**

Вхідні  $X_n$  і вихідні  $Y_n$  параметри об'єкту встановлюють шляхом апріорної інформації, а також за допомогою попередніх експериментів. Задача моделювання полягає в тому, щоб значення  $y^*$  одержане на математичній моделі було близьким до реального значення  $y$  на виході об'єкту.

#### 4.2.2. Феноменологічні моделі

Феноменологічний метод передбачає поділ технологічного процесу на субпроцеси. Такий прийом застосовується з метою спрощення і упорядкування процесу моделювання технологічного процесу. Кожен субпроцес вивчають окремо. Вихідні параметри попереднього субпроцесу є вхідними для наступного. Вихідні параметри останнього субпроцесу є вихідними для всього процесу.

Наприклад, феноменологічна схема пінної флотації відображає послідовність та взаємозв'язок всіх елементарних фізичних та хімічних процесів, які мають місце при проведенні технологічного процесу флотації (рис. 4.2): кондиціонування, аерації, елементарного акту флотації, спливання флоатоагрегатів та формування пінного шару, вивантаження продуктів флотації.

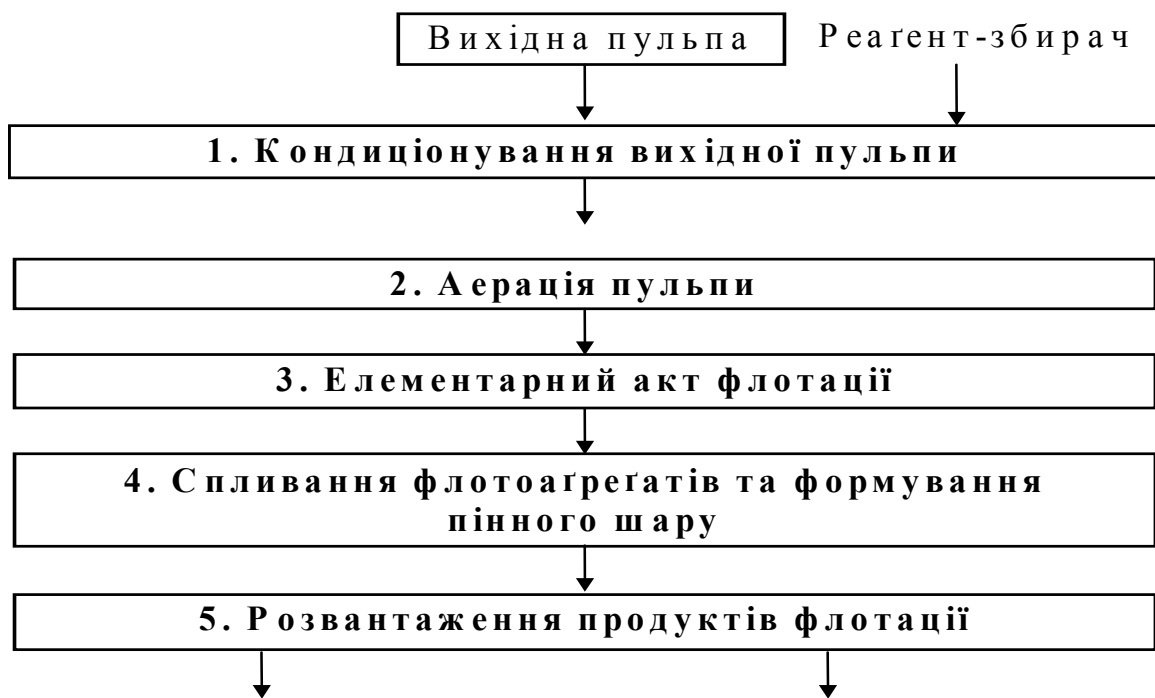


Рис. 4.2. – Феноменологічна схема пінної флотації.

При застосуванні феноменологічного методу загальна модель процесу буде представлена сімейством рівнянь-моделей субпроцесів. Феноменологічна модель містить механізм для опису явища, але може бути тимчасовою, - вона уточнюється в ході вивчення процесу.

### 4.2.3. Моделі-графи

Розповсюджений у всіх галузях науки і техніки метод графічного зображення процесів, залежностей, структур і т.п. за допомогою точок та ліній, що їх з'єднують, привів до створення специфічних і звичних для спеціалістів кожної галузі графічних схем типу електричних, технологічних, пневматичних, гідравлічних і т.п. В математиці ці питання вирішуються в теорії графів, яка є топологічним відображенням теорії множин. Ця теорія може бути прикладена до будь-яких схематичних зображень процесів і служить загальним математичним інструментом для їх досліджень. В ряді випадків використання математичного апарату теорії графів дозволяє зробити деякі висновки і спрощення, які не настільки очевидні в звичайних схемах. В цьому смислі доцільно використання мови теорії графів і переклад на них технологічних схем і залежностей, що розглядаються в збагаченні корисних копалин.

*Графом* називається сукупність об'єктів (вузлів) і зв'язків (дуг і ребер), що їх з'єднують. Тим самим дається уявлення про структуру об'єкту, що досліджується, встановлюються зв'язки між його окремими вузлами, а якщо ввести для ребер відповідну масову характеристику, можна одержати й кількісну оцінку зв'язків.

Технологічні схеми переробки корисних копалин можуть бути представлені у вигляді станів сукупності зерен, що послідовно змінюються. Сукупність зерен в кожному стані – корисної копалини в родовищі, дробленої, подрібненої, класифікованої за крупністю, розділеної за фізичними властивостями – характеризуються визначеними параметрами, як множина (вузол графа), обмежена граничними значеннями параметрів. Перехід з одного стану в інший може бути представлений спрямованими графами, вершини яких позначають відповідний стан, а ребра – процеси переходу в новий стан.

В процесах дроблення і подрібнення, коли весь матеріал переходить в один продукт іншого стану граф має одно ребро.

При класифікації і розділенні за фізичними властивостями процес характеризується багатореберним (за числом одержаних продуктів) графом (рис. 4.3). Вершини і ребра можуть бути пофарбовані різними кольорами у відповідності з прийнятими позначеннями: такий хроматичний граф містить підграфи різного кольору.

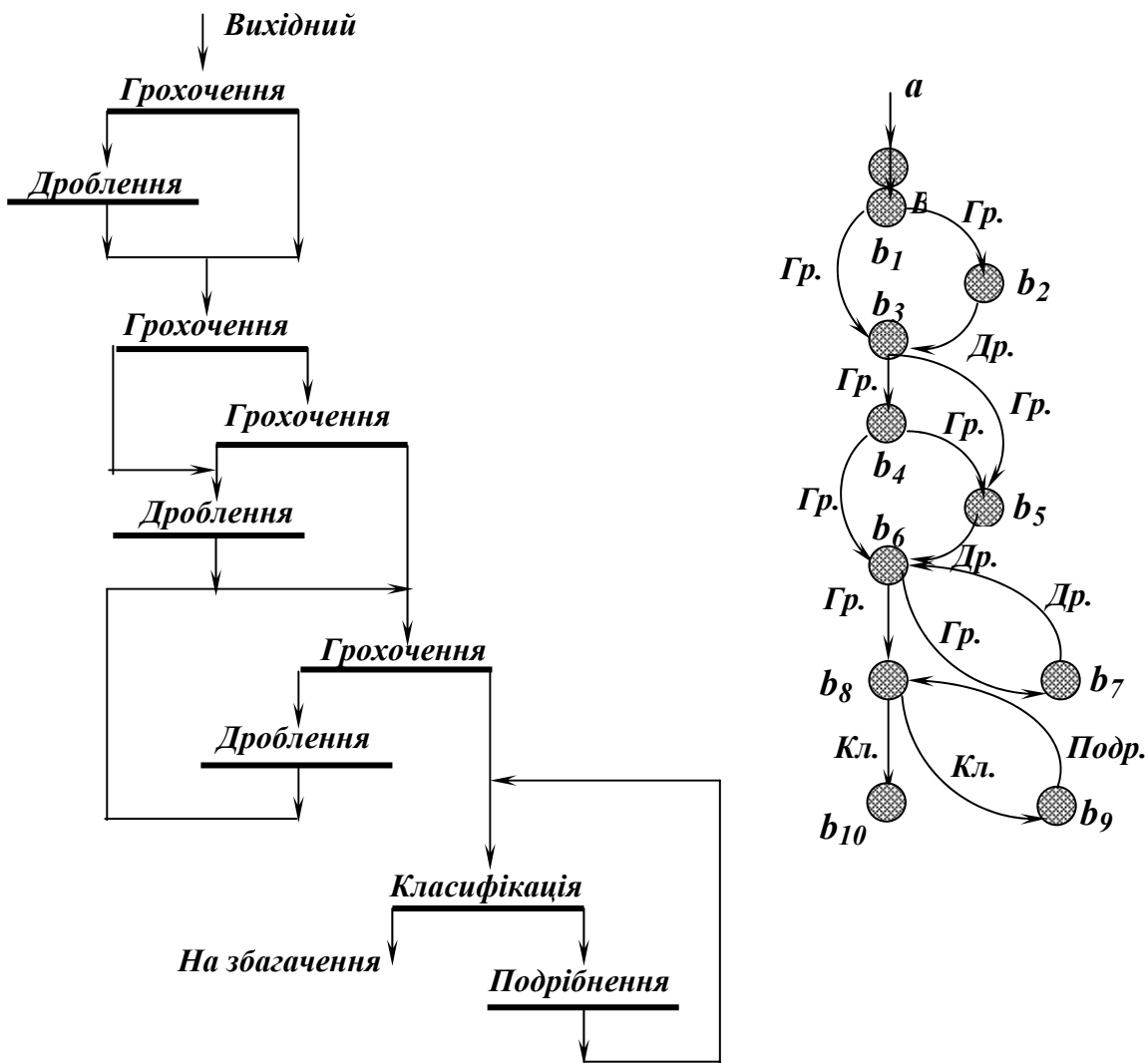


Рис. 4.3. – Схема технологічного процесу і його модель-граф.  $b_i$  – стан матеріалу; Гр. – грохочення; Др. – дроблення; Кл. – класифікація; Подр. – подрібнення.

У нашому випадку маємо справу з орієнтованим графом (графом, у якого ребра мають напрямок).

Теорія графів для дослідження технологічних процесів дозволяє більш глибоко оцінити структуру процесу. При порівнянні двох або декількох технологічних схем, що призначені для переробки одного й того ж матеріалу з одержанням тих же кінцевих продуктів, порівняння графів дає можливість вибрати найбільш короткий і, отже, найбільш економічний процес з меншим числом операцій. На графі чітко виділяються цикли операцій над окремими проміжними продуктами. Наявність таких циклів вказує на існування продуктів, що циркулюють або накопичуються в процесі, і для яких необхідно найти точку виводу.

Моделювання за допомогою графів не обмежуються аналізом технологічних схем, а дозволяє при використанні статистичних даних виділити значимі фактори, що впливають на процес, визначити мінімальний набір критеріїв оптимізації і іншу інформацію.

### 4.3. Спеціальні методи моделювання

До спеціальних можна віднести методи моделювання процесів збагачення корисних копалин, які мають обмежене застосування – для специфічної сировини, при попередньому моделюванні, у спеціальних умовах – зокрема моделювання на основі елементів прогнозування, евристичне моделювання, адаптаційне моделювання. Сюди ж примикають метод розмірностей та метод аналогій, описані в розділі 2.

#### 4.3.1. Моделювання на основі елементів прогнозування

Іноді раціональне рішення інженерної задачі ґрунтується на результатах, які на момент прийняття рішення ще невідомі або знаходяться в недосліджуваному діапазоні значень аргументів. Виникає необхідність прогнозувати результати за тими даними, що вже є [2, 5].

#### *Екстраполяція результатів*

Екстраполяція результатів застосовується, якщо бажано знати значення функції  $y(x^*)$ , аргумент якої  $x^*$  лежить поза досліджуваним діапазоном. Екстраполяція основана на апроксимації існуючих даних тією або іншою залежністю і розрахунку за нею значення функції в потрібній області значень аргумента. Вона здійснюється найчастіше з використанням поліномів першого і другого ступенів. Чим далі знаходиться область, яка екстраполюється, тим більше імовірність похибки.

Найпростіше виконувати екстраполяцію для функції одного аргумента. У цьому випадку прогноз здійснюється таким чином:

– за відомими значеннями  $x$  і  $y$  будується графік і по кривій вибирають порядок полінома. Для спрощення наступних розрахунків змінні краще центрувати відносно постійної складової;

– для явно лінійної залежності  $y = b_0 + b_1x$  по останніх двох точках знаходять параметри прямої  $b_0$  і  $b_1$  за формулами:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{n \sum xy - \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ b_0 &= \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

– для нелінійної залежності використовують поліном другого ступеня, вибирають три останні точки і сумісним вирішенням системи рівнянь (4.3) знаходять коефіцієнти  $b_0$ ,  $b_1$  і  $b_2$ :

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= y_1 - b_1x_1 - b_2x_1^2 \\ b_0 &= y_2 - b_1x_2 - b_2x_2^2 \\ b_0 &= y_3 - b_1x_3 - b_2x_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

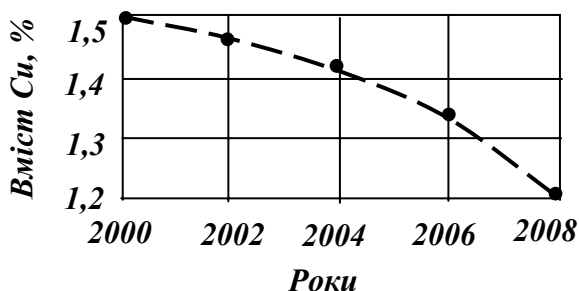
– підставляють в отримане рівняння значення  $x^*$  і знаходять  $yx^*$ ;  
 – якщо спостерігається розкид точок, визначати параметри полінома по трьох останніх точках не можна і слід використовувати метод найменших квадратів.

**Приклад 4.1.** Якість мідної руди, що надходить на збагачувальну фабрику щорічно знижується. Вміст міді в руді за 2000 - 2008 роки наведено в табл. 3.26. Необхідно розрахувати прогнозовану якість руди у 2010 році.

**Таблиця 4.1 – Вміст міді в руді за 2000 - 2008 роки**

Рік	2000	2002	2004	2006	2008
$\alpha_{Cu}$ , %	1,50	1,46	1,42	1,34	1,20

За існуючими даними будемо графік залежності вмісту міді в руді від року надходження її на збагачувальну фабрику (рис. 4.4).



**Рис. 4.4 – Графік залежності вмісту міді в руді від року надходження її на збагачувальну фабрику.**

Графічна залежність показує явно нелінійне зниження якості руди, тому для екстраполяції застосовуємо поліном другого ступеню.

Центруємо значення аргументу; за точку відліку приймаємо 2000 рік; якість центруємо відносно 1,00 %. Дані для розрахунку коефіцієнтів  $b_0$ ,  $b_1$  і  $b_2$  полінома представлені в табл. 4.2.



**Таблиця 4.2 – Дані для розрахунку коефіцієнтів  $b_0$ ,  $b_1$  і  $b_2$**

Аргумент	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$	$x_4 = 6$	$x_5 = 8$
Функція	$y_1 = 0,50$	$y_2 = 0,46$	$y_3 = 0,42$	$y_4 = 0,34$	$y_5 = 0,20$

Відбираємо три останні точки і за формулою (4.3) знаходимо:  
 $b_0 = 1,00$ ;  $b_1 = -0,115$ ;  $b_2 = -0,0075$ .

Екстраполяційний поліном буде мати вигляд:

$$\alpha_{Cu} = 3,00 - 0,115 \cdot (x - 2000) - 0,0075 \cdot (x - 2000)^2.$$

Підставляємо у поліном прогнозуємий рік – 2010 і знаходимо:

$$\alpha_{Cu}^{2010} = 3,00 - 0,115 \cdot (2010 - 2000) - 0,0075 \cdot (2010 - 2000)^2 = 1,10\%.$$

### **Інтерполяція результатів**

Інтерполяційні формули дозволяють розрахувати значення функції при значенні аргументу, який знаходиться всередині досліджуваного інтервалу. Наприклад, при значенні аргументу  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  відомо значення функції  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$ . Необхідно визначити величину функції  $y^*$  при  $x = x^*$ , якщо  $x^*$  лежить в діапазоні  $x_0 \leq x^* \leq x_n$ . Для рішення таких задач існує багато інтерполяційних формул. Найбільш зручна для технічних розрахунків інтерполяційна формула Лагранжа, тому що вона не накладає обмежень на інтервал зміни  $x$ . Інтерполяція полягає в тому, що експериментальні точки апроксимуються поліномом. У загальному вигляді формула Лагранжа має вигляд:

$$y(x^*) = \sum y_i \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \dots (x^* - x_{i-1})(x^* - x_{i+1}) \dots (x^* - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (4.4)$$

Для двох точок  $x_1 = a$  і  $x_2 = b$  рівняння буде:

$$y(x^*) = \frac{x^* - b}{a - b} y_a + \frac{x^* - a}{b - a} y_b. \quad (4.5)$$

Для трьох точок  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$  :

$$y(x^*) = \frac{(x^* - b)(x^* - c)}{(a - b)(a - c)} y_a + \frac{(x^* - a)(x^* - c)}{(b - a)(b - c)} y_b + \frac{(x^* - a)(x^* - b)}{(c - a)(c - b)} y_c. \quad (4.6)$$

**Приклад 4.2.** При флотації вугільних шламів як збирач використовували дизельне паливо з витратами ( $q$ ) 1,2, 1,6 і 2,0 кг/т, при цьому ступінь вилучення ( $\varepsilon$ ) вугільних частинок в концентрат складає відповідно 60, 70 і 84 %. Необхідно визначити чому буде дорівнювати ступінь вилучення при витраті збирача 1,8 кг/т.

Результат отримуємо з використанням формули (4.6) :

$$\begin{aligned} \varepsilon(q) &= \frac{(1,8 - 1,6)(1,8 - 2,0)}{(1,2 - 1,6)(1,2 - 2,0)} \cdot 60 + \frac{(1,8 - 1,2)(1,8 - 2,0)}{(1,6 - 1,2)(1,6 - 2,0)} \cdot 70 + \\ &+ \frac{(1,8 - 1,2)(1,8 - 1,6)}{(2,0 - 1,2)(2,0 - 1,6)} \cdot 84 = 76,5 \% \end{aligned}$$

Тобто при витраті збирача (дизельне паливо)  $q = 1,8$  кг/т ступінь вилучення вугільних частинок в концентрат буде складати  $\varepsilon = 76,5$  %.

### 4.3.2. Евристичне моделювання

Евристичні моделі отримують шляхом формалізації моделей процесів, що сформувався у робочого або інженера, який веде процес, але звичайно не відтворені ними в необхідній узагальненій формі. В результаті одержання інформації про процес, що безперервно надходить, численних проб і особистих спостережень, людина, яка безпосередньо веде процес, володіє дуже стійкою і визначеною моделлю конкретного процесу [2].

Метою евристичного моделювання є така оцінка ефектів факторів, яка дозволяє в кількісній формі записати модель. У цьому сенсі дуже зручною є форма бесіди у вигляді уявного експерименту.

Однак робочому важко оцінити одразу вплив декількох факторів, тому опитування виконується послідовно по кожному фактору. Результати опитування заносять у спеціальну таблицю і після обробки отриманих даних розраховують модель процесу. Суть методу пояснюється на прикладі.

**Приклад 4.3.** На вуглезбагачувальній фабриці проводилося багаторазове опитування флотаторів про вплив на процес флотації при відхиленні від нормального (середнього) значення таких факторів: ви-

трат збирача (фактор  $x_1$ ), витрата спінювача (фактор  $x_2$ ), температура пульпи (фактор  $x_3$ ), густина пульпи (фактор  $x_4$ ).

Середні значення факторів і відхилення від них наведені в табл. 4.3.

Процес флотації оцінювався по вилученню горючої маси в концентрат  $\varepsilon$  і його зольності  $A$ .

**Таблиця 4.3 – Середні значення факторів і відхилення**

Фактор	Позначення фактора (нульовий рівень)	Відхилення фактора	
		збільшення	зменшення
Витрата збирача	$x_1 = 1,3$ кг/т	$+\Delta x_1 = 0,1$ кг/т	$-\Delta x_1 = -0,1$ кг/т
Витрата спінювача	$x_2 = 0,04$ кг/т	$+\Delta x_2 = 0,01$ кг/т	$-\Delta x_2 = -0,01$ кг/т
Температура пульпи	$x_3 = 20^\circ\text{C}$	$+\Delta x_3 = 5^\circ\text{C}$	$-\Delta x_3 = -5^\circ\text{C}$
Густина пульпи	$x_4 = 120$ кг/м <sup>3</sup>	$+\Delta x_4 = 20$ кг/м <sup>3</sup>	$-\Delta x_4 = -20$ кг/м <sup>3</sup>

Результати опитування занесені в табл. 4.4.

**Таблиця 4.4 – Результати опитування (анкета для отримання моделі процесу)**

№ питання	Значення факторів (питання)				Значення вихідних показників (відповіді)	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\varepsilon$	$A$
0	$x_{10} = 1,3$	$x_{20} = 0,04$	$x_{30} = 20$	$x_{40} = 120$	$\varepsilon_0 = 85$	$A_0 = 9,0$
1	$+\Delta x_1 = 0,1$	0	0	0	$\Delta\varepsilon_1 = 3$	$\Delta A_1 = 0,3$
2	$-\Delta x_1 = -0,1$	0	0	0	$\Delta\varepsilon_2 = -5$	$\Delta A_2 = -0,4$
3	0	$+\Delta x_2 = 0,01$	0	0	$\Delta\varepsilon_3 = 2$	$\Delta A_3 = 0,2$
4	0	$-\Delta x_2 = -0,01$	0	0	$\Delta\varepsilon_4 = -3$	$\Delta A_4 = -0,2$
5	0	0	$+\Delta x_3 = 5$	0	$\Delta\varepsilon_5 = 3$	$\Delta A_5 = 0,4$
6	0	0	$-\Delta x_3 = -5$	0	$\Delta\varepsilon_6 = -6$	$\Delta A_6 = -0,5$
7	0	0	0	$+\Delta x_4 = 20$	$\Delta\varepsilon_7 = -4$	$\Delta A_7 = -0,3$
8	0	0	0	$-\Delta x_4 = -20$	$\Delta\varepsilon_8 = 1$	$\Delta A_8 = 0,1$

Коефіцієнти нелінійної моделі можна отримати, якщо вирішити системи рівнянь відносно вилучення і зольності:

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{2j-1} = a_j \Delta x_j + a_{jj} \Delta x_j^2 \\ \Delta\varepsilon_{2j} = a_j (-\Delta x_j) + a_{jj} (-\Delta x_j)^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \Delta A_{2j-1} = b_j \Delta x_j + b_{jj} \Delta x_j^2 \\ \Delta A_{2j} = b_j (-\Delta x_j) + b_{jj} (-\Delta x_j)^2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Відхилення вилучення і зольності визначаються як різниця між середнім значенням фактора ( $\varepsilon_0 = 85\%$  і  $A_0^d = 9\%$ ) і значенням, отриманим в результаті відповіді робочого на конкретне питання про вплив відхилення фактора на процес.

Отримання коефіцієнтів моделі розглянемо на прикладі врахування впливу витрати збирача:

– на вилучення горючої маси у флотоконцентрат:

$$\begin{cases} 3 = a_1 \cdot 0,1 + a_{11} \cdot 0,1^2 \\ -5 = a_1 \cdot (-0,1) + a_{11} \cdot (-0,1)^2 \end{cases}$$

В результаті вирішення системи рівнянь одержуємо коефіцієнти  $a_1 = 40$ ,  $a_{11} = -100$  і модель відносно впливу витрати збирача

$$\varepsilon = 85 + 40 \cdot \Delta x_1 - 100 \cdot \Delta x_1^2;$$

– на зольність флотоконцентрату:

$$\begin{cases} 0,3 = b_1 \cdot 0,1 + b_{11} \cdot 0,1^2 \\ -0,4 = b_1 \cdot (-0,1) + b_{11} \cdot (-0,1)^2 \end{cases}$$

В результаті вирішення системи рівнянь одержуємо коефіцієнти  $b_1 = 3,5$ ,  $b_{11} = -5$  і модель відносно впливу витрати збирача:

$$\beta = 9 + 3,5 \cdot \Delta x_1 - 5 \cdot \Delta x_1^2.$$

Аналогічно визначають вплив інших факторів і записують модель процесу із урахуванням усіх факторів, для даного прикладу вона буде:

– вилучення горючої маси у флотоконцентрат:

$$\varepsilon = 85 + 40 \cdot \Delta x_1 - 100 \cdot \Delta x_1^2 + 250 \cdot \Delta x_2 - 5000 \cdot \Delta x_2^2 + 0,9 \cdot \Delta x_3 - 0,06 \cdot \Delta x_3^2 + 0,125 \cdot \Delta x_4 - 0,00025 \cdot \Delta x_4^2;$$

– зольність флотоконцентрату:

$$A^d = 9 + 3,5 \cdot \Delta x_1 - 5 \cdot \Delta x_1^2 + 20 \cdot \Delta x_2 + 0,09 \cdot \Delta x_3 - 0,002 \cdot \Delta x_3^2 + 0,01 \cdot \Delta x_4 - 0,00025 \cdot \Delta x_4^2.$$

Першим результатом отримання таких моделей є узгодження досвіту і уявлень про процес. Узгодження моделей усіх робочих свідчить про однаковість знань про процес, при розбіжностях – можна з'ясувати їхню причину та покращити уявлення окремих робочих про процес. У подальшому модель можна використовувати для оптимізації процесу. Крім того евристичний метод дозволяє коротким і простим способом визначити квазіоптимальні режими і квазіоптимальні закономірності.

Отримання квазіоптимальних режимів полягає у тому, що вибирають робочих, які мають кращі результати ведення процесу, і приймають рекомендований ними середній режим. Звичайно це називається передачею передового досвіту.

Квазіоптимальні режими для різних умов, представлені рівняннями називаються квазіоптимальними закономірностями. Для цього виділяють серед вхідних факторів керовані (позначимо їх  $z$ ), і некеровані (позначимо їх  $x$ ). Слід узгодити з робочими однакоє поняття найкращих показників і сформулювати цільову функцію: наприклад, під найкращими розуміти режими, які забезпечують в даних умовах максимальне вилучення і необхідну якість концентрату. Визначити нормальні (середні) значення збурюючих факторів (некерованих) і значення керованих факторів, необхідні для досягнення кращих результатів ( $z_{10}$ ,  $z_{20}$ ,  $z_{30}$ ). Зазначити необхідне відхилення керованих факторів, що забезпечують найкращі показники процесу:

– якщо тільки один фактор  $x_1$  відхилиться від нормального режиму на  $+\Delta x_1$  ( $\Delta x_{11}$ ,  $\Delta x_{21}$ ,  $\Delta x_{31}$ );

– якщо тільки один фактор  $x_1$  відхилиться від нормального режиму на  $-\Delta x_1$  ( $\Delta x_{11}$ ,  $\Delta x_{21}$ ,  $\Delta x_{31}$ );

– і далі по кожному некерованому фактору.

Якщо вирішити систему аналогічну (4.7) – (4.8):

$$\begin{cases} z_1 = z_{10} + c_{11}\Delta x_1 + c_{111}\Delta x_1^2 + \dots + c_{p1}\Delta x_p + c_{pp1}\Delta x_p^2; \\ z_2 = z_{20} + c_{12}\Delta x_1 + c_{112}\Delta x_1^2 + \dots + c_{p2}\Delta x_p + c_{pp2}\Delta x_p^2; \\ z_3 = z_{30} + c_{13}\Delta x_1 + c_{113}\Delta x_1^2 + \dots + c_{p3}\Delta x_p + c_{pp3}\Delta x_p^2, \end{cases} \quad (4.9)$$

отримують систему квазіоптимальних закономірностей-моделей, яку можна рекомендувати для використання.

**Приклад 4.4.** Отримати евристичну модель кульового млина при таких вхідних даних: крупність руди  $G = 15$  мм, частка руди другого сорту  $P = 30\%$ , продуктивність млина  $Q = 20$  т/год., витрати води  $V = 40$  м<sup>3</sup>/год. Вихідна величина – вміст готового продукту (клас – 0,074 мм) в зливі класифікатора  $\beta = 60\%$  при максимальній продуктивності млина.

Результати опитування заносимо в табл. 4.5.

**Таблиця 4.5 – Результати опитування**

№ запит.	Запитання до робочих				Відповіді робочих				Середні значення
	$G$	$P$	$Q$	$V$	$\Delta\beta_1$	$\Delta\beta_2$	$\Delta\beta_3$	$\Delta\beta_4$	$\bar{\beta}, \Delta\bar{\beta}$
0	15	30	20	40	–	–	–	–	60
1	+2	–	–	–	–6	–4,5	–4	–5,5	–5
2	–2	–	–	–	+8	+11	+12	+9	+10
3	–	+10	–	–	+4,5	+3,5	+4,5	+3,5	+3
4	–	–10	–	–	–3	–4	–3	–2	–3
5	–	–	+3	–	–12	–8	–10	–10	–10
6	–	–	–3	–	+4	+1	+2	+5	+3
7	–	–	–	+5	+2	+2	+2	+2	+2
8	–	–	–	–5	–5	–6	–4	–5	–5
$Q \rightarrow \max; \beta_{-0,074} = 60\%$									

Коефіцієнти рівняння моделі отримують при вирішенні системи рівнянь відносно кожного з факторів (див. приклад 2.22). Для даного прикладу аналітичний запис моделі має вигляд:

$$\beta_{\Pi} = 60 - 3,75 \cdot (G - 15) + 0,625 \cdot (G - 15)^2 + 0,3 \cdot (P - 30) - 2,33 \cdot (Q - 20) - 0,388 \cdot (Q - 20)^2 + 0,7 \cdot (V - 40) - 0,06 \cdot (V - 40)^2,$$

де  $\beta_{\Pi}$  – прогнозне значення вихідної величини.

### 4.3.3. Адаптаційне моделювання

Адаптаційні методи дозволяють для отримання моделі використовувати дані одразу ж без їхнього накопичення. Це важливо, по-перше, у випадку отримання і обробки великої кількості даних і, по-друге, що го-

ловніше, модель можна використовувати в процесі її отримання. Цей випадок найбільш яскраво виявляється в умовах безперервного використання результатів спостереження за процесом для покращення моделі [2].

Частково ця ідея відбивається в схемах так званого «поточного» аналізу, який полягає у тому, що регресійну модель на кожному черговому кроці спостереження отримують заново зрушенням використаного масиву даних на один номер і розташуванням на звільненому місці результату нових спостережень. У цьому випадку повністю зберігається схема регресійного аналізу, яка доповнюється тільки ідеєю перерахунку моделі. Адаптаційний метод дозволяє перераховувати модель за даними одного-єдиного, останнього спостереження. Метод дає добрі результати для лінійних моделей.

Адаптаційний метод належить до «пасивних», тому усі методичні вказівки про збір даних повністю відносяться до цього методу. Однак цей метод можна використовувати також і при активній зміні вхідних факторів.

Схема методу така.

Якщо існує модель для  $N$ -го спостереження, то після отримання  $N + 1$ -го спостереження коефіцієнти змінюють за формулою:

$$a_{jN+1} = a_{jN} + (y_{N+1} - y_{N+1\text{прогн}}) / (\gamma + \sum_{j=0}^k x_{jN+1}^2), \quad (4.10)$$

$$y_{N+1\text{прогн}} = a_{0N} + a_{1N}x_{N+1}, \quad (4.11)$$

де  $N$  – номер спостереження;  $\gamma$  – деяке число, яке враховує вплив перешкод (чим більше перешкоди, тим більше  $\gamma$ );  $k$  – число коефіцієнтів в рівнянні (включаючи  $a_0$ ).

Достатньо добрі результати дає використання спрощених формул, де для корекції використовується коефіцієнт  $b = 2/k$  при низькому рівні перешкод, який знижується по відношенню до цієї величини при підвищенні рівня перешкод:

$$a_{jN+1} = a_{jN} + bx_{jN}(y_{N+1} - y_{N+1\text{прогн}}), \quad (4.12)$$

тобто

$$a_{jN+1} = bx_{jN+1}\Delta y_{N+1}. \quad (4.13)$$

При цьому значення  $x_j$  необхідно використовувати у відносній формі:

$$x_j = (x_{jN} - x_{jN0}) / (x_{jN\text{max}} - x_{jN0}), \quad (4.14)$$

де  $x_{jN}$  – природне значення  $x_j$ ;  $x_{jN\text{max}}$  – максимальне природне значення;  $x_{jN0}$  – нульове природне значення  $x_j$ .

Для отримання 10 %-ної точності моделі на кожний коефіцієнт моделі необхідно по 10 спостережень у випадку нормального розподілу  $x$ . Завжди приймається  $x_0 = 1$ .

**Приклад 4.5.** В результаті лабораторних досліджень процесу вилуговування припускалося, що вилучення нікелю залежить від витрати кислоти таким чином:  $\varepsilon = 65 + 0,1q_n$ , де  $q$  – витрата кислоти, кг/т.

При спостереженнях за промисловим процесом був застосований адаптаційний метод покращення моделі.

Відомо, що витрати кислоти складають в середньому 230 кг/т і можуть досягати 280 кг/т, тому використовували відносні значення:

$$q = (q_n - 230)/(280 - 230) = (q_n - 230)/50.$$

Модель в відносних одиницях  $q$  буде отримана, якщо підставити  $q_n = 50q + 230$ , тоді

$$\varepsilon = 65 + 0,1(50q + 230) = 88 + 5q.$$

Результати спостережень за процесом наведені в табл. 4.6. На момент часу  $t_0$ , тобто при  $N = 0$  відомі тільки коефіцієнти  $a_0 = 88$  і  $a_1 = 5$ .

При отриманні перших даних  $q_n = 260$  або  $q = 0,6$  і  $\varepsilon = 94$  прогнозуємо за існуючою моделлю  $\varepsilon_{\text{прогн}}$

$$\varepsilon_{\text{прогн}} = 88 + 5 \cdot 0,6 = 91.$$

Знаходимо  $\Delta\varepsilon_{\text{прогн}} = 3$ .

Оскільки  $k = 2$  для визначення приращених коефіцієнтів використовуємо формулу:

$$\Delta a_{jN} = x_{jN+1} \Delta y_{N+1}.$$

При  $N = 1$   $\Delta a_{01} = 1 \cdot 3 = 3$ ;  $\Delta a_{11} = 0,6 \cdot 3 = 1,8$ , звідки  $a_{01} = 88 + 3 = 91$ ;  $a_{11} = 5 + 1,8 = 6,8$ .

Таким чином, після отримання і використання першої пари даних маємо модель:

$$\varepsilon = 91 + 6,8q.$$



Отримуємо і використовуємо другу пару даних:

$$\varepsilon_{\text{прогн}2} = 91 + 6,8 \cdot (-0,6) = 86,92;$$

$$\Delta a_{02} = 1 \cdot (-0,92) = -0,92;$$

$$\Delta a_{12} = -0,6 \cdot (-0,92) = 0,55;$$

$$a_{02} = 91 - 0,92 = 90,08;$$

$$a_{12} = 6,8 + 0,55 = 7,35;$$

$$\varepsilon = 90,08 + 7,35q \text{ і т.д.}$$

**Таблиця 4.6 – Результати спостережень і розрахунків моделі**

№ до- сліду	$q_n$	$q$	$\varepsilon$	$\varepsilon_{\text{прогн}}$	$\Delta\varepsilon_{\text{прогн}}$	$\Delta a_0$	$\Delta a_1$	$a_0$	$a_1$
0	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	260	0,6	94	91,00	3,00	3,00	1,80	91,00	6,80
2	200	-0,6	86	86,92	-0,92	-0,92	0,55	90,08	7,35
3	220	-0,2	89	88,61	0,39	0,39	-0,08	90,47	7,27
4	280	1,0	96	97,74	-1,74	-1,74	-1,74	88,73	5,53
5	230	0	90	88,73	1,27	1,27	0	90,00	5,53
6	190	-0,8	85	85,58	-0,58	-0,58	0,47	89,42	6,00
7	200	-0,6	85	85,82	-0,82	-0,82	0,49	88,60	6,49
8	270	0,8	95	93,80	1,20	1,20	0,96	89,80	7,45
9	210	-0,4	88	86,80	1,20	1,20	-0,48	91,00	6,97
10	220	-0,2	88	89,60	-1,60	-1,60	0,32	89,40	7,29
11	190	-0,8	85	83,60	1,40	1,40	-1,12	90,80	6,17
12	240	0,2	91	92,00	-1,00	-1,00	-0,20	89,80	5,97
13	270	0,8	94	94,60	-0,60	-0,60	-0,48	89,20	5,49
14	280	1,0	95	94,79	0,21	0,21	0,21	89,40	5,70
15	240	0,2	92	90,50	1,50	1,50	0,30	90,90	6,00
16	220	-0,2	88	89,70	-1,70	-1,70	-0,34	89,20	5,66
17	200	-0,6	85	85,80	-0,80	-0,80	0,48	88,40	6,14
18	260	0,6	93	92,10	0,90	0,90	0,54	89,30	6,68

Оскільки на результати  $\varepsilon$  впливають перешкиди, то ні  $a_0$ , ні  $a_1$  не прямують до постійного значення, а коливаються навколо деякого «справжнього» значення – в прикладі для  $a_0 = 90$  і для  $a_1 = 6$ . Рівень перешинок – високий, тому коефіцієнт  $b$  слід брати не  $b = 2/k$ , а менше і продовжити спостереження.

#### 4.4. Сепараційні характеристики збагачувальних процесів як математичні моделі

Сепараційна характеристика технологічної операції або схеми збагачення являє собою безперервну функцію  $\varepsilon_k(\xi)$ , яка показує залежність вилучення елементарних фракцій  $[\xi, \xi + d\xi]$  в концентрат від фізичної властивості  $\xi$ . Сепараційну характеристику  $\varepsilon_k(\xi)$  також називають функцією розділення, головною технологічною характеристикою сепаратора (або схеми), кривою вилучення фракцій у концентрат та ін.

**Так як  $\varepsilon_k(\xi)$  являє собою інтегральну характеристику процесу, то вона по суті може використовуватися як його математична модель.**

Сепараційна характеристика для відходів  $\varepsilon_{відх}(\xi)$  визначається із  $\varepsilon_k(\xi)$  з використанням формули:

$$\varepsilon_k(\xi) + \varepsilon_{відх}(\xi) = 1. \quad (4.15)$$

Завдяки цьому рівнянню необхідно мати інформацію тільки про одну зі складових  $\varepsilon_k(\xi)$  або  $\varepsilon_{відх}(\xi)$ .

Вилучення кінцевої фракції  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$  або  $[\xi_i; \xi_i + \Delta\xi_i]$  у концентрат окремої операції або схеми збагачення дорівнює відношенню маси (продуктивності по твердому) цієї фракції у концентраті і  $G_{ік}$  у живленні  $G_{іж}$ :

$$\bar{\varepsilon}_{ік} = \frac{G_{ік}}{G_{іж}} = \frac{Q_k \bar{\gamma}_{ік}}{Q_{ж} \gamma_{іж}} = \frac{Q_k \gamma_k(\xi_i) \Delta\xi_i}{Q_{ж} \gamma_{ж}(\xi_i) \Delta\xi_i}, \quad (4.16)$$

де  $Q_k$  і  $Q_{ж}$  – повна продуктивність по твердому відповідно для концентрату і живлення, т/год.

У чисельнику формули (4.16) добуток  $Q_k$  і виходу фракції  $\bar{\gamma}_{ік} = \gamma_k(\xi) \Delta\xi$  дає продуктивність цієї фракції для концентрату, а у знаменнику для живлення. Тут  $\gamma_k(\xi)$  характеризує розподіл твердого по фракціях у концентраті, а  $\gamma_{ж}(\xi)$  – у живленні.

При  $\Delta\xi_i \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  отримують безперервну функцію – сепараційну характеристику:

$$\varepsilon_{\kappa}(\xi) = \frac{Q_{\kappa} \gamma_{\kappa}(\xi_i) \Delta \xi_i}{Q_{\text{жс}} \gamma_{\text{жс}}(\xi_i) \Delta \xi_i} = \bar{\gamma}_{\kappa} \frac{\gamma_{\kappa}(\xi)}{\gamma_{\text{жс}}(\xi)}, \quad (4.17)$$

де  $\bar{\gamma}_{\kappa} = Q_{\kappa} / Q_{\text{жс}}$  – вихід концентрату, частки од.

Ідеальна сепараційна характеристика має ступінчастий вигляд (рис. 4.5):

$$\varepsilon_{i\partial}(\xi) = \bar{1}(\xi - \xi_p) = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi > \xi_p; \\ 0,5 & \text{для } \xi = \xi_p; \\ 0 & \text{для } \xi < \xi_p. \end{cases} \quad (4.18)$$

Тут для стислості застосований символ одичної ступінчастої функції  $\bar{1}(\xi - \xi_p)$ , де константа  $\xi_p$  вказує точку, у якій відбувається стрибок на одиницю.

Неідеальні сепараційні характеристики при зміні від нуля і вище зростають між нулем і одиницею. Тут можливі різні криві у залежності від типу сепаратора або схеми. Реальні сепаратори, як правило, мають неідеальні сепараційні характеристики.

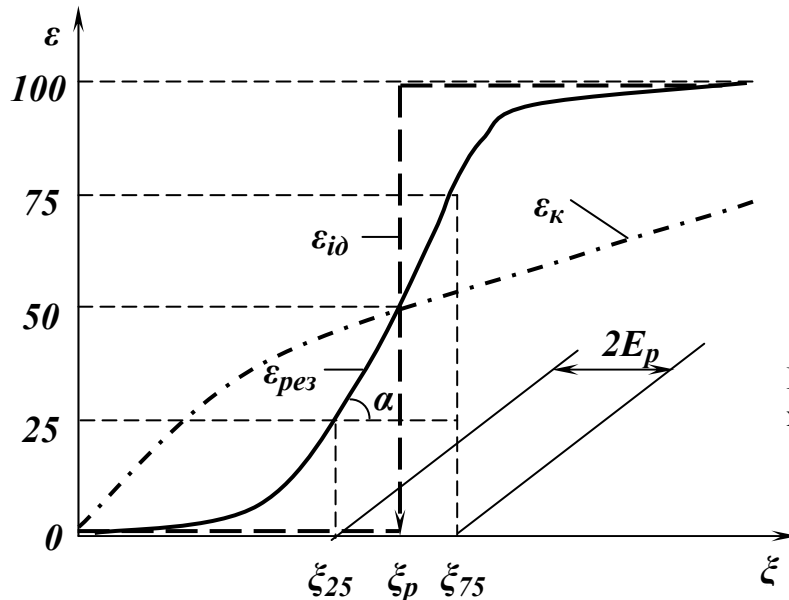


Рис. 4.5 – Сепараційні характеристики.

Границя розділення  $\xi_p = const$  відповідає елементарній фракції, яка наполовину вилучається у концентрат, наполовину у відходи. Координата границі  $\xi_p$  при відомому  $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$  може бути розрахована за формулою:

$$\varepsilon_{\kappa}(\xi) = 0,5. \quad (4.19)$$

В усіх сепараторах і схемах збагачення передбачена можливість зміни положення границі розділення у бажаному напрямку.

Крутизна сепараційної характеристики  $tg\alpha = d\varepsilon_k(\xi) / d\xi \Big|_{\xi=\xi_p}$  у робочій точці, що відповідає границі розділення  $\xi = \xi_p$ , є однією з оцінок ступеня недосконалості сепарації для операції або схеми: чим більше крутизна, тим ближче сепараційна характеристика до ідеальної. Удосконалення сепаратора або схеми – це, у першу чергу, підвищення крутизни у робочій точці.

Два параметри: границя розділення  $\xi_p$  і крутизна у робочій зоні  $tg\alpha = \varepsilon'_k(\xi_p)$  є головними параметрами сепараційної характеристики  $\varepsilon_k(\xi)$ . За цими параметрами можна приблизно оцінити функцію  $\varepsilon_k(\xi)$  та одержати її графік.

***Сепараційна характеристика будь-якого окремого сепаратора (або фрагмента схеми) може бути знайдена експериментальним, теоретичним або комбінованим шляхом.***

Експериментальний метод вимагає виміру величин  $Q_{вих}, Q_k, \gamma_{вих}(\xi), \gamma_k(\xi)$  і базується на рішенні рівнянь сепарації, які визначають фракційний склад матеріалу в будь-якій точці  $(x, y, z)$  робочої зони завдяки функції стану  $\gamma(\xi, x, y, z, t)$ . Одним з важливих їхніх застосувань є розрахунок сепараційних характеристик  $\varepsilon(\xi)$  апаратів.

Типовий метод експериментального визначення сепараційної характеристики оснований на використанні формули (4.17):

– для працюючого сепаратора або схеми вимірюють продуктивності  $Q_{жс}$  і  $Q_k$  для розрахунку  $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_{жс}$  ;

– відбирають проби живлення і концентрату і виконують їх фракційний аналіз для визначення функцій розподілу  $\gamma_{жс}(\xi)$  і  $\gamma_k(\xi)$  ;

– виконують розрахунок сепараційної характеристики за формулою (4.17).

Для випадку ідеального збагачення (сепараційна характеристика має вигляд ступінчастого імпульсу) технологічні показники можна розрахувати, якщо фракційний склад сировини відомий:

$$\bar{\gamma}_k = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_p} \gamma_{вих}(\xi) d\xi ; \quad (4.20)$$

$$\bar{\beta}_k = \frac{1}{\gamma_k} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_p} \beta(\xi) \gamma_{\text{вих}}(\xi) d\xi. \quad (4.21)$$

При неідеальній сепарації у окремому апараті або по схемі збагачення у формули прогнозу технологічних показників вводять додаткову сепараційну характеристику:

$$\bar{\gamma}_k = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi) \gamma_{\text{вих}}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_k(\xi_i) \gamma_{\text{вих}}(\xi_i) \Delta\xi_i; \quad (4.22)$$

$$\bar{\beta}_k = \frac{1}{\gamma_k} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi) \beta(\xi) \gamma_{\text{вих}}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_k(\xi_i) \beta(\xi_i) \gamma_{\text{вих}}(\xi_i) \Delta\xi_i / \gamma_k. \quad (4.23)$$

Основою *аналітичного методу* є закономірності масопереносу фракцій в сепараторах, які визначаються функціями:  $\gamma(\xi, x, y, z, t)$  – функція розподілу по фракціям в локальній зоні сепарації  $x, y, z$  в момент часу  $t$ ;  $\vec{v}(\xi, x, y, z, t)$  – осереднена швидкість частинок елементарної фракції  $[\xi, \xi + d\xi]$ . Ці дві функції необхідні і достатні для повного опису картини руху будь-якої елементарної фракції усередині апарата.

Вони визначаються двома рівняннями – збереження фракцій і балансу сил:

$$\partial\gamma / \partial t = -\text{div}(\gamma\vec{v}) + W; \quad (4.24)$$

$$\sum F_i = 0, \quad (4.25)$$

де  $W = W(\xi, x, y, z, t)$  – потік фракції, який підводиться у зону або відводиться із зони.

Рішення рівнянь (4.24)-(4.25) дозволяє отримати шукані  $\gamma$  і  $\vec{v}$ .

*Комбінований метод* застосовують у зв'язку з тим, що теоретичні формули  $\varepsilon(\xi)$  вимагають числової конкретизації (часто експериментальної) параметрів апарату, напр., тривалість флотації  $t_f$  і ступінь аерації  $S$  – для флотомашини або параметри  $h, \alpha_{\text{онір}}, D$  – для відсаджувальної машини. Крім того, в реальних експлуатаційних умовах параметри апаратів можуть змінюватись, але для проектних цілей достатньо усереднених даних.

Сепараційні характеристики основних збагачувальних апаратів показані в табл. 4.7.

Таблиця. 4.7. – Сепаратійні характеристики збагачувальних апаратів

Апарат і його режим	Сепаратійна характеристика $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$	Границя розділення $\varepsilon_{\kappa}(\xi_p) = 0,5$	Крутизна характеристики у точці розділення $\varepsilon'(\xi_p)$
Відсаджувальна машина з природною постіллю, суспензійний сепаратор з великим стисненням	$\varepsilon_{\kappa}(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{gh\gamma_{вих}(\delta)}{\alpha D}} (\delta - \bar{\delta}) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\sqrt{\frac{gh}{2\pi\alpha D(\delta_{\max} - \delta_{\min})}}$
Відсаджувальна машина з штучною постіллю, суспензійний сепаратор з помірним стисненням	$\varepsilon_{\kappa}(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th \left[ \frac{gh}{4\alpha D} (\delta - \delta_p) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\frac{gh}{8\alpha D}$
Грохот	$\varepsilon_{верх}(d) = 1 - \exp \left[ - \frac{V_c(d)M}{hQ_{вих}} \right]$	$d_p \approx d_0$	$\frac{MV_c(d_0)}{2hQ_{вих}}$
Гідрокласифікатор з висхідним потоком при нестиснених умовах	$\varepsilon_{зл}(\delta, d) = \begin{cases} \frac{1}{0} & \text{для зливу} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} th \left[ \frac{ah}{4D} (d^2 - d_p^2) \right], & \text{нісків} \end{cases}$	$\delta_p = \delta_{cp} + \frac{V_{cp}\alpha}{gd_p^2}$	$\infty$
Гідрокласифікатор при стиснених умовах	$\varepsilon_{зл}(\delta, d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} th \left[ \frac{ah}{4D} (d^2 - d_p^2) \right],$ де $a = g(\delta - \delta_{cp}) / \alpha$	$d_p = \sqrt{\frac{\alpha V_{cp}}{g(\delta - \delta_p)}}$	$\frac{g(\delta_0 - \delta_{cp})h}{4\alpha D}$
Гідроциклон	$\varepsilon_{зл}(\delta, d) = 0,5 - 0,5th[Ah/(4D)],$ де $A = \frac{V_o^2 d^2}{R} \cdot \frac{\delta - \bar{\delta}}{\alpha} - V_{cp}$	$d_p = \sqrt{\frac{Q_{вих}\alpha R}{SV_o^2(\delta - \bar{\delta})}}$	$\frac{hV_o^2(\delta - \bar{\delta})}{4\alpha R D}$

Закінчення табл. 1.1

1	2	3	4
Роликовий (барабанний) магнітний сепаратор для стиснених умов	$\varepsilon_{\kappa}(\delta, \chi) = \begin{cases} 1 & \text{для зони} \\ 0 & \text{в інших} \end{cases} \frac{\kappa - m\mu}{\text{відх.}}$	$\delta_p = \frac{RHgradH}{V_o^2} \chi_p$	∞
Стрічковий магнітний сепаратор	$\varepsilon_{\kappa}(\delta, \chi) = 0,5 + 0,5th[Ah/(4D)],$ <p>де</p> $A = \frac{1}{\alpha} [g(\delta - \bar{\delta}) - HgradH(\chi - \bar{\chi})]$	$g(\delta_p - \bar{\delta}) - HgradH \times (\chi_p - \bar{\chi}) = 0$	$\frac{hHgradH}{8\alpha D}$ <p>при <math>\delta = \bar{\delta}_0 = const</math></p>
Флотажна машина	$\varepsilon_{\kappa}(k) = 1 - \exp(-St_{\phi_l} k)$ <p>(S=500 – 1200 м<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>)</p>	$k_p = \ln 2 / (St_{\phi_l})$	0,5St <sub>φл</sub>
Електричний сепаратор у стиснених умовах	$\varepsilon_{\kappa}(\delta, q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th \left[ \frac{Eh(q - q_p)}{4\alpha D} \right]$	$q_p = \frac{V_o^2 \delta}{RE}$	$\frac{Eh}{8\alpha D}$

*Примітка.*  $Q_{вих}$ ,  $M$  – продуктивність і маса матеріалу на грохоті;  $V_c(d)$  – залежність швидкості просівання на сітці грохота від розміру частинок;  $h$  – глибина зони сепарації;  $V_{cp}$  – швидкість висхідного потоку у гідрокласификаторі;  $V_o$ ,  $R$  – окружна швидкість і радіус кривизни для гідроциклона;  $H$ ,  $E$  – напруженість магнітного і електричного полів.

Фракційний склад мінеральної сировини і сепараційні характеристики дозволяють прогнозувати технологічні результати збагачення (вихід, вміст, вилучення) будь-якої сировини за допомогою технологічної схеми. Оцінювати ефективність роботи і порівнювати збагачувальні апарати різних конструкцій, оцінювати і порівнювати самі складні технологічні схеми незалежно від типу сировини, що перероблюється, вирішувати задачі економічно оптимальної стратегії збагачення складної сировини, оптимально проектувати детальні технологічні схеми.



## 5. ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

У цьому розділі автори дотримуються класичного підходу до моделювання об'єктів, який включає, *по-перше*, опис вхідних по відношенню до збагачувальної фабрики чи окремого технологічного процесу (машини) матеріальних та енергетичних потоків, *друге* – моделювання окремих технологічних процесів, що застосовуються при збагаченні корисних копалин, і *третє* – використання характеристик вихідних матеріальних потоків і характеристик цих же потоків у технологічному апараті як вихідних параметрів – проміжних та основних.

При цьому виділені підготовчі, основні та заключні процеси збагачення. При цьому приклади моделювання процесів збагачення корисних копалин залучені з теоретичних і прикладних праць провідних вітчизняних і зарубіжних науковців. Описано застосування комп'ютерної техніки для моделювання, що сьогодні увійшло у повсюдну практику.

Приклади моделювання окремих субпроцесів (за феноменологічною моделлю) наводяться епізодично. Приклади моделювання окремих характерних елементів технологій (наприклад, температурних полів сушарок тощо) за браком місця не наведені.

### 5.1. Опис вихідної мінеральної сировини

Для рішення ряду техніко-технологічних задач збагачення, контролю і автоматизації технологічних процесів (складання теоретичних балансів продуктів збагачення, вибір обладнання і розрахунок навантажень на нього, контроль параметрів потоків мінеральної сировини, автоматичне керування технологічними процесами та ін.) необхідні математично описані дані (моделі) ситового, фракційного, мінералогічного та ін. складу корисної копалини.

Універсальний підхід до математичного опису властивостей сипкої мінеральної сировини запропоновано математичною статистикою на основі функцій розподілу властивостей мінералів (рис. 5.1). Використовуючи функції розподілу можна математично описати контрастність розділових ознак корисної копалини – тобто відмінність властивостей між вмісними породами і цінним компонентом, між окремими класами крупності і фракціями цінного компонента за густиною, змочуваністю, кольором, блиском, магнітною сприйнятливістю, діелектричною проникністю, електропровідністю тощо. Кожна з властивостей  $X$  характеризується не одним числом, а функцією розподілу  $f(X)$ . Якщо корисна копалина складається з двох мінералів, то кожний з них має функцію розподілу  $f_1(X)$  і  $f_2(X)$ . Спільна площа цих функцій (заштриховано) визначає

діапазон властивостей, де не можна розрізнити цінний мінерал від вмісної породи. Кількість мінералу, яку неможливо розрізнити за властивістю  $X$  складає величину, пропорційну площі заштрихованого сектора  $\varphi = \int_{-\infty}^{X_n} f_2 dx - \int_{X_n}^{\infty} f_1 dx$ . Коли функції  $f_1(X)$  і  $f_2(X)$  повністю співпадають, то  $\varphi = 1$  і неможливо розрізнити весь мінерал. Показник контрастності за І. К. Младецьким  $K = 1 - \varphi$  [25].

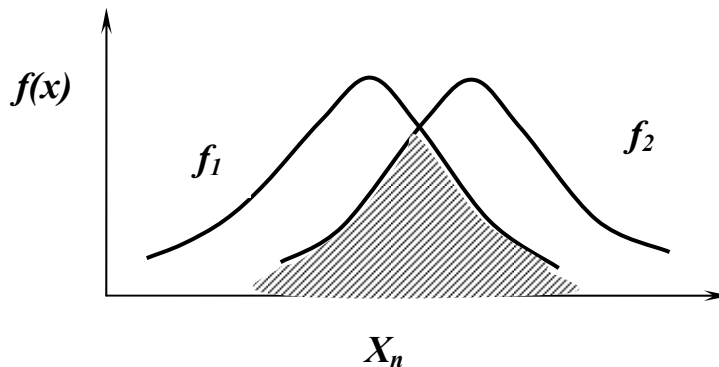


Рис. 5.1 - Розподіл властивостей двох мінералів корисної копалини

Разом з тим, математичний опис ситового, фракційного, мінералогічного та ін. складу корисної копалини має суттєві індивідуальні відмінності.

У нашому розгляді ми зупинимося на найбільш часто застосовуваних у збагаченні ситовому та фракційному аналізі сипкої гірничої маси.

### 5.1.1. Математичний опис гранулометричного складу сипкої мінеральної сировини

Для математичного опису закономірностей розподілу корисних копалин по класах різної крупності було запропоновано багато аналітичних виразів (моделей) [16, 18].

Ж. Мартін вперше розглядав суміш зерен подрібненого матеріалу як статистичний масив. Для опису розподілу частинок по класах крупності він застосував експоненціальний закон Кельвіна і представив розподіл по числу зерен в вигляді:

$$dN/dx = ae^{-bx}, \quad (5.1)$$

де  $x$  – середній розмір частинок.

Узагальнюючи велику кількість результатів ситових аналізів дроблених продуктів, А. Годен вивів емпіричне степеневе рівняння для математичного опису їх гранулометричного складу по класу дрібніше  $x$  (по « $-d$ »), тобто рівнянні характеристики крупності:

$$y = Ax^k, \quad (5.2)$$

де  $y$  – сумарний вихід класу дрібніше розміру отворів сита (по «–  $d$ »);  $x$  – розмір отворів сита;  $k$  і  $A$  – параметри, які залежать від властивостей матеріалу і його максимальної крупності.

Пізніше С. Андрєєв, аналізуючи процес подрібнення, прийшов до такого ж висновку і рівняння (5.2) одержало назву рівняння Годена-Андрєєва. Воно по суті є математичною моделлю сипкої маси і дозволяє вирішувати ряд задач: визначити вихід будь-якого класу крупності, число зерен в будь-якому класі, поверхню зерен, питому поверхню та ін.

Для подрібнених продуктів кульових млинів значення показника  $k$  в рівнянні (5.2) знаходиться в межах 0,7 – 1.

П. Розін і Є. Рамлер, аналізуючи гранулометричний склад подрібнених продуктів як статистичну сукупність зерен, встановили, що функціональна залежність між сумарним залишком на ситі і крупністю зерен в більшості випадків з достатньою для практики точністю описується експоненціальним рівнянням:

$$R = 100e^{-bx^n}, \quad \% , \quad (5.3)$$

де  $R$  – сумарний вихід класу крупніше  $x$  (по «+  $d$ »), %;  $x$  – розмір отворів сита;  $b$  і  $n$  – параметри, що залежать від властивостей матеріалу і розмірності величини  $x$ .

Рівняння (5.3) в одних країнах по імені авторів одержало назву рівняння Розіна-Рамлера, в інших – рівняння  $RRS$ , або  $RRB$ , або  $RRSB$ .

Параметр  $b$  непрямо характеризує вміст найдрібніших (менше 1 мкм) зерен: чим їх більше в матеріалі, тим більше  $b$ .

Параметр  $n$  характеризує ступінь увігнутості кривої сумарних залишків, побудованої у координатах  $R = f(d/d_c)$ , де  $d$  – розмір чарунок сита, мкм;  $d_c$  – розмір чарунок такого сита, на якому одержують «стандартний» залишок ( $R_c = 36,8$  %).

Рівняння характеристики крупності дозволяє визначити залежність між  $R$  і  $x$ , число зерен в будь-якому класі, площу поверхні зерен, питому поверхню та інше. Але при використанні рівняння Розіна-Рамлера нульовий вихід досягається тільки при нескінченно великій крупності матеріалу, тобто  $R = 0$  при  $x = \infty$ , тому необхідно приймати кінцеву крупність матеріалу, яка відповідає якому-небудь визначеному значенню виходу класу.

Таким чином, для опису гранулометричного складу зернистих матеріалів запропоновано багато формул. Поширення знайшли рівняння Годена-Андрєєва і Розіна-Рамлера, але найбільш точно розподіл корис-

ної копалини за класами крупності може бути описаний рівнянням Розіна-Рамлера.

Придатність рівняння Розіна-Рамлера для опису розподілу по крупності видобутого і дробленого вугілля різних родовищ Англії показали Дж. Беннет і Дж. Івенс, родовищ США – М. Гір і Х. Янсі. Придатність для аналізу розподілу по крупності тонких вугільних частинок в практиці вуглеприготування підтвердив В. Ромадін (Росія), а розподілу в інших діапазонах крупності – ряд інших авторів.

Дослідження, проведені УкрНДІВуглезбагачення, показали, що найбільш точно розподіл вугілля за класами крупності може бути описано рівнянням Розіна-Рамлера. Однак показник  $n$  цього рівняння не залишається постійним для усього діапазону крупності, тому при постійних параметрах це рівняння дає задовільну точність тільки для визначеного діапазону крупності вугілля.

**Приклад 5.1.** Виконати розрахунок ситового аналізу вугілля по вузькій шкалі з використанням вихідних даних наведених в табл. 5.1.

**Таблиця 5.1 - Ситовий аналіз вугілля**

Клас, мм	Вихідні дані		Розрахунок		
	$\gamma$ , %	$A$ , %	$\gamma \cdot A$	$\gamma_{сум}^{+d}$	$A_{сум}^{+d}$
+25	$\gamma_1 = 6$	$A_1 = 59,20$	355,2	6	59,20
13 - 25	$\gamma_2 = 28$	$A_2 = 45,00$	1260,0	34	47,50
0,5 - 13	$\gamma_3 = 52$	$A_3 = 36,90$	1918,8	86	41,10
0 - 0,5	$\gamma_4 = 14$	$A_4 = 22,90$	320,6	100	38,55
Разом	100	38,55	3854,6	–	–

### **Розрахунок**

Розрахунок виконується з використанням рівняння Розіна-Рамлера.

Введемо позначення:  $d_1 = 25$ ,  $d_2 = 13$ ,  $d_3 = 0,5$ ,  $d_4 = 0$  мм.

Розрахунок ситового аналізу виконується з використанням рівняння Розіна–Рамлера.

Розрахункові рівняння:

$$\gamma_{сум}^{+d} = \gamma_{вих} \cdot e^{-bd^n}, \quad (5.4)$$

$$A = \frac{100 A_{вих}}{\gamma_{сум}^{+d}} \cdot e^{-bd^n}. \quad (5.5)$$

**1-й інтервал:**  $d > d_2$  ( $d > 13$  мм)

Розрахунок може викликати інтерес при визначенні максимальної крупності матеріалу і з'ясування необхідності його дроблення, а також при визначенні можливості використання однопотокової схеми збагачення вугілля.

Визначаємо коефіцієнти  $n$  і  $b$  в рівняннях (5.4) і (5.5) для даного інтервалу.

**Таблиця 5.2 – Коефіцієнти  $n$  і  $b$  для 1-ого інтервалу**

$n$ і $b$ для визначення виходів	$n$ і $b$ для визначення зольностей
1	2
$n_1 = \frac{\frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}}{\ln d_1 - \ln d_2} = 1,4657$	$n_2 = \frac{\frac{\ln \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1}}{\ln \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}}}{\ln d_1 - \ln d_2} = 1,5417$
$b_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1^{n_1}} = 0,02532$	$b_2 = \frac{\ln \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1}}{d_1^{n_2}} = 0,01668$
Результати розрахунку: $d_1 = 25$ мм; $d_2 = 13$ мм; $\gamma_1 = 6$ %; $\gamma_2 = 28$ %; $A_1 = 59,2$ %; $A_2 = 45,0$ %; $A_{\text{вих}} = 38,55$ %.	

Розраховуємо виходи і зольності в інтервалі  $d > 13$  мм.

**Таблиця 5.3 – Склад класу  $> 13$  мм**

Вихід: $\gamma_{\text{сум}}^{+d} = 100 \cdot e^{-b_1 d^{n_1}}$ , %	Зольність: $A = \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_{\text{сум}}^{+d}} \cdot e^{-b_2 d^{n_2}}$ , %
$\gamma_{\text{сум}}^{+20} = 12,96$	$A_{\text{сум}}^{+20} = 54,86$
$\gamma_{\text{сум}}^{+40} = 0,35$	$A_{\text{сум}}^{+40} = 80,28$
$\gamma_{20-25} = \gamma_{+20} - \gamma_{+25} = 6,96$	$A_{20-25} = 51,12$
$\gamma_{13-20} = \gamma_{13-25} - \gamma_{20-25} = 21,04$	$A_{13-20} = 42,98$
$\gamma_{25-40} = \gamma_{+25} - \gamma_{+40} = 5,65$	$A_{25-40} = 57,89$

**2-й інтервал:  $d_2 \geq d \geq d_3$  ( $13 \geq d \geq 0,5$  мм)**

Розрахунок може викликати інтерес при визначенні глибини збагачення, крупності розділення матеріалу на машинні класи, зольності дрібних класів.

Визначаємо коефіцієнти  $n$  і  $b$  в рівняннях (5.4) і (5.5) для даного інтервалу.

**Таблиця 5.4 – коефіцієнти  $n$  і  $b$  для 2-ого інтервалу**

$n$ і $b$ для визначення виходів	$n$ і $b$ для визначення зольностей
1	2
$n_3 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}}{\ln d_2 - \ln d_3} = 0,604$	$n_4 = \frac{\ln \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2} \cdot \ln \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3}}{\ln d_2 - \ln d_3} = 0,707$
$b_3 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}{d_2^{n_3}} = 0,229$	$b_4 = \frac{\ln \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}}{d_2^{n_4}} = 0,142$
Результати розрахунку: $d_2 = 13$ мм; $d_3 = 0,5$ мм; $\gamma_1 = 6$ %; $\gamma_2 = 28$ %; $\gamma_3 = 52$ %; $A_1 = 59,2$ %; $A_2 = 45,0$ %; $A_3 = 36,9$ %; $A_{\text{вих}} = 38,55$ %	

*Розраховуємо виходи і зольності в інтервалі  $13 \geq d \geq 0,5$  мм.*

**Таблиця 5.5 – Склад класу 0,5 – 13 мм**

Вихід: $\gamma_{\text{сум}}^{+d} = 100 \cdot e^{-b_3 d^{n_3}}$ , %	Зольність: $A = \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_{\text{сум}}^{+d}} \cdot e^{-b_4 d^{n_4}}$ , %
$\gamma_{\text{сум}}^{+6} = 50,85$	$A_{\text{сум}}^{+6} = 45,82$
$\gamma_{\text{сум}}^{+3} = 64,08$	$A_{\text{сум}}^{+3} = 44,19$
$\gamma_{\text{сум}}^{+1} = 79,52$	$A_{\text{сум}}^{+1} = 42,07$
$\gamma_{6-13} = \gamma_{+6} - \gamma_{+13} = 16,85$	$A_{6-13} = 42,43$
$\gamma_{3-13} = \gamma_{+3} - \gamma_{+13} = 30,08$	$A_{3-13} = 40,45$
$\gamma_{1-13} = \gamma_{+1} - \gamma_{+13} = 45,52$	$A_{1-13} = 38,01$
$\gamma_{0,5-6} = \gamma_{0,5-13} - \gamma_{6-13} = 35,15$	$A_{0,5-6} = 34,25$
$\gamma_{0,5-3} = \gamma_{0,5-13} - \gamma_{3-13} = 21,92$	$A_{0,5-3} = 32,03$
$\gamma_{0,5-1} = \gamma_{0,5-13} - \gamma_{1-13} = 6,48$	$A_{0,5-1} = 29,10$
$\gamma_{3-6} = \gamma_{3-13} - \gamma_{6-13} = 13,23$	$A_{3-6} = 37,93$
$\gamma_{1-3} = \gamma_{1-13} - \gamma_{3-13} = 15,44$	$A_{1-3} = 33,26$

**3-й інтервал:  $d < d_3$  ( $d < 0,5$  мм)**

*Розрахунок може викликати інтерес при визначенні характеристики шламів і можливості використання для їхньої переробки гвинтовою сепарацією, збагачення у гідросайзері або зневоднення.*

Розрахункові рівняння:

$$\gamma_{\text{сум}}^{+d} = \gamma_{\text{вих}} \cdot e^{-d(ad^2+bd+c)}, \quad (5.6)$$

$$A = \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_{\text{сум}}^{+d}} \cdot e^{-d(ad^2+bd+c)}. \quad (5.7)$$

Визначаємо коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і  $c$  в рівняннях (5.6) і (5.7) для даного інтервалу.

Таблиця 5.6 – Коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і  $c$  для 3-ого інтервалу

$a, b$ і $c$ для визначення виходів	$a, b$ і $c$ для визначення зольностей
$a_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)} -$ $- \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}{d_2(d_1 - d_2)(d_2 - d_3)} +$ $+ \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}}{d_3(d_2 - d_3)(d_1 - d_3)} = 0,00082$	$a_2 = \frac{\ln \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1}}{d_1(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)} -$ $- \frac{\ln \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}}{d_2(d_1 - d_2)(d_2 - d_3)} +$ $+ \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3}}{d_3(d_2 - d_3)(d_1 - d_3)} = 0,00045$
$b_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1} - \ln \frac{100}{\gamma_1 + \gamma_2}}{d_1 - d_2} -$ $- a(d_1 - d_2) = -0,029$	$b_2 = \frac{\ln \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1} - \ln \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}}{d_1 - d_2} -$ $- a(d_1 - d_2) = -0,015$
$c_1 = \frac{\ln \frac{100}{\gamma_1}}{d_1} - ad_1^2 - bd_1 = 0,316$	$c_3 = \frac{\ln \frac{100A_{\text{вих}}}{\gamma_1 A_1}}{d_1} - ad_1^2 - bd_1 = 0,183$
$d_1 = 25\text{мм}; d_2 = 13\text{мм}; d_3 = 0,5\text{мм}; \gamma_1 = 6\%; \gamma_2 = 28\%; \gamma_3 = 52\%;$ $A_1 = 59,2\%; A_2 = 45,0\%; A_3 = 36,9\%; A_{\text{вих}} = 38,55\%$	

Розраховуємо виходи і зольності в інтервалі  $d < 0,5$  мм.

**Таблиця 5.7 – Склад класу 0 – 0,5 мм**

<p><i>Вихід:</i></p> $\gamma_{\text{сум}}^{+d} = \gamma_{\text{вих}} \cdot e^{-d(a_1 d^2 + b_1 d + c_1)}, \%$	<p><i>Зольність:</i></p> $A = \frac{100 A_{\text{вих}}}{\gamma_{\text{сум}}^{+d}} \cdot e^{-d(a_2 d^2 + b_2 d + c_2)}, \%$
$\gamma_{\text{сум}}^{+0,2} = 93,98$ $\gamma_{\text{сум}}^{+0,1} = 96,92$ $\gamma_{0-0,2} = 100 - \gamma_{+0,2} = 6,02$ $\gamma_{0-0,1} = 100 - \gamma_{+0,1} = 3,08$ $\gamma_{0,1-0,2} = \gamma_{+0,1} - \gamma_{+0,2} = 2,94$ $\gamma_{0,2-0,5} = \gamma_{+0,2} - \gamma_{+0,5} = 7,98$	$A_{\text{сум}}^{+0,2} = 39,57$ $A_{\text{сум}}^{+0,1} = 39,06$ $A_{0-0,2} = 22,63$ $A_{0-0,1} = 22,50$ $A_{0,1-0,2} = 22,76$ $A_{0,2-0,5} = 23,08$

*Результати розрахунку ситового аналізу наведені в табл. 5.8.*

**Таблиця 5.8 – Результати розрахунку ситового аналізу**

Клас, мм	$\gamma, \%$	$A, \%$	$\gamma_{\text{сум}}^{+d}, \%$
+40	0,35	80,28	0,35
25 – 40	5,65	57,89	6,00
20 – 25	6,96	51,12	12,96
13 – 20	21,04	42,98	34,00
6 – 13	16,85	42,43	50,85
3 – 6	13,23	37,93	64,08
1 – 3	15,44	33,26	79,52
0,5 – 1	6,48	29,10	86,00
0,2 – 0,5	7,98	23,08	93,98
0,1 – 0,2	2,94	22,76	96,92
0 – 0,1	3,08	22,50	100,00
Разом	100,00	38,55	–

### **5.1.2. Математичний опис фракційного складу сипкої мінеральної сировини**

Під фракційним складом, як правило, розуміють кількісний розподіл частинок мінералу (у %) за їх густиною, магнітною сприйнятливістю, провідністю, радіоактивністю, іншими якісними ознаками. Фракційний склад визначається за результатами фракційного аналізу і подається у вигляді таблиць, на підставі яких будуються криві збагачуванос-



ті та ведуться розрахунки теоретично можливих показників збагачення (якісно-кількісного балансу).

Фракційний аналіз проводять при розробці технологічної схеми гравітаційного збагачення вугілля, вольфрамових, рідкіснометалічних, олов'яних руд. Його виконують за стандартною методикою, якою унормовані кількість та густина розчинів рідини, порядок вилучення спливаючих та осілих продуктів, визначення їх виходу (у % відносно маси вихідної проби). Для фракційного аналізу пробу крупністю -25 мм розділяють на класи крупності. Класи до +3 мм розділяють на фракції у важких середовищах (рідинах) або розбирають вручну і потім визначають густину кожного шматка з точністю до 0,1-0,02 г/см<sup>3</sup>. Класи -3 мм +20 мкм розділяють на фракції за густиною у важких рідинах із застосуванням центрифуги. Як важкі рідини використовують розчини хлориду цинку, рідину Сущина-Рорбаха, бромформ, тетраброметан і інш. Результати розділення вугілля або руди по фракціях служать еталоном для порівняння промислових проб гравітаційного збагачення. Результати фракційного аналізу використовують для побудови кривих збагачуваності корисних копалин, визначення теоретично можливих якісно-кількісних показників гравітаційного збагачення корисних копалин, а також визначення категорії збагачуваності вугілля.

Розглянемо докладніше математичне представлення (моделювання) фракційного аналізу вугілля за густиною і на основі нього оцінку збагачуваності.

Для математичної оцінки збагачуваності вугілля за результатами фракційного аналізу було запропоновано багато аналітичних виразів (моделей) – Р. Анрі, В. Бердом, В.Я. Топорковим, Ф. Майєром, Т.Г.Фоменком, та ін. Однак не всі вони можуть бути рекомендовані, тому що допускають деякі погрішності, що іноді приводить до неправильних висновків при порівнянні результатів дослідницьких робіт і різних варіантів проектів збагачувальних фабрик.

*Метод Р. Анрі.* Інтегральні криві, які визначають сумарний вихід фракцій, для оцінки розподілення золи у вугіллі першим запропонував застосовувати 1903 р. Р. Шарве. У 1905 р. ці криві були більш глибоко вивчені і описані у вигляді кривих збагачуваності Р. Анрі, а потім доповнені, особливо у відношенні їхньої математичної інтерпретації, К. Рейнгардтом. З цього часу вони широко використовуються для характеристики речовинного складу досліджуваного вугілля.

За довгий період застосування і удосконалення кривих збагачуваності їхнє визначення змінювалося і уточнювалося. Найбільш відповідними характеру залежностей, які досліджуються є криві (рис. 5.2):

– крива  $\lambda$  відбиває залежність між сумарним виходом і зольністю в елементарних фракціях;

- крива  $\beta$  – залежність між сумарним виходом фракцій, що сплили (концентратних) і їх зольністю;
- крива  $\Theta$  – залежність між сумарним виходом фракцій, що потонули (породних) і їх зольністю;
- крива  $\delta$  – залежність між густиною розділення і виходами фракцій.

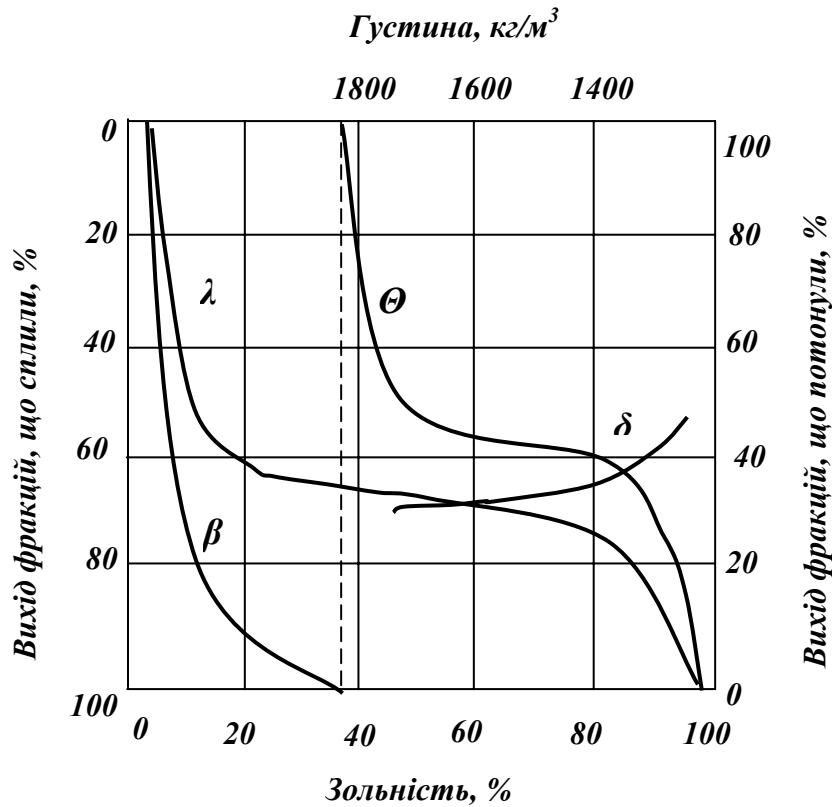


Рис. 5.2 – Криві збагачуваності вугілля.

Криві збагачуваності пов'язані між собою балансовими рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} 100 &= \gamma_{\beta} + \gamma_{\Theta}, \\ 100A_{вих}^d &= \gamma_{\beta}A_{\beta}^d + \gamma_{\Theta}A_{\Theta}^d. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Цей зв'язок дозволяє за графіком однієї кривої побудувати інші.

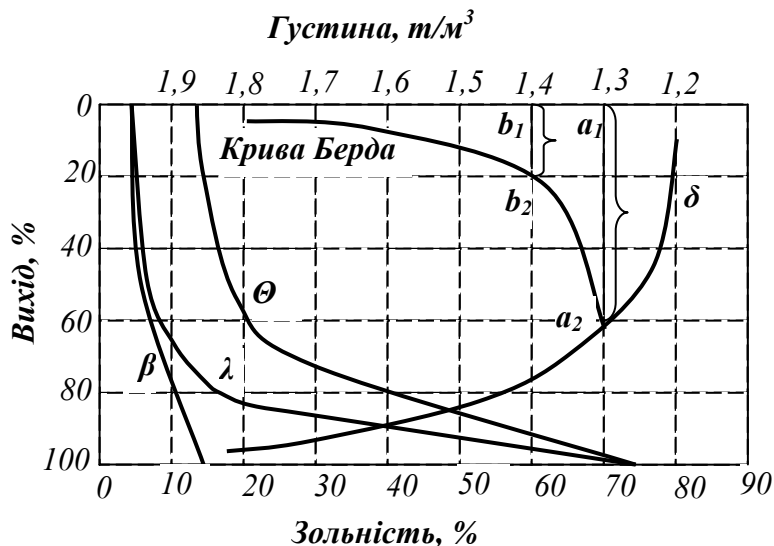
За графіком кривих збагачуваності можна визначити теоретичні показники розділення вугілля, густину розділення і ступінь його збагачуваності (табл. 5.9).

**Таблиця 5.9 – Класифікація вугілля за збагачуваністю**

Ступінь збагачуваності	Категорія збагачуваності	Показник збагачуваності, %
Легкий	1	До 5 вкл.
Середній	2	Більше 5 до 10 вкл.
Важкий	3	Більше 10 до 15 вкл.
Дуже важкий	4	Більше 15

*Метод В. Берда.* Сутність методу полягає в тому, що за вирішальний фактор, який визначає збагачуваність вугілля, прийнято вихід фракцій, що відрізняються від густини розділення на  $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ . Вільна порода густиною більше  $2000 \text{ кг/м}^3$  (крім антрацитів) Бердом виключалась, щоб уникнути помилкового уявлення про дійсну збагачуваність вугілля через наявність породи, яка потрапляла при видобутку вугілля з покрівлі і підшви пласта.

Про збагачуваність даного вугілля при прийнятій густині розділення судять по величині відрізків, що відсікаються на кривій  $\pm 100 \text{ кг/м}^3$  вертикальними лініями, які проходять через точки відповідних густин (рис. 5.3). Наприклад, якщо розділення вугілля здійснюється по густині  $1300 \text{ кг/м}^3$ , то вихід у збагачуваному вугіллі фракцій, що відрізняються на  $\pm 100 \text{ кг/м}^3$  від густини розділення, характеризується відрізком  $a_1a_2$ , а якщо розділення здійснюється по густині  $1400 \text{ кг/м}^3$ , то вихід у збагачуваному вугіллі цих фракцій характеризується відрізком  $b_1b_2$  і т.д. Чим більше величина відрізка, тим важче збагачуваність вугілля.



**Рис. 5.3 – Крива Берда.**

За кривими В. Берда визначають кількість прилеглих до густини розділення фракцій ( $\pm 100 \text{ кг/м}^3$ ) і по їх відношенню до безпородної маси визначають коефіцієнт збагачуваності:

$$T = \frac{\gamma_{\delta_p \pm 100}}{100 - \gamma_n} \cdot 100, \% , \quad (5.9)$$

де  $\gamma_{\delta_p \pm 100}$  – вихід фракцій, густина яких відрізняється на  $\pm 100$  кг/м<sup>3</sup> від густини розділення, %;  $\gamma_n$  – вихід породних фракцій густиною більше 2000 г/м<sup>3</sup>.

Поправка на вихід чистої породи здійснюється таким чином: якщо у вугіллі міститься більше 15 % фракцій густиною більше 2000 кг/м<sup>3</sup>, а, відповідно, залишок більш легких фракцій складає 85 %, вводиться поправочний коефіцієнт  $K = 100/85 = 1,18$ . Тобто при визначенні величини відрізків по кривій В. Берда вони повинні бути помножені на коефіцієнт  $K$ .

В. Берд запропонував наступну градацію важкості збагачуваності вугілля (табл. 5.10)

**Таблиця 5.10 – Ступінь важкості збагачуваності вугілля за В. Бердом**

Показник по кривій $\pm 100$ кг/м <sup>3</sup> (у % виходу по масі)	Ступінь важкості збагачуваності вугілля
0 – 7	Легка
7 – 10	Середня
10 – 15	Важка
15 – 20	Дуже важка
20 – 25	Надзвичайно важка
Більше 25	Майже непереборна

Однак, показник  $T$  не тільки не дозволяє визначити можливі результати збагачення вугілля, але й не дає оцінки можливого засмічення продуктів збагачення сторонніми фракціями. Важливою є оцінка засмічення продуктів збагачення не прилеглими до густини фракціями, а фракціями значно віддаленими від густини розділення, тому що саме вони суттєво впливає на технологічну і економічну ефективність збагачення.

*Метод В.Я. Топоркова.* За цим методом запропоновано збагачуваність вугілля оцінювати з використанням формули:

$$T = 100 \gamma / \beta B, \quad (5.10)$$

де  $\gamma$  – теоретичний вихід легкої фракції при розділенні по густині 1500 кг/м<sup>3</sup>, %;

$\beta$  – зольність легкої фракції при розділенні по густині 1500 кг/м<sup>3</sup>, %;

$B$  – вихід вугільної фракції густиною менше 1800 кг/м<sup>3</sup>, %.

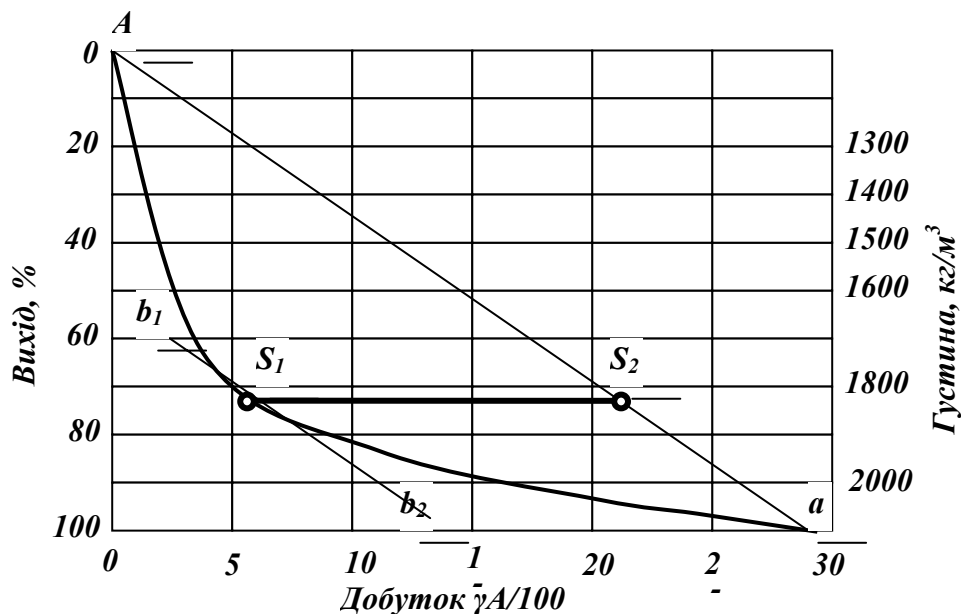
На основі цієї формули В.Я. Топорков запропонував шкалу оцінки збагачуваності вугілля (табл. 5.11).

**Таблиця 5.11 – Ступінь важкості збагачуваності вугілля за В.Я. Топорковим**

Індекс збагачуваності	Ступінь важкості збагачуваності вугілля
Більше 20	Висока (легка) 1
20 – 16	Висока (легка) 2
16 – 14	Середня 1
14 – 12	Середня 2
12 – 10	Низька (важка) 1
10 – 8	Низька (важка) 2
8 – 7	Низька (важка) 3
7 – 6	Дуже низька 1
6 – 5	Дуже низька 2
Менше 5	Надзвичайно низька

Недоліком показника збагачуваності за В.Я. Топорковим є те, що величина  $T$  може бути однаковою для вугілля різної категорії збагачуваності і, крім того, він не враховує умов, які визначають раціональну якість концентрату.

*Метод Ф. Майєра.* Майєром запропонована крива (рис. 5.4), яка виражає середнє значення збагачуваності вугілля. Цю криву отримують підсумовуванням площі, які замкнені основною лінією кривої Р. Анрі ( $\lambda$ ).



**Рис. 5.4 – Крива збагачуваності Майєра.**

Точки кривої Майєра характеризують границі фракцій різної густини. Кожна хорда кривої між двома її точками представляє собою відповідну фракцію у вигляді вектора, довжина ординати якого – це вихід фракції (%), а довжина абсциси – кількість зольних одиниць цієї фракції (помножена на 100). Нахил вектора (тангенс кута між хордою і ординатою) характеризує зольність фракцій. Чим менше радіус кривизни кривої Майєра, тим легше збагачуваність вугілля і, навпаки, із збільшенням радіуса кривизни важкість збагачення зростає.

Ступінь збагачуваності вугілля за Майєром визначається величиною «половинного лінійного розсіяння» – відрізком  $S_1S_2$  (рис. 5.4), який відповідає довжині абсцис між променем  $Aa$ , що з'єднує кінці кривої Майєра, і точкою дотику лінії  $b_1b_2$  до кривої проведеної паралельно променю  $Aa$ , тобто:

$$S_1S_2 = (A_{вих}^d - A_{\beta}^d) \gamma_{\beta}, \quad (5.11)$$

де  $A_{вих}^d$  – зольність вихідного вугілля;  $A_{\beta}^d$  – зольність фракцій, що спливали;  $\gamma_{\beta}$  – вихід фракцій, що спливали.

На думку Майєра зі збільшенням величини  $S_1S_2$  збагачуваність вугілля поліпшиться. Мінімальне значення відрізка  $S_1S_2$  безпосередньо залежить від зольності вихідного вугілля і виходу продукту, що спливає, який у свою чергу визначається зольністю вихідного продукту.

Якщо порівняти приведені методи визначення збагачуваності, можна відмітити, що метод В. Берда, хоча й характеризує важкість розділення, але не дає можливості встановити найвигідніший режим розділення даного вугілля. Крім того, прийнятий інтервал відхилення від густини розділення  $\pm 100 \text{ кг/м}^3$  є умовним.

Методи В.Я. Топоркова і Ф. Майєра найбільш прості, але користуватися ними можна тільки в тому випадку, якщо попередньо задана густина розділення, вихід або зольність фракцій, що спливають, тобто саме те, що необхідно визначити з використанням характеристики вугілля.

*Метод Т.Г. Фоменка.* За цим методом визначення збагачуваності вугілля здійснюється з використанням кривої елементарних фракцій і виражається у вигляді коефіцієнта збагачуваності (рис. 5.5).

При ідеально легкій збагачуваності крива елементарних зольностей буде наближатися до координат діаграми  $AOB$ , а при ідеально важкій – до прямої  $AB$ . Усі інші проміжні положення кривої  $\lambda$  будуть відповідати проміжним значенням збагачуваності. Крива  $\lambda$  достатньо точно характеризується стрілою прогину  $f$ , тобто відстанню по нормалі від

найбільш віддаленої точки кривої  $\lambda$  (вершини кривої). Вершина кривої  $\lambda$ , позначена точкою  $C$ , визначає положення демаркаційної лінії  $MN$ .

Відношення величини даної величини прогину  $f$  до максимально можливої її величині  $F$  (для кривої, що виражає ідеально легку збагачуваність) прийнято за коефіцієнт або за показник збагачуваності:

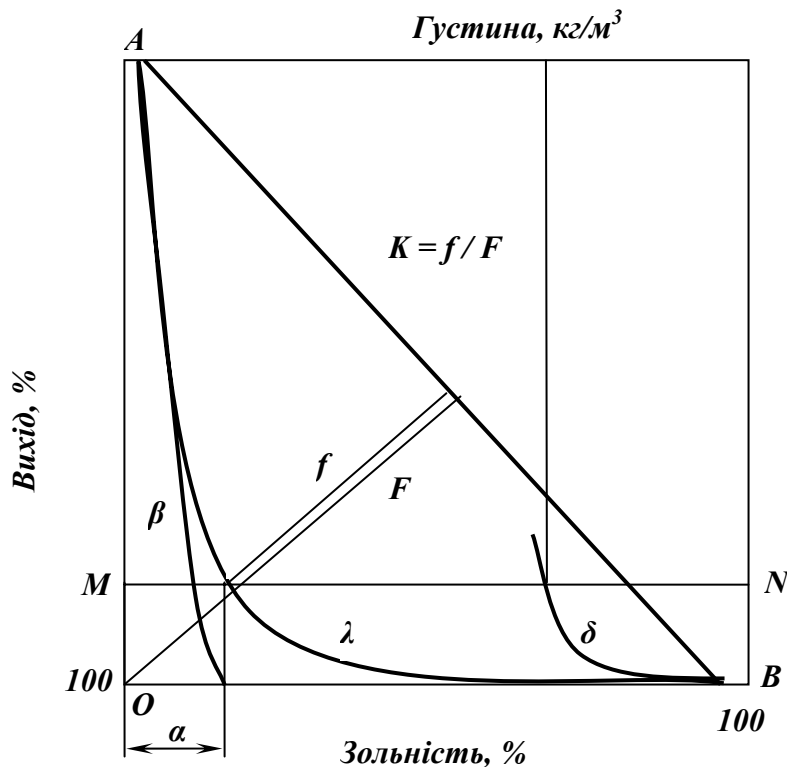


Рис. 5.5 – Діаграма для визначення найвигіднішого режиму розділення вугілля.

$$K = f / F. \quad (5.12)$$

Значення цього показника змінюється від 0 при ідеально важкій збагачуваності до 1 при ідеально легкій збагачуваності вугілля. Показник збагачуваності  $K$ , який визначається вершиною кривої  $\lambda$ , завжди визначає і найвигідніший режим розділення даного вугілля, тому що демаркаційна лінія, що проходить через вершину кривої, вказує оптимальний вихід концентрату. З використанням коефіцієнта  $K$  і найвигіднішої густини розділення побудована класифікація вугілля і антрацитів по збагачуваності (табл. 5.12).

З використанням даних табл. 5.12 можуть бути орієнтовно визначені режимні і технологічні показники збагачення вугілля.

Якщо порівняти наведені методи визначення збагачуваності, можна відмітити:

– за методом Р. Анрі можна визначити теоретичні показники розділення вугілля, густину розділення і ступінь його збагачуваності;

– метод В. Берда, хоча й характеризує важкість розділення, але не дає можливості встановити найвигідніший режим розділення даного вугілля. Крім того, прийнятий інтервал відхилення від густини розділення  $\pm 100 \text{ кг/м}^3$  є умовним;

– методи В.Я. Топоркова і Ф. Майера найбільш прості, але користуватися ними можна тільки в тому випадку, якщо попередньо задана густина розділення, вихід або зольність фракцій, що спливають, тобто саме те, що необхідно визначити з використанням характеристики вугілля;

– метод Т.Г. Фоменка дозволяє орієнтовно визначити режимні і технологічні показники збагачення вугілля.

**Таблиця 5.12– Класифікація вугілля і антрацитів по збагачуваності**

Група	Буре вугілля			Кам'яне вугілля			Антрацити		
	Вихід концентрату до безпородної маси, %	Показник кривої $\lambda_2$ , К	Густина розділення, $\text{т/м}^3$	Вихід концентрату до безпородної маси, %	Показник кривої $\lambda_2$ , К	Густина розділення, $\text{т/м}^3$	Вихід концентрату до безпородної маси, %	Показник кривої $\lambda_2$ , К	Густина розділення, $\text{т/м}^3$
I	–	–	–	> 90	> 0,8	1,3–1,4	> 90	0,8–1,0	1,55–1,8
II	–	–	–	90 – 80	0,7 – 0,85	1,35–1,45	90 – 80	0,7–0,9	1,55–1,8
III	–	–	–	80 – 70	0,6–0,75	1,35–1,45	80 – 70	0,76–0,58	1,55–1,8
IV	–	–	–	70 – 60	0,45–0,61	1,4–1,5	70 – 60	0,64–0,45	1,6–1,8
V	60 – 50	0,3–0,1	1,3–1,5	60 – 50	0,3–0,45	1,4–1,5	60 – 50	0,35–0,5	1,6–1,8
VI	50 – 40	0,2–0,0	1,3–1,5	–	–	–	–	–	–
VII	< 40	0,08–0,0	1,35–1,5	–	–	–	–	–	–

**Приклад 5.2.** За відомим фракційним складом вугілля розрахувати прогностні технологічні показники операції гравітаційного збагачення. Вихідні дані для розрахунку і його результати наведені в табл. 5.13.

Фракційний склад вугілля в живленні операції наведений в 1 – 3 стовпцях, при цьому діапазон густини від  $\rho_{\min} = 1,2 \text{ т/м}^3$  до  $\rho_{\max} = 2,2 \text{ т/м}^3$  розділений на шість фракцій.



Середня зольність (стовпець 3) розрахована як середня величина:  
 $\bar{\beta}_{вих} = 0,373 \cdot 3,5 + 0,143 \cdot 6,3 + \dots + 0,349 \cdot 81,4 = 34,3 \%$ .

У стовпці 4 наведена неідеальна сепараційна характеристика, яка показує кількість кожної елементарної фракції, що вилучається в концентрат при густині розділення  $\rho_p = 1,6 \text{ т/м}^3$ .

Потік твердого у фракціях концентрату показано у стовпці 5. Сума цих потоків – вихід концентрату, тобто  $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_{вих} = 59,8 \%$ .

Потоки золи, які переносяться фракціями в концентрат наведені в стовпчику 6. Сума цих потоків поділена на вихід концентрату дозволяє отримати середню зольність концентрату:  $\bar{\beta}_k = \sum \bar{q}_{i3} / \sum \bar{q}_i = 0,0358 / 0,598 = 6,0 \%$ .

**Таблиця 5.13– Розрахунок технологічних показників**

Фракційний склад живлення			Сепараційна характеристика $\varepsilon_k(\rho_i)$ , частки од.	Потік твердого у фракціях концентрату $\bar{q}_i = Q_{вих}[\varepsilon_k(\rho_i) \times \gamma_{вих}(\rho_i)\Delta\rho_i]$ , т/год	Потік золи у фракціях концентрату $Q_{i3} = Q_{вих} \times [\beta(\rho_i)/100] \times \varepsilon_k(\rho_i) \times \gamma_{вих}(\rho_i)\Delta\rho_i$ , т/год	Фракційний склад концентрату $\gamma_k(\rho_i)\Delta\rho_i = \gamma^{-1} \varepsilon_k(\rho_i)\gamma_{вих}(\rho_i)\Delta\rho_i$ , частки од.
Границі фракції $\Delta\rho = \rho_{i+1} - \rho_i$ , т/м <sup>3</sup>	Вихід фракції у вихідному $\gamma(\rho_i)\Delta\rho$ , частки од.	Зольність $\beta(\rho_i)$ , частки од.				
1	2	3	4	5	6	7
1,2 – 1,3	0,373	3,5	1,0000	$0,373 \cdot 1,0000 = 0,373$	$(3,5/100) \cdot 0,373 = 0,0131$	0,624
1,3 – 1,4	0,143	6,3	0,9997	$0,143 \cdot 0,9997 = 0,143$	$(6,3/100) \cdot 0,143 = 0,0090$	0,239
1,4 – 1,5	0,073	14,3	0,9563	$0,073 \cdot 0,9563 = 0,070$	$(14,3/100) \cdot 0,070 = 0,0100$	0,117
1,5 – 1,6	0,019	29,2	0,5636	$0,019 \cdot 0,5636 = 0,011$	$(29,2/100) \cdot 0,011 = 0,0032$	0,018
1,6 – 1,8	0,043	48,5	0,0150	$0,043 \cdot 0,0150 = 0,001$	$(48,5/100) \cdot 0,001 = 0,0002$	0,002
1,8 – 2,2	0,349	81,4	0,0000	$0,349 \cdot 0 = 0$	$(81,4/100) \cdot 0 = 0$	–
1,2 – 2,2	$\Sigma = 1$	$\bar{\beta}_{вих} = 34,3$	–	$Q_k = \sum \bar{q}_i = 0,598 Q_{вих}$	$\sum \bar{q}_{i3} = 0,0358 Q_{вих}$	$\Sigma = 1$

Фракційний склад концентрату (стовпець 7) розраховано як відношення потоку твердого в кожну окрему фракцію до сумарного потоку твердого в концентрат.

**Приклад 5.3.** За даними фракційного аналізу вугілля класу 13 – 100 мм (табл. 5.14) побудувати криві збагачуваності і скласти теоретичний баланс продуктів збагачення при зольності концентрату  $A_K^d = 7\%$  і зольності відходів  $A_G^d = 80\%$ .

Криві збагачуваності (рис. 5.6) будують у системі координат, де по нижній осі абсцис відкладають зольність фракцій, по верхній осі абсцис – густину розділення, по лівій осі ординат – сумарний вихід фракцій, що спливли, по правій осі ординат – сумарний вихід фракцій, що потонули.

**Таблиця 5.14 – Фракційний аналіз вугілля класу 13 – 100 мм і дані для побудови кривих збагачуваності**

Густина фракцій, т/м <sup>3</sup>	Вихідне вугілля		Фракції, що спливають		Фракції, що тонуть	
	$\gamma$ , %	$A$ , %	$\gamma^c$ , %	$A^c$ , %	$\gamma^n$ , %	$A^n$ , %
1	2	3	4	5	6	7
< 1,3	34,9	4,8	34,9	4,8	100,0	38,0
1,3-1,4	11,2	7,2	46,1	5,4	65,1	55,8
1,4-1,5	10,8	15,0	56,9	6,8	53,9	65,9
1,5-1,6	1,1	31,1	58,0	7,7	43,1	78,6
1,6-1,8	1,7	45,2	59,7	8,7	42,0	79,8
> 1,8	40,3	81,3	100,0	38,0	40,3	81,3
Разом	100,0		–	–	–	–

Розрахунок сумарного виходу продукту, що сплив, виконується послідовним підсумовуванням виходів фракцій зверху вниз.

Наприклад:

– вихід фракції –1400 кг/м<sup>3</sup>:

$$\gamma_{-1400} = \gamma_{-1300} + \gamma_{1300-1400} = 34,9 + 11,2 = 46,1\%;$$

– зольність цієї фракції визначається як середня величина:

$$A_{-1400} = \frac{\gamma_{-1300} \cdot A_{-1300} + \gamma_{1300-1400} \cdot A_{1300-1400}}{\gamma_{-1400}} = \frac{34,9 \cdot 4,8 + 11,2 \cdot 7,2}{46,1} = 5,4\%$$

і т.д.

За даними стовпців 4 і 5 будується крива  $\beta$ , фракцій, що сплили.

Розрахунок сумарного виходу продукту, що потонув, виконується послідовним підсумовуванням виходів фракцій знизу вгору.

Наприклад:

– вихід фракції +1600 кг/м<sup>3</sup>:

$$\gamma_{+1600} = \gamma_{+1800} + \gamma_{1600-1800} = 40,3 + 1,7 = 42,0\%;$$

– зольність цієї фракції визначається як середня величина:

$$A_{+1600} = \frac{\gamma_{+1800} \cdot A_{+1800} + \gamma_{1600-1800} \cdot A_{1600-1800}}{\gamma_{+1600}} = \frac{40,3 \cdot 81,3 + 1,7 \cdot 45,2}{46,1} = 79,8\%$$

і т.д.

За даними стовпців 6 і 7 будується крива  $\Theta$ , фракцій, що потонули.

Для побудови кривої елементарних фракцій  $\lambda$  з використанням даних стовпчиків 2 і 3 будується стовпчаста діаграма і через середні точки на вертикальних сторонах прямокутників проводиться плавна крива. При цьому площі трикутників, які відсікаються і приєднуються, повинні бути рівні, тому що площа під кривою  $\lambda$  – кількість золи в досліджуваному матеріалі і для даного матеріалу величина незмінна.

Крива густини фракцій  $\delta$  будується за даними стовпців 1 і 4.

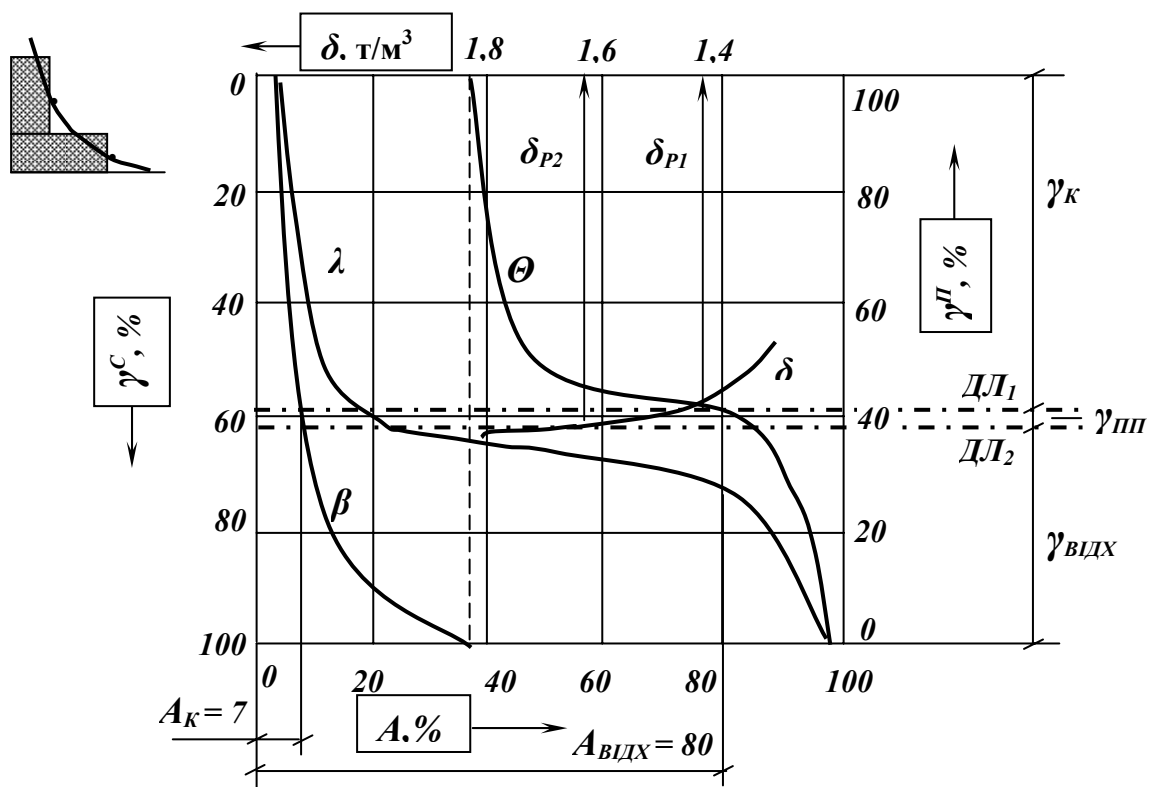


Рис. 5.6 – Криві збагачуваності вугілля.

При заданих зольності концентрату  $A_k^d = 7\%$  і зольності відходів  $A_v^d = 80\%$  визначаємо теоретичні показники розділення: виходи продуктів, зольність промпродукту і густину розділення (табл. 5.15)

Таблиця 5.15 – Теоретичні показники розділення вугілля

Продукт	$\gamma, \%$	$A, \%$	$\delta_p, \text{кг/м}^3$
Концентрат	56,5	7,0	1430
Промпродукт	2,0	42,3	1620
Відходи	41,5	80,0	
Разом	100,0	38,0	

**Приклад 5.4.** За даними експрес-аналізу виконати розрахунок повного фракційного аналізу.

Вихідні дані: фракційний аналіз вугілля марки К (табл. 5.16), мінімальна і максимальна густина вугілля різних марок (табл. 5.17).

**Таблиця 5.16 – Фракційний аналіз вугілля**

Густина фракцій, т/м <sup>3</sup>	Дано		Розрахунок	
	$\gamma$ , %	A, %	$\gamma^B$ , %	$A^B$ , %
- 1,5	$\gamma_1 = 60$	$A_1 = 10$	$\gamma_1^B = 60$	$A_1^B = 10,0$
1,5 – 1,8	$\gamma_2 = 10$	$A_2 = 40$	$\gamma_2^B = 70$	$A_2^B = 14,3$
+ 1,8	$\gamma_3 = 30$	$A_3 = 80$	$\gamma_3^B = 100$	$A_3^B = 34,0$
Разом	100	34	–	–

**Таблиця 5.17 – Мінімальна і максимальна густина вугілля різних марок**

Марка вугілля	Д	Г	Ж	К	ПС	П	А
Мінімальна густина, т/м <sup>3</sup>	1,28	1,27	1,26	1,25	1,28	1,31	1,55
Максимальна густина, т/м <sup>3</sup>	2,40						2,50

### **Розрахунок**

Введемо позначення:  $\delta_{min} = 1,25$ ;  $\delta_1 = 1,3$ ;  $\delta_2 = 1,4$ ;  $\delta_3 = 1,5$ ;  $\delta_4 = 1,6$ ;  $\delta_5 = 1,8$ ;  $\delta_6 = 2,0$ ;  $\delta_7 = \delta_{max} = 2,4$  т/м<sup>3</sup>.

Розрахунок фракційного аналізу виконується з використанням математичного опису кривих збагачуваності у відповідності до закону інтегрального розподілення фракцій Вейбулла.

#### **1. Інтервал $\delta < 1,5$ т/м<sup>3</sup>**

Необхідність розрахунку може виникнути при підвищеній зольності легких фракцій ( $\delta < 1,5$  т/м<sup>3</sup>).

Зольність фракцій:

$$A_{-1,3} = A_{-1,5} + (A_{1,8}^B - A_{-1,5}) \cdot \frac{\delta_5(\delta_1 - \delta_3)}{\delta_1(\delta_5 - \delta_3)} = 6,03, \%;$$

$$A_{1,3-1,5} = A_{-1,3} + (A_{+1,8} - A_{-1,3}) \cdot \frac{\delta_{max}(\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_{min})}{(\delta_1 + \delta_3)(\delta_{max} - \delta_{min})} = 22,57, \%.$$

Виходи фракцій:

$$\gamma_{-1,3} = \frac{A_{1,3-1,5} - A_{-1,5}}{A_{1,3-1,5} - A_{-1,3}} \cdot \gamma_{-1,5} = 45,60, \%;$$

$$\gamma_{1,3-1,5} = \gamma_{-1,5} - \gamma_{-1,3} = 14,40, \%.$$

## 2. Інтервал $1,4 \leq \delta \leq 1,8 \text{ т/м}^3$

Розрахунок виконується з використанням рівняння Вейбулла для кривої збагачуваності  $\beta$ :

$$\gamma_B = \frac{1}{A_B} \cdot \left[ \gamma_{орз} \cdot A_{орз} + \left( \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{A_B}{A_{орз}} \right)^{1/k} \right].$$

Визначаємо параметри  $k$  і  $\alpha$  в рівнянні Вейбулла:

$$k = \frac{\ln \ln \frac{A_{-1,8}}{A_{-1,3}} - \ln \ln \frac{A_{-1,5}}{A_{-1,3}}}{\ln \frac{\gamma_{-1,8} A_{-1,8} - \gamma_{-1,3} A_{-1,3}}{\gamma_{-1,5} A_{-1,5} - \gamma_{-1,3} A_{-1,3}}} = 0,804;$$

$$\alpha = \frac{\ln \frac{A_{-1,5}}{A_{-1,3}}}{\gamma_{-1,5} A_{-1,5} - \gamma_{-1,3} A_{-1,3}} = 0,0048.$$

Зольність фракцій, що спливли :

$$A_{1,4}^B = A_{-1,5} + (A_{-1,8} - A_{-1,5}) \cdot \frac{\delta_5(\delta_2 - \delta_3)}{\delta_2(\delta_5 - \delta_3)} = 8,16, \% ;$$

$$A_{1,6}^B = A_{-1,5} + (A_{-1,8} - A_{-1,5}) \cdot \frac{\delta_5(\delta_4 - \delta_3)}{\delta_4(\delta_5 - \delta_3)} = 11,61, \% ;$$

$$A_{1,8}^B = 14,30, \% .$$

Виходи фракцій, що спливли :

$$\gamma_{1,4}^B = \frac{1}{A_{1,4}^B} \cdot \left[ \gamma_{-1,3} \cdot A_{-1,3} + \left( \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{A_{1,4}^B}{A_{-1,3}} \right)^{1/k} \right] = 54,90, \% ;$$

$$\gamma_{1,6}^B = \frac{1}{A_{1,6}^B} \cdot \left[ \gamma_{-1,3} \cdot A_{-1,3} + \left( \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{A_{1,6}^B}{A_{-1,3}} \right)^{1/k} \right] = 63,65, \% ;$$

$$\gamma_{1,8}^B = 70,0, \% .$$

**Таблиця 5.18 – Виходи елементарних фракцій і їх зольність**

Вихід, %	Зольність, %
$\gamma_{1,3-1,4} = \gamma_{1,4}^B - \gamma_{-1,3} = 9,30$	$A_{1,3-1,4} = 18,60$
$\gamma_{1,4-1,6} = \gamma_{1,6}^B - \gamma_{1,4}^B = 8,75$	$A_{1,4-1,6} = 33,26$
$\gamma_{1,6-1,8} = \gamma_{1,8}^B - \gamma_{1,6}^B = 6,35$	$A_{1,6-1,8} = 41,26$
$\gamma_{1,4-1,5} = \gamma_{1,3-1,5} - \gamma_{1,3-1,4} = 5,10$	$A_{1,4-1,5} = 29,81$
$\gamma_{1,5-1,6} = \gamma_{1,4-1,6} - \gamma_{1,4-1,5} = 3,65$	$A_{1,5-1,6} = 38,08$

### 3. Інтервал $\delta > 1,8 \text{ т/м}^3$

Необхідність розрахунку може виникнути при зниженій зольності важких фракцій ( $\delta > 1,8 \text{ т/м}^3$ ).

Зольність фракцій, що потонули:

$$A_{1,8-2} = A_{1,5-1,8} + (A_{+1,8} - A_{1,5-1,8}) \cdot \frac{(\delta_5 + \delta_7)(\delta_5 - \delta_3)}{(\delta_5 + \delta_6)(\delta_7 - \delta_3)} = 54,74, \% ;$$

$$A_{+2} = A_{1,5-1,8} + (A_{+1,8} - A_{1,5-1,8}) \cdot \frac{(\delta_5 + \delta_7)(\delta_7 + \delta_6 - \delta_5 - \delta_3)}{(\delta_6 + \delta_7)(\delta_7 - \delta_3)} = 86,67 \%.$$

Виходи фракцій, що потонули:

$$\gamma_{1,8-2} = \frac{A_{+2} - A_{+1,8}}{A_{+2} - A_{1,8-2}} \cdot \gamma_{+1,8} = 6,27, \% ;$$

$$\gamma_{+2} = \gamma_{+1,8} - \gamma_{1,8-2} = 23,73, \% .$$

Результати розрахунку наведені в табл. 5.19.

**Таблиця 5.19 – Результати розрахунку фракційного аналізу вугілля**

Густина фракцій, т/м <sup>3</sup>	$\gamma$ , %	A, %	Перевірка
-1,3	45,60	6,03	$\gamma_{-1,5} = 60,00$
1,3 – 1,4	9,30	18,60	$A_{-1,5} = 10,00$
1,4 – 1,5	5,10	29,81	
1,5 – 1,6	3,65	38,08	$\gamma_{1,5-1,8} = 10,00$
1,6 – 1,8	6,35	41,26	$A_{1,5-1,8} = 40,10$
1,8 – 2	6,27	54,74	$\gamma_{+1,8} = 30,00$
+ 2	23,73	86,67	$A_{+1,8} = 80,00$
Разом	100,00	34,01	

## 5.2. Моделювання підготовчих процесів збагачення корисних копалин

### 5.2.1. Моделювання процесів дезінтеграції (дроблення і подрібнення)

#### *Факторна модель процесу дроблення*

*Вхідними факторами* процесу дроблення є (рис. 5.7): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад ( $\Gamma_1$ ), крупність вихідного матеріалу ( $D_{max}$ ) і його дробимість ( $D$ ) та навантаження на процес ( $G$ ).

*Вихідні фактори*: максимальний розмір зерен у дробленому матеріалі ( $d_{max}$ ) і його гранулометричний склад ( $\Gamma_2$ ). Важливою вихідною технологічною характеристикою процесу дроблення є ступінь дроблення ( $i$ ), яка для сучасної техніки знаходиться в межах 4 – 8. Виняток складають тільки конусні інерційні дробарки із ступенем дроблення до 15 і дробарки ударної дії із ступенем дроблення 20 – 40.

*Основним оперативним керуючим фактором* процесу дроблення є навантаження по вихідному матеріалу ( $G$ ).

*Фактори, які збурюють процес*: гранулометричний склад ( $\Gamma_1$ ) і дробимість ( $D$ ) вихідної сировини.

*Важливими конструктивними характеристиками* дробарок, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип дробарки, зусилля дроблення, хід робочого органа і частота його руху.

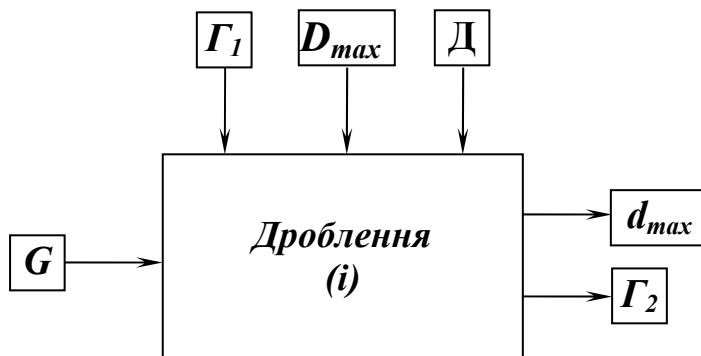


Рис. 5.7. - Факторна модель процесу дроблення.

Розглянемо вплив цих факторів на процес дроблення.

*Крупність вихідного і дробленого продуктів* визначають стадію дроблення (крупне, середнє і дрібне дроблення).

Міцність гірських порід впливає на вибір типу дробарки і, відповідно, на тип зусиль дроблення, які застосовуються (роздавлювання, стирання, розколювання, удар). Трищинуватість і пористість значно покращують дробимість гірських порід, що сприяє підвищенню продуктивності процесу.

### Факторна модель процесу подрібнення

Вхідними факторами процесу подрібнення є (рис. 5.8): характеристики подрібнювальної сировини, зокрема, крупність вихідного матеріалу ( $D_{max}$ ), його подрібнюваність ( $\Pi$ ), навантаження на процес по твердому ( $G$ ), навантаження на процес по воді ( $W_1$ ), частота обертання барабана млина ( $n$ ), що визначає режим його роботи.

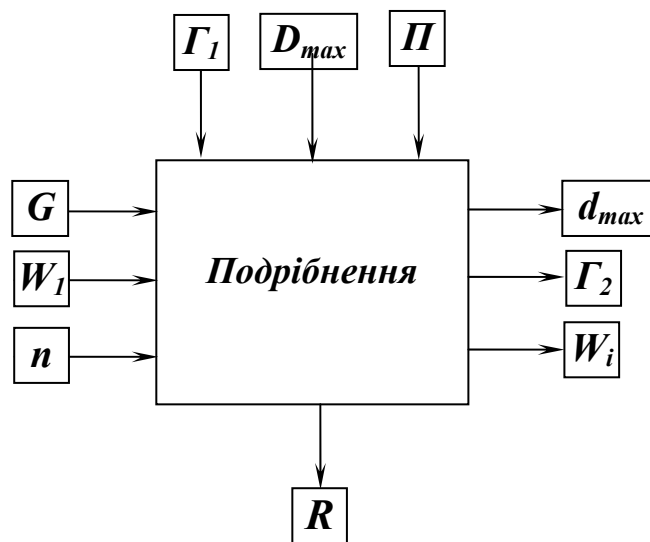


Рис. 5.8. - Факторна модель процесу подрібнення.

Вихідні фактори: максимальний розмір зерен у подрібненому матеріалі ( $d_{max}$ ) і його гранулометричний склад ( $\Gamma_2$ ). Важливим проміжним фактором можна розглядати розрідженість пульпи ( $R$ ). У окремих процесах подрібнення, наприклад вугілля в процесі підготовки водо вугільного палива, важливим вихідним фактором є також фізико-хімічна характеристика зовнішньої поверхні вугільних зерен, яка може бути оцінена потенціалом їх поверхні ( $\phi_e$ ).

Оперативними керуючими факторами процесу подрібнення можуть виступати: навантаження на процес по твердому і по воді, частота обертання барабана млина. Періодичним фактором керування може бути подрібнююче середовище (його склад і характеристики, зокрема, гранулометричний склад подрібнювального навантаження).



*Фактори, які збурюють процес:* гранулометричний склад ( $G_1$ ) і подрібнюваність ( $\Pi$ ) вихідної сировини.

*Важливими конструктивними характеристиками* барабанних млинів, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип млина, його розмір ( $D \times L$ ), форма футеровки, характеристики подрібнюючих тіл і ступінь заповнення ними млина.

Розглянемо вплив цих факторів на процес подрібнення.

Між продуктивністю млина твердому ( $G$ ) і подрібнюваністю матеріалу, його крупністю і крупністю подрібненого продукту існує прямо пропорційна залежність. Практикою встановлено, що *оптимальна крупність живлення* стержневих млинів – 15 – 20 мм, а кульових – 10 – 15 мм (така крупність може бути отримана після тристадіального дроблення). Для млинів самоподрібнення крупність живлення – 300 – 500 мм (така крупність може бути отримана після одностадіального дроблення). Чим менше крупність вихідного матеріалу і чим крупніше подрібнений продукт, тим вище продуктивність млина.

В залежності від *частоти обертання барабана млина* розрізняють *каскадний, змішаний і водоспадний швидкісні режими* руху подрібнюючих тіл. Каскадний режим руху подрібнюючих тіл здійснюється при малій частоті обертання барабана ( $n = 0,5 - 0,6$  критичної) і є найбільш сприятливим для стержневих млинів. Для кульових млинів каскадний режим застосовується при мокрому і сухому подрібненні неміцних матеріалів (при виробництві цементу, підготовці пиловугільного палива та ТЕС і т.п.).

Змішаний режим руху подрібнюючих тіл характеризується поступовим переходом від суто каскадного до суто водоспадного режиму і спостерігається при проміжних значеннях частоти обертання барабана (0,6 – 0,76 критичної). Змішаний режим має місце при подрібненні руд у кульових млинах.

При водоспадному режимі частота обертання барабана складає не менше 0,76 – 0,88 критичної. Цей режим застосовується у більшості промислових млинів при подрібненні крупних і важкоподрібнюваних матеріалів.

З ростом *ступені заповнення  $\varphi$  млина подрібнюючим середовищем* зростає витрата енергії на подрібнення і досягає максимуму при ступені заповнення  $\varphi = 50\%$ . Відповідно зростає й продуктивність млина.

З підвищенням відносної *частоти обертання* спостерігається підвищення споживаної питомої потужності. Одночасно продуктивність і вихід класу – 0,074 мм в розрахунку на 1 кВт·год зростають приблизно також, як і частота. Однак це справедливо до деякої межі (для млинів типу «Аерофол» при частоті обертання барабану відносно критичної -

до  $\psi = 0,95$ ; для млинів типу «Каскад» - до  $\psi = 0,85$ ). Якщо у живленні млина самоподрібнення міститься багато дріб'язку, його продуктивність знижується, тому що не існує достатньої кількості крупних грудок, які могли би роздрібнити грудки середньої величини, руда подрібнюється дуже повільно і, головним чином, стиранням.

*Розрідження пульпи* у млині визначає масу або об'єм твердого матеріалу, який знаходиться у ньому у кожний даний момент, а також ефективність дії подрібнюючих тіл. Загальний об'єм пульпи у млині приблизно постійний, тому зі збільшенням вмісту у пульпі води вміст твердого зменшується, і навпаки. При меншому вмісті води густина пульпи збільшується і, отже, подрібнюючі тіла при русі у більш густому середовищі будуть мати меншу силу удару. Вміст води у пульпі визначає її текучість і здатність проходження через млин. При вмісті води близько 20 % матеріал достатньо вільно проходить через млин. Чим більше густина пульпи, тим більше крупних частинок досягає розвантажувального кінця млина. У млинах з центральним розвантаженням цей крупний матеріал іде у розвантаження і вміст крупного класу у продукті подрібнення збільшується. У млинах з решіткою густа пульпа, яка містить крупні частинки затримується решіткою і збільшення вмісту крупного класу у розвантаженні млина не спостерігається. При великих розрідженнях пульпи матеріал швидше проходить млин з решіткою, що приводить до укрупнення продукту подрібнення. У млинах з центральним розвантаженням великі розрідження, навпаки, приводять до збільшення вмісту дрібних класів у подрібненому продукті.

*Гранулометричний склад подрібнювального навантаження* суттєво впливає на гранулометрію подрібненого матеріалу, що використовується як фактор впливу на процес (і, відповідно, при його моделюванні), наприклад, при підготовці висококонцентрованого водовугільного палива (ВВП).

*Подрібнюваність (II) вихідної мінеральної сировини*, зокрема, залежить від тріщинуватості матеріалу, на що впливає відомий ефект Ребіндера. Виходячи з цього, з метою регулювання гранулометричного складу, реологічних та седиментаційних характеристик ВВП регулюючим фактором процесу подрібнення вугілля може бути тривалість його попереднього (перед подрібненням) контакту з водою. Сучасні моделі подрібнення вугілля при підготовці ВВП повинні враховувати цей фактор (канал впливу).

### ***Математичні моделі процесів дезінтеграції***

Більше ста років численними дослідниками робляться спроби виявити закономірності, які дозволили би кількісно оцінити грануломет-

ричний склад продуктів дезінтеграції і її енергоємність [4]. Основних гіпотез пояснюючих процеси дезінтеграції три: П. Ріттинґера, Ф. Кіка і Ф. Бонда.

*Гіпотеза П. Ріттинґера.* В 1867 р. вийшов в світ знаменитий «Підручник по збагаченню» відомого австрійського інженера П. Ріттинґера, де серед багатьох фундаментальних положень було одне, яке викликало більш ніж вікову дискусію, незакінчену ще й дотепер. Мова йде про гіпотезу, яку автор сформулював таким чином: «... збільшення нової утвореної поверхні прямо пропорційне силі (енергії), необхідній для дроблення».

$$\Xi = K_R D^2, \quad (5.13)$$

де  $\Xi$  – енергоємність дезінтеграції;  $K_R$  – коефіцієнт пропорційності;  $D$  – лінійний розмір грудки.

Гіпотеза Ріттинґера справедлива при тонкому подрібненні, коли енергія витрачається в основному на утворення нової поверхні, тобто при високому ступені подрібнення.

*Гіпотеза Ф. Кіка.* В 1885 р. Ф. Кік висунув іншу гіпотезу, відповідно якої: «Енергія, яка необхідна для отримання зміни конфігурації геометрично подібних тіл однакової будови, змінюється, як маси або об'єми цих тіл». Слід відзначити, що стосовно до деформації пружних тіл ця гіпотеза була доведена російським механіком, проф. В. Кірпічовим за 11 років до появи роботи Кіка:

$$\Xi = K_K D^3, \quad (5.14)$$

позначення ті ж.

Однак стосовно роботи дробарок і млинів гіпотеза Кіка виявилася не універсальною. Добра відповідність цієї гіпотези має місце при крупному дробленні. При середньому і дрібному дробленні вираз (4.14) дає менш точні результати. При подрібненні ця гіпотеза практично «не працює».

Дійсно, природна гетерогенність гірських порід, нерівномірність поля напружень в об'ємі навантаженої грудки, її анізотропія, багатомасштабна дефектність і, крім того, розмаїтість зовнішніх факторів: форми, розташування, матеріалу, характеру руху робочих частин машини, розташування грудок матеріалу, що дробиться, і т.д. – роблять задачу виведення закону дроблення з точки зору фізики цього процесу, поперше, надскладною через величезне число параметрів, по-друге, марною, оскільки навіть у гіпотетичному випадку користуватися повною формулою цього закону було б неможливим внаслідок багатофакторності.

*Гіпотеза Ф. Бонда.* Найбільше розповсюдження в другій половині ХХ сторіччя одержала гіпотеза американського інженера Ф. Бонда, відповідно до якої робота руйнування грудки лінійного розміру  $D$  пропорційна  $D^{2,5}$ , що є «проміжним» значенням між пропорційністю  $D^2$  (гіпотеза Ріттингера) і пропорційністю  $D^3$  (гіпотеза Кіка). Тим самим Бонд хотів врахувати два процеси, які супроводжують руйнування, – деформування об'єму і розповсюдження тріщин (утворення нової поверхні):

$$\Xi = K_B D^{2,5}, \quad (5.15)$$

позначення ті ж.

За принципом «побудови» гіпотеза Бонда нічим не відрізняється від попередніх: також вибираються два параметри – початкова і кінцева крупність матеріалу – і здійснюється спроба створити двопараметричний функціонал, який апроксимує багатопараметричну залежність. Апроксимація Бонда виявилася дуже вдалою, що пояснюється великою кількістю технологій, параметри яких знаходяться в зоні бондівського наближення.

Усі три гіпотези можна об'єднати формулою так званої *узагальнюючої гіпотези*:

$$\Xi = K_m D^{4-m}, \quad (5.16)$$

де  $K_m$  – коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу, але не залежить від  $D$ .

При  $m = 1$  формула (5.16) приймає вигляд, який відповідає гіпотезі Ф. Кіка, при  $m = 2$  – гіпотезі П. Ріттингера, при  $m = 1,5$  – гіпотезі Ф. Бонда.

Після диференціювання залежності (5.16) по  $D$  і заміни енергоємності дроблення однієї грудки лінійного розміру на питому енергоємність (на одиницю об'єму) отримуємо:

$$d\xi = K_m'' dD / D^m. \quad (5.17)$$

Після інтегрування формули (5.17) від кінцевої крупності  $D_f$  до початкової (припускаючи, що форма грудок усіх крупностей ідентична) отримуємо:

– у відповідності до гіпотези Ф. Кіка:

$$\xi = K_1'' \ln \frac{D_0}{D_f}; \quad (5.18)$$

– у відповідності до гіпотези П. Ріттингера:

$$\xi = K_2'' (1/D_f - 1/D_0); \quad (5.19)$$

– у відповідності до гіпотези Ф. Бонда:

$$\xi = 2K_{1,5}''(1/\sqrt{D_f} - 1/\sqrt{D_0}). \quad (5.20)$$

Робота доведення одиниці об'єму матеріалу «нескінченної» вихідної крупності ( $D_0 = \infty$ ) до крупності 100 мкм ( $D_f = 100$ ), розрахована за формулою (5.20), називається індексом роботи дроблення по Бонду  $W_i$ . Індеси роботи дроблення по Бонду для різних матеріалів наведені в табл. 5.20.

**Таблиця 5.20– Індекс роботи дроблення за Бондом  $W_i$**

Руда і порода	Густина, т/м <sup>3</sup>	Індекс роботи, кВт-год/т	Руда і порода	Густина, т/м <sup>3</sup>	Індекс роботи, кВт-год/т
Андезит	2,62	20,3	Мідна руда	3,02	14,1
Базальт	2,90	19,0	Молібденова руда	2,70	13,6
Барит	4,50	5,3	Наждак	3,48	62,5
Боксит	2,20	9,8	Нікелева руда	3,28	15,1
Габбро	3,00	20,5	Олов'яна руда	3,95	12,0
Гематит	3,53	14,3	Піщаник	2,65	28,9
Гіпс	2,69	7,8	Пірит	4,06	9,8
Глина	2,51	7,0	Піротинова руда	4,04	10,5
Гнейс	2,71	22,4	Плавикий шпат	3,01	9,8
Горючі сланці	1,84	17,6	Поташ	2,40	8,9
Гравій	2,66	17,9	Польовий шпат	2,59	11,9
Граніт	2,67	16,8	Рутілова руда	2,80	14,0
Графіт	1,75	48,5	Свинцева руда	3,35	13,1
Діабаз	2,90	21,4	Свинцево-цинкова руда	3,36	11,9
Діорит	2,90	23,2	Сієніт	2,73	14,5
Доломіт	2,74	12,5	Сланець	2,63	17,5
Золотомісна руда	2,81	16,5	Спекулярит	3,28	15,2
Вапняк	2,66	14,0	Скло	2,58	13,6
Карбід кремнію	2,75	28,6	Таконіти	3,54	16,1
Кварц	2,65	15,0	Титанова руда	4,01	13,6
Кварцит	2,68	10,6	Вугілля	1,40	14,3
Кварцовий пісок	2,67	15,5	Феромарганець	6,32	9,2
Клінкер цементний	3,15	14,8	Феросиліцій	4,41	11,0
Кокс	1,31	16,7	Ферохром	6,66	8,4
Магнезит	3,06	12,3	Фосфорити	2,74	11,0
Магнетит	3,88	11,0	Цинкова руда	3,64	12,8
Марганцева руда	3,53	13,5	Шлак доменний	2,74	11,3

Інтерес до гіпотези Бонда привів до того, що Дж. Свенсен і Дж. Мюркес в 1957 р. запропонували свій варіант формули, який, на їх думку, краще погоджується з експериментальними даними:

$$\Xi = \Xi_0[(100/k_{80})^m - (100/k_{80f})^m], \quad (5.21)$$

де  $\Xi$  – витрати енергії, яка необхідна для подрібнення;  $\Xi_0$  – фактор пропорційності;  $k_{80}$  – розмір чарунки сита, скрізь яке проходить 80 % подрібненого продукту;  $k_{80f}$  – розмір чарунки сита, скрізь яке проходить 80 % вихідного матеріалу.

Значення  $m$  в процесі дослідів коливалося в межах 0,8 – 1,3.

У 1957 р. Дж. Холмс запропонував модифіковане емпіричне рівняння, яке зв'язує енергію, необхідну для подрібнення частинки, з її розміром:

$$\Xi = K[1 - (1/R)^r (100/a)^r], \quad (5.22)$$

де  $\Xi$  – енергія, яка витрачається при подрібненні;  $K$  – показник подрібнюваності;  $R$  – ступінь подрібнення;  $a$  – розмір частинок;  $r$  – показник ступеня відхилення.

Величина  $r$  виражає ступінь зміни опору матеріалу подрібненню і зміну ефективності машини при зміні розміру частинок. Значення  $r$  залежить від матеріалу і умов прикладення зусиль. Рівняння (5.22) застосовне до крихких і неоднорідних матеріалів. При подрібненні будь-якого матеріалу в кульовому млині визначеного типу значення  $K$  і  $r$  постійні в межах розміру частинки.

Енергоємність подрібнення в даному кульовому млині, розраховану за рівнянням (5.22), не можна використовувати для інших типів дробарок і млинів, тому що поведінка матеріалу при подрібненні залежить не тільки від його природи, але й від деформуючих зусиль, що прикладаються до нього.

*Формула П. Ребіндера.* З фізичної точки зору коректною є формула П. Ребіндера:

$$\Xi = K_d D^3 + K_s D^2, \quad (5.23)$$

У відповідності до виразу (5.23) елементарна робота, яка витрачається в процесі руйнування грудки матеріалу, дорівнює сумі роботи по її деформації і роботи утворення нової поверхні ( $K_d$  і  $K_s$  – коефіцієнти пропорційності).

Перевага формули Ребіндера перед викладеними вище трьома основними гіпотезами дроблення полягає перш за все в її адитивній побудові, яка підкреслює багатофакторність процесу руйнування.

*Термодинамічна теорія Л. Джингезіана.* Відповідно до цієї теорії для руйнування матеріалу (дроблення, подрібнення) необхідна деяка кількість енергії, яка складається з кінетичної, – помольних тіл, – і теплової – подрібнюваного матеріалу. Сума кінетичної енергії, необхідної для

подрібнення матеріалу, і внутрішньої теплової енергії матеріалу за термодинамічною теорією є величиною постійною.

Фізичні передумови цієї теорії полягають у наступному: частинки, які складають об'єм такого гетерогенного матеріалу, як руда, під дією тепла розширюються неоднаково, що спричиняє в цьому об'ємі внутрішні напруження, які зростають з підвищенням температури. В результаті, за думкою автора теорії, на дроблення нагрітої руди потрібно менше кінетичної енергії дробильних тіл у порівнянні з дробленням не нагрітої руди на величину енергії, витраченої на попередній нагрів.

Теорія запропонована в 1952 р., випробування проводилися з вапняком, кварцом, мідно-нікелевою і свинцево-срібними рудами.

Випробування підтвердили висновки теорії про збільшення площі новоутвореної поверхні при підвищенні температури. Однак постійності суми кінетичної і теплової енергій не спостерігалось, при цьому загальні енерговитрати при дробленні з попереднім нагрівом завжди були вище.

*Теорія моделей А. Андреазена.* Теорія запропонована в 1953 р., вона дозволяє визначити параметри і процес роботи промислової дробарно-подрібнювальної машини за даними лабораторної машини. Неодмінною умовою такого моделювання є абсолютно беззаперечне виконання таких положень: обидві машини повинні бути строго подібні, тобто мати одну й ту же конструкцію і форму з постійним параметром подібності; теорія може бути застосована тільки до крихких матеріалів, які руйнуються раніше ніж буде перевершена межа пружності.

Теорія Андреазена базується на спостереженні за руйнуванням геометрично подібних тіл під дією статично подібних зовнішніх сил. Передбачається, що сила, необхідна для руйнування матеріалу, характеризує природу цього матеріалу при умові, що зовнішні сили руйнують його раніше ніж буде перевершена межа пружності.

Головним контраргументом теорії моделей можна назвати той факт, що руйнування у дійсності – процес масштабно неподібний навіть для ідеальних кристалів. Тим більше, цей процес масштабно неподібний для реальних твердих тіл з недосконалою кристалічною будовою, властивості яких значно змінюються у залежності від розмірів.

*Теорія Л.Горобець [22].* Суттєвий внесок у теорію і моделювання процесу руйнування мінеральної сировини здійснила сучасний український науковець д.т.н. Лариса Горобець. Застосувавши метод акустичної емісії вона запропонувала формули для прогнозу оцінки таких показників подрібнення:

- характерний розмір дроблених (подрібнених) зерен:

$$d_x = \frac{1}{K} \sqrt[3]{\frac{V}{N}}, \quad (5.24)$$

- вихід фракцій характерного розміру (частки одиниці):

$$\gamma = \frac{N}{V} l^2 \delta, \quad (5.25)$$

- новоутворена питома поверхня подрібненого продукту, м<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>:

$$\Delta S = \frac{Nl\delta}{V}, \quad (5.26)$$

де  $N$  – сумарна кількість акустичних сигналів у акті руйнування;  $\delta$ ,  $l$  – середня величина поздовжнього і поперечного розмірів характерних структурних зерен мінерального зерна;  $V$  – об’єм мінерального зерна;  $K$  – критерій руйнування (для лабораторних зразків  $K = 2,6$ ).

**Таким чином**, дотепер, як і раніше, існує три основних гіпотези (і відповідно – моделей) процесів дезінтеграції, які характеризують зв’язок між енергоємністю дроблення і крупність дробленого матеріалу, – гіпотези Рітгінгера, Кіка і Бонда, які базуються на емпіричному матеріалі. Експериментальне порівняння цих гіпотез показує, що для подрібнення при великих поверхнях краще інших відбиває дійсність формула Рітгінгера, для крупного дроблення формула Кіка, формула Бонда може бути застосована при дробленні в проміжному діапазоні крупності.

**Приклад 5.5.** За даними ситового аналізу вугілля (табл. 5.21) побудувати сумарну характеристику по «+  $d$ » і визначити вихід і зольність класу 5 – 75 мм, розмір максимального і середнього зерна в пробі досліджуваного матеріалу.

**Таблиця 5.21 – Ситовий аналіз вугілля**

Клас, мм	Вихідні дані		Сумарні дані по «+ $d$ »	
	$\gamma$ , %	$A^d$ , %	$\gamma_{\text{сум}}$ , %	$A^d_{\text{сум}}$ , %
1	2	3	4	5
+100	6,8	55,8	6,8	55,8
50 – 100	17,6	49,3	24,4	51,1
25 – 50	11,4	40,5	35,8	47,7
13 – 25	10,4	37,8	46,2	45,5
6 – 13	12,7	31,5	58,9	42,5
0,5 – 6	25,6	29,7	84,5	38,6
0 – 0,5	15,5	21,9	100,0	36,0
Разом	100,0	36,0	–	–

Розрахунок сумарних даних по «+  $d$ » виконується послідовним сумуванням, наприклад:

– вихід класу + 50 мм:  $\gamma_{+50} = \gamma_{+100} + \gamma_{50-100} = 6,8 + 17,6 = 24,4$  % ;

– зольність класу + 50 мм:



$$A_{+50}^d = \frac{\gamma_{+100} \cdot A_{+100}^d + \gamma_{50-100} \cdot A_{50-100}^d}{\gamma_{+50}} = \frac{6,8 \cdot 55,8 + 17,6 \cdot 49,3}{24,4} = 51,1 \% \text{ і}$$

т.д.

За даними стовпців 1 і 4 будують сумарну характеристику крупності, а за даними стовпців 1 і 5 – криву середньої зольності (рис. 5.9).

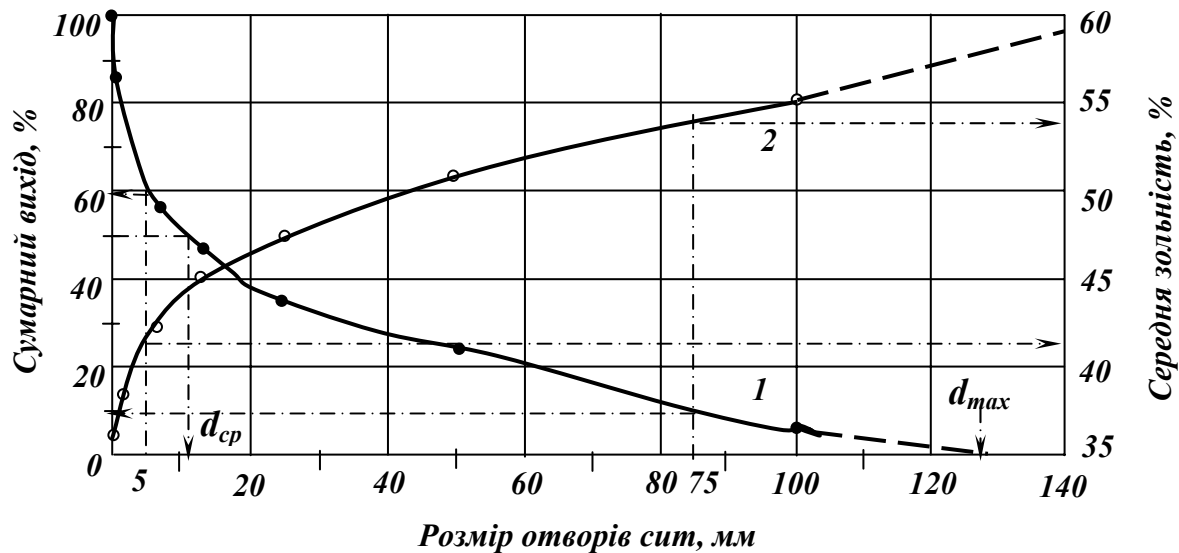


Рис. 5.9 – Криві ситового аналізу.

1 – сумарна характеристика крупності; 2 – крива середньої зольності.

З використанням кривих ситового аналізу визначаємо:

- розмір максимального зерна в пробі  $d_{max} = 130$  мм (перетинання продовження сумарної характеристики крупності з віссю абсцис);
- розмір середнього зерна в пробі  $d_{cp} = 12$  мм (перетинання проекції точки сумарної характеристики крупності, що відповідає виходу 50 % з віссю абсцис);
- вихід класу 5 – 75 мм, як різницю між виходами класів + 5 і + 75 мм:

$$\gamma_{5-75} = \gamma_{+5} - \gamma_{+75} = 60 - 10 = 50\%;$$

– зольність класу 5 – 75 мм за формулою:

$$A_{5-75}^d = \frac{\gamma_{+5} \cdot A_{+5}^d - \gamma_{+75} \cdot A_{+75}^d}{\gamma_{5-75}} = \frac{60 \cdot 42 - 10 \cdot 54}{50} = 39,6\%.$$

При побудові сумарних характеристик у широкому діапазоні крупності зерен досліджуваного матеріалу відрізки на осі абсцис виходять дуже малого розміру, що утруднює використання кривих. Щоб уникнути цього недоліку, сумарні характеристики крупності будують в напівлогарифмічній або логарифмічній системі координат. Обробка великого числа даних гранулометричних аналізів продуктів дроблення та подріб-

нення показала, що функціональна залежність між сумарним залишком на ситі і крупністю зерен в більшості випадків з достатньою для практики точністю описується рівнянням Розіна-Рамлера:

$$R = 100e^{-bx^n}, \% , \quad (5.27)$$

де  $R$  – сумарний вихід класу крупніше  $x$  (по «+ d»), %;  $x$  – розмір отворів сита;  $b$  і  $n$  – параметри, що залежать від властивостей матеріалу і розмірності величини  $x$ .

Параметр  $b$  непрямо характеризує вміст найдрібніших (менше 1 мкм) зерен: чим їх більше в матеріалі, тим більше  $b$ .

Параметр  $n$  характеризує степінь увігнутості кривої сумарних залишків, побудованої у координатах  $R = f(d/d_c)$ , де  $d$  – розмір чарунок сита, мкм;  $d_c$  – розмір чарунок такого сита, на якому одержують «стандартний» залишок ( $R_c = 36,8$  %).

Рівняння характеристики крупності дозволяє визначити залежність між  $R$  і  $x$ , число зерен в будь-якому класі, площу поверхні зерен, питому поверхню та інше. Але при використанні рівняння Розіна-Рамлера нульовий вихід досягається тільки при нескінченно великій крупності матеріалу, тобто  $R = 0$  при  $x = \infty$ , тому необхідно приймати кінцеву крупність матеріалу, яка відповідає якому-небудь визначеному значенню виходу класу.

## 5.2.2. Моделювання процесу грохочення

### *Факторна модель процесу грохочення*

*Вхідними факторами* процесу грохочення є (рис. 5.10): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад вихідного матеріалу ( $G_1$ ), витрата води для ополіскування ( $W$ ) та навантаження на процес ( $G_1$ ).

*Вихідні фактори*: гранулометричний склад продуктів грохочення ( $G_i$ ) і їхня кількість ( $G_i$ ). Важливою вихідною технологічною характеристикою процесу грохочення є ефективність ( $E$ ). *Проміжними факторами* можна розглядати розпушеність і висота шару матеріалу на ситі грохота ( $R, H$ ).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу грохочення є навантаження по вихідному матеріалу ( $G_1$ ), амплітуда і частота коливань просіюючої поверхні ( $a, f$ ).

*Фактори, які збурюють процес*: гранулометричний склад ( $G_1$ ) вихідної сировини, її вологість ( $W_t^r$ ) фізичні властивості ( $\Phi$ ), основними з яких є густина, абразивність і форма зерен.

Важливими конструктивними характеристиками грохотів, які впливають на процес і його результати, є: конструкція грохота, площа сита, розмір і форма його отворів, кут нахилу просіюючої поверхні.

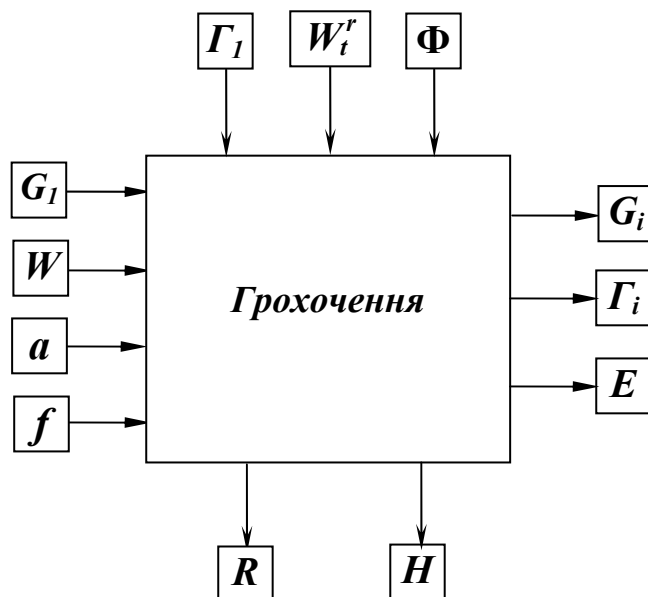


Рис. 5.10. Факторна модель процесу грохочення.

Розглянемо вплив цих факторів на процес грохочення.

*Вплив гранулометричного складу.* Дрібні зерна легко проходять крізь отвори сита, але зерна близькі за розміром до отворів сита забивають його. При цьому зменшується площа живого перетину сита і знижується якість грохочення. Зерна, діаметр яких більше 1,5 і менше 0,75 діаметра отворів сита, суттєво не впливають на процес грохочення.

*Вологість вихідного матеріалу.* Вода, що знаходиться в порах і тріщинах зерен, а також хімічно зв'язана на процес грохочення не впливає. Для грохочення має значення вміст зовнішньої вологи, яка покриває плівкою поверхню зерен матеріалу. Зовнішня волога спричиняє злипання дрібних частинок між собою, налипання їх на крупні грудки та замазування отворів сит.

*Наявність в матеріалі глини* навіть при малій вологості значно утруднює процес грохочення. При грохоченні глинистих та в'язких матеріалів перед грохоченням глину відмивають або матеріал підсушують; застосовують мокре грохочення або підогрів сит.

*Розміри поверхні грохочення.* Продуктивність грохота майже прямо пропорційна ширині сита. Збільшення довжини підвищує імовірність проходження частинок крізь сито, збільшуючи ефективність грохочення. Довжина сита повинна бути у 2 – 3 рази більша від ширини сита.

*Насипна густина і форма зерен.* Продуктивність грохочення зростає по мірі збільшення насипної густини і наближення форми частинок до кулястої. Крім того, насипна густина матеріалів, які піддають розсі-

ву, визначає вибір типу грохота: легкого ( $\delta \leq 1,4 \text{ т/м}^3$ ), середнього ( $\delta \leq 1,8 \text{ т/м}^3$ ) або важкого ( $\delta \leq 2,8 \text{ т/м}^3$ ).

*Форма отворів сита.* У практиці грохочення застосовуються просіюючі поверхні з квадратними, щілинними, прямокутними і круглими отворами. Вибір форми отвору залежить від вимог до крупності продуктів грохочення і продуктивності грохота. Круглі отвори в порівнянні з іншими формами того ж номінального розміру дозволяють отримати більш дрібний підрешітний продукт.

*Кут нахилу просіюючої поверхні.* Кут нахилу просіюючої поверхні впливає на розмір зерна, що вільно проходить крізь отвори сита.

Вважають, що на похилому решеті віброгрохота отримують нижній продукт тієї ж крупності, що й на горизонтальному, якщо розмір отворів похилого решета більше розміру отворів горизонтального в 1,15 рази при куті нахилу  $20^\circ$  і в 1,25 рази при куті нахилу  $25^\circ$ .

Пропорційно зміні кута нахилу просіюючої поверхні змінюється продуктивність грохота і обернено пропорційно – ефективність грохочення та крупність нижнього продукту.

*Товщина шару матеріалу на ситі.* Існує оптимальна товщина шару матеріалу, при якій спостерігається максимальна швидкість грохочення. Для найбільш успішного грохочення товщина шару матеріалу на ситі не повинна перевищувати 3 – 4-кратних розміри отворів сита.

*Швидкість руху зерен по просіюючій поверхні* визначає продуктивність грохота як транспортного засобу. Оптимальна швидкість подачі матеріалу на грохот повинна встановлюватись експериментально в залежності від продуктивності грохота і необхідної ефективності.

*Амплітуда і частота коливань короба.* Амплітуда і частота коливань короба впливають на продуктивність і ефективність грохочення. Збільшення амплітуди і частоти коливань приводить до збільшення числа контактів зерен з просіюючою поверхнею, поліпшення умов самоочищення сита від зерен, що застряють в отворах, внаслідок чого збільшуються продуктивність і ефективність грохочення. Однак збільшення амплітуди і частоти обмежене механічною міцністю грохота.

Частота коливань повинна зменшуватися, а амплітуда зростати по мірі збільшення розміру отворів сита грохота.

Технологічний розрахунок грохотів зводиться до визначення необхідної площі просіюючої поверхні, а також необхідної ефективності грохочення при заданій продуктивності.

Ефективність грохочення характеризує повноту відсівання нижнього класу (матеріалу дрібніше розміру отворів сит) у підрешітний продукт.

*Ефективністю грохочення* називається виражене в відсотках або частках одиниці відношення маси підрешітного продукту до маси ниж-

нього класу у вихідному матеріалі. Ефективність грохочення визначається за формулою:

$$E = \frac{(\alpha - \beta)(\mathcal{G} - \alpha) \cdot 10^4}{\alpha(100 - \alpha)(\mathcal{G} - \beta)}, \% \quad (5.28)$$

де  $\alpha$  - вміст нижнього класу у вихідному живленні грохота, % ;  $\beta$  - вміст нижнього класу в надрешітному продукті, % ;  $\mathcal{G}$  - вміст нижнього класу в підрешітному продукті, % .

Між продуктивністю і ефективністю існує зворотна залежність: якщо перша росте, то друга за інших рівних умов знижується.

### ***Математичне моделювання грохочення***

#### *Детерміністська і стохастична моделі процесу грохочення*

Процес розділення сипучих матеріалів по крупності на ситових поверхнях об'єднує три етапи, що протікають одночасно:

- доставка прохідної фракції на контакт з ситом;
- проходження зерен прохідної фракції через чарунки сита;
- переміщення шару надрешітного продукту по сити грохота до зони розвантаження.

В останні роки визначилися два основних напрямки математичного опису процесу грохочення:

- детерміністська модель, яка розглядає умови переміщення окремих зерен матеріалу по сити грохота і проходження їх через отвори сита;
- стохастична модель, що представляє процес класифікації як масовий процес з імовірнісним характером руху частинок під дією гравітаційних, інерційних та інших сил.

Детерміністський напрям дозволяє врахувати вплив окремих факторів на результат процесу класифікації в завершальній фазі грохочення - проходження зерен матеріалу через чарунки сита, а також їх вібропереміщення по сити грохота. Крім того, простими і доступними методами можна оцінити вплив сил, що визначають рух окремих частинок.

Стохастична модель на відміну від детерміністської розкриває закономірності руху сукупності зерен матеріалу.

Для теоретичної інтерпретації процесу грохочення використовують поєднання і взаємодоповнення різних моделей – детерміністської та стохастичної. У ряді робіт розглянуто задачу визначення ймовірності проходження окремих зерен матеріалу через чарунки сит різних типів. Встановлено взаємозв'язок ймовірності проходження зерен матеріалу з

конструктивними і динамічними параметрами віброгрохота. Відзначено, що на ймовірність проходження найбільшою мірою впливають:

- конструктивні параметри грохота: конструкція просіюючої поверхні, її довжина і кут нахилу до горизонту, гранична крупність розділення;

- динамічні параметри роботи віброгрохота: амплітуда і частота коливань сита, розміри зерен матеріалу, їх співвідношення з розмірами чарунок сита.

Аналіз досліджень детерміністських моделей показав, що вивчення елементарного акту просіювання й процесу вібротранспортування матеріальної частинки корисне для розуміння процесу та встановлення його якісних залежностей. Однак, поширення висновків, отриманих на їх основі, на всю масу матеріалу навряд чи допустиме, тому складність процесу і його залежність від численних факторів і умов не дозволяють створити на цій основі модель, адекватну реальному процесу. На практиці грохочення і переміщення матеріалу здійснюються у вигляді шару середовища, і залежать не тільки від заданого режиму руху робочого органу, а й від фізичних властивостей матеріалу, виконуваної технологічної операції і т.д.

Стохастична теорія грохочення, запропонована Е.А. Непомнящим, дозволяє врахувати різноманітні чинники, що впливають на ефективність процесу грохочення.

Вважаючи рух частинок прохідної фракції в середовищі великих зерен одномірним марковським процесом, Е.А. Непомнящий для математичного опису процесу грохочення скористався диференціальним рівнянням Колмогорова-Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (5.29)$$

де  $w$  - густина розподілу ймовірності зміни положення частинок прохідної фракції;  $b$  - параметр хаотичності руху прохідної фракції (є коефіцієнтом дифузії);  $c$  - параметр упорядкованості руху частинок прохідної фракції (є коефіцієнтом сегрегації);  $z$  - координата частинок в шарі матеріалу від поверхні сита грохота;  $t$  - тривалість процесу грохочення.

Досліджуючи рішення рівняння вимушеної дифузії Е.А. Непомнящий отримав вираз для визначення вилучення прохідної фракції в залежності від двох коефіцієнтів - сегрегації  $c$  і дифузії  $b$ .

У разі рівномірного початкового розподілу частинок прохідної фракції за висотою шару матеріалу вираз для визначення вилучення частинок приймає вигляд:

$$\varepsilon = 1 - a(\tilde{h}) \exp\left(-\frac{\rho(\tilde{h})^2}{4H^2} t\right), \quad (5.30)$$

де  $a(\tilde{h})$  - безрозмірний коефіцієнт, що залежить від початкового розподілу частинок у шарі;  $\rho(\tilde{h})$  - перший корінь рівняння  $\rho(tg\rho) = 2\tilde{h}$ ;  $H$  і  $\tilde{h}$  - безрозмірні параметри грохочення:

$$H = \frac{h}{\sqrt{2bt}} = \frac{Q}{3,6B\gamma\sqrt{2BLv_{cp}}}, \quad \tilde{h} = \frac{kh}{b} = \frac{kQ}{3,6bB\gamma v_{cp}}. \quad (5.31)$$

Залежність (5.31) дозволяє зв'язати результати процесу грохочення з продуктивністю грохота по вихідному живленню  $Q$  або початковій товщині шару матеріалу  $h$ , довжиною  $L$  і шириною  $B$  просіюючої поверхні, густиною матеріалу  $\gamma$  і середньою швидкістю переміщення матеріалу по сити грохота  $v_{cp}$ .

У вдосконаленні стохастичної теорії грохочення важливе місце займає проблема визначення стохастичних коефіцієнтів. Однією з методик є їх визначення на підставі тестових досліджень процесу грохочення, наприклад, за результатами двох дослідів з різною тривалістю вібраційної обробки. Стохастична теорія грохочення отримала розвиток в моделях, запропонованих Надутим В.П. і Лапшиним Є.С.

*Сепараційна характеристика як модель процесу грохочення (за О.Н. Тихоновим)*

Наближене рівняння сепарації по крупності на ситі з отворами  $l_{отв}$  складається при таких допущеннях:

- нехтують силами в зоні над ситом;
- вважають, що над ситом матеріал ідеально перемішаний і гранулометрична характеристика не залежить від координати в шарі, тобто  $\gamma(l, x, t) = \gamma(l, t)$ ;

- швидкість  $v_c$  (м/с) просівання зерен нижнього продукту представляють вигляді [18]:

$$v_c(l) = \begin{cases} v_{\max} [1 - (l/l_0)^a] & \text{при } l < l_{отв} \\ 0 & \text{при } l > l_{отв}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Для періодичного грохочення (фіксованої маси матеріалу) позначимо:  $\gamma(l, t)$  - гранулометрична характеристика матеріалу над ситом;  $m(t)$  - маса матеріалу над  $1 \text{ м}^2$  сита;  $h \approx const$  - середня товщина шару матеріалу над ситом. Потік елементарного дрібного класу  $[l, l + dl]$  через

сито вважають рівним  $W(l) = -v_c h^{-1} m \gamma$ , тоді *рівняння сепарації* отримують із закону збереження на границі (на сітці) у вигляді:

$$\partial / (m \gamma) / \partial t = -v_c h^{-1} m \gamma, \quad (5.33)$$

тобто швидкість зменшення маси елементарного класу  $[l, l + dl]$  з надрешітного матеріалу пропорційна його масі  $m \gamma$  і швидкості просівання і зворотно пропорційна товщині шару  $h$ .

Рішення рівняння (5.33) відносно  $m \gamma$  має вигляд:

$$m(t) \gamma(l, t) = m_{вих} \gamma_{вих}(l) \exp[-v_c(l) h^{-1} t]$$

і показує зміну маси будь-якого класу  $[l, l + dl]$  над ситом з часом грохочення.

Сепараційна характеристика періодичного грохочення буде:

– по надрешітному продукту:

$$\varepsilon_{надр}(l, t) = m(t) \gamma(l, t) / m_{вих} \gamma_{вих}(t) = \exp[-v_c(l) h^{-1} t]; \quad (5.34)$$

– по підрешітному продукту:

$$\varepsilon_{підр}(l, t) = 1 - \exp[-v_c(l) h^{-1} t]; \quad (5.35)$$

Таким чином сепараційна характеристика залежить не тільки від швидкості просівання дрібних класів  $v_c$ , але й від часу грохочення.

Для *безперервного грохочення* в стаціонарному режимі і при тих же допущеннях сепараційні характеристики отримують з попередніх (5.34) і (5.35) заміною змінного часу  $t$  на постійний час транспортування:

$$t = L / v_{тр} = M / Q_{тр}, \quad (5.36)$$

де  $L$  – довжина грохота;  $v_{тр}$  – швидкість транспортування;  $M$  – запас матеріалу на грохоті;  $Q_{вих}$  – продуктивність по вихідному живленню [18].

*Сепараційна характеристика надрешітного продукту для безперервного грохочення* в стаціонарному режимі має вигляд:

$$\varepsilon_{надр}(l) = 1 - \exp[-v_c(l) M (h Q_{вих})^{-1}]. \quad (5.37)$$

При зниженні продуктивності  $Q_{вих}$  безперервного грохочення до нуля або при збільшенні часу періодичного грохочення до нескінченності сепараційна характеристика наближається до ідеальної.

Для уточнення аналізу протікання процесу грохочення і урахування ефектів сегрегації в шарі над ситом введемо функції  $\gamma(l, x, t)$  і  $v(l, x, t)$ , які залежать від місцеположення  $x$  в шарі. При цьому враховуються три сили:



- градієнтна  $\vec{F}_{град} = -\alpha D \gamma^{-1} \partial \gamma / \partial x$ ;
- опору  $\vec{F}_{оп} = -\alpha v$ ;
- сегрегації  $F_{сегр} = k_{сегр} (l - \bar{l})$ , де  $\bar{l} = \int_0^{l_{max}} l \gamma dl$ .

Сила сегрегації сприяє руху крупних частинок  $l > \bar{l}$  від сита угору, а дрібних  $l < \bar{l}$  – униз до сита.

З використанням закону збереження  $\partial \gamma / \partial t = -\partial(\gamma v) / \partial x$  і балансу сил  $\sum F_i = 0$  отримують рівняння для функції  $\gamma(l, x, t)$  в шарі над ситом:

$$\partial \gamma / \partial t = D \partial^2 \gamma / \partial x^2 + k_{сегр} \alpha^{-1} (l - \bar{l}) \partial \gamma / \partial x. \quad (5.38)$$

На відміну від зробленого раніше припущення про ідеальне перемішування в шарі над ситом, рішення рівняння (5.38) показує, що у верхній частині шару переважають крупні зерна, а в нижній – дрібні. Для знаходження функції  $\gamma(l, x, t)$  і потім уточненої функції  $\varepsilon(l)$  рівняння (5.38) вирішують з урахуванням граничних умов на ситі у вигляді (5.32).

### 5.2.3 Моделювання процесів гідравлічної класифікації

#### *Факторна модель процесу класифікації (в гідроциклоні)*

*Вхідними факторами* процесу класифікації є (рис. 5.11): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад вихідного матеріалу ( $G_1$ ), навантаження на процес по твердому і воді ( $G_1, W_1$ ), тиск на вході в гідроциклон ( $p$ ).

*Вихідні фактори*: гранулометричний склад продуктів класифікації ( $G_i$ ) і їхня кількість ( $G_i$ ) та кількість в них води ( $W_i$ ).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу класифікації можуть бути навантаження по вихідному матеріалу і воді ( $G_1, W_1$ ), тиск на вході в гідроциклон ( $p_0$ ).

*Фактори, які збурюють процес*: гранулометричний склад ( $G_1$ ) вихідної сировини і розрідженість матеріалу на вході в гідроциклон ( $R_1 = W_1 / G_1$ ).

*Важливими конструктивними характеристиками* гідроциклонів, які впливають на процес і його результати, є: геометричні розміри гідроциклона, його живильного і зливного патрубків та піскової насадки, кут конусності гідроциклона і кут нахилу його осі. Особливо важливою конструктивною характеристикою гідроциклона є розвантажувальне відношення ( $d_{п}/d_{зл}$ ).

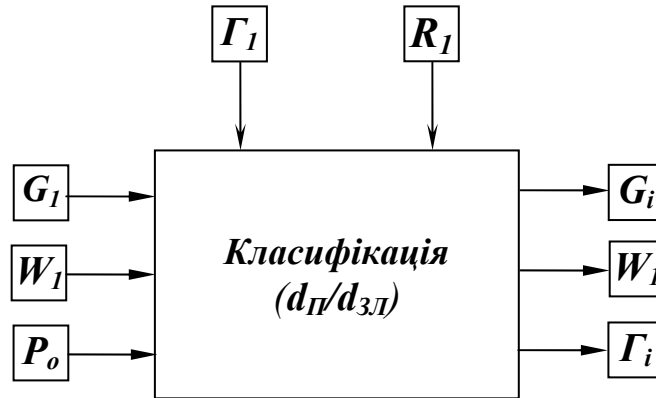


Рис. 5.11. Факторна модель процесу класифікації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес класифікації.

*Гранулометричний склад твердої фази* вихідного матеріалу впливає на точність розділення в гідроциклоні. При збільшенні вмісту в живленні зерен, близьких до граничного розміру, взаємне засмічення зливу і пісків суміжними класами збільшується.

*Вміст твердого у вихідній пульпі* впливає на крупність і розрідженість продуктів розділення. Одержання тонких зливів можливе лише при досить низьких вмістах твердого у вихідній пульпі. У протилежному випадку крупність зливу зростає внаслідок збільшення в'язкості і густини пульпи в гідроциклоні. Крім того, підвищення вмісту твердого в пульпі спричиняє збільшення навантаження на піскову насадку, яка може не забезпечити вивантаження пісків, що призведе до порушення процесу розділення.

*Тиск  $p_0$  на вході в гідроциклон* для одержання задовільних результатів розділення повинен бути постійним і досить високим. При заданій об'ємній продуктивності він визначається головним чином розмірами зливного  $d_{зл}$  і живильного  $d_{ж}$  отворів. Підвищення тиску сприяє зменшенню граничної крупності розділення і одержанню більш дрібних зливів. При одержанні грубих зливів допускається робота гідроциклона з тисками 0,05 МПа, при одержанні тонких зливів – не менше 0,2 МПа.

*Геометричні розміри гідроциклона, його живильного і зливного патрубків та піскової насадки* взаємозв'язані і від співвідношення між ними залежать продуктивність апарата і ефективність процесу класифікації.

*Кут конусності гідроциклона* визначає його об'єм і час перебування в ньому матеріалу. Зі збільшенням кута конусності збільшується

крупність класифікації, зменшуються вихід пісків і об'ємна продуктивність.

*Кут нахилу осі гідроциклона* до горизонту порівняно мало впливає на його роботу. Встановлення гідроциклонів великих розмірів в нахиленому і навіть в горизонтальному положенні (при малих тисках на вході) іноді позитивно впливає на рівномірність протіканню процесу і, відповідно, на технологічні показники.

*Розвантажувальне відношення  $d_{\Pi} / d_{зл}$* , тобто відношення діаметра піскової насадки до діаметра зливного патрубку є основним чинником, що визначає показники роботи гідроциклона. Зі збільшенням розвантажувального відношення збільшується вихід пісків, знижується їх крупність і вміст твердого, відповідно до цього змінюється характеристика зливу. Ефективність класифікації досягає максимуму при оптимальному розвантажувальному відношенні, що складає 0,3 – 0,5. Якщо зміна розвантажувального відношення створюється за рахунок зміни діаметра піскової насадки, то при постійному тиску на вході продуктивність гідроциклона змінюється мало, якщо ж за рахунок діаметра зливного патрубку, то продуктивність змінюється прямо пропорційно цьому діаметру.

### ***Математичне моделювання процесу гідравлічної класифікації***

Найбільш плідними з т. з. моделювання гідравлічної класифікації є праці О. Н. Тихонова [18], В. Г. Левіна [26] та В. І. Кривошекова. Розглянемо їх докладніше.

Моделі О. Н. Тихонова [18] були створені у 1980-тих роках і містять, на нашу думку, ряд недостатньо обґрунтованих тверджень, зокрема, оперування потенціальними силами, які залежать від місця розташування частинок, обумовлюючи їх рух у просторі. Попри це моделі О. Н. Тихонова зберігають свою цінність до сьогодні.

*Класифікація у висхідному потоці з нестисненими умовами* [18].

Класифікатори, згущувачі, гідроциклони сепарують частинки, які відрізняються крупністю  $l$  і густиною  $\rho$ .

Розглянемо випадок при  $\rho = const$  і  $l = var$ , тобто модель класифікаційного стовпчика для нестиснених умов класифікації частинок по крупності. У стовпчик знизу подається вода, яка підіймається угору із швидкістю  $v_{сер}$ ; крупні частинки  $l > l_p$  рухаються униз в напрямку  $x$ , а дрібні  $l < l_p$  – угору. Враховуємо три сили: гравітаційну  $\vec{F}_{грав}$ , архімедову  $\vec{F}_A$  (вона може бути "гравітаційною"  $\vec{F}_{2-A}$  і "відцентровою"  $\vec{F}_{6ц-A}$  -

залежно від поля сил), в'язкого тертя (стоксову)  $\vec{F}_{Cm}$ ; для нестиснених умов об'ємна частка твердого мала, тобто  $m(x, t) \rightarrow 0$ , і тому сила опору руху частинки з боку твердої фази  $\vec{F}_{onip} = 0$ .

Основні рівняння збереження і балансу сил приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \partial(m\gamma)/\partial t &= -\partial(m\gamma v)/\partial x + W; \\ g\rho - g\rho_{cep} - \alpha_c(v - v_{cep})/l^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

де  $\alpha_c = 18\mu$ ;  $\mu$  – динамічна в'язкість середовища. Функція джерела  $W$  характеризує потік і склад живлення:

$$W(l, x, t) = q_{вих}(x, t)m_{вих}(x, t)\gamma_{вих}(l, t), \quad (5.40)$$

де  $q_{вих}$  – питома продуктивність по живленню, яка дорівнює сумарному об'єму матеріалу і середовища, що підводиться в одиницю часу в одиниці об'єму в точці  $(x, t)$ ,  $\text{с}^{-1}$ ;  $m_{вих}$  – масова (або об'ємна) частка твердого в матеріалі, що підводиться;  $\gamma_{вих}$  – диференційна характеристика крупності живлення,  $\text{мм}^{-1}$ .

Рішення рівнянь (5.40) прогнозує концентрації вузьких класів  $\gamma(l, x, t)dl$  і твердого у цілому  $m(x, t)$ . У загальному випадку для нестационарного режиму в аналітичному вигляді рівняння буде мати вигляд:

$$m\gamma = \Gamma_{noch}(x - vt, l) + \int_0^t W[l, x - (t - \tau)v, \tau]d\tau, \quad (5.41)$$

де  $\Gamma_{noch}(x, t) = m(x, 0)\gamma(l, x, 0)$  – початковий розподіл частинок по простору робочої зони при  $t = 0$ ;  $v = v_{cep} + g\alpha_c^{-1}(\rho - \rho_{cep})l^2$  – швидкість частинок відносно стінок апарата, м/с.

Практичне застосування цього рішення можливе при заміні у відомих функціях  $\Gamma_{noch}(l, x)$  і  $W(l, x, t)$  координати  $x$  відповідно на різності  $x - vt$  і  $x - (t - \tau)v$ , після чого їх підставляють у рівняння (5.41) і отримують функцію  $\Gamma(l, x, t) = m\gamma$ . Далі відомий добуток  $\Gamma = m\gamma$  у відповідності з властивостями нормування  $\gamma$  – функції розбивають на шукані співмножники:

$$m(x, t) = \int_0^{l_{\max}} \Gamma(l, x, t)dl; \quad \gamma(l, x, t) = \Gamma(l, x, t)/m(x, t). \quad (5.42)$$

З апарату виводяться продукти: верхній  $l < l_p$  і нижній  $l > l_p$  при цьому  $l_p = \sqrt{\alpha_c v_{cep} / g(\rho - \rho_{cep})}$  знаходиться з умови (5.39). З отриманого рішення  $m(x, t)$  і  $\gamma(l, x, t)$  можна прогнозувати характеристики обох продуктів за формулами:

$$\begin{aligned} V_{ниж}(t) &= S \int_{x_{дно}}^{\infty} m(x, t) dx; \\ Q_{ниж}(t) &= dV_{ниж} / dt; \\ \gamma_{ниж}(l, t) &= \gamma(l, x_{дно}, t), \end{aligned} \quad (5.43)$$

де  $V_{ниж}(t)$  – сумарний об’єм осаду, який накопичився в нижньому продукті до моменту часу  $t$ , м<sup>3</sup>;  $S$  – площа перетину апарата, м<sup>2</sup>;  $x_{дно}$  – координата розвантажувальної частини апарата, м;  $Q_{ниж}(t)$  – об’ємна продуктивність по твердому в нижній продукт, м<sup>3</sup>/с;  $\gamma_{ниж}(l, t)$  – диференціальна характеристика крупності нижнього продукту, що вивантажується з апарата в поточний момент часу  $t$ , мм<sup>-1</sup>.

Для верхнього продукту справедливі аналогічні формули.

Сепараційна характеристика для стаціонарного режиму при  $\partial(m\gamma) / \partial t = 0$  має ступінчастий ідеальний характер:

$$\varepsilon_{ниж}(l) = 1(l - l_p). \quad (5.44)$$

Таке ідеальне розділення по крупності є результатом нестисненого руху зерен.

Якщо в живленні класифікаційного апарата крупність  $l$  і густина  $\rho$  є величинами змінними, усі формули (5.39) – (5.43) залишаються справедливими при заміні  $\gamma \rightarrow \gamma(l, \rho, x, t)$ ; в формулі (5.42) для  $m(x, t)$  необхідно додати інтегрування по  $\rho$ .

Двовірна сепараційна характеристика має ступінчастий ідеальний характер з граничною лінією  $\varphi_p$  (рис. 5.12):

$$\varepsilon_{ниж}(\rho, l) = \begin{cases} 1 & \text{для зони } D_1; \\ 0 & \text{для зони } D_2. \end{cases} \quad (5.45)$$

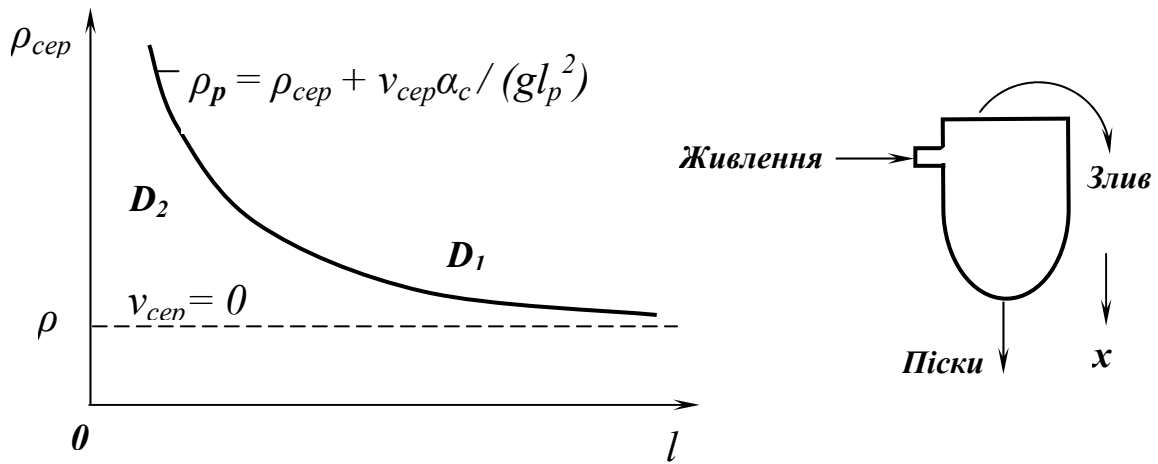


Рис. 5.12 – Границя розділення апарата з висхідним потоком.  
 $D_1$  – піски;  $D_2$  – злив.

Таким чином, класифікаційний апарат може розділяти сировину по двох фізичних властивостях: крупності частинок  $l$  і їх густині  $\rho$ . Положення граничної лінії  $\varphi_p = g(\rho - \rho_{сер}) - \alpha_c v_{сер} / l^2$  можна змінювати варіюванням  $\rho_{сер}$ ,  $v_{сер}$  і  $\alpha_c$ .

#### Врахування стиснення при класифікації [18]

Стиснення при класифікації враховується введенням градієнтної сили  $\vec{F}_{град}$ , в результаті чого рівняння руху частинок змінюється таким чином:

$$\sum F_i = g(\rho - \rho_{сер}) - \alpha_c l^{-2}(v - v_{сер}) - k_{град}(l)\gamma^{-1}grad\gamma = 0;$$

$$\partial(m\gamma)/\partial t = -\partial(m\gamma)/\partial x + W. \quad (5.46)$$

Зауважимо, що тут імовірно коректним буде визначення  $\vec{F}_{град}$  як сили турбулентної дифузії за В. Г. Левічем.

При  $m = const$ , що можна допустити для механічних спіральних класифікаторів, отримуємо:

$$\partial\gamma / \partial t = D\partial^2\gamma / \partial x^2 - A\partial\gamma / \partial x + W,$$

де  $D = k_{град}(l)l^2 / \alpha_c$ ;  $A = -v + g(\rho - \rho_{сер})l^2 / \alpha_c$ .

Двомірна сепараційна характеристика по  $\rho$  і  $l$  має вигляд:

$$\varepsilon_{зл}(\rho, l) = \frac{\exp(AD^{-1}x_p) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}{\exp(AD^{-1}x_{дно}) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}; \quad (5.47)$$

При  $x_p = 0,5(x_{\text{дно}} - x_{\text{верх}}) = 0,5h$  рівняння (5.47) має вигляд:

$$\varepsilon_{3л}(\rho, l) = 0,5 - 0,5thAh(4D)^{-1}. \quad (5.48)$$

Гранична лінія має той же вигляд  $\varphi_p = g(\rho - \rho_{\text{сеп}}) - \alpha_c v_{\text{сеп}} / l^2 = 0$  (див. рис. 5.12), але сепараційна характеристика відхиляється від ідеальної ступінчастої. При  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  з рівняння (5.48) отримуємо неідеальну сепараційну характеристику по крупності:

$$\varepsilon_{3л}(l) = 0,5 - 0,5th[ha(4D)^{-1}(l^2 - l_p^2)], \quad (5.49)$$

де  $a = g\alpha_c^{-1}(\rho_0 - \rho_{\text{сеп}})$ ;  $l_p = \sqrt{v_{\text{сеп}} / \alpha}$  – крупність розділення. Закон гіперболічного тангенса для сепараційної характеристики класифікації в стиснених умовах задовільно апроксимує експериментальні криві  $\varepsilon_{3л}(l)$ .

При значному стисненні в рівняннях сепарації (5.46) необхідно додатково враховувати ще й силу опору  $\vec{F}_{\text{онір}} = -\alpha\vec{v}$  і, можливо, ще й гравітаційну архімедову силу  $\vec{F}_{2-A} = 0$ .

#### *Класифікація в гідроциклоні [18].*

В гідроциклонах також здійснюється сепарація по крупності  $l$  і густині  $\rho$  в стиснених умовах (рис. 5.13). Основна відмінність полягає в наявності відцентрової сили  $\vec{F}_{\text{вц}}$  (радіальна складова сили інерції) і відповідно середньостатистичної відцентрової архімедової сили  $\vec{F}_{\text{вц-A}}$ .

Сила  $\vec{F}_{\text{вц}}$  направлена по радіусу обертання до стінки гідроциклона і притискає до неї частинки, в результаті чого на стінці утворюється природна постіль. В постелі сила  $\vec{F}_{\text{вц-A}}$  відштовхує від стінки легкі частинки, які потрапляють в злив. Крім того, потік середовища відбивається від стінки з швидкістю  $v_{\text{сеп}}$ , що завдяки силі тертя (опору)  $\vec{F}_{\text{онір}}$  сприяє вилученню дрібних часинок з постелі в злив. Крупні і важкі частинки залишаються притиснутими до стінки силою  $\vec{F}_{\text{вц}}$  і потрапляють у піски. Внаслідок стиснення в гідроциклоні діє ще й градієнтна сила  $\vec{F}_{\text{град}}$ . Таким чином, крупні частинки, для яких  $\vec{F}_{\text{вц}} > \vec{F}_{\text{вц-A}} + \vec{F}_{\text{онір}}$  осідають на дно постелі і потім у піски, а дрібні, для яких

$\vec{F}_{вц} < \vec{F}_{вц-A} + \vec{F}_{онір}$  потрапляють у верхню частину постелі і потім в злив. Сепараційна характеристика  $\varepsilon_{зл}(l, \rho)$  в результаті стиснення і наявності  $\vec{F}_{град}$  буде неідеальною [16, 18].

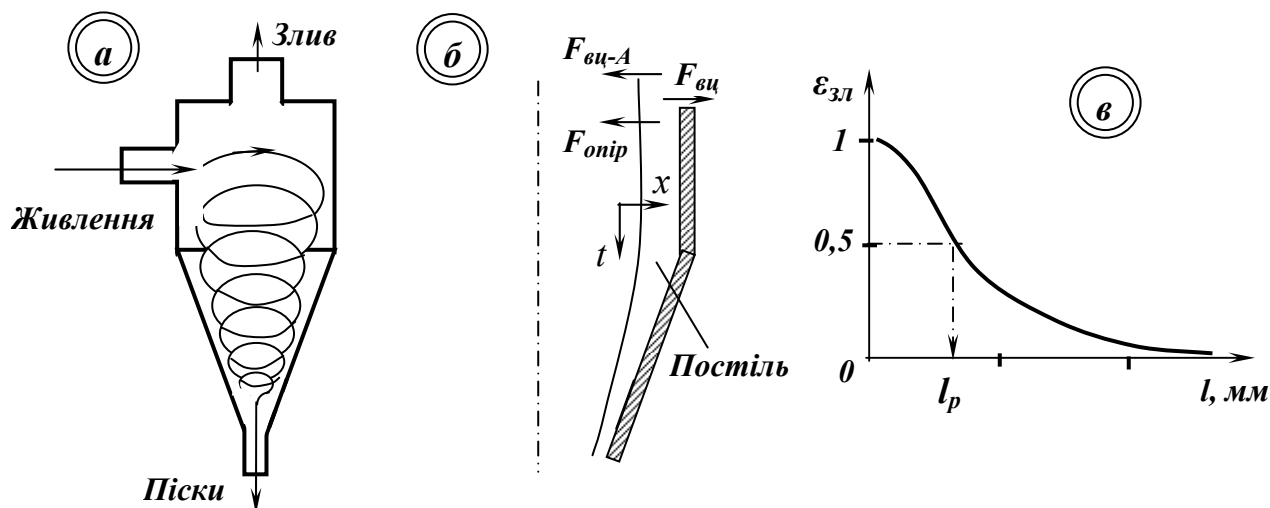


Рис. 5.13 - Гідроциклон (а), пристінна постіль (б), сепараційна характеристика (в).

Вісь гідроциклону може бути вертикальною або нахиленою, але якісна картина сепарації залишається. Враховуючи, що напрямок сепарації  $x$  перпендикулярний до стінки, тривалість сепарації  $t = y / v_{mp}$  відповідає руху матеріалу по стінці від завантаження до розвантаження пісків, рівняння сепарації (закон збереження і баланс сил) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \partial(m\gamma) / \partial t &= -\partial(m\gamma v_x) / \partial x; \\ a_{вц}[\rho - \bar{\rho}(x, t)] - \alpha_{онір}(l)(v_x - v_{сер}) - k_{град}(l)\gamma^{-1}\partial\gamma / \partial x &= 0, \end{aligned} \quad (5.50)$$

де  $m = m(x, t)$  – частка твердого в пульпі в точці  $(x, t)$ ,  $m \approx const$ ;  
 $\gamma = \gamma(l, \rho, x, t)$  – функція фракційного складу в точці  $(x, t)$ ;  
 $v_x = v_x(l, \rho, x, t)$  – середня швидкість частинки  $(l, \rho)$  в точці  $(x, t)$  в напрямку сепарації  $x$ , м/с;  
 $a_{вц}\rho = v_{окр}^2 R^{-1}\rho = F_{вц}$  – відцентрова сила, Н/м<sup>3</sup>;  
 $-a_{вц}\bar{\rho} = F_{вц-A}$  – відцентрова архімедова сила, Н/м<sup>3</sup>;  
 $\bar{\rho} = (1 - m)\rho_{сер} + m \int_D \rho \gamma d\rho dl$  – середня густина постелі в точці  $(x, t)$ , т/м<sup>3</sup>;  
 $\alpha_{онір}(l) \approx \alpha_c l^2$  – коефіцієнт внутрішнього тертя (опору), с/м<sup>2</sup>;  
 $v_{сер} = Q_{вих} / S$  – середня радіальна швидкість відтоку пульпи від стінки (м/с), яка дорівнює відношенню об'ємного потоку пульпи в гідроциклон



$Q_{вих}$  (м<sup>3</sup>/с) до площі бокової поверхні  $S$  (м<sup>2</sup>);  $k_{град}(l)$  – коефіцієнт градієнтної сили, Н/м<sup>3</sup>.

Для знаходження  $\gamma = \gamma(l, \rho, x, t)$  необхідно врахувати граничні умови у вигляді  $v_x(l, \rho, x_{дно}, t) = v_x(l, \rho, x_{верх}, t) = 0$ . Для отримання простого рішення припустимо, що  $m = const$  і  $\bar{\rho} = \rho_{нульни} = const$ , тоді вихідні рівняння перетворюються до вигляду:

$$\partial\gamma / \partial t = D\partial^2\gamma / \partial x^2 - A\partial\gamma / \partial x.$$

При достатньо великій тривалості сепарації  $T$  загальне рішення рівняння має вигляд:

$$\gamma_{рез}(l, \rho, x, T) = \frac{AD^{-1}h\gamma_{вих}(l, \rho)\exp(AD^{-1}x)}{\exp(AD^{-1}x_{дно}) - \exp(AD^{-1}x_{верх})},$$

де  $A = -v_{сер} + a_{вц}(\rho - \rho_{нульни}) / \alpha_{онір}(l)$  – коефіцієнт «знесення» (м/с), який залежить від  $l$  і  $\rho$  частинок і дорівнює швидкості частинок при відсутності градієнтної сили ( $k_{град} = 0$ );  $h = x_{дно} - x_{верх}$  – товщина постелі, м;  $D = k_{град}(l) / \alpha_{онір}(l)$  – коефіцієнт дифузії, м<sup>2</sup>/с. Швидкість середовища спрямована проти  $x$ , тому  $v_{сер}$  негативна. При цих допущеннях сепараційна характеристика гідроциклону:

$$\varepsilon(l, \rho) = \frac{\exp(AD^{-1}x_p) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}{\exp(AD^{-1}x_{дно}) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}. \quad (5.51)$$

Величина  $x_p$  визначається відношенням потоків зливу  $Q_{зл}$  і пісків  $Q_n$ :

$$x_p \approx x_{верх} + (x_{дно} - x_{верх})Q_{зл} / (Q_n + Q_{зл}).$$

Якщо розділення продуктів відбувається в середині шару при  $Q_n = Q_{зл} = 0,5Q_{вих}$  і  $x_p = x_{верх} + 0,5(x_{дно} - x_{верх})$ , то отримують більш просту формулу:

$$\varepsilon(l, \rho) = 0,5 - 0,5thAh(4D)^{-1}. \quad (5.52)$$

В окремому випадку сировини з частинками постійної густини  $\rho = \rho_0 = const$  гідроциклон працює як класифікатор по крупності  $l$ . Одномірна сепараційна характеристика при стоксовому опорі і  $x_p$  в середині постелі приймає вигляд:

$$\varepsilon_{зл}(l) = 0,5 - 0,5th[hb(4D)^{-1}(l^2 - l_p^2)], \quad (5.53)$$

де  $b = a(\rho_0 - \rho_{\text{нульни}}) / \alpha_c$ ;  $l_p = \sqrt{v_{\text{сер}} / b}$  – крупність розділення.

У окремому випадку вузько класифікованого живлення  $l = l_0 = \text{const}$  гідроциклон працює як сепаратор по густині з характеристикою:

$$\varepsilon_{\text{зл}}(\rho) = 0,5 - 0,5 \operatorname{th}[h a_{\text{вц}} l_0^2 (\rho - \rho_p) / \alpha_c], \quad (5.54)$$

де  $\rho_p = \rho_{\text{нульни}} + v_{\text{сер}} \alpha_c / (a_{\text{вц}} l_0^2)$  – густина розділення.

Величини крупності розділення  $l_p$  і густини розділення  $\rho_p$  в формулах (5.53) і (5.54) для  $\varepsilon_{\text{зл}}$  визначені для випадку  $Q_n = Q_{\text{зл}}$ , тобто  $x_p$  знаходиться у середині постелі. Для загального випадку  $Q_n \neq Q_{\text{зл}}$  слід використовувати формулу (5.51) за умови  $\varepsilon(l, \rho) = 0,5$ .

Отже, для моделювання процесу класифікації в гідроциклоні рекомендується застосовувати вирази (5.51) і (5.52).

*Моделі П. І. Пілова.* Виходячи з уявлень про комплексний вплив на групу частинок, що рухаються у гідросуміші і суспензії, ефектів викликаних збільшенням локальних градієнтів швидкості і тиску дисперсного середовища при обтіканні окремих частинок та їх груп, автором одержано ряд базисних виразів, які можуть бути використані при моделюванні гідравлічної класифікації [27].

Для гідравлічної класифікації у висхідному потоці П.І.Піловим одержана така сепараційна характеристика:

$$\varepsilon = \xi_c \exp\left(-\int \frac{v - v_y}{D} dy\right)_{|y=h}$$

де  $\xi_c$  – об'ємна частка суспензії, яка видалається у злив;  $h$  – глибина введення вихідної суспензії;  $\varepsilon$  – частка частинок, що вилучаються у злив, які відносно середовища мають швидкість  $v$ ;  $D$  – коефіцієнт турбулентного переносу рідкої фази.

Параметр  $D$  може бути визначений з такого виразу:

$$D = \frac{D^1 k v}{1 - e^{-k v}},$$

де  $k$  – параметр, який характеризує турбулентну течію рідини;  $D^1$  – коефіцієнт турбулентного перенесення твердої фази.

Для гідравлічної класифікації у тонкошарових потоках одержана сепараційна характеристика:

$$\varepsilon = \xi_c e^{-pt_n} + v \frac{1 - e^{-pt_n}}{h_d p} \frac{Z^m}{2} \left[ \frac{1 - (1 - \xi_c)^{1-m}}{1-m} + \frac{1 - Z^{m+1}}{m+1} \right],$$

де  $m = v/k_t u_c$ ;  $Z = 2\lambda/h$ ;  $t_n$  – час перебування суспензії (гідросуміші) в зоні розділення;  $h_d$  – товщина потоку суспензії, який утворює піски;  $k_t$  – коефіцієнт, який характеризує турбулентність суспензії;  $u_c$  – середня швидкість суспензії вздовж каналу;  $h$  – товщина потоку, яка дорівнює відстані між сусідніми площинами, які утворюють канали;  $\lambda$  – товщина ламінарного підшару.

П.І.Піловим одержана також сепараційна характеристика гідравлічної класифікації у гідроциклонах, яка в узагальненому вигляді може бути представлена рівнянням:

$$\varepsilon = [1 + V_{p-z} \exp f(G, F)]^{-1},$$

де  $V_{p-z}$  – співвідношення витрат суспензії в піски та злив;  $f(G, F)$  – функція, яка залежить від геометричних розмірів гідроциклона та параметрів течії пульпи.

### 5.3. Моделювання основних процесів збагачення корисних копалин

#### 5.3.1 Моделювання гравітаційних процесів

##### 5.3.1.1 Моделювання процесу відсадки

###### *Факторна модель процесу відсадки*

*Вхідними факторами* процесу відсадки є (рис. 5.14): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу ( $G_1, \Phi_1$ ), навантаження на процес по твердому ( $G_1$ ).

*Вихідні фактори*: вихід продуктів ( $\gamma_i$ ) і їхня якісна характеристика (наприклад, при відсадці вугілля – зольність ( $A_i$ )).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу відсадки є навантаження по вихідному матеріалу ( $G$ ), витрата транспортної і підрешітної води ( $W_m, W_n$ ), витрата повітря ( $w$ ), швидкість обертання роторного розвантажувача ( $n_p$ ), частота і амплітуда пульсацій постелі ( $f, a$ ).

Важливими проміжними факторами можна розглядати розпушеність і висоту постелі ( $R_n$ ,  $H_n$ ).

Фактори, які збурюють процес: якість (наприклад, зольність) вихідного матеріалу ( $A_e$ ) гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу ( $\Gamma_1$ ,  $\Phi_1$ ), крупність ( $d$ ), форма ( $k$ ) зерен і їх міцність ( $m$ ).

Важливими конструктивними характеристиками відсадки, які впливають на процес і його результати, є: розмір площі відсаджувального решета, спосіб створення пульсацій і спосіб розвантаження важких продуктів.

Важливою технологічною характеристикою відсадки є питома продуктивність ( $q$ ).

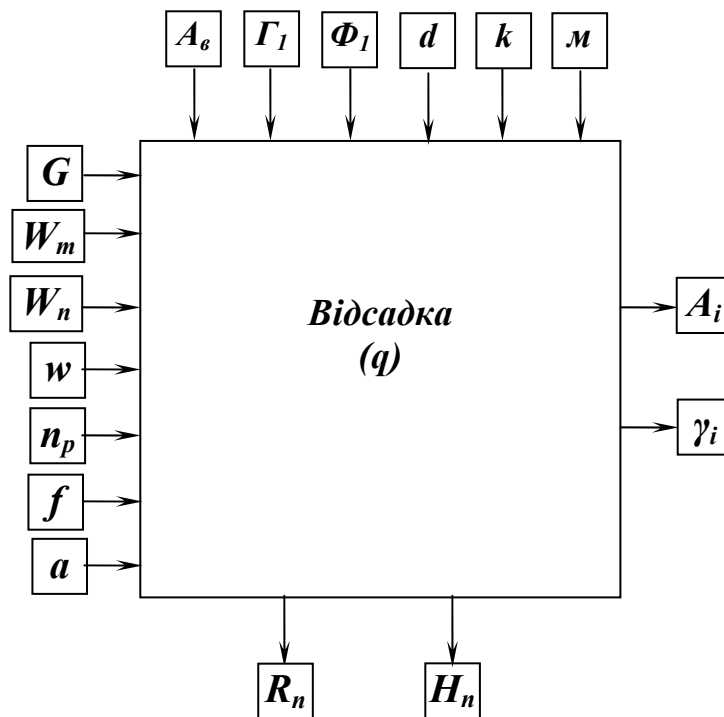


Рис. 5.14. Факторна модель процесу відсадки

Розглянемо вплив цих факторів на процес відсадки.

Технологічні результати відсадки характеризуються взаємним за-сміщенням кінцевих продуктів збагачення, а також показниками техно-логічної ефективності – середнім ймовірним відхиленням  $E_{pm}$  і погрі-шністю розділення  $I$ .

Гранулометричний склад вихідного матеріалу визначає структуру постелі відсаджувальної машини. Зі зменшенням крупності збагачува-ного матеріалу підвищується гідродинамічний опір постелі, внаслідок чого знижуються ефективність і точність розділення матеріалу.

Технологічна ефективність відсадки особливо залежить від вмісту в живленні шламів, які не збагачуються, а практично повністю перехо-дять в легкий продукт. Розмір максимальної грудки збагачуваного мате-ріалу обмежений конструктивними особливостями відсаджувальних

машин (головним чином конструкцією розвантажувальних пристроїв). Для більшості відсаджувальних машин максимальний розмір зерен не перевищує 100 – 150 мм.

*Наявність у збагачуваному матеріалі зерен плоскої форми* приводить до зниження пропускну здатності постелі і погіршення ефективності розділення. При збагаченні вугілля плоскі частинки породи виносяться висхідним потоком в концентрат і знижують його якість.

*Низька міцність зерен збагачуваного матеріалу* сприяє його ошламлюванню, що ускладнює процес відсадження (шлами в незбагачуваному стані переходять в легкий продукт).

*Товщина постелі* на решеті відсаджувальної машини залежить від крупності збагачуваного матеріалу. При збагаченні крупних класів вугілля товщина постелі, як правило, дорівнює 350 – 400 мм, при збагаченні дрібних класів – 250 – 350 мм.

*Фракційний склад вихідного матеріалу* характеризує його збагачуваність. Чим вище вміст в збагачуваному матеріалі проміжних фракцій (зростків), тим нижча ефективність процесу відсадки. Підвищення вмісту важких фракцій у вихідному матеріалі сприяє підвищенню якості важкого продукту і погіршенню якості легкого продукту, і навпаки.

*Питома продуктивність* відсаджувальних машин визначається за нормами навантаження на 1 м<sup>2</sup> решета. Вона обумовлена низкою факторів (тому і показана у факторній моделі як інтегруюча характеристика), зокрема фізичними властивостями і крупністю вихідного матеріалу, умовами до якості кінцевих продуктів, конструктивними особливостями відсаджувальних машин та ін. Зі збільшенням питомої продуктивності знижується ефективність збагачення, що пов'язано зі зменшенням часу перебування матеріалу в робочій камері відсаджувальної машини. При низкій питомій продуктивності технологічні показники теж погіршуються внаслідок значного збільшення вмісту легких фракцій у важких продуктах відсадки, тому що неможливо постійно підтримувати необхідну товщину постелі.

*Цикл відсадки* характеризується частотою коливань середовища, тривалістю його підйому, опускання і паузи між ними. Сукупність параметрів повітряного циклу обумовлює динамічний режим розпушення постелі, який характеризується такими вихідними гідродинамічними параметрами: амплітудою пульсацій, максимальним підйомом постелі, максимальною швидкістю висхідного і низхідного потоків, критерієм розпушеності.

На *розпушення постелі* суттєво впливає частота пульсацій і тиск повітря. При доброму розпушенні постелі збільшується продуктивність відсаджувальної машини. Однак при великих швидкостях руху води дрібні зерна важкого продукту можуть виноситися у верхні шари постеле-

лі, а зерна плоскої і неправильної форми, що мають великий коефіцієнт опору, затримуються у верхніх шарах постелі. При недостатньому розпушенні постелі умови її розшарування погіршуються внаслідок високого механічного опору постелі руху в ній зерен, особливо крупних. Продуктивність відсаджувальної машини знижується.

*Частота і амплітуда пульсацій води* визначають швидкісний режим висхідних і низхідних потоків у відсаджувальній машині, який обумовлює розпушення і висоту підйому мінеральних зерен над решетою.

При виборі частоти і амплітуди пульсацій води повинні бути враховані максимальний розмір, густина і гранулометричний склад зерен збагачуваного матеріалу, вміст легких і важких фракцій, товщина постелі, а також вимоги до якості продуктів відсадки.

Зі збільшенням крупності зерен збагачуваного матеріалу швидкість руху пульсуючої води повинна збільшуватись, що досягається збільшенням амплітуди пульсацій. Амплітуду пульсацій також збільшують при збільшенні товщини постелі і при великому вмісті важкого продукту в збагачуваному матеріалі. Частоту пульсацій зі збільшенням крупності зерен знижують.

*Витрата і тиск повітря* – фактори грубого регулювання процесу відсадки.

*Витрата повітря*, що подається в машину, впливає на амплітуду пульсацій води. При збільшенні гідравлічного опору постелі витрата повітря повинна бути збільшена.

Зі збільшенням *тиску повітря* майже пропорційно збільшуються швидкість висхідного потоку і амплітуда пульсацій, в більшій мірі – швидкість низхідного, висота підйому і розпушеність постелі. Змінюючи тиск у повітряних камерах відсаджувальних машин в різні періоди циклу можна впливати на динаміку розпушення постелі.

*Підрешітна вода* служить фактором оперативного (і більш тонкого) регулювання відсадки шляхом підтримки раціонального розпушення відсаджувальної постелі. При цьому розпушеність постелі залежить від змін тиску більшою мірою, ніж від витрати підрешітної води.

Зниження витрати підрешітної води приводить до зменшення амплітуди пульсацій, підйому постелі, її розпушення і швидкостей висхідного і низхідного потоків. Зменшення вихідних гідродинамічних параметрів відсадки, зокрема амплітуди пульсацій, приводить до зниження рівня зливу води через зливний поріг відсаджувальної машини.

*Витрата транспортної води* впливає і на тривалість перебування збагачуваного матеріалу у відсаджувальній машині. При великій витраті транспортної води зменшується ефективність процесу, але збільшується продуктивність.

*Розрідженість живлення* не повинна перевищувати  $1 - 2 \text{ м}^3/\text{т}$ . У протилежному випадку у відсаджувальній машині створюється горизонтальний потік, що замутнює шар матеріалу, який знаходиться над важкою постіллю, і порушує в ньому розшарування частинок.

*Тип відсаджувальної машини* визначається видом збагачуваної сировини, крупністю живлення і вимогами до продуктів збагачення. В свою чергу тип відсаджувальної машини визначає *спосіб створення пульсацій у відсаджувальній камері*.

*Число камер* відсаджувальної машини залежить від необхідного числа продуктів розділення і їх якості.

*Спосіб розвантаження важких продуктів* теж впливає на кінцеву ефективність розділення у збагачувальному апараті. Розвантажувальні пристрої повинні забезпечити видалення з машини такої кількості важких продуктів, яка надходить з вихідним матеріалом, і при цьому не порушувати досягнутого розшарування постелі.

*Оцінка ефективності* процесу відсадки здійснюється за величиною коефіцієнта погрішності *I*.

Зазначимо, що для вивантаження дрібних зерен важкої фракції особливе значення мають параметри штучної постелі або шару важкої фракції звичайної відсаджувальної постелі.

### ***Феноменологічна модель процесу відсадки***

Феноменологічна модель процесу відсадки наведена на рис. 5.15.

Субпроцес 1 «***Підготовка матеріалу***» включає процеси знештлавлення корисної копалини, підготовленої в необхідному для процесу відсадки діапазоні крупності, і додання транспортної води для її переміщення уздовж відсаджувальної машини.

Субпроцес 2 «***Розпушення постелі***» – необхідна умова для здійснення процесу відсадження. Завдяки періодичній подачі пульсаторами стисненого повітря матеріал на решеті відсаджувальної машини поперемінно (у відповідності до відсаджувального циклу) розпушується і ущільнюється. Тим самим створюються умови для розшарування корисної копалини за густиною.

Субпроцес 3 «***Розшарування матеріалу за густиною***» відбувається в залежності від їхньої густини, крупності і форми зерен. Процес відсадки здійснюється в результаті розшарування суміші мінеральних частинок за густиною в знакоперемінному вертикальному водному потоці, пульсуючому з заданими амплітудою і частотою. Необхідні умови процесу відсадки забезпечуються подачею у відсаджувальну машину стисненого повітря, транспортної і підрешітної води. В результаті багаторазових пульсацій збагачуваний матеріал розшарується (стратифіку-

ється) на легкий (верхній шар) і важкий (нижній шар) продукти, зростки виділяються у вигляді промпродукту.

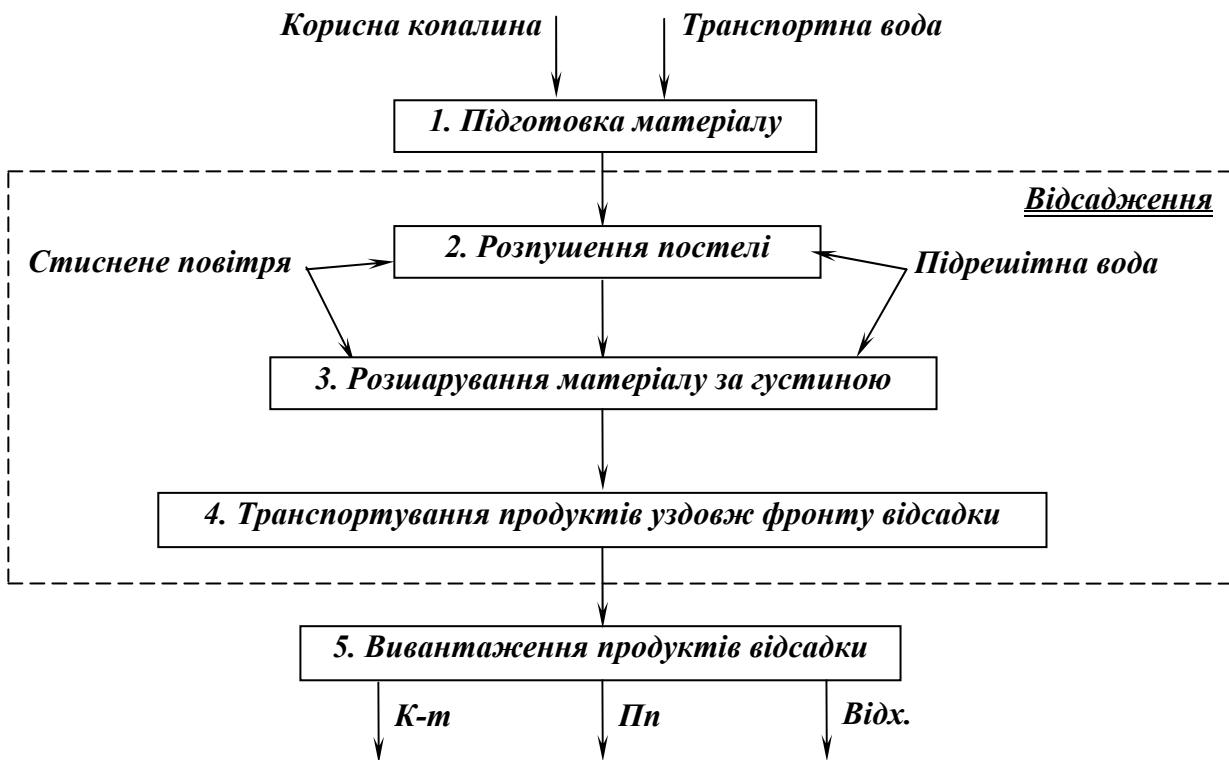


Рис. 5.15 – Феноменологічна модель процесу відсадки.

Субпроцес 4 «*Транспортування продуктів уздовж фронту відсадки*». Транспортування продуктів відсадки у подовжньому напрямку відбувається одночасно з розпушенням постелі і розширенням матеріалу. Подовжнє транспортування впливає на розділення частинок як внаслідок різниці в швидкості руху шарів постелі, розташованих на різній відстані від решета, так і завдяки перемішуванню частинок (особливо дрібних) потоками транспортної води.

Субпроцес 5 «*Вивантаження продуктів відсадки*». Вивантаження дрібних важких продуктів (промпродукту і відходів) здійснюється через постіль і решето, крупних – через розвантажувальні кармани із розвантажувальними пристроями різних конструкцій і далі зневоднюючими елеваторами. Легкий продукт (концентрат) вивантажується самопливом через зливний поріг в кінці відсаджувальної машини.

### *Математичне моделювання відсадки*

Прикладом математичного моделювання процесу відсадки можуть служити гіпотези: швидкісна (прискорень), суспензійна, енергетична і статистична.



*Швидкісна гіпотеза* оснований на функціональній залежності швидкості падіння окремого зерна в стиснених умовах від його розміру, форми, густини і т.д. Сутність цієї гіпотези полягає у тому, що внаслідок різниці у швидкості і прискорення частинок різної густини під дією вертикального потоку води, вони проходять різні шляхи і в результаті цього й відбувається розділення за густиною.

З урахуванням маси частинки і сил, що діють при її русі, прискорення частинки визначається як

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\delta - \Delta}{\delta} \cdot g \pm \frac{6\psi_{cm}}{\pi d \delta} \cdot (u \pm V)^2 \Delta, \text{ м/с.} \quad (5.55)$$

де  $d$  – діаметр частинки, м;  $u$  – швидкість вертикального потоку води, м/с;  $V$  – швидкість частинки, м/с;  $\delta, \Delta$  – густина частинки і води, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – прискорення вільного падіння, м/с<sup>2</sup>;  $\psi_{cm}$  – коефіцієнт гідродинамічного опору середовища при русі частинки.

З рівняння (7.3) видно, що прискорення частинки змінне і залежить від її густини, розміру і швидкості.

Недолік цієї гіпотези полягає у тому, що вона розглядає рух окремої частинки і не враховує імовірнісні явища, що мають місце при масовому русі зерен, які утворюють шар постелі.

*Суспензійна гіпотеза* уподібнює розділення зерен у відсаджувальній машині розшаруванню за густиною в мінеральній суспензії, при цьому припускають, що суспензію змінної густини утворюють постіль разом з водою.

Густина середовища визначається як середньозважене значення густини суміші рідини і твердого:

$$\Delta_c = \Theta \Delta + (1 - \Theta) \delta_{cp}, \text{ кг/м}^3, \quad (5.56)$$

де  $\Delta_c, \Delta, \delta_{cp}$  – відповідно густина середовища, рідини і середньодинамічна твердих частинок постелі, кг/м<sup>3</sup>;  $\Theta$  – коефіцієнт розпушення постелі.

Гіпотеза не враховує дію динамічних сил при пульсації постелі. Крім того, постіль складається з крупних частинок і її не можна розглядати як важку суспензію, а також густина суспензії є величиною змінною і залежить від розпушеності постелі.

*Енергетична гіпотеза* розглядає відсаджувальну постіль як замкнену механічну систему, що знаходиться в нестійкій рівновазі в полі сили тяжіння, і яка прагне перейти до більш стійкого стану з мінімумом потенційної енергії (другий закон термодинаміки). Розділення матеріалу за густиною відбувається за рахунок внутрішньої енергії мінеральної суміші.

$$E_1 = (G_1 + G_2) \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}, \text{ Дж}, \quad (5.57)$$

де  $G_1 = (1 - \Theta) F h_1 \delta_1 g$  – сила ваги легких частинок густиною  $\delta_1$ , Н;  
 $G_2 = (1 - \Theta) F h_2 \delta_2 g$  – сила ваги важких частинок густиною  $\delta_2$ , Н;  
 $F$  – площа поперечного перетину стовпа постелі, м<sup>2</sup>;  $h_1$  і  $h_2$  – висота стовпа постелі, м;  $\Theta$  – коефіцієнт розпушення.

При розпушенні такої системи під дією пульсацій води положення мінеральних зерен різної густини, що мають різний запас потенційної енергії, упорядковується, постіль розшаровується за густиною, запас потенційної енергії системи після розшарування зменшується:

$$\Delta E = \frac{1}{2} (G_2 h_1 - G_1 h_2) = (1 - \Theta) \frac{F h_1 h_2 g}{2} (\delta_2 - \delta_1), \text{ Дж}. \quad (5.58)$$

де  $G_1 = (1 - \Theta) F h_1 \delta_1 g$  – сила ваги легких частинок густиною  $\delta_1$ , Н;  
 $G_2 = (1 - \Theta) F h_2 \delta_2 g$  – сила ваги важких частинок густиною  $\delta_2$ , Н;  
 $F$  – площа поперечного перетину стовпа постелі, м<sup>2</sup>;  
 $h_1$  і  $h_2$  – висота шарів постелі після розшарування, м;  
 $\Theta$  – коефіцієнт розпушення;  
 $\delta_1, \delta_2$  – густини поділжованих мінералів (при цьому  $\delta_2 > \delta_1$ ).

Відповідно до другого закону термодинаміки будь-яка система прагне перейти в положення з мінімумом потенційної енергії, тобто в даному випадку розділитися на шари різної густини.

Енергетична гіпотеза розглядає розшарування постелі тільки у зв'язку з внутрішньою потенційною енергією і не враховує зовнішні сили, за рахунок яких і відбувається процес відсадження.

*Статистична гіпотеза* описує відсадження як масовий процес з імовірнісним характером переміщення частинок різної крупності і густини як у вертикальному, так і в горизонтальному напрямках при їх русі до місць розвантаження з машини.

Постіль відсаджувальної машини розглядається як масова система, в якій переміщення окремих частинок носить випадковий характер, а переміщення усїєї маси підкоряється закону діючих мас і носить статистичний характер. На підставі закону діючих мас кількість фракцій, що виділились у відповідний продукт за одиницю часу, пропорційна кількості тих же фракцій в вихідному матеріалі:

$$\gamma_{np}^{fp} = \gamma_{вих}^{fp} (1 - e^{-kt}), \%, \quad (5.59)$$

де  $\gamma_{вих}^{fp}, \gamma_{np}^{fp}$  – вміст фракцій, що виділяються, у вихідному матеріалі і в відповідному продукті, %;  $t$  – тривалість відсадження, с;  $k$  – ко-

ефіцієнт пропорційності, що характеризує питому швидкість виділення фракцій,  $c^{-1}$ . Значення цього коефіцієнта змінюється залежно від режиму відсадження і характеристики живлення.

Статистична гіпотеза характеризує кінцеві результати відсадки і дає можливість зробити практичні висновки.

Але жодна з існуючих гіпотез не дає надійного математичного апарата для розрахунків технологічних параметрів відсаджувальних машин при їхньому конструюванні і експлуатації, а також для прогнозування результатів збагачення.

### 5.3.1.2. Моделювання процесу важкосередовищної сепарації

#### *Факторна модель процесу важкосередовищної сепарації*

Вхідними факторами процесу важкосередовищної сепарації є (рис. 5.16): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу ( $\Gamma_1, \Phi_1$ ), навантаження на процес по твердому ( $G_1$ ), витрата суспензії ( $W_c$ ) із заданими реологічними властивостями.

*Вихідні фактори:* вихід продуктів ( $\gamma_i$ ) і їхня зольність ( $A_i$ ).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу важкосередовищної сепарації є навантаження по вихідному матеріалу ( $G$ ), витрата суспензії ( $W_c$ ) із заданими властивостями, а також *проміжні фактори* - густина ( $\delta_c$ ) і в'язкість ( $\mu_c$ ) робочої суспензії, крім того, кількість суспензії, яку направляють на регенерацію.

*Фактори, які збурюють процес:* зольність вихідного матеріалу ( $A_e$ ) гранулометричний і фракційний склад вихідного матеріалу ( $\Gamma_1, \Phi_1$ ).

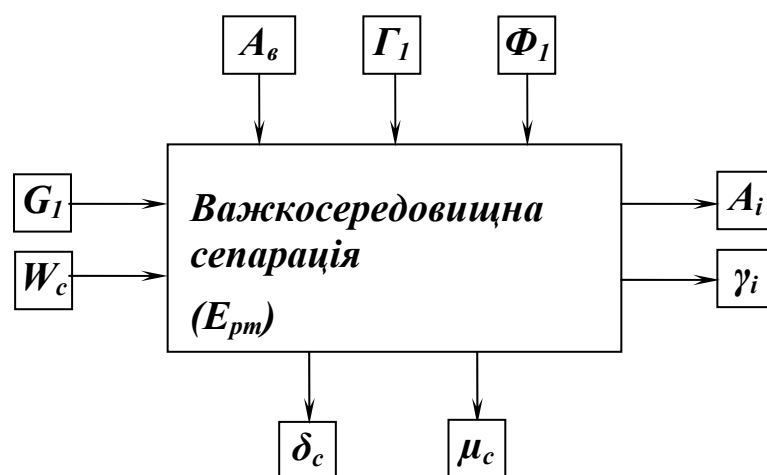


Рис. 5.16. Факторна схема важкосередовищної сепарації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес важкосередовищної сепарації.

*Гранулометричний склад збагачуваного матеріалу* характеризується верхньою і нижньою межами крупності. При збагаченні крупного машинного класу верхня межа крупності, як правило, не перевищує 200 мм, але в окремих випадках при збагаченні вугілля допускається підвищення верхньої межі крупності до 300 мм. Вміст шламів у крупному машинному класі повинен бути не більше 1,5 %. Ефективність збагачення (точність розділення) зі зменшенням крупності матеріалу знижується.

*Фракційний склад збагачуваного матеріалу* визначає збагачувальність матеріалу. Фракційний склад матеріалу на точність розділення не впливає, але від нього залежить якість продуктів збагачення. Якщо вміст важких фракцій в легкому продукті перевищує встановлені норми, густину суспензії знижують. При наявності легких фракцій у важкому продукті густину суспензії підвищують.

*Навантаження на сепаратор за вихідним матеріалом* повинно бути рівномірним. При зниженні крупності вихідного матеріалу навантаження на сепаратор належить зменшити. Але при нормальних умовах роботи (коли сепаратор не перевантажений) навантаження за вихідним матеріалом не впливає на ефективність важкосередовищного збагачення.

*Суспензії з необхідними реологічними властивостями* (густина, в'язкість, стійкість) одержують з використанням обважнювачів (магнетит, феросиліцій), які містять 92 – 96 % класу – 0,074 мм.

*Витрати суспензії* при збагаченні крупного машинного класу у важкосередовищних сепараторах складають 0,8 – 1 м<sup>3</sup>/т.

*Витрати води на відмивку обважнювача* залежать від крупності збагачуваного матеріалу, вмісту шламів і густини суспензії. При відмивці обважнювача від крупних продуктів витрати води складають 0,7 – 1,1 м<sup>3</sup>/т, при відмивці обважнювача від дрібних продуктів витрати води складають 1,7 – 2,5 м<sup>3</sup>/т. Втрати обважнювача при збагаченні крупного класу складають 0,5 – 0,9 кг/т, при збагаченні дрібного класу – 1,0 – 1,7 кг/т.

*Оцінка ефективності* процесу важкосередовищної сепарації здійснюється за величиною середнього ймовірного відхилення від густини розділення  $E_{pt}$ .

### ***Математичне моделювання важкосередовищної сепарації***

*Імовірнісний підхід* (за В.Ф. Пожидаєвим). Задача прогнозування показників збагачення зводиться до того, що при відомих фракційному складу збагачуваного матеріалу і залежності вилучення кожної фракції

у кінцевий продукт, необхідно дати оцінку очікуваних результатів збагачення в сепараторі.

Ймовірність вилучення в концентрат при стаціонарному режимі (час  $t \rightarrow \infty$ ) визначається залежністю:

$$\varepsilon_k = e^{-\frac{V\bar{h}}{2D}} \left[ \frac{\operatorname{sh} \frac{V\bar{h}}{2D} (1 - \bar{h})}{\operatorname{sh} \frac{V}{2D}} \right], \quad (5.60)$$

де  $V = \frac{d(\rho_c - \rho)}{\alpha} + W$  – швидкість руху частинки в суспензії, м/с;

$\bar{h} = h/H$  – відносна глибина завантаження матеріалу ( $h$  – глибина завантаження частинки,  $H$  – глибина ванни сепаратора);

$D$  – коефіцієнт турбулентної дифузії, м/с<sup>2</sup>;  $d$  – розмір частинки, м;

$W$  – вертикальна складова швидкості суспензії, м/с;

$\rho_c$  – густина суспензії, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho$  – густина частинки, кг/м<sup>3</sup>;

$\alpha$  – коефіцієнт пропорційності, який характеризує опір руху частинок в суспензії, кг·с/м<sup>3</sup>.

Ймовірність вилучення у відходи визначається залежністю аналогічною (5.60), але в ній необхідно параметр  $(1 - \bar{h})$  замінити параметром  $\bar{h}$  і параметр  $V$  параметром  $(-V)$ .

З рівняння (5.60) витікає, що в умовах постійно діючих сил імовірності вилучення частинок в кінцеві продукти зворотно пропорційні відносній відстані, яку необхідно пройти частинкам до потрапляння в кінцеві продукти.

### 5.3.1.3. Моделювання процесу гвинтової сепарації

#### *Факторна модель процесу гвинтової сепарації*

*Вхідними факторами* процесу гвинтової сепарації (в його традиційному виконанні) є (рис. 5.17): характеристики вихідної сировини, зокрема, речовинний склад вихідного матеріалу ( $P_1$ ), навантаження на процес по твердому і воді ( $G_1, W_1$ ), витрата змивної води ( $W_{зм}$ ).

*Вихідні фактори*: вихід продуктів ( $\gamma_i$ ) і вміст в них корисного компонента ( $\beta_i$ ).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу гвинтової сепарації є навантаження по вихідному матеріалу і воді ( $G_1, W_1$ ), витрата змивної води ( $W_{зм}$ ). *Проміжним фактором* можна розглядати вміст твердого в живленні ( $\alpha$ ).

*Фактори, які збурюють процес*: речовинний склад вихідного матеріалу ( $P_1$ ), вміст в ньому корисного компонента ( $\beta_1$ ), крупність ( $d_{max}$ ) і форма ( $k$ ) зерен.

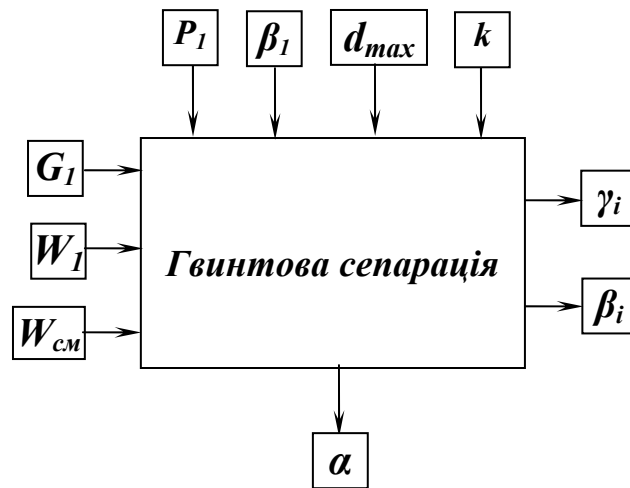


Рис. 5.17. Факторна модель процесу гвинтової сепарації.

Важливими конструктивними характеристиками гвинтової сепарації, які впливають на процес і його результати, є: діаметр, геометрія профілю поперечного перетину, число витків і крок жолоба гвинтового сепаратора та положення відсікачів для виведення продуктів збагачення.

Розглянемо вплив цих факторів на процес гвинтової сепарації.

Речовинний склад вихідного матеріалу за густиною розділюваних мінералів характеризує можливість ефективного застосування процесу гвинтової сепарації. Оцінка можливості збагачення визначається за величиною критерію Мейстера:

$$k_0 = (\delta_{вих} - \delta_{лм}) / (\delta_{лм} - 1), \quad (5.61)$$

де  $\delta_{вих}$ ,  $\delta_{лм}$  – густина вихідного матеріалу і легкого мінералу, т/м<sup>3</sup>.

Якщо  $k_0 > 1$  збагачення гвинтовою сепарацією буде ефективним, якщо  $1 > k > 0,75$  збагачення ще можливе, а при  $k < 0,75$  розділення не відбудеться (збагачення неможливе).

Крупність мінеральних зерен характеризується верхньою і нижньою межами. Верхня межа крупності зерен при гвинтовій сепарації залежить від їх густини і її при збільшенні – зменшується. Нижня межа крупності зерен визначається умовами їх зважування і розподілення по висоті потоку в жолобі сепаратора і також зменшується при збільшенні густини зерен. На гвинтових сепараторах ефективніше вилучаються зерна крупністю понад 0,2 мм.

Багато щоб форма зерен, розділюваних мінералів була різною. Сприятливішими для збагачення випадками будуть такі, коли зерна вугільної речовини представлені округлими зернами (коефіцієнт сферичності великий), а зерна пустої породи – плоскі (коефіцієнт сферичності малий).

*Вміст твердого в живленні* при збагаченні складає звичайно 30 – 40 % (за масою). При густині пульпи, що перевищує вказані межі, збільшується її в'язкість і виділення породних мінералів уповільнюється, у цьому випадку важкі і легкі зерна рухаються разом біля внутрішнього борту і не забезпечують утворення віяла продуктів розділення. Мінімальний вміст твердого в живленні складає 6 – 8 %.

*Витрата змивної води* повинна бути оптимальною. При оптимальних витратах змивної води підвищується ступінь концентрації матеріалу, зменшується замулювання робочої поверхні жолоба, поліпшується транспортування породних мінералів, збільшується розрідженість матеріалу біля внутрішнього борту і підсилюється поперечна циркуляція потоку. Надлишок змивної води приводить до зносу важких мінералів в зону легких продуктів, а недостача – до протилежного ефекту.

*Продуктивність гвинтових апаратів* залежить від діаметра витків жолоба, кута підйому гвинтової лінії, речовинного складу і крупності збагачуваного матеріалу. Зменшення крупності живлення, а також підвищений вміст у ньому глини і шламів приводить до зниження продуктивності.

*Діаметр гвинтового жолоба* є основним конструктивним параметром сепаратора і визначає його розміри, масу і продуктивність. Гвинтові сепаратори, що застосовуються в практиці збагачення корисних копалин, мають жолоби діаметром 600 – 2000 мм. Вибір діаметра сепаратора залежить від продуктивності по твердому, крупності і густини збагачуваного матеріалу. Матеріали, що містять крупнозерністі матеріали (1 – 2 мм), ефективніше збагачуються в сепараторах великого діаметра (1000 мм і більше), тонкозерністі матеріали (менше 0,5 мм) – в сепараторах малих діаметрів (500 – 750 мм), матеріали середньої крупності (0,074 – 1 мм) – в сепараторах будь-якого розміру.

*Профіль поперечного перетину жолоба* може являти собою елемент еліпса, кола, пряму лінію. Найбільш доцільним профілем для збагачення матеріалу крупністю менше 2 мм є горизонтальний еліпс, більша піввісь якого складає 1/3 діаметра сепаратора, а співвідношення довжин осей – 2 : 1.

*Число витків жолоба* залежить від фізичних властивостей збагачуваного матеріалу. Воно збільшується зі зменшенням різниці в густині розділюваних мінералів і їх крупності. Число витків жолоба в промислових сепараторах складає 4 – 6.

*Крок гвинтового жолоба* визначає кут нахилу його гвинтової лінії до горизонту і впливає на гідродинамічну характеристику потоку і умови транспортування матеріалу. Зі збільшенням відносного кроку гвинтового жолоба (відношення кроку до діаметра) показники збагачення матеріалів крупністю більше 0,2 мм погіршуються, а матеріалів крупністю менше 0,2 мм – поліпшуються. Відносний крок для промислових гвинтових сепараторів приймається рівним 0,4 – 0,6 м. Менше

значення кроку приймається для сепараторів більшого діаметра, а більше значення – для сепараторів меншого діаметра.

*Виведення продуктів збагачення* здійснюється відсікачами, що встановлені на сепараторах в кінці останнього витка або на кожному витку жолоба. Положення ножів відсікачів визначається в кожному конкретному випадку дослідним шляхом і зберігається постійним в процесі роботи.

### **Математичне моделювання процесу гвинтової сепарації**

За моделлю процесу мокрої гвинтової сепарації А. С. Кірнаркського [23] при імовірності переходу частинок у важкий продукт  $P_1$  і у легкий  $P_2$ , що залежать від відхилення їх густини  $\delta$  від густини розділення в умовах повтореного з періодичністю циркуляцій сепараційного процесу, вилучення частинок у легкий продукт при кількості циркуляцій  $n > 10$  складе:

$$\varepsilon_n = 1 - P_1 / 1 - \quad (5.62)$$

де  $q = (1 - P_1) (1 - P_2)$ ,  $\rho$  – густина рідини.

$$P_1 = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\delta_1 - \rho}{\delta - \rho}\right)^2\right]}; \quad P_2 = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\delta - \rho}{\delta_2 - \rho}\right)^2\right]}.$$

Ці закономірності дають можливість розраховувати сепараційні характеристики гвинтових сепараторів  $\varepsilon$  ( $\delta$ ), при густині розділення поблизу внутрішнього ( $\delta_1$ ) та зовнішнього ( $\delta_2$ ) бортів.

#### **5.3.1.4. Моделювання процесу концентрації на столах**

##### **Факторна модель процесу концентрації на столах**

*Вхідними факторами* процесу концентрації на столах є (рис. 5.18): характеристики вихідної сировини, зокрема, речовинний склад вихідного матеріалу ( $P_1$ ), навантаження на процес по твердому ( $G_1$ ), витрата змивної води ( $W_{зм}$ ), частота коливань ( $n$ ) і хід деки ( $l$ ).

*Вихідні фактори*: вихід продуктів ( $\gamma_i$ ) і вміст в них корисного компонента ( $\beta_i$ ).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу концентрації на столах є навантаження по вихідному матеріалу ( $G_1$ ), витрата змивної води ( $W_{зм}$ ), кут нахилу деки у подовжньому і поперечному напрямках ( $\chi$ ,  $\psi$ ). *Проміжним фактором* можна розглядати вміст твердого в живленні ( $\alpha$ ).



Фактори, які збурюють процес: речовинний склад вихідного матеріалу ( $P_1$ ), вміст в ньому корисного компоненту ( $\beta_1$ ) і форма ( $k$ ) зерен.

Важливими конструктивними характеристиками концентрації на столах, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип концентраційного стола і тип нарифлення деки.

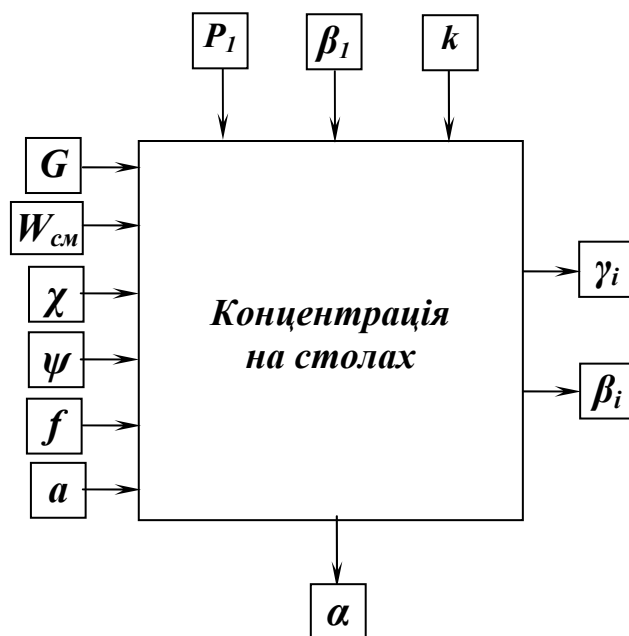


Рис. 5.18. Факторна модель процесу концентрації на столах.

Розглянемо вплив цих факторів на процес концентрації на столах.

Речовинний склад вихідного матеріалу характеризує можливість ефективного застосування процесу концентрації. Оцінка можливості розділення здійснюється за величиною співвідношення:

$$k = (\delta_{cp} - \Delta) / (\delta_l - \Delta), \quad (5.63)$$

де  $\delta_{cp}$ ,  $\delta_l$ ,  $\Delta$  – середня густина збагачуваного матеріалу, густина легкого мінералу і густина рідини (звичайно води),  $\text{кг/м}^3$ .

Якщо  $k > 2,5$ , то збагачення на столах ефективне, якщо  $2,5 > k > 1,75$  ефективне збагачення можливе тільки при крупності матеріалу не більше 0,07 – 0,15 мм, а при  $k < 1,75$  збагачення на столах ускладнене або взагалі неможливе.

Форма зерен має важливе значення при збагаченні на столах. Зерна важких мінералів кубічної форми розташовуються у верхній частині віяла продуктів і виділяються в концентрат, а зерна плоскі або витягнуті (тієї ж густини) розташовуються у віялі ближче до промпродукту. Ви-

довжені або плоскі зерна краще зважуються у турбулентному потоці і тому виносяться або в промпродукт, або у відходи.

*Вміст твердого в живленні* коливається від 15 до 40 %. Оптимальним є вміст твердого 20–25%. При надмірній розрідженості живлення збільшується розпушеність матеріалу і значно зростає швидкість транспортування в поперечному напрямку, що приводить до виносу важких мінералів в легкий продукт. Для зниження цих втрат зменшують поперечний кут нахилу деки. При недостатній розрідженості живлення зменшується розпушеність матеріалу, що перешкоджає проходженню частинок важких мінералів в нижні шари, при цьому смуга важких мінералів у віялі продуктів виділяється нечітко.

*Змивна вода* необхідна для видалення частинок легких мінералів в кінці деки. При невеликих витратах змивної води і малому поперечному нахилі деки матеріал верхніх шарів, що складається з частинок малої густини, може вилучатися у важкий продукт. Надмірний поперечний нахил деки, великі витрати змивної води і нерівномірний її розподіл приводять до виносу частинок великої густини з каналів між рифлями і втрат важких мінералів. Нестача змивної води приводить до засмічення важкого продукту легкими частинками.

*Частота коливань і хід деки* визначають за емпіричними формулами в залежності від максимальної крупності збагачуваного матеріалу: зі збільшенням крупності збагачуваного матеріалу довжину ходу деки слід збільшувати, а частоту коливань – зменшувати.

*Кут поперечного нахилу деки* визначає швидкість руху водного потоку. Великі швидкості (при великих кутах поперечного нахилу) сприяють турбулізації потоку і знесенню дрібних зерен. Це приводить до втрат зерен важкого мінералу і зниження якості продуктів збагачення. Тому при збагаченні дрібнозернистих матеріалів кут поперечного нахилу складає 1,5 – 2,5°, при збагаченні грубозернистих – 4 – 8°, а для особливо крупних і важких мінералів він може бути збільшений до 10°.

Кут поперечного нахилу деки і витрати змивної води взаємопов'язані і є основними регулюючими параметрами при експлуатації концентраційних столів.

*Кут подовжнього нахилу деки* невеликий за величиною – від – 0,003° до + 0,4° (знак «–» означає опускання розвантажувального кінця деки, знак «+» – його підйом). Подовжній нахил деки за ходом руху матеріалу при переробці тонкозернистих і шламистих продуктів збільшує транспортуючу здатність, а нахил деки в протилежному напрямку при переробці крупнозернистих продуктів, навпаки, зменшує транспортуючу здатність.

Типи нарифлення, що застосовуються на практиці, підрозділяють в основному на піскові (для матеріалів крупністю +0,2 мм) і шламіві (для матеріалів крупністю – 0,2 мм).

В поперечному перетині піскові рифлі являють собою прямокутник. На деках столів для збагачення шламистих матеріалів, крім прямокутних рифлів малої висоти, є високі трикутні рифлі, перед якими утворюються спокійні зони, де відбувається осадження шламистих частинок важких мінералів.

Подовжній перетин рифлі – прямокутна трапеція з верхньою основою рівною 3/4 нижньої. Максимальну висоту рифлі мають біля завантажувального кінця деки. Найбільшу довжину і висоту має рифля, що проходить через кут деки, який створений боком розвантаження легких продуктів і завантажувальним торцем. Кут зрізу рифлів складає 30 – 55°. У діагональних дек вздовж боку розвантаження легких продуктів установлюється додаткова «запірна» рифля висотою 20 – 25 мм, яка перешкоджає виносу важких мінералів в легкий продукт. Вибір висоти рифлів визначається крупністю і густиною збагачуваного матеріалу, а також вмістом важких компонентів.

Концентраційні столи мають малу питому продуктивність і вимагають для своєї установки великих виробничих площ. Тому на фабриках для збагачення корінних і розсипних руд рідкісних металів концентраційні столи використовують головним чином для перечищення концентратів.

### **5.3.1.5. Сепараційні характеристики як моделі процесів гравітаційного збагачення корисних копалин**

Сепараційна характеристика  $\varepsilon(\rho)$  гравітаційних апаратів залежить від суми сил  $\sum F_i$ , які діють на частинку в зоні сепарації. В залежності від головних сил в зоні сепарації О.Н. Тихонов [18] класифікує гравітаційні апарати на:

– апарати з природним розділювальним середовищем змінної густини з силами гравітації  $\vec{F}_{грав}$ , архімедовою  $\vec{F}_{2-A} = -g\bar{\rho}(x,t)$ , опору  $\vec{F}_{опір}$  і градієнтною  $\vec{F}_{град}$ , напр., відсаджувальна машина з природною постіллю;

– апарати з штучним розділювальним середовищем постійної густини з силами  $\vec{F}_{грав}$ ,  $\vec{F}_{2-A} = -g\bar{\rho}_{сер}$ ,  $\vec{F}_{опір}$  і  $\vec{F}_{град}$ , напр., відсаджувальна машина з штучною постіллю;

– апарати з нестисненими умовами руху частинок, в яких замість сил  $\vec{F}_{onip} = 0$  і  $\vec{F}_{grad} = 0$  з'являється сила Стокса  $\vec{F}_{Cm}$ , напр., розділення у важкій рідині при малій продуктивності.

Сепараційні характеристики апаратів наближаються до ідеальних при зменшенні впливу «шкідливих» сил  $\vec{F}_{onip}$  і  $\vec{F}_{grad}$ , а також по мірі переходу в робочій зоні від стиснених умов до нестиснених, що пов'язане зі зменшенням продуктивності.

*Гравітаційні апарати зі змінною густиною розділювального середовища [18].*

Типовим представником апаратів цієї групи є відсаджувальна машина з природною постіллю. При  $m = const$  отримуємо рівняння сепарації з однією невідомою функцією  $\gamma(\rho, x, t)$  (рис. 5.19):

$$\begin{aligned} \partial\gamma / \partial t &= D\partial^2\gamma / \partial x^2 - g\alpha^{-1}\partial[\gamma(\rho - \bar{\rho})] / \partial x; \\ \bar{\rho} &= \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \rho\gamma(\rho, x, t)d\rho, \end{aligned} \quad (5.64)$$

де  $D = k\alpha^{-1}$  – коефіцієнт макродифузії, м<sup>2</sup>/с; тривалість сепарації  $t = y/v_{mp}$  відповідає просуванню матеріалу від завантаження до розвантаження.

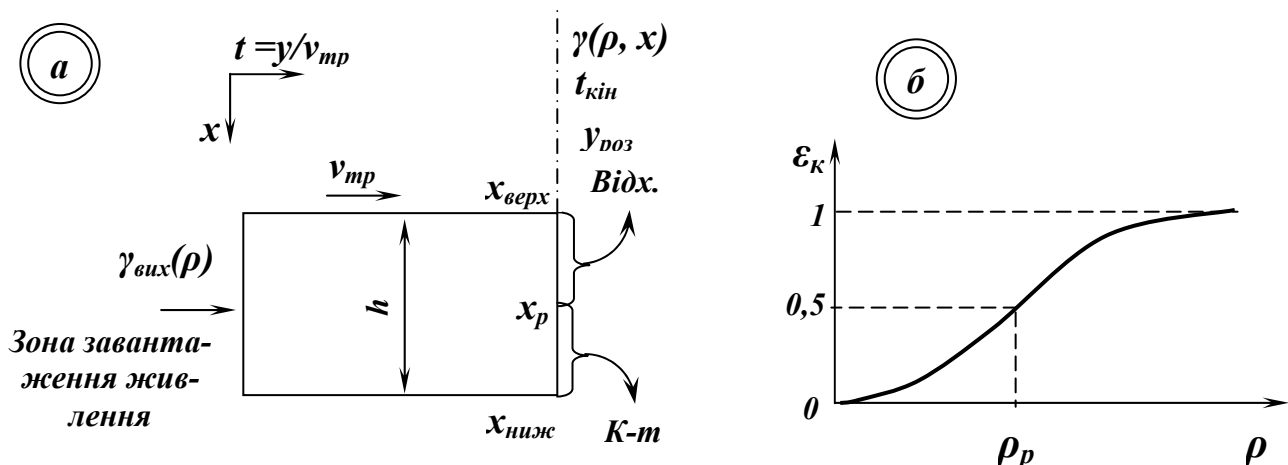


Рис. 5.19 – Робоча зона (а) і сепараційна характеристика (б) відсаджувальної машини.

Ці рівняння відносяться до відсаджувальної машини з природною постіллю, яка утворюється з сепарованих частинок, середня густина  $\bar{\rho}$  середовища постелі змінюється в просторі  $x$  і часі  $t$ , тобто  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x, t)$ .

Для знаходження сепараційної характеристики  $\varepsilon(\rho)$  необхідно попередньо вирішити рівняння (5.64) і визначити фракційний склад ма-

теріалу  $\gamma_{рез}(\rho, x) = \gamma(\rho, x, t_k)$  в зоні розвантаження концентрату і відходів при  $t = t_k = y_{роз} / v_{тр}$ .

Якщо до моменту розвантаження у кінці зони сепарації матеріал повністю розшарувався, функція  $\gamma_{рез}(\rho, x) = \gamma(\rho, x, t)|_{t \rightarrow \infty}$ .

$$\gamma_{рез}(\rho, x) = \frac{\gamma_{рез}(\rho, x_0) \exp[g\alpha^{-1}D^{-1}\rho(x - x_0)]}{\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \gamma_{рез}(\rho, x_0) \exp[g\alpha^{-1}D^{-1}\rho(x - x_0)] d\rho}. \quad (5.65)$$

В рівнянні (5.65)  $\gamma_{рез}(\rho, x_0)$  – функція у загальному вигляді, тобто отримане загальне рішення може бути конкретизоване до окремого, якщо задати фракційний склад у будь-якій точці  $x_0$  зони розвантаження  $x_{верх} < x < x_{ниж}$ .

Таким чином, гранично розшарований матеріал в кінці зони має фракційний склад  $\gamma_{рез}(\rho, x)$ , який змінюється із глибиною постелі  $x$  за законом статичного розподілення Гіббса. Загальне рішення рівняння (5.65) перетворюється в конкретне окреме з урахуванням початкових умов, які залежать від фракційного складу вихідного живлення  $\gamma(\rho, x, t_0) = \gamma_{вих}(\rho)$ . Для знаходження  $\gamma_{рез}(\rho, x_0)$  через задану функцію  $\gamma_{вих}(\rho)$  необхідно скористуватися інтегральним законом збереження:

$$\gamma_{вих}(\rho) = (x_{ниж} - x_{верх})^{-1} \int_{x_{ниж}}^{x_{верх}} \gamma_{рез}(\rho, x) dx. \quad (5.66)$$

Таким чином, за відомим фракційним складом живлення  $\gamma_{вих}(\rho)$  прогнозується фракційний склад в різних точках  $x_{верх} < x < x_{ниж}$  розвантаження у вигляді закону Гіббса [18].

Сепараційна характеристика  $\varepsilon_k(\rho)$  розраховується за відомими  $\gamma_{вих}(\rho)$  і  $\gamma_{рез}(\rho, x)$  відповідно загальним формулам (5.65) і (5.66):

$$\varepsilon_k(\rho) = Q_k \gamma_k(\rho) / Q_{вих} \gamma_{вих}(\rho) = \int_{x_p}^{x_{ниж}} \gamma_{рез} dx \Bigg/ \int_{x_{верх}}^{x_{ниж}} \gamma_{рез} dx, \quad (5.67)$$

де  $Q_k / Q_{вих} = (x_{ниж} - x_p) / (x_{ниж} - x_{верх})$ ;  $x_p$  – координата положення шибера що регулює вивантаження легкої фракції через поріг.

Середній фракційний склад концентрату визначається усереднен-

$$\text{ням} \quad \gamma_{вих}(\rho) = (x_{ниж} - x_p)^{-1} \int_{x_p}^{x_{ниж}} \gamma_{рез}(\rho, x) dx. \quad (5.68)$$

За формулами (5.67) і (5.68) отримано приблизну формулу сепараційної характеристики (якщо концентратом є важкий продукт):

$$\varepsilon_k(\rho) = 0,5 + 0,5\Phi[(\rho - \rho_p)\sqrt{gh(\alpha D)^{-1}\gamma\rho}], \quad (5.69)$$

де  $\Phi(x) = (2/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp(-0,5t^2) dt$  – інтеграл імовірності Гаусса (нормальний закон розподілення);

$h = x_{ниж} - x_{верх}$  – товщина постелі;

$\rho_p \approx \rho_{max} - (Q_k / Q_{вих})(\rho_{max} - \rho_{min})$ ,

а точніше  $Q_k / Q_{вих} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \gamma_{вих}(\rho) d\rho$ .

Для спрощення формул глибину постелі приймають набагато більше розміру частинок матеріалу і тоді, враховуючи  $0,5h \rightarrow \infty$ , отримуємо:

$$\varepsilon_k(\rho) = 0,5 + 0,5\Phi[(\rho - \rho_p)\sqrt{gh[\alpha D(\rho_{max} - \rho_{min})]^{-1}}]. \quad (5.70)$$

Рівняння (5.70) є окремим випадком формули (5.69) при  $\gamma_{вих}(\rho) = (\rho_{max} - \rho_{min})^{-1}$ .

Слід відмітити, що формула (5.69) справедлива не тільки для відсадки, але й для інших гравітаційних процесів з дуже стисненими умовами, коли густина постелі залежить не тільки від середовища, але й від самих частинок.

*Гравітаційні апарати з постійною густиною розділювального середовища [18].*

Для апаратів з  $\rho = \rho_p = const$ , напр., суспензійних сепараторів з малим стисненням, основне рівняння сепараційного масопереносу (5.56) спрощується і для кожної вузької фракції  $\rho_i = const$  відноситься до типу рівнянь Фоккера-Планка:

$$\partial\gamma / \partial t = D\partial^2\gamma / \partial x^2 - g\alpha^{-1}(\rho - \rho_p)\partial\gamma / \partial x, \quad (5.71)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії;  $-g\alpha^{-1}(\rho - \rho_p)$  – коефіцієнт зносу.

Для стаціонарного режиму рішення граничної задачі має вигляд:

$$\gamma_{рез}(\rho, x) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \gamma_{рез}(\rho, x_0) \exp[BD^{-1}(x - x_0)],$$

де  $B = g(\rho - \rho_p)\alpha^{-1}$ .

Інтегральний закон збереження (5.65) визначає  $\gamma_{рез}(\rho, x_0)$  в точці  $x_0$  через  $\gamma_{вих}(\rho)$ :

$$\gamma_{рез}(\rho, x_0) = \frac{BD^{-1}h\gamma_{вих}(\rho)}{\exp(-BD^{-1}x_0)[\exp(BD^{-1}x_{дно}) - \exp(BD^{-1}x_{верх})]},$$

де  $h = x_{дно} - x_{верх}$  – товщина постелі, м.

Кінцеве рішення буде:

$$\gamma_{рез}(\rho, x_0) = \frac{BD^{-1}h\gamma_{вих}(\rho)}{\exp(BD^{-1}x_{дно}) - \exp(BD^{-1}x_{верх})}. \quad (5.72)$$

Сепараційна характеристика має вигляд:

$$\varepsilon_k(\rho) = \frac{\exp(BD^{-1}x_p) - \exp(BD^{-1}x_{верх})}{\exp(BD^{-1}x_{дно}) - \exp(BD^{-1}x_{верх})}. \quad (5.73)$$

При  $x_p = 0,5(x_{дно} - x_{верх})$ , тобто при розділенні концентрату і відходів в середині постелі сепараційна характеристика описується законом гіперболічного тангенсу:

$$\varepsilon_k(\rho) = 0,5 - 0,5th[gh(4\alpha D)^{-1}(\rho - \rho_p)]. \quad (5.74)$$

Для апаратів з постійною густиною середовища і нестисненими умовами руху частинок сепараційна характеристика близька до ідеальної ступінчастої.

### 5.3.2. Моделювання процесу флотації

#### **Факторна модель процесу флотації**

Вхідними факторами процесу флотації є (рис. 5.20): об'ємне навантаження на операцію ( $Q$ ), розрідження пульпи ( $R$ ), витрати реагентів: збирача ( $q_3$ ) і спінювача ( $q_c$ ), а також гранулометричний склад вихідного матеріалу ( $\Gamma$ ) та фізико-хімічні характеристики поверхні частинок, які можна узагальнити в понятті «флотованість» ( $\Phi$ ), інколи враховують також петрографічний склад вихідного шламу ( $\Pi$ ).

**Вихідні фактори:** зольність і вихід концентрату ( $A_{кт}$ ,  $\gamma_{кт}$ ) та зольність хвостів флотації ( $A_{хв}$ ); при флотації руд – відповідні показники якості (вміст корисного компонента). **Проміжними факторами** можна розглядати рівень пульпи в камері флотомашини ( $h$ ), розрідженість

хвостів і концентрату ( $R_{xв}$ ,  $R_{кт}$ ) і об'ємний вихід хвостів флотації ( $Q_{xв}$ ).

Основними оперативними керуючими факторами процесу флотації є об'ємне навантаження на операцію ( $Q$ ), розрідження пульпи ( $R$ ), витрати збирача ( $q_z$ ) і спінювача ( $q_c$ ).

Фактори, які збурюють процес: зольність вихідного шламу ( $A_{ш}$ ), його флотованість ( $\Phi$ ), речовинний і петрографічний склад шламу ( $\Gamma$ ,  $\Pi$ ).

Важливими технологічними характеристиками процесу флотації, які впливають на процес і його результати, є: крупність твердої фази живлення, густина і температура пульпи, йонний склад рідкої фази, реагентний режим і асортимент реагентів, спосіб аерації пульпи.

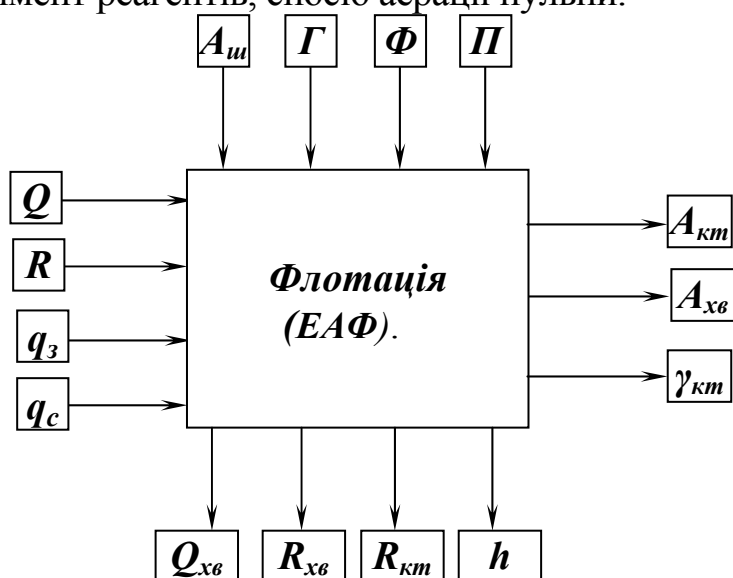


Рис. 5.20 Факторна модель процесу флотації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес флотації.

Об'ємне навантаження на флотаційну машину визначає тривалість флотації і, отже, вилучення органічної маси в концентрат, якісні показники продуктів флотації. Крім того, від об'ємного навантаження залежить рівень пульпи у флотомашині. Отже, об'ємне навантаження на флотацію необхідно контролювати і регулювати (стабілізувати). При цьому стабілізується загальне навантаження на флотацію і на кожну індивідуальну флотомашину встановлюється індивідуально за допомогою затворів, розташованих на АКП (з урахуванням типу і механічного стану флотомашини).

Об'ємне навантаження в значній мірі визначає витрату реагент-спінювача ( $q_c$ ).



Другий важливий параметр – *вміст твердої фази* в пульпі (*розрідження пульпи R*). Практика показала, що коливання вмісту твердого в пульпі в межах 80 – 150 г/л істотно не впливає на ефективність процесу. Однак цей параметр визначає необхідну *витрату реагенту-збирача* ( $q_z$ ).

*Витрати реагентів* – гнучкі і важливі канали управління процесом. Реагент-збирач потрібно дозувати пропорційно зміні вмісту твердого в пульпі (точніше – природно гідрофобного компонента), тобто стабілізувати питому витрату збирача (г/т). Витрата реагенту-спінювача впливає на ступінь аерації пульпи, крупність і стійкість повітряних бульбашок. Чим більше об’ємне навантаження на флотацію, тим більшою повинна бути витрата спінювача.

За К.О. Разумовим *флотованість* частинки можна оцінити зміною поверхневої енергії  $E_1 - E_2$  до і після прилипання до бульбашки, віднесеними до одиниці утвореної поверхні газ – тверде  $S_{z-m}$  :

$$k_{pez} = (E_1 - E_2) / S_{z-m} = \sigma_{z-m} (1 - \cos \Theta), \quad (5.75)$$

де  $k_{pez}$  – коефіцієнт флотованості;  $\sigma$  – поверхневий натяг на границях розділу відповідних фаз;

$\cos \Theta = (\sigma_{z-m} - \sigma_{p-m}) / \sigma_{z-p}$  – косинус крайового кута змочування.

Флотаційні машини розділяють частинки вихідної сировини за їхньою флотованістю  $k$  на концентрат  $k > k_p$  і відходи  $k < k_p$ . Чим більше енергії звільнюється при закріпленні частинки на бульбашці, тим вище флотованість.

На процес флотації впливають і ряд інших факторів, наприклад, температура пульпи,  $pH$  середовища, гранулометричний і петрографічний склад шламів та ін.

### ***Феноменологічна модель пінної флотації.***

Феноменологічна схема пінної флотації відображає послідовність та взаємозв’язок всіх елементарних фізичних та хімічних процесів, які мають місце при проведенні технологічного процесу флотації (рис. 4.2): кондиціонування, аерації, елементарного акту флотації, спливання флоагрегатів та формування пінного шару, вивантаження продуктів флотації.

*Кондиціонування вихідної пульпи* – обробка пульпи спеціальними реагентами-збирачами. Мета субпроцесу – зміна змочуваності мінералів при флотації. Здійснюється введенням у пульпу флотаційних реагентів і її агітацією контактних (агітаційних) чанах, апаратах кондиціонування типу “Каскад”, а також баках, флотомашинах, насосах, байпасах та ін.

Флотаційні реагенти впливають на гідратні шари і змінюють їх товщину та стійкість. Тому підготовка мінеральних поверхонь до флотації зводиться до їх обробки певними реагентами, що приводить до різкого збільшення гідрофобності флотованих частинок і, отже, збільшення гідрофобно-гідрофільної контрастності вихідного шламу.

*Аерація пульпи* – процес насичення її повітрям (повітряними бульбашками), диспергування (подрібнення) повітря, рівномірний розподіл та перемішування в об'ємі рідини. Насичення пульпи повітрям може відбуватись у напірній, всмоктувальній лінії насоса або комбіновано, у власне флотокамері, а також хімічним способом. Таким чином, аерація пульпи при пінній флотації здійснюється безпосереднім введенням до неї повітря і виділенням газів на поверхні твердих частинок. Повітряні бульбашки при флотації мають розмір від 0,05 до 1 мм.

*Елементарний акт флотації* може бути розподілений на фази: зустріч мінеральних зерен і бульбашок повітря в пульпі, зіткнення, прилипання мінеральних частинок до бульбашок повітря і утворення фло-тоагрегатів .

*Спливання фло-тоагрегатів та формування пінного шару* – передзавершальна фаза флотаційного процесу. Мінералізована піна утворюється завдяки спливанню і накопиченню флотаційних комплексів на поверхні пульпи. Для формування дрібних повітряних бульбашок, а також для попередження їх коалесценції (злипання) в об'ємі пульпи вводять поверхнево-активні реагенти-спінювачі, молекули яких адсорбуються на межі розділу «газ-рідина» і зменшують на ній поверхневий натяг.

Кожен із зазначених субпроцесів має свою факторну модель, на основі якої можуть бути вибрані окремі канали для математичного моделювання. Такий підхід застосовується для поглибленого вивчення процесу флотації.

### ***Математичне моделювання процесу флотації***

#### ***Імовірнісна модель флотації***

Якщо процес флотації розглядати як елементарний акт, що складається із створення фло-токомплекса «частинка-бульбашка», збереження його до винесення в пінний шар і переходу його в пінний продукт (концентрат), то імовірність цього акта може бути представлена у вигляді математичної моделі. За В. Ф. Пожидаєвим [21] імовірність переходу частинки в концентрат і хвосту може бути розрахована:

$$P_{KT} = \frac{P_1 P_2 (1 - P_3)}{1 - P_1 [1 - P_2 (1 - P_3)]}, \quad (5.76)$$

$$P_{XB} = \frac{1 - P_2}{1 - P_1[1 - P_2(1 - P_3)]}, \quad (5.77)$$

де  $P_1$  – імовірність зіткнення частинки з бульбашкою:

$$P_1 = \alpha_1 V_0 (1 - e^{-\alpha_2 h}); \quad (5.78)$$

$P_2$  – імовірність збереження флотокомплекса до винесення в пінний шар:

$$P_2 = \frac{(1 - e^{-\alpha_3 q_3})(1 - e^{-\alpha_4 q_c})}{(1 + \alpha_5 h)(1 + \alpha_6 x)(1 + \alpha_7 V_{nom})}; \quad (5.79)$$

$P_3$  – імовірність вторинної мінералізації в пінному шарі:

$$P_3 = \alpha_8 x / (1 + \alpha_9 q_3); \quad (5.80)$$

$V_0$  – відносна швидкість руху частинки в камері флотомашини;

$V_{nom}$  – швидкість потоку пульпи через камеру;

$h$  – висота камери;

$x$  – висота знаходження частинки в камері;

$q_3$  – витрата збирача;  $q_c$  – витрата спінювача;

$\alpha$  – характеристика параметрів процесу в залежності від рівня перебування частинки в камері ( $\alpha_1$  – на рівні введення пульпи в камеру, ...,  $\alpha_9$  – на рівні пінного шару).

#### *Кінетична модель флотації*

За рівнянням К.Ф. Білоглазова вилучення вузької флотаційної фракції в пінний продукт:

$$\varepsilon_i(t) = 1 - \exp(-k_i t), \quad (5.81)$$

де  $k_i = const$  – флотованість вузької флотаційної фракції,  $s^{-1}$ .

З урахуванням ступеня аерації рівняння К.Ф. Білоглазова має вигляд:

$$\varepsilon_i(t) = 1 - \exp(-k_i S t), \quad (5.82)$$

де  $S$  – площа поверхні бульбашок в одиниці об'єму пульпи (або питома поверхня розділу рідкої і газоподібної фаз),  $m^2/m^3$ .

### 5.3.3. Моделювання процесу магнітної сепарації

#### Факторна модель процесу магнітної сепарації

Вхідними факторами процесу магнітної сепарації є (рис. 5.21): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний і магнітофракційний склад вихідного матеріалу ( $\Gamma_1$ ,  $\Phi_1$ ), навантаження на процес по твердому і воді ( $G_1$ ,  $W_1$ ), напруженість магнітного поля в робочій зоні сепаратора ( $H$ ).

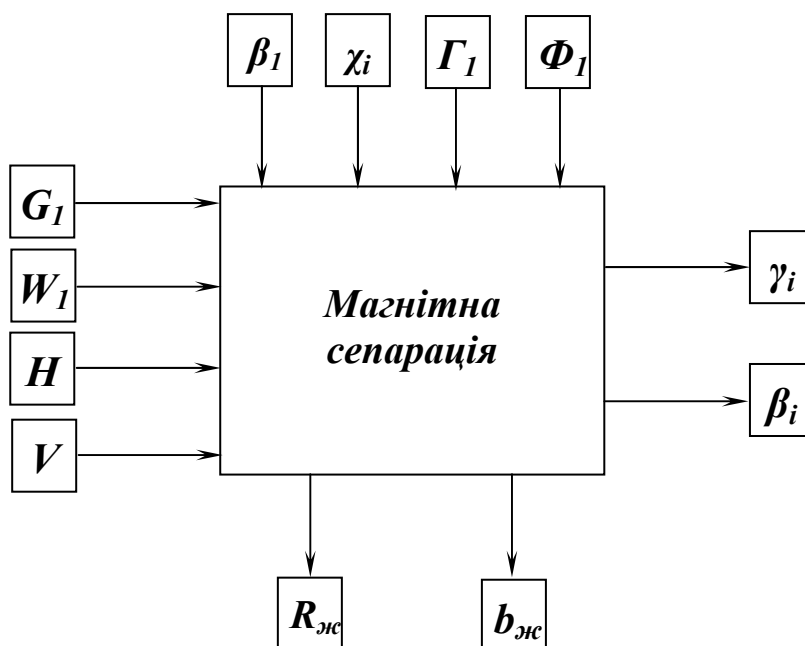


Рис.5.21 Факторна модель магнітної сепарації.

*Вихідні фактори:* вихід продуктів ( $\gamma_i$ ) і вміст в них корисного компонента ( $\beta_i$ ).

*Оперативними керуючими факторами* процесу магнітної сепарації можуть виступати: навантаження на процес по твердому і воді ( $G_1$ ,  $W_1$ ), напруженість магнітного поля в робочій зоні сепаратора ( $H$ ), швидкість обертання робочого органа ( $V$ ). Важливими *проміжними факторами* можна розглядати розрідженість і рівень живлення в сепараторі ( $R_{жс}$ ,  $b_{жс}$ ).

*Фактори, які збурюють процес:* вміст корисного компонента ( $\beta_1$ ), гранулометричний і магнітофракційний склад вихідного ( $\Gamma_1$ ,  $\Phi_1$ ), магнітна сприйнятливність мінералів ( $\chi_i$ )

*Важливими конструктивними характеристиками* магнітних сепараторів, які впливають на процес і його результати, є: конструктивний тип сепаратора і пов'язані з ним режими сепарації.

Розглянемо вплив цих факторів на процес магнітної сепарації.

*Напруженість магнітного поля* визначає величину магнітної сили. Магнітна сила виникає тільки в неоднорідних магнітних полях і в кож-

ній точці поля дорівнює добутку магнітної сприйнятливості мінералу, напруженості магнітного поля в даній точці і ступеня неоднорідності поля. Надмірне збільшення напруженості магнітного поля може привести до підвищеного засмічення магнітної фракції і, навпаки, недостатня величина напруженості магнітного поля є причиною втрат магнітних мінералів з відходами. Якщо технологічна схема збагачення передбачає декілька операцій магнітної сепарації, то при перечищенні немагнітних фракцій напруженість магнітного поля в кожній наступній операції повинна бути збільшена, а при доводці магнітних концентратів – поступово зменшена.

*Швидкість обертання барабанів і валків* у значній мірі визначає продуктивність сепараторів і якість продуктів розділення. Швидкість обертання робочих органів вибирається залежно від способу збагачення (сухий або мокрий), способу подачі живлення (верхній або нижній), магнітної сприйнятливості і крупності мінералів, необхідної якості продуктів збагачення (одержання готових концентратів або відвальних відходів).

При мокрому збагаченні надмірно велика лінійна швидкість обертання барабану або валка може привести до відриву пульпи від поверхні і порушити процес розділення. Внаслідок цього при збагаченні сильномагнітних руд ця швидкість не повинна перевищувати 1,5 м/с, а при збагаченні слабомагнітних руд – 0,8 – 0,9 м/с. При виділенні відвальних відходів швидкість обертання робочих органів повинна бути нижче ніж при виділенні концентратів.

Суша магнітна сепарація крупногрудкової руди допускає збільшення лінійної швидкості обертання барабану до 2 м/с. При сухому збагаченні тонкоподрібненої сильномагнітної руди технологічні показники можуть бути отримані тільки при швидкохідному режимі сепарації. Тому в сепараторів для сухого збагачення тонкоподрібнених сильномагнітних руд передбачається широкий діапазон зміни швидкості обертання барабану 1,5 – 10 м/с в залежності від магнітних властивостей і крупності збагачуваної руди. При сухій магнітній сепарації слабомагнітних руд перевага віддається швидкохідному режиму, тому що збільшення швидкості обертання валків в сепараторах як з верхнім, так і з нижнім живленням сприяє підвищенню якості магнітного продукту і продуктивності сепаратора. Швидкість обертання валків в цих сепараторах регулюється в межах 0,8 – 2,4 м/с.

*Крупність збагачуваної руди* є одним з найважливіших параметрів збагачуваної руди, який впливає на технологічні показники роботи сепараторів. Зі зменшенням крупності частинок їхня питома магнітна сприйнятливості знижується. При значній різниці в крупності розділюваних мінералів виникають утруднення у виборі напруженості магнітного поля, параметрів робочої зони, швидкісного режиму і продуктивності се-

паратора. Тому кращі показники збагачення отримують при використанні схем з попередньою класифікацією матеріалу по крупності.

*Питома магнітна сприйнятливості* впливає на селективність розділення рудних і породних мінералів. Співвідношення питомих магнітних сприйнятливостей розділюваних мінералів є основним фактором, який визначає шкалу попередньої класифікації руди перед магнітним збагаченням.

При збагаченні *слабомагнітних руд* з питомою магнітною сприйнятливостю  $1 \cdot 10^{-8} \leq \chi \leq 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$  застосовують сепаратори з сильним полем ( $H = 480 - 1600 \text{ кА/м}$ ). При збагаченні *сильномагнітних руд* з питомою магнітною сприйнятливостю  $\chi > 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кг}$  застосовують сепаратори зі слабим полем ( $H = 70 - 120 \text{ кА/м}$ ).

*Густина живлення сепараторів* суттєво впливає на технологічні показники мокрої магнітної сепарації. Збільшення вмісту твердої фази у живленні сприяє підвищенню продуктивності сепаратора, але в той же час – зниженню якості продуктів збагачення, і навпаки. Збільшення розрідженості пульпи, як правило, забезпечує підвищення якості магнітного продукту, але одночасно зростають втрати магнітних мінералів з відходами, оскільки збільшується швидкість проходження пульпи через робочу зону сепаратора. Оптимальна густина живлення сепараторів знаходиться у межах 30 – 40 % твердого.

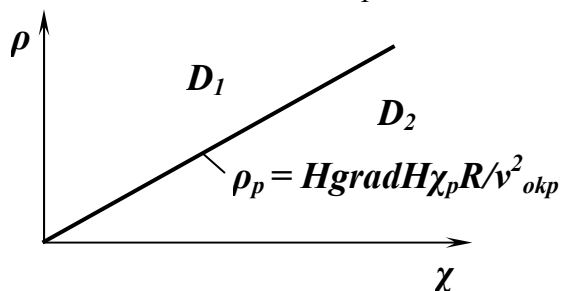
*Конструктивні характеристики робочої зони* (довжина, діаметр і висота) визначають продуктивність сепаратора.

### ***Сепараційна характеристика як модель процесу магнітної сепарації***

Магнітні сепаратори розділяють частинки за магнітною сприйнятливостю  $\chi$ , а також за густиною  $\rho$ . Для роликowego або барабанного сепаратора при нестиснених умовах руху частинок в робочій зоні головними силами в рівнянні балансу сил  $\sum F_i = 0$  будуть магнітна  $F_M = \chi H \text{grad} H$  і відцентрова  $F_{\text{вц}} = v_{\text{вц}}^2 R^{-1} \rho$  і тоді баланс сил [18]:

$$\chi H \text{grad} H - v_{\text{вц}}^2 R^{-1} \rho = 0$$

показує граничну лінію  $\varphi_p(\rho, \chi) = 0$  (рис. 5.22).



**Рис. 5.22 - Границя розділення при магнітній сепарації.  
D<sub>1</sub> - відходи; D<sub>2</sub> - концентрат.**

Частинки рухаються в антипаралельних силових полях. Сепараційна характеристика  $\varepsilon(\rho, \chi)$  для даного балансу сил має ідеальний ступінчастий характер; при цьому стрибок від нуля до одиниці відбувається по граничній лінії.

За О.Н. Тихоновим [18] характеристика магнітної сепарації, при  $\rho = const$  має вигляд нормального закону інтегралу імовірності Гаусса:

$$\varepsilon_k(\chi) = 0,5\{1 + \Phi[(\chi - \chi_p)\sqrt{(\alpha D)^{-1} h a \gamma_{вих}(\chi)}]\}, \quad (5.83)$$

$$\text{де } \chi_p = \chi_{\max} - (\chi_{\max} - \chi_{\min})Q_k / Q_{вих}; \quad Q_k / Q_{вих} = \int_{\chi_p}^{\chi_{\max}} \gamma_{вих}(\chi) d\chi.$$

де  $\chi_p$  – магнітна сприйнятливість розділення;  $\chi_{\max}, \chi_{\min}$  – максимальна і мінімальна сприйнятливість збагачуваного матеріалу;  $Q_k, Q_{вих}$  – кількість концентрату і вихідного матеріалу.

Наведена сепараційна характеристика відноситься до найбільш складного випадку, коли середня магнітна сприйнятливість мінеральної суміші змінюється по простору  $\bar{\chi} = \bar{\chi}(x, t)$  внаслідок значного перепаду концентрацій магнітних матеріалів в напрямку  $x$ .

В сепараторах з  $\bar{\rho} = const$  і  $\bar{\chi} = const$ , тобто з постійною магнітною сприйнятливістю постелі рівняння спрощується до рівняння типу Фоккера-Планка:

$$\partial \gamma / \partial t = D \partial^2 \gamma / \partial x^2 - A \partial \gamma / \partial x,$$

$$\text{де } A = \alpha^{-1} [g(\rho - \bar{\rho}_{сер}) - a(\chi - \chi_{сер})].$$

Сепараційна характеристика розрахована за загальною методикою буде [18]:

$$\varepsilon_k(\rho, \chi) = \frac{\exp(AD^{-1}x_p) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}{\exp(AD^{-1}x_{дно}) - \exp(AD^{-1}x_{верх})}, \quad (5.84)$$

де  $x_p = x_{верх} + (x_{ниж} - x_{верх})Q_k / Q_{вих}$  – координата розділення концентрату і відходів в розвантажувальній зоні.

Сепараційна характеристика по  $\rho$  і  $\chi$  при роз'єднанні концентрату і відходів в середині робочої зони  $x_p = x_{дно} + 0,5h$  буде більш простою:

$$\varepsilon_k = 0,5 + 0,5th[(4\alpha D)^{-1}ha(\chi - \bar{\chi}_{сеп}) - (4\alpha D)^{-1}hg(\rho - \bar{\rho}_{сеп})], \quad (5.85)$$

де  $h = x_{дно} - x_{верх}$  – глибина постелі.

Розділова лінія (рис. 5.22), для якої половина частинок потрапляє в концентрат, а інша половина – у відходи ( $\varepsilon_k = 0,5$ ), може бути виражена рівнянням:

$$a(\bar{\chi} - \chi_{сеп}) - g(\bar{\rho} - \rho_{сеп}) = 0.$$

В окремому випадку, якщо знехтувати змінною густиною мінералів, тобто допустити, що  $\rho = \rho_0 = const$  і сепарація здійснюється тільки по  $\chi$ , то з рівняння (5.85) отримуємо:

$$\varepsilon_k(\chi) = 0,5 + 0,5th[(4\alpha D)^{-1}hHgradH(\chi - \chi_p)], \quad (5.86)$$

де  $\chi_p = \chi_{сеп} + g(\rho - \rho_{сеп}) / HgradH$  – магнітна сприйнятливність розділення;  $\varepsilon_k(\chi_p) = 0,5$ .

*Кінетична модель високоградієнтної магнітної сепарації Ю.С. Мостики* базується на викладеному вище феноменологічному підході до моделювання. В основу моделі покладені наступні принципи [28]:

- робоча зона сепаратора розглядається як сукупність послідовно розташованих сепараційних шарів, перпендикулярних напрямку руху пульпи;

- процес уловлювання і сепарації розглядається як незалежний в кожному шарі, при цьому початковим живленням шару є немагнітний (слабкомагнітний) продукт попереднього шару.

Кількість матеріалу  $Q$ , що надійшов у робочу зону за кінцевий інтервал часу  $\Delta t$ , визначається за формулою:

$$Q = S V_f \Delta t (1 - k) \rho_n (\rho_n - 1000) / (\rho_{сеп} - 1000), \quad (5.87)$$

де  $S$  – площа робочої зони;  $V_f$  – середнє значення швидкості фільтрації пульпи;  $k$  – коефіцієнт заповнення простору робочої зони матриці матеріалом;  $\rho_n$  – густина пульпи;  $\rho_{сеп}$  – середня густина вихідного матеріалу, що подається на збагачення.

Інтегруючи суму  $Q_{магн}(f, i)$  для всіх фракцій  $f$  і шарів  $i$  матриці можна одержати кінетичні криві виходу магнітного продукту  $\gamma(t)$ ; вмісту оксиду заліза в немагнітному продукті  $\beta(t)$  та вилучення заліза в магнітний продукт  $\varepsilon(t)$ . Кінетична модель Ю.С. Мостики враховує магнітний фракційний склад, крупність частинок та пріоритет їх уловлювання феромагнітними елементами матриці сепаратора.

Враховуючи те, що способів магнітного розділення мінералів нарахується близько 10, В.В.Кармазін [32] подає узагальнююче основне рівняння динаміки магнітного розділення мінералів:



- для процесів «відхилення, осадження»:

$$\begin{cases} md^2x/dt^2 = F_M(x) - \sum F_{mex}(x) - \sum F_{disc} \\ md^2y/dt^2 = F_M(y) - \sum F_{mex}(y) - \sum F_{disc} \end{cases}$$

- для процесів «утримання», що застосовуються при зниженій сприйнятливості магнітного матеріалу:

$$\begin{cases} F_M(x) - \sum F_{mex}(x) - \sum F_{disc} = 0 \\ F_M(y) - \sum F_{mex}(y) - \sum F_{disc} = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_M \geq F_{mex} - \sum F_{disc}$$

де  $F_M(x)$  — магнітна сила в залежності від координати  $x$  (відстань від полюса);  $\sum F_{mex}(x)$ ,  $\sum F_{disc}$  - рівнодіючі відповідно механічних та дисипативних сил в залежності від  $x$ .

## **5.4. Моделювання заключних процесів збагачення корисних копалин**

### **5.4.1. Моделювання процесу згущення у радіальному згущувачі**

#### ***Структурно-функціональна схема процесу згущення***

Л. В. Шпильовим розроблена структурно-функціональна схема процесу згущення у радіальному згущувачі, яка об'єднує факторну і феноменологічну моделі процесу. Згідно з цим підходом у радіальному згущувачі з периферійним приводом та безперервним розвантаженням згущеного продукту виділено наступні субпроцеси (рис. 5.24): а) розтікання суспензії від живильної лійки до периферії згущувача; б) витиснення рідкої фази у злив; в) осадження дисперсної фази; г) стиснення осаду; д) ущільнення осаду; е) транспортування ущільненого осаду до розвантажувальної лійки; ж) змішування його з суспензією зони стиснення.

#### ***Математичне моделювання процесу згущення у радіальному згущувачі***

Л.В.Шпильовий зі співавторами розробив ряд математичних моделей процесу і субпроцесів згущення у радіальному згущувачі [24].

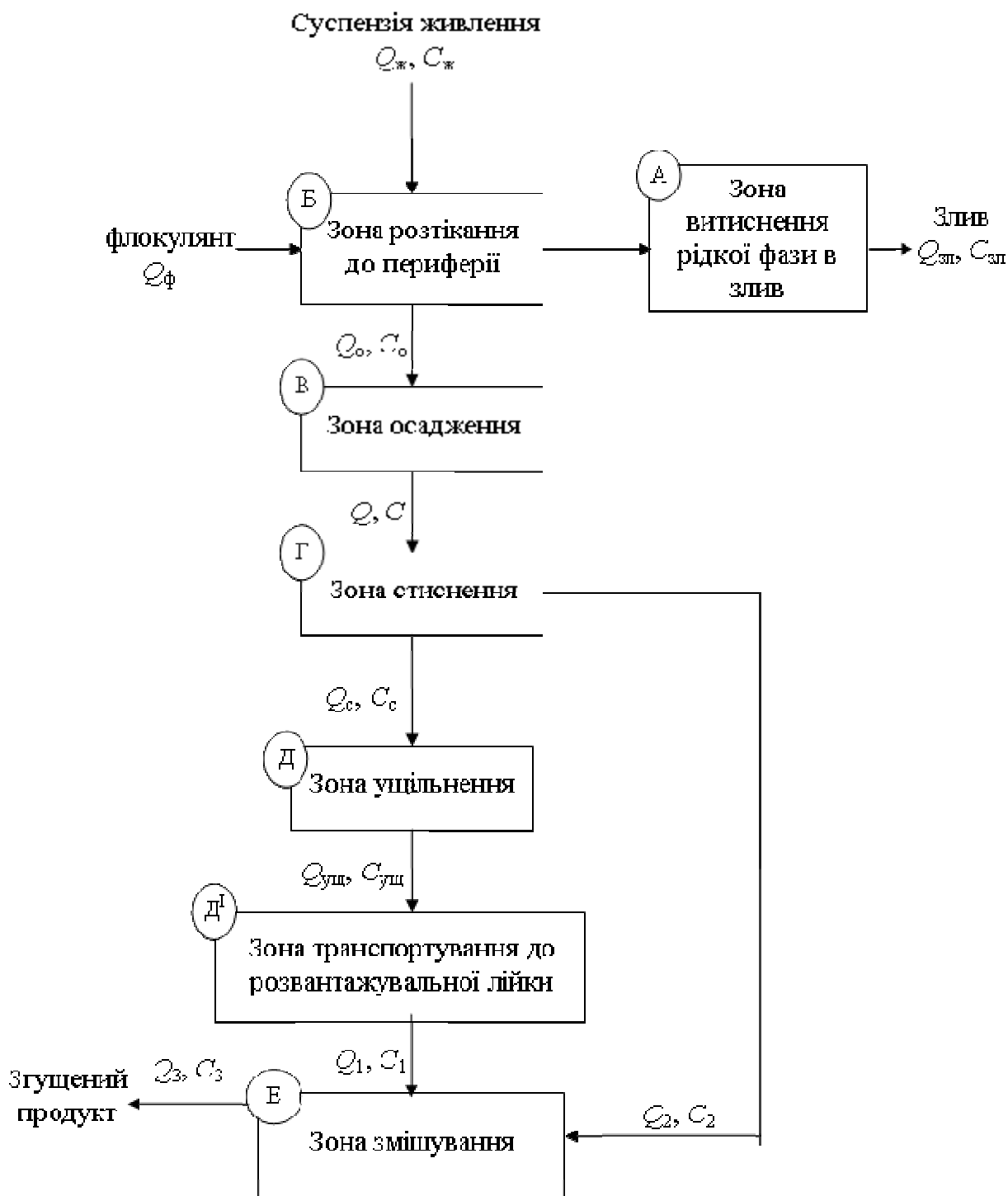


Рис. 5.23. Структурна схема процесу згущення

Дослідження субпроцесу осадження дисперсної фази та консолідації осаду на дні згущувача здійснювалося із плануванням експерименту за програмою центрального композиційного ротатабельного плану другого порядку Бокса-Хантера. Об'єкт дослідження – суспензії, приготовлені із сухих порошків нефелін-польовошпатових хвостів збагачення рідкіснометалічної руди Мазурівського родовища, польовошпатового, цирконового та піритного концентратів. У якості флокулянту застосову-

вали 0,1% водний розчин поліакриламід (ПАА). За цільову функцію приймали швидкість осадження дисперсної фази, яка визначалася згідно із загальноприйнятими рекомендаціями.

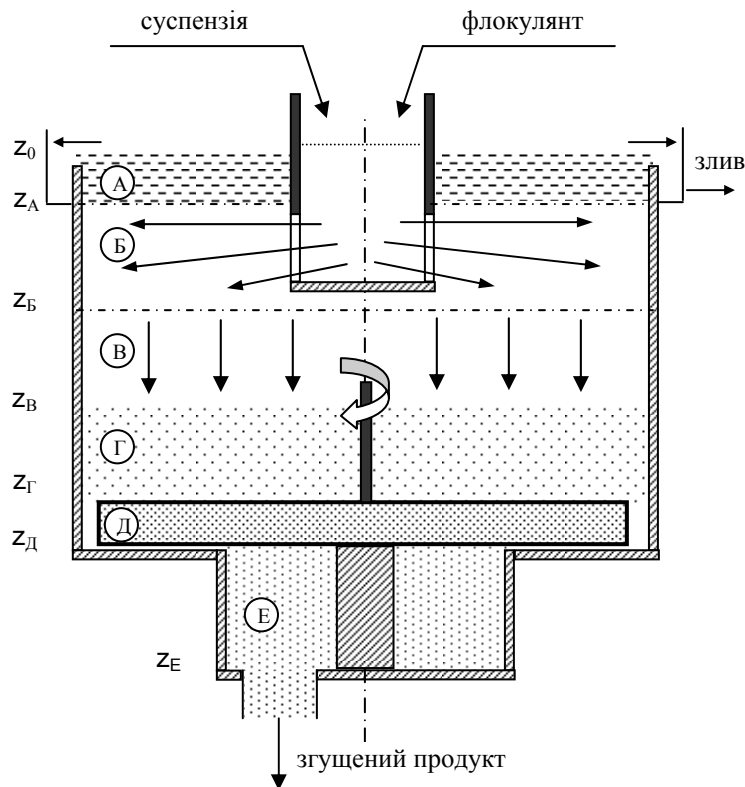


Рис. 5.24. Схема розподілу зон в радіальному згущувачі

Математична модель, яка адекватно описує процес осадження дисперсної фази польвошпатових хвостів основної флотації цирконій-тантал-ніобієвої руди, отримана обробкою за допомогою модуля Statgraphics 3.0 Plus представлена поліномом:

$$Y = 7,286 + 0,579 X_1 - 0,129 X_2 - 0,588 X_3 - 0,775 X_4 + 0,554 X_5 - 0,571 X_1^2 + 0,681 X_1 X_2 - 0,590 X_2^2, \quad (5.88)$$

де  $Y$  – швидкість осадження дисперсної фази, мм/с;  $X_1$  – питомі витрати флокулянту (ПАА);  $X_2$  – концентрація йонів водню (величина рН);  $X_3$  – вміст класу  $-0,063$  мм в дисперсній фазі;  $X_4$  – концентрація дисперсної фази в суспензії;  $X_5$  – температура суспензії.

Поверхня відгуку  $Y = f(X_1, X_2)$  – це еліптичний параболоїд з екстремумом-максимумом в області  $X_1 = 0,35$ ;  $X_2 = -0,1$ . Екстремальна залежність швидкості осадження від витрат флокулянту пояснюється тим, що при недостатніх витратах ПАА на поверхні частинок твердої фази утворюється плівка флокулянту замалої товщини, а при передозуванні флокулянту настає стабілізація суспензії. Аналіз моделі осадження показує, що координати екстремуму змінюються (дрейфують) при від-

хиленні величини рН середовища від оптимального як по осі ординат, так і по осі абсцис.

Дослідження процесів консолідації – стиснення і ущільнення – дисперсної фази суспензії рідкіснометалічних руд Мазурівського родовища дозволило отримати адекватні регресійні моделі:

$$Y_c = 1,61 - 0,037X_1 + 0,03 X_2 + 0,11 X_3 + 0,25 X_4 - 0,084 X_5 + 0,047X_1^2 - 0,04 X_1 X_2 + 0,052 X_2^2 - 0,044 X_3 X_4 - 0,066 X_4^2 + 0,032 X_4 X_5; \quad (5.89)$$

$$\rho = 0,786 + 0,013 d, \quad (5.90)$$

де  $Y_c$  – густина суспензії зони стиснення, кг/дм<sup>3</sup>;  $\rho$  – густина ущільненого осаду, кг/дм<sup>3</sup>;  $d$  – вміст класу  $-0,063$  мм в дисперсній фазі, %.

Аналіз отриманих моделей показав, що при зміні параметрів суспензії живлення у встановлених регламентом межах густина стисненого осаду  $Y_c$  може змінюватися на  $\pm 45$  % від середнього значення і є суттєвим збуренням. Густина ущільненого осаду  $\rho$  визначається для досліджуваного типу мінеральної сировини гранулометричним складом дисперсної фази й змінюється лише на  $\pm 6...7$  % від середньої внаслідок руйнування флокул дисперсної фази під час транспортування осаду до розвантажувальної лійки.

Процес змішування ущільненого осаду із суспензією зони стиснення в розвантажувальній лійці згущувача Л.В.Шпильовим змодельовано із застосуванням математичного апарату теорії автоматичного регулювання як змішувач з неповним перемішуванням. Така система складається з послідовно з'єднаних елементів повного перемішування і транспортного запізнювання. Динамічну модель субпроцесу змішування представлено у спрощеному вигляді передавальною функцією із застосуванням перетворення Лапласа:

$$W(p) = \frac{k_1}{1 + pT_1} \cdot e^{-p\tau}. \quad (5.91)$$

Передавальна функція системи транспортування осаду для цього випадку знайдена методом суперпозиції на основі аналітично виведених передавальних функцій каналами регулюючого впливу «частота обертання ферми – витрати осаду, що надходить до розвантажувальної лійки» та збурюючого впливу «витрати ущільненого осаду – витрати осаду, що надходить до розвантажувальної лійки», і представлена у вигляді:

$$W(p) = e^{-p\tau_0} + \bar{\mu}_{\text{вх}} (1 - e^{-p\tau_0}), \quad (5.92)$$

де  $\bar{\mu}_{\text{вх}}$  – наповнення гребків (маса осаду на одиниці довжини шляху гребків;  $\bar{\mu}_{\text{вх}} = \bar{G}_{\text{ос}}/\bar{w}$ , де  $\bar{G}_{\text{ос}}$  – середні витрати дисперсної фази суспензії, що надходить у зону ущільнення, та  $\bar{w}$  – середня швидкість транспортування осаду гребками ферми).

Дослідження цієї моделі показує, що густина згущеного продукту, який вивантажується з радіального згущувача, визначається результатами змішування ущільненого осаду із суспензією зони стиснення в розвантажувальній лійці згущувача.

### *Імовірнісна модель*

За В.Ф. Пожидаєвим вивчення процесу осадження зводиться до дослідження імовірнісних схем, або рівнянь випадкового блукання частинок в середовищі. Початкова інформація про полідисперсну суміш частинок, які надходять в апарат повинна задаватися у вигляді функції розподілення частинок по розмірах  $\Phi(S)$ , що являє собою відношення числа переходів частинок вузького класу  $(S, S+dS)$  до загального числа спостерігаємих подій. Функція  $\Phi(S)$  знаходиться по функції розподілення частинок за розмірами в масових частках  $F(S)$ :

$$\Phi(S) = \left( \int_0^D \frac{dF(S)}{S} \right)^{-1} \int_0^S \frac{dF(S)}{S}, \quad (5.93)$$

$$F(S) = \left( \int_0^D S d\Phi(S) \right)^{-1} \int_0^S S d\Phi(S), \quad (5.94)$$

де  $S$  – розмір частинки;  $D$  – максимальний розмір частинок в суміші.

Приймаючи закон опору руху частинки (напр., закон Стокса) і використовуючи зв'язок між функціями розподілення частинок по розмірах, можна перейти до розподілу за швидкостями осадження  $\Psi(W)$ . В даному випадку процес осадження описується дифузійним оператором:

$$L = \frac{\partial C_w}{\partial t} - D_z \frac{\partial C_w}{\partial z^2} - W \frac{\partial C_w}{\partial z} + U \frac{\partial C_w}{\partial x}, \quad (5.95)$$

де  $D_z$  – коефіцієнт дифузії;  $W, U$  – швидкості знесення по осях  $Z$  і вісі  $X$ , відповідно.

Для полідисперсної суміші частинок, яка задана власною функцією розподілення  $\Psi(W)$ , концентрація неоднорідної за складом домішки може бути знайдена як математичне очікування випадкової величини  $C_w$ :

$$C^*(x, z, t) = \int_0^{W_D} C_w d\Psi(W). \quad (5.96)$$

Імовірність переходу частинок в суміжні за висотою шару припускається постійною, що витікає з розгляду дискретної схеми випадкового блукання:

$$L = C_j^i(t + \Delta t) - \sum_{l=i-1}^{l=i+1} C_j^l(t) \cdot P_j^{l,i}, \quad (5.97)$$

де  $i$  – номер шару;  $j$  – номер вузького класу частинок із швидкістю очікування  $W_j$ ;  $P_j^{l,i}$  – імовірність переходу в суміжні шари, при цьому  $\sum_{l=i-1}^{l=i+1} P_j^{l,i} = 1$ . При  $t = 0$   $C_j$  – концентрації задані функцією розподілення  $\Psi(W)$  або, що теж саме,  $\Phi(S)$ .

Таким чином, дія оператора  $L$  приводить до безперервної «деформації» функції розподілення вихідної суміші в просторі і часі так, що в будь який заданий момент часу  $t$  стає відомою найбільш повна інформація про процес у вигляді дійсної функції розподілу частинок за розмірами в кожній точці простору  $(x, z)$  або в кожному шарі  $i$  (для дискретної моделі).

#### 5.4.2. Моделювання процесу зневоднення фільтруванням

##### *Факторна модель процесу фільтрування*

*Вхідними факторами* процесу фільтрування є (рис. 5.25): характеристики вихідної сировини, зокрема, гранулометричний склад вихідного матеріалу ( $\Gamma_1$ ), об'ємне навантаження на операцію ( $Q_1$ ), вакуум і тиск повітря ( $w, p$ ).

*Вихідні фактори*: вихід і вологість кеку ( $\gamma_k, W_k^r$ ), вміст твердої фази у фільтраті ( $\beta_\phi$ ). *Проміжним фактором* можна розглядати рівень пульпи у ванні вакуум-фільтра ( $H$ ).

*Основними оперативними керуючими факторами* процесу фільтрування є об'ємне навантаження на операцію ( $Q_1$ ), вакуум і тиск повітря ( $w, p$ ), швидкість руху фільтруючої поверхні (час її перебування під вакуумом,  $t_e$ ).

*Фактори, які збурюють процес*: гранулометричний склад ( $\Gamma_1$ ) вихідної сировини, розрідження пульпи ( $R$ ). Крім того, можлива зміна фізико-хімічних характеристик твердої фази, що може суттєво вплинути на процес.

*Важливими конструктивними характеристиками* вакуум-фільтрів, які впливають на процес і його результати, є: конструкція вакуум-фільтра, площа фільтруючої поверхні.

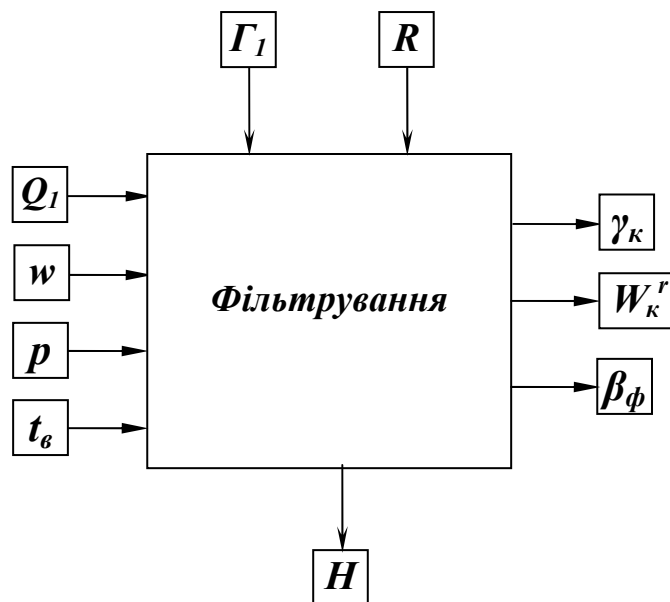


Рис. 5.25. Факторна модель процесу фільтрування.

Розглянемо вплив цих факторів на процес фільтрування.

Зі збільшенням *густини пульпи* продуктивність вакуум-фільтрів збільшується. Однак при фільтруванні мулистих шламів підвищення густини пульпи до підвищення продуктивності не приводить.

Найбільш сприятливий за *гранулометричним складом* флотаційний концентрат коксівного вугілля містить від 20 до 40 % класу  $-0,06$  мм. При вмісту класу  $-0,06$  мм менше вказаної норми збільшується розшарування пульпи за крупністю у ванні фільтра і погіршується процес фільтрування. При збільшенні вмісту класу  $-0,06$  мм у пульпі (особливо якщо він перевищує 50 %) продуктивність фільтру зменшується, а вологість осаду збільшується. На ефективність роботи вакуум-фільтрів суттєво впливає розшарування матеріалу у ванні за крупністю.

Одночасно зі зміною гранулометричного складу по висоті шару пульпи у ванні вакуум-фільтру змінюється вміст твердого. Якщо у переліві він складає  $250 \text{ кг/м}^3$ , то на дні ванни –  $500 \text{ кг/м}^3$ , тобто у 2 рази вище, ніж у верхніх шарах пульпи.

На продуктивність вакуум-фільтрів суттєво впливає *зольність тонких класів* ( $-0,06$  мм) у флотоконцентраті, що надходить на фільтрування. Присутність глинистих частинок приводить до створення щільних осадів з малою проникністю, зниження швидкості фільтрування і забивання фільтруючої поверхні. *Додання (до 40 %) зернистого шламу* крупністю  $0,3 - 0,4$  мм при фільтруванні тонких флотаційних концентратів є одним з методів покращення процесу фільтрування, так як збільшує пористість шару сипкого матеріалу.

Продуктивність вакуум-фільтрів збільшується в 1,5 рази при *флокуляції флотаційного концентрату* перед фільтруванням. Крім того, при цьому полегшується віддувка осаду і знижується вміст твердого у

фільтраті до 10 – 20 кг/м<sup>3</sup> (без флокуляції 30 – 40 кг/м<sup>3</sup>). Однак при флокуляції пульпи вологість осаду збільшується.

*Вакуум* впливає на продуктивність фільтру і вологість осаду: зі збільшенням вакууму питома продуктивність збільшується, а вологість осаду зменшується. Раціональні межі вакууму – не менше 60 – 67 кПа.

*Тиск стисненого повітря* при віддувці не повинен перевищувати 50 кПа для запобігання пориву фільтрувальної тканини. Найбільший ефект при розвантаженні шару осаду (коржа) дає віддувка тривалістю 2–4 с.

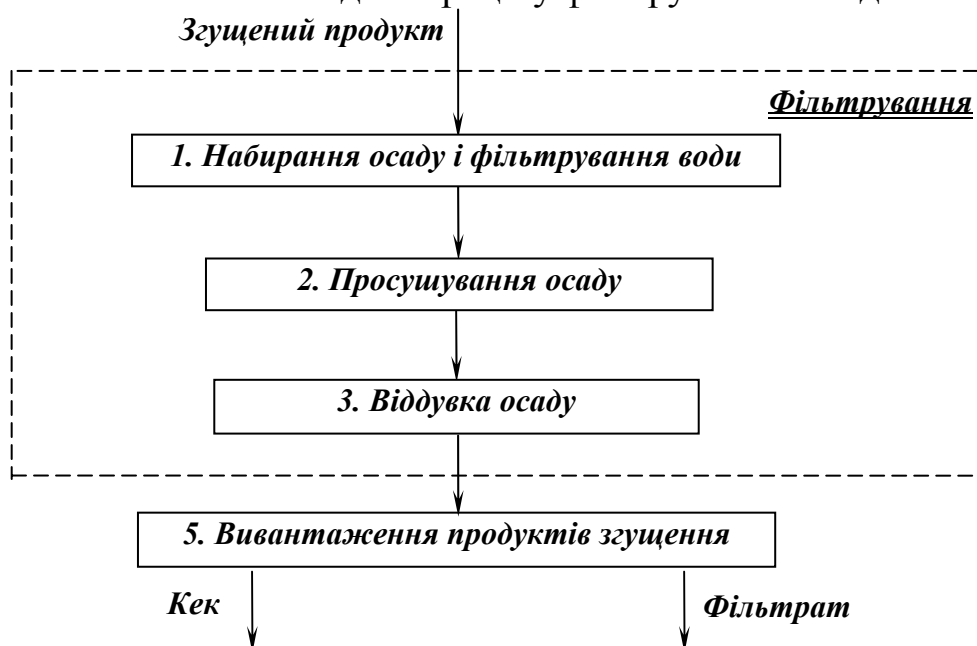
*Частота обертання дисків* впливає на продуктивність вакуум-фільтру і вологість осаду: зі збільшенням частоти обертання продуктивність і вологість осаду збільшуються. Оптимальна частота обертання дисків встановлюється експериментально у залежності від гранулометричного складу твердої фази. До аналогічних результатів приводить збільшення *швидкості руху стрічки* стрічкових вакуум-фільтрів.

Зниження *рівня пульпи* у ванні приводить до зменшення товщини осаду, погіршення віддувки і, отже, до зменшення продуктивності вакуум-фільтра. Рівень пульпи необхідно підтримувати постійним автоматично або циркуляцією 5 – 10 % пульпи через перелив з ванни.

Стрічкові фільтри менш чутливі до зміни гранулометричного складу вихідної пульпи, але вимагають попереднього згущення до 600 кг/м<sup>3</sup> і більше.

### **Феноменологічна модель процесу фільтрування**

Феноменологічна модель процесу фільтрування наведена на рис. 5.26.



**Рис. 5.26 – Феноменологічна модель процесу фільтрування.**



Субпроцес 1 «Набирання осаду і фільтрування води». Під дією вакууму в ванні фільтру на фільтрувальну поверхню з пульпи осаджується тверда фаза і з неї відсмоктується вода (фільтрат).

Субпроцес 2 «Просушування осаду». Фільтрувальна поверхня виходить із пульпи і з осаду (кеку) під дією вакууму відсмоктується остаточна волога.

Субпроцес 3 «Віддувка осаду». Для відділення кеку від фільтрувальної поверхні під неї подається стиснене повітря.

Субпроцес 4 «Вивантаження продуктів фільтрування». Вивантаження кеку здійснюється його віддувкою стисненим повітрям і зняттям шкребками. Фільтрат проходить крізь шар осаду, отвори фільтрувальної тканини і через канали полого вала фільтру і потрапляє в розподільну головку, далі у ресивер.

### Математичне моделювання процесів зневоднення

При зневодненні продукту, який містить  $W_0$  води, є частина води  $W_0^*$ , яка не видаляється при процесі механічного зневоднення, та, що видаляється  $W_0'$ . Очевидно, що  $W_0 = W_0' + W_0^*$ . Видалення води при  $W_0' = const$  за час  $t$  описується рівнянням:

$$W_{зал} = W_t = (W_0 - W_0^*)e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + W_0^*, \quad (5.98)$$

де  $W_{зал} = W_t$  – маса води, яка залишилася в продукті після протікання процесу протягом часу  $t$ ;  $K[W_0]$ ,  $n[W_0]$  – константи кінетики, які характеризують умови зневоднення при початковій масі води  $W_0$ ;  $W_0^* = W[t = \infty]$  – маса залишку води, який не вилучається.

Після подвійного логарифмування рівняння (5.98) з урахуванням маси твердої фази, що залишилася не видаленою до моменту  $t$ , отримуємо рівняння кінетики, яке виражене через параметри концентрації твердої фази:

$$R_t = R[t]_{зал} = \frac{1}{\gamma_t} (R_0 - \gamma^* R_0^*) e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + \frac{\gamma_0^*}{\gamma_t} R_0^*, \quad (5.99)$$

де  $\gamma[t] = \gamma_t$  – вихід зневодненого продукту по сухій масі твердої фази;  $\gamma_0^* = \gamma[t = \infty]$  – вихід залишку твердої фази, який не вилучається з водної фази;

$R_0 = \frac{W_0}{T_0} = \frac{1 - T_0}{T_0}$  – відношення рідкого до твердого у вихідно-

му продукті;  $R_0^* = \frac{W_0^*}{T_0^*} = \frac{1-T_0^*}{T_0^*}$  – те ж саме, по залишку, що не видаляється;  $R_1 = R_{зал} = \frac{W_t}{T_t} = \frac{1-T_t}{T_t}$  – те ж саме в зневодненому продукту.

В деяких випадках кількість твердої фази, яка видаляється з водою (напр., фільтратом), невелика і нею можна знехтувати в порівнянні і кількістю твердої фази в згущеному продукті. Тому допустимо прийняти  $\gamma_t = \gamma_0^* = 1$  і для процесу фільтрації рівняння (5.99) спрощується і має вигляд:

$$R_{зал} = (R_0 - R_0^*)e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + R_0^* \quad (5.100)$$

або, якщо виконати заміну  $R = \frac{1-T}{T}$ , отримуємо:

$$T_t = \frac{T_0 T^*}{(T^* - T_0)e^{-K[W_0]t^{n[W_0]}} + T_0}, \quad (5.101)$$

де  $T_0$  – вміст твердої фази у вихідному продукті (живленні);  $T_t = T_{зал}$  – те ж саме в кеку (зневодненому) продукті;  $T_0^*$  – граничний вміст твердого (залишок, що не вилучається).

Формули (5.99) і (5.100) справедливі тільки в окремих випадках, коли  $n \approx 1$  або  $(R_0 - R_0^*) = const$ ; в інших випадках параметри  $K$  і  $n$  змінюються відповідно  $R_0$ .

При аналізі процесу згущення можна знехтувати кількістю твердого, яка видаляється в злив, тобто  $\gamma_0 = \gamma_{згуц} = \gamma_{згуц}^*$ .

При відсутності втрат твердої фази залежність висоти шару осаду від часу осадження буде:

$$H_t = (H_0 - H_0^*)e^{-Kt^n} + H_0^*. \quad (5.102)$$

Висота шару проясненого шару рідини (злив) знаходиться по різниці:

$$H_{прояс} = H_0 - H_t = (H_0 - H_0^*)(1 - e^{-Kt^n}) \quad (5.103)$$

Спільне рішення рівнянь (5.100) і (5.102) дозволяє визначити концентрацію твердої фази в осаді по висоті апарата:

$$R_t = \frac{(R_0 H_0^* + H_0 R_0^*) - H_t (R_0 - R_0^*)}{H_0 - H_0^*} \quad (5.104)$$

або

$$R_t = A - B H_t, \quad (5.105)$$

$$\text{де } A = \frac{R_0 H_0^* + H_0 R_0^*}{H_0 - H_0^*} = \text{const}; \quad B = \frac{R_0 - R_0^*}{H_0 - H_0^*} = \text{const}.$$

Таким чином, відношення концентрацій фаз  $P / T$  в осаді лінійно пропорційне висоті шару  $H_t$ , з урахуванням співвідношення  $R = (1 - T) / T$  маємо:

$$T_t = \frac{1}{A - B H_t + 1}, \quad (5.106)$$

тобто вміст твердої фази знаходиться в зворотній залежності від висоти шару.

В розділювальних апаратах (збагачувальних машинах, класифікаторах та ін.) розподілення води є процесом супутнім основному процесу. В даному випадку живлення (за масою твердої фази) розділяється на два продукти  $\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2$ ; продукт, в якому підвищується концентрація твердого називаємо зневодненим, інший продукт – зливом.

Для розділювальних апаратів час зневоднення (час розділення) визначається тривалістю знаходження матеріалу в апараті.

Об'ємну продуктивність по пульпі можна виразити через концентрацію води  $R_0$ , продуктивність по масі сухої твердої фази  $Q_0$  і її густину  $\delta$ :

$$Q_n = Q_0 (1 + R_0 \delta) \frac{1}{\delta}.$$

Рівняння кінетики зневоднення після заміни  $t$  через  $Q_n$ :  $t = \frac{V}{Q_n}$ ;

$V = \text{const}$  – робочий об'єм апарата;  $K_Q = K_t V^n = \text{const}$ .

Співвідношення фаз буде:

– в зневодненому продукті:

$$R_{32} = \frac{1}{\gamma_{32}} \left[ (R_0 \gamma_0 - \gamma_{32}^* R_{32}^*) e^{-\frac{K}{Q_{32}^n}} + \gamma_{32} R_{32} \right]; \quad (5.107)$$

– в зливі

$$R_{3l} = \frac{1}{\gamma_{3l}} \left[ (R_0 \gamma_0 - \gamma_{32}^* R_{32}^*) \left( 1 - e^{-\frac{K}{Q_{32}^n}} \right) \right]. \quad (5.108)$$

Рівняння (5.107) і (5.108) справедливі тільки при  $n \approx 1$  або  $W_0 = \gamma_0 R_0 - \gamma_{32}^* R_{32}^* \approx const$ , тому що в них недостатньо повно враховується співвідношення фаз у вихідному продукті.

Практичне використання рівнянь кінетики можливе при відомих коефіцієнтах  $K$  і  $n$ , які акумулюють в себе технологічні умови видалення води. Коефіцієнти кінетики визначаються за даними досліджень і при зміні технологічних умов процесу коефіцієнти також змінюються.

## 5.5. Моделювання технологічних схем збагачення корисних копалин

### 5.5.1. Постановка проблеми і загальні рішення

Для більшості збагачувальних апаратів сепараційна характеристика  $\varepsilon(\xi)$  далека від ідеальної ступінчастої (напр., флотомашина з експоненціальною сепараційною характеристикою), тому апарати з'єднують в технологічні схеми таким чином, щоб результуюча сепараційна характеристика  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  схеми у цілому була ближче до ідеальної [16, 20].

Практикою опрацьований типовий випадок рішення даного питання – *канонічні схеми* (рис. 5.27), в яких є основна,  $n$  перемішувальних і  $m$  контрольних операцій [18]. Промпродукти будь-якої перемішувальної і контрольної операції повертаються в живлення попередньої. Особливо розгалужені перемішувальні і контрольні гілки в схемах флотації внаслідок неідеальної сепараційної характеристики окремої операції (флотомашини).

У загальному випадку результуюча сепараційна характеристика двопродуктової схеми є відношення мас (продуктивностей) елементарної фракції  $[\xi, \xi + d\xi]$  в концентраті  $q_k = Q_k \gamma_k(\xi) d\xi$  і вихідному живленні  $q_{вих} = Q_{вих} \gamma_{вих}(\xi) d\xi$ , тобто [18]:

$$\varepsilon_{рез} = q_k / q_{вих} = Q_k \gamma_k(\xi) d\xi / [Q_{вих} \gamma_{вих}(\xi) d\xi]. \quad (5.109)$$

Знання  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  дозволяє з цього рівняння визначити  $\gamma_k(\xi)$ , а також вміст  $j$ -го компоненту в продукті:

$$\bar{\beta}_K = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta(\xi) \gamma_K(\xi) d\xi. \quad (5.110)$$

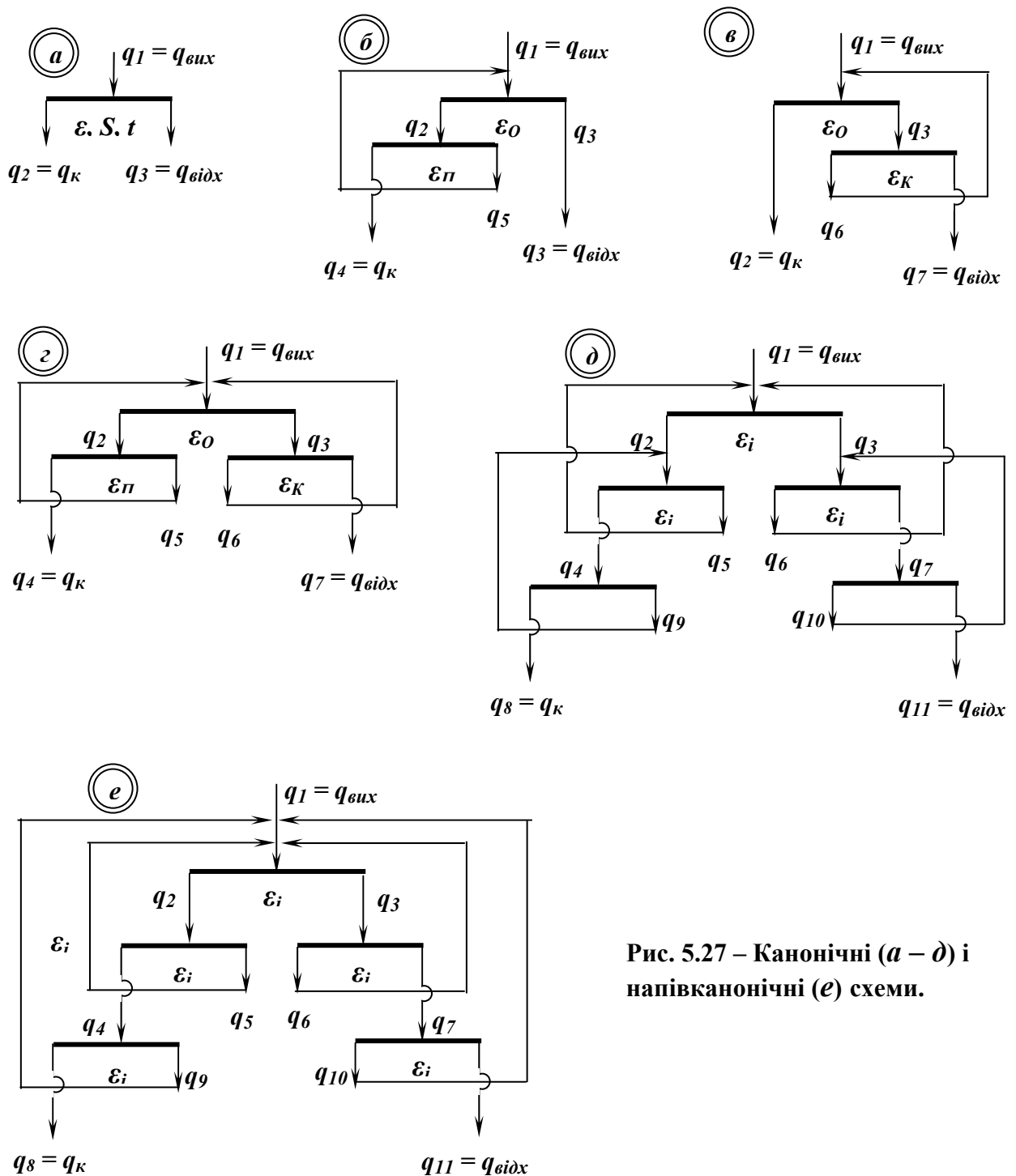


Рис. 5.27 – Канонічні (а – д) і напівканонічні (е) схеми.

Для двох канонічних схем (рис. 5.26 б, г і д) результуючі сепараційні характеристики  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  отримують через часткові сепараційні характеристики  $\varepsilon(\xi)$  окремих операцій:

– для схеми з однією основною  $\varepsilon_O(\xi)$  і однією перелісною  $\varepsilon_{II}(\xi)$  операціями (рис. 5.26 б):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{рез}(\xi) = \varepsilon_{1,4}(\xi) = \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{II}(\xi) / D, \\ D = 1 - \varepsilon_O(\xi) + \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{II}(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

– для схеми з однією основною  $\varepsilon_O(\xi)$ , однією перелісною  $\varepsilon_{II}(\xi)$  і однією контрольною операціями (рис. 5.26 г):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{рез} = \varepsilon_{1,4} = \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{II}(\xi), \\ D = 1 - \varepsilon_O(\xi) + \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{II}(\xi) - \varepsilon_K(\xi) + \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_K(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

– для схеми з однією основною  $\varepsilon_O(\xi)$ , двома перелісними  $\varepsilon_{II_1}(\xi)$ ,  $\varepsilon_{II_2}(\xi)$  і однією контрольною операціями (рис. 5.26 д):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{рез} = \varepsilon_{1,8} = \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{II_1}(\xi)\varepsilon_{II_2}(\xi) / D, \\ D = \varepsilon_O(\xi)\varepsilon_{II_1}(\xi)\varepsilon_{II_2}(\xi) + [(1 - \varepsilon_O(\xi))[(1 - \varepsilon_{K_1}(\xi))\{\varepsilon_{II_1}(\xi)\varepsilon_{II_2}(\xi) + \\ + [1 - \varepsilon_{II_1}(\xi)]\varepsilon_{II_2}(\xi) + [1 - \varepsilon_{II_1}(\xi)][1 - \varepsilon_{II_2}(\xi)]\}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

Формули (5.111) - (5.113) одержані рішенням алгебраїчних рівнянь балансу по будь-якій елементарній фракції  $[\xi, \xi + d\xi]$  для усіх продуктів схеми. Число таких рівнянь дорівнює подвоєному числу операцій в схемі. Для будь-якої  $i$ -тої операції маємо два рівняння:

– перше: сума вхідних потоків фракції дорівнює сумі вихідних:

$$q_{вих\ i} = q_{к\ i} + q_{відх\ i}; \quad (5.114)$$

– друге: потік фракції в концентраті дорівнює потоку її в живленні, помноженому на сепараційну характеристику:

$$q_{к\ i} = \varepsilon_i(\xi)q_{вих\ i}. \quad (5.115)$$

Іноді останню формулу з урахуванням того, що  $q_{відх\ i} = (1 - \varepsilon_i)q_{вих\ i}$  можна переписати у вигляді:

$$q_{к\ i} / \varepsilon_i(\xi) = q_{відх\ i} / [1 - \varepsilon_i(\xi)]. \quad (5.116)$$

Склавши такі пари рівнянь для усіх операцій схеми і виключивши усі  $q_i$  для внутрішніх проміжних продуктів, розраховують відношення  $q_{к} / q_{вих} = \varepsilon_{рез}(\xi)$ .

**Приклад 5.6.** Необхідно розрахувати потоки схеми з трьома операціями (рис. 5.27 г). Рішення отримуємо склавши 6 рівнянь з 6 невідомими:

$$\left. \begin{aligned}
 q_2 + q_3 - q_5 - q_6 &= q_{вих}; \\
 q_2 - q_K - q_5 &= 0; \\
 q_3 - q_6 - q_7 &= 0; \\
 q_2 - \varepsilon_O q_5 - \varepsilon_O q_6 &= \varepsilon_O q_{вих}; \\
 \varepsilon_{II} q_2 - q_K &= 0; \\
 \varepsilon_K q_3 - q_6 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

Рішення цих рівнянь дозволяє послідовно знайти:

$$\left. \begin{aligned}
 q_2(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_O / D; \\
 q_3(\xi) &= q_{вих}(\xi) (1 - \varepsilon_O) / D; \\
 q_K = q_4(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_O \varepsilon_{II} / D; \\
 q_5(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_O (1 - \varepsilon_{II}) / D; \\
 q_6(\xi) &= q_{вих}(\xi) \varepsilon_K (1 - \varepsilon_O) / D; \\
 q_7(\xi) &= q_{вих}(\xi) (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_K) / D; \\
 D &= (1 - \varepsilon_O - \varepsilon_K + \varepsilon_O \varepsilon_{II} + \varepsilon_O \varepsilon_K).
 \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Результуюча сепараційна характеристика визначається з третього рівняння як відношення  $q_K / q_{вих} = \varepsilon_{рез}(\xi)$ . Результуюча сепараційна характеристика (див. формулу 5.109) є необхідною і достатньою для оцінки і аналізу схеми в цілому.

Сепараційна характеристика  $\varepsilon_{1i}(\xi)$  для будь-якого  $i$ -го продукту (по відношенню до вихідного живлення) знаходиться як відношення продуктивностей (мас) по фракції  $[\xi, \xi + d\xi]$  в даному продукті і в живленні схеми, тобто:

$$\varepsilon_{1i} = q_i / q_1 = Q_i \gamma_i(\xi) d\xi / [Q_{вих} \gamma_{вих}(\xi) d\xi].$$

Для усіх продуктів схеми вона знаходиться рішенням лінійних алгебраїчних рівнянь аналогічно  $\varepsilon_{рез}(\xi)$ , яка є частковим випадком, коли  $q_i = q_K$ .

### 5.5.2. Аналіз сепараційних характеристик схем збагачення

Задачею аналізу є з'ясування впливу конфігурації схеми, типу сепараторів в операціях та їхніх параметрів на  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  і  $\varepsilon_{1i}(\xi)$ .

Сепараційні характеристики  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  і  $\varepsilon_{1i}(\xi)$  для конкретної схеми збагачення – гравітаційної, магнітної, флотаційної та ін. – отримують підстановкою сепараційних характеристик конкретних апаратів (або операцій)  $\varepsilon_O(\xi)$ ,  $\varepsilon_{\Pi i}(\xi)$ ,  $\varepsilon_{K i}(\xi)$  схеми (див. табл. 4.8) в загальні формули для  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  і  $\varepsilon_{1i}(\xi)$ .

**Приклад 5.7.** Для гравітаційної схеми з однією перечисткою  $\Pi = 1$ ,  $K = 0$  (див. рис. 5.26 б) з окремими сепараційними характеристиками операцій для відсаджувальних машин або важкосередовищних сепараторів за формулою (5.109) отримуємо:

$$\varepsilon_{рез}(\rho) = \frac{(0,5 + 0,5\Phi)^2}{0,75 + 0,25\Phi^2}, \quad (5.119)$$

де  $\Phi = \Phi[(\rho - \rho_p)\sqrt{(\alpha D)^{-1}gh}\gamma_{вих}(\rho)]$ .

Остаточну конкретизацію отримують при чисельному завданні усіх параметрів, зокрема  $(\alpha D)^{-1}gh = 22,5 \text{ м}^3/\text{т}$ ;  $\rho_p = 3 \text{ т}/\text{м}^3$ .

**Приклад 5.80.** Для симетричної флотаційної схеми з однією перечисною  $\Pi = 1$  однією контрольною  $K = 1$  (див. рис. 5.26 г) з ідентичними операціями  $\varepsilon_O(k) = \varepsilon_{\Pi}(k) = \varepsilon_K(k) = 1 - \exp(-St_\phi k)$  за формулою (5.109) одержимо:

$$\varepsilon_{рез}(k) = \frac{[1 - \exp(-St_\phi k)]^2}{1 - 2[1 - \exp(-St_\phi k)] + 2[1 - \exp(-St_\phi k)]^2}. \quad (5.120)$$

Конкретні параметри отриманого рівняння можуть мати такі значення: питома поверхня розділу фаз  $S = 800 \text{ м}^2/\text{м}^3$ ; тривалість флотації  $t_\phi = 2,5 \text{ хв}$ .

З наведених прикладів видно, як можна отримати сепараційні характеристики будь-яких конкретних схем збагачення.

Графік або таблиця будь-якої сепараційної характеристики  $\varepsilon_{рез}(\xi)$ ,  $\varepsilon_{1i}(\xi)$  розраховуються в дискретних точках діапазону  $\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$ , напр.,  $\xi = 0, \Delta\xi, 2\Delta\xi, 3\Delta\xi$  і т.д.

На рис. 5.27 показані  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  для декількох флотаційних схем, при цьому для простоти порівняння прийняті однакові сепараційні характеристики в операціях  $\varepsilon(k) = 1 - \exp(-x)$ ,  $x = kSt_\phi$ .



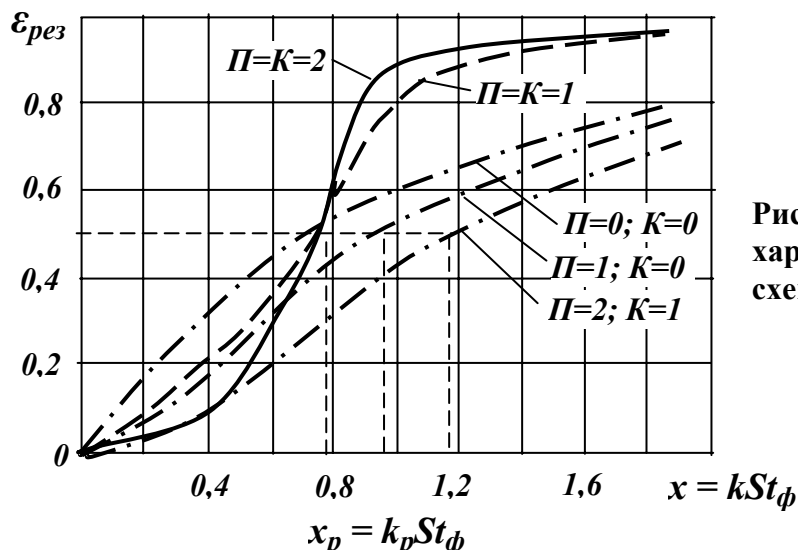


Рис. 5.28 - Результуючі сепараційні характеристики різних флотаційних схем.

Важливими параметрами результуючої характеристики схеми  $\varepsilon_{pez}(\xi)$  є положення границі розділення  $\xi_p$  і крутизна в робочій точці  $\varepsilon'_{pez}(\xi_p)$ . Величина  $\xi_p$  є коренем рівняння  $\varepsilon_{pez}(\xi_p) = 0,5$ . Це рівняння не завжди легко вирішується, особливо для складних схем, тому на практиці краще користуватися графічним методом: побудувати графік, на ординаті  $\varepsilon_{pez} = 0,5$  провести горизонтальну лінію до перетину з графіком і опустити перпендикуляр в шукану точку  $\xi_p$ .

Так, напр., з графіків  $\varepsilon_{pez}(k)$  для флотаційних схем, наведених на рис. 5.27, у випадках симетричних схем  $\Pi = K = 0$ ,  $\Pi = K = 1$ ,  $\Pi = K = 2$  одержуємо одне й теж значення флотованості розділення:

$$k_p = x_p / St_{\phi} = \ln 2 / (St_{\phi}) \approx 0,693 / (St_{\phi}).$$

Для несиметричної схеми  $\Pi = 1$ ,  $K = 0$  маємо  $k_p \approx 0,95 / (St_{\phi})$ , а для схеми  $\Pi = 2$ ,  $K = 1$  отримуємо  $k_p \approx 1,15 / (St_{\phi})$ .

Крутизна  $\varepsilon'_{pez}(\xi_p)$  розраховується після знаходження  $\xi_p$  за формулою:

$$\varepsilon'_{pez}(\xi_p) = d\varepsilon_{pez}(\xi) / d\xi \Big|_{\xi = \xi_p}. \quad (5.121)$$

Визначити цю величину можна за аналітичною формулою для  $\varepsilon_{pez}(\xi)$  або графічним диференціюванням по тангенсу кута нахилу дотичної до  $\varepsilon_{pez}(\xi)$  в робочій точці  $\xi_p$ .

Напр., для флотаційної схеми  $\Pi = K = 1$  з  $\varepsilon_{рез}(k)$  виду рівняння (5.120),  $k_p = \ln 2 / (St_\phi)$  отримуємо:

$$\varepsilon'_{рез}(k_p) = St_\phi,$$

для симетричної флотаційної схеми  $\Pi = K = 2$ :

$$\varepsilon'_{рез}(k_p) = 1,5St_\phi.$$

Раніше для однієї операції флотації ( $\Pi = K = 0$ ) крутизна була знайдена і складала  $\varepsilon'_{рез}(k_p) = 0,5St_\phi$  (див. табл. 4.7).

Очевидно, що зі збільшенням числа перечисних і контрольних операцій крутизна росте, тобто  $\varepsilon_{рез}(k)$  наближається до ідеальної ступінчастої. При доданні першої пари операцій ( $\Pi = K = 1$ ) до основної операції крутизна для схеми збільшується удвічі (в порівнянні з однією основною флотацією), при доданні ще однієї пари операцій ( $\Pi = K = 2$ ) крутизна збільшується утричі і т.д. Співвідношення між ростом крутизни і збільшенням числа перечисних і контрольних операцій справедливе тільки для симетричних схем ( $\Pi = K$ ) та ідентичних операцій  $\varepsilon_O(\xi) = \varepsilon_{\Pi i}(\xi) = \varepsilon_{K j}(\xi)$  і має вигляд:

$$\varepsilon'_{рез}(\xi_p) = (n + 1)\varepsilon'_O(\xi_p), \quad (5.122)$$

де  $\varepsilon'_O(\xi_p)$  – крутизна основної (та усіх інших) операцій.

Формула (5.122) справедлива для гравітаційних, магнітних, флотаційних та інших схем збагачення, за її допомогою по відомій крутизні  $\varepsilon'_O(\xi_p)$  окремої операції легко отримати крутизну  $\varepsilon'_{рез}(k_p)$  для симетричної схеми в цілому з будь-яким  $\Pi = K = n$ . Доцільно користуватися формулою (5.122) і табл. 4.7, де наведені  $\varepsilon'_O(\xi_p)$  для типових сепараторів.

Напр., формула (5.122) набуває вигляду:

– для гравітаційних схем з відсаджувальними машинами:

$$\varepsilon'_{рез}(\rho_p) = (n + 1)\sqrt{gh/[2\pi\alpha D(\rho_{\max} - \rho_{\min})]}, \quad (5.123)$$

– для флотаційних схем:

$$\varepsilon'_{рез}(k_p) = 0,5(n + 1)St_\phi. \quad (5.124)$$

Аналогічні формули можна отримати і для інших схем.

На жаль формула (5.122) придатна тільки для симетричних схем з ідентичними операціями ( $\varepsilon_O = \varepsilon_{Pi} = \varepsilon_{Kj}$ ), канонічних і напівканонічних. Для несиметричних схем і навіть для симетричних при неідентичних операціях використовують більш складні формули, що ускладнює аналіз.

Формули, які використовують:

– для канонічних схем з будь-яким числом переміщень і контрольних операцій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pez}(\xi) &= A(\xi) / [A(\xi) + B(\xi)]; \\ A(\xi) &= \varepsilon_O \varepsilon_{P1} \dots \varepsilon_{Pn} [(1 - \varepsilon_{K1}) \dots (1 - \varepsilon_{Kn}) + \\ &+ \varepsilon_{K1} (1 - \varepsilon_{K2}) \dots (1 - \varepsilon_{Kn}) + \dots + \varepsilon_{K1} \dots \varepsilon_{Kn}]; \\ B(\xi) &= (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_{K1}) \dots (1 - \varepsilon_{Kn}) [\varepsilon_{P1} \dots \varepsilon_{Pn} + \\ &+ (1 - \varepsilon_{P1}) \varepsilon_{P2} \dots \varepsilon_{Pn} + (1 - \varepsilon_{P1}) \dots (1 - \varepsilon_{Pn})]; \end{aligned} \quad (5.125)$$

– для напівканонічної схеми, в якій усі зворотні продукти повертаються в голову основної операції:

$$\varepsilon_{pez}(\xi) = \frac{\varepsilon_O \varepsilon_{P1} \varepsilon_{P2} \dots \varepsilon_{Pn}}{\varepsilon_O \varepsilon_{P1} \varepsilon_{P2} \dots \varepsilon_{Pn} + (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_{K1}) (1 - \varepsilon_{K2}) \dots (1 - \varepsilon_{Kn})}. \quad (5.126)$$

### 5.5.3. Аналіз циркулюючих навантажень

Аналіз циркулюючих навантажень показано на прикладі симетричної схеми  $P = K = 1$  (рис. 5.26 з). Якщо для усіх операцій симетричної схеми флотації характеристики  $\varepsilon_i(k)$  однакові, тобто якщо однакові добутки  $S_i t_{\phi i} = St_{\phi}$ , то схема в цілому є «збалансованою», і її результуюча сепараційна характеристика  $\varepsilon_{pez}(k) = \varepsilon_{1,4}$  має флотованість  $k_p = \ln 2 / (St_{\phi})$  і крутизну  $\varepsilon'_{pez}(k_p) = 0,5(n+1)St_{\phi}$ ;  $\varepsilon_{pez}(k)$  найбільш близька до ідеального ступінчастого закону  $\varepsilon_{id}(k) = 1(k - k_p)$ .

В іншому випадку, якщо  $\varepsilon_i(k)$  для окремих операцій неоднакові, тобто  $S_i t_{\phi i}$  відхиляються від середнього значення  $St_{\phi}$ , то симетрична схема стає «незбалансованою», в результаті чого  $\varepsilon_{pez}(k)$  сильніше відхиляється від  $\varepsilon_{id}(k)$ , а циркулюючі навантаження відхиляються від норми.

Сепараційні характеристики  $\varepsilon_{1,5}(k)$  і  $\varepsilon_{1,6}(k)$  для циркулюючих навантажень (продукти  $q_5$  і  $q_6$  рис. 5.26 з) мають такий вигляд [18]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1,5} = \varepsilon_{рез}(1 - \varepsilon_{II}) / \varepsilon_{II}; \\ \varepsilon_{1,6} = \varepsilon_{рез} \varepsilon_K (1 - \varepsilon_O) / (\varepsilon_O \varepsilon_{II}), \end{cases} \quad (5.127)$$

де  $\varepsilon_{рез}$  розраховується за формулою (5.126).

В збалансованому режимі обидва циркулюючих потоки  $q_5 = \varepsilon_{1,5} q_1$ ;  $q_6 = \varepsilon_{1,6} q_1 = \varepsilon_{1,6} Q_{вих} \gamma_{вих}(k) dk$  ідентичні за фракційним складом, при цьому в них максимально вилучаються мінеральні частинки з флотованістю  $k$ , яка дорівнює флотованості розділення  $k_p = x_p / S_{отфО} = \ln 2 / (S_{отфО})$ . Флотованість розділення  $k_p$  визначається з графіків  $\varepsilon_{рез}(k)$  за рівнянням  $\varepsilon_{рез}(k_p) = 0,5$ . В концентрат  $q_4$  сепаруються переважно частинки з флотованістю  $k > k_p$ , а у відходи – частинки з флотованістю  $k < k_p$ .

При одночасному збільшенні фронтів перелісної і контрольної операцій циркулюючі потоки стають різними, при цьому  $q_6(k) > q_5(k)$  для будь-якої фракції флотованості  $[k, k + dk]$  при  $0 < k < k_{max}$  і будь-якому живленні  $\gamma_{вих}(k)$ .

Навпаки, при зменшенні фронтів перелісної і контрольної операцій циркулюючі потоки також стають різними, але  $q_6(k) < q_5(k)$ .

Обидва циркулюючих потоки суттєво зростають при зменшенні фронту перелісної і збільшенні фронту контрольної флотації.

В усіх незбалансованих режимах графік  $\varepsilon_{рез}(k)$  більше відхиляється від ступінчастої  $\varepsilon_{i\partial}(k)$ , ніж для збалансованого режиму.

В схемах  $\Pi = K = 2$  (рис. 5.26 *д, е*) спостерігається різке збільшення циркулюючих потоків  $q_5$  і  $q_6$  при зменшенні фронтів перелісних і збільшенні фронтів контрольних операцій в порівнянні з фронтом основної операції. Циркулюючі потоки від  $\Pi$  перелісної і  $\Pi$  контрольної операцій коливаються менше.

Вихідні формули для  $\varepsilon_{1i}(k)$  канонічної і напівканонічної схем:

Для канонічної схеми  $\Pi = K = 2$  (рис. 5.26 *д*):

– циркуляція від I перелісної і I контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,5} = q_5 / q_1 = \varepsilon_{рез}(1 - \varepsilon_{II}) / \varepsilon_{II} \varepsilon_{II2};$$

$$\varepsilon_{1,6} = q_6 / q_1 = \frac{\varepsilon_{рез} \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_O) [1 - \varepsilon_{П1} (1 - \varepsilon_{П2})]}{\varepsilon_O \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2} [1 - \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_{K1})]};$$

– циркуляція від II перечисної і II контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,9} = q_9 / q_1 = \varepsilon_{рез} (1 - \varepsilon_{П2}) / \varepsilon_{П2};$$

$$\varepsilon_{1,10} = q_{10} / q_1 = \frac{\varepsilon_{рез} (1 - \varepsilon_O) (1 - \varepsilon_{K1}) \varepsilon_{K2} [1 - \varepsilon_{П1} (1 - \varepsilon_{П2})]}{\varepsilon_O \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2} [1 - \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_{K1})]}.$$

Для напівканонічної схеми  $\Pi = K = 2$  (рис. 5.26 е):

– циркуляція від I перечисної і I контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,5} = q_5 / q_1 = \varepsilon_{рез} (1 - \varepsilon_{П1}) / \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2};$$

$$\varepsilon_{1,6} = q_6 / q_1 = \varepsilon_{рез} \varepsilon_{K1} (1 - \varepsilon_O) / \varepsilon_O \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2};$$

– циркуляція від II перечисної і II контрольної операцій:

$$\varepsilon_{1,9} = q_9 / q_1 = \varepsilon_{рез} (1 - \varepsilon_{П2}) / \varepsilon_{П2};$$

$$\varepsilon_{1,10} = q_{10} / q_1 = \varepsilon_{рез} \varepsilon_{K2} (1 - \varepsilon_{K1}) (1 - \varepsilon_O) / \varepsilon_O \varepsilon_{П1} \varepsilon_{П2}.$$

В рівняннях для канонічної схеми  $\varepsilon_{рез}$  розраховується за формулами (5.125), а для напівканонічної – за формулою (5.126).

## 5.6. Моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням ком'ютерних технологій

Комп'ютерна система планування експерименту, така як STATGRAPHICS Plus for Windows, істотно змінила практику моделювання. Якщо раніше це вважалося сферою обмеженого кола кваліфікованих професіоналів в математичній статистиці, які володіють у досить повному обсязі її тонкощами, то сьогодні планування стало доступне широкому колу фахівців в інших галузях знань, зокрема, у збагаченні корисних копалин. Працюючи з модулем планування експерименту Design of Experiment (DOE), дослідник отримує повну впевненість в

тому, що проведений ним статистичний аналіз даних здійснюється найбільш коректним чином. Модуль DOE автоматично проводить дослідника через весь цикл планування експерименту. DOE допомагає сформулювати критерій оптимальності плану експерименту, пропонує ряд оптимальних планів і наводить всі необхідні табличні та графічні викладки на кожному етапі проведення експерименту .

У всіх видах експериментів результати та висновки залежать від кількості різнорідних і по-різному зібраних даних. Тому перша послуга, яку надає модуль DOE – це допомога в організації збору інформації про досліджуваній процес, для чого передбачена можливість генерації великої кількості як стандартних , так і нестандартних робочих таблиць, їх редагування і роздрук (рис. 5.29).

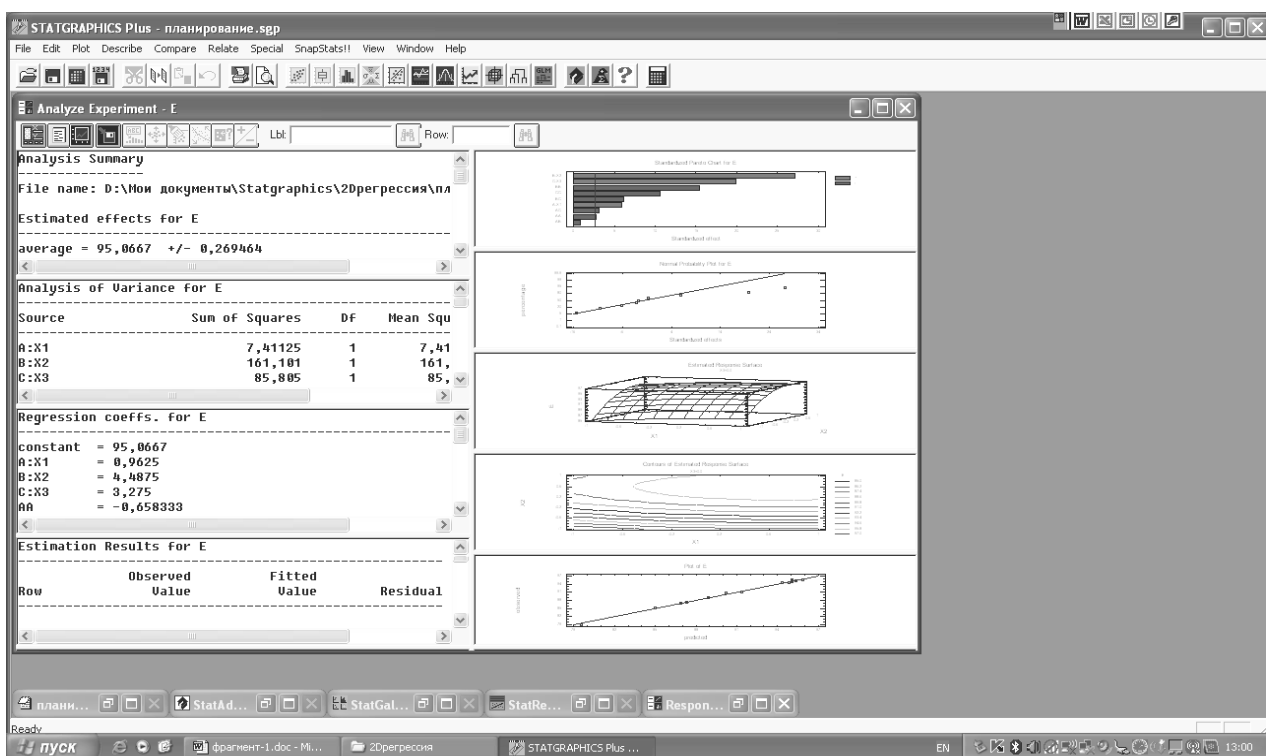


Рис.5.29 – Робочий інтерфейс програми Statgraphics при роботі в модулі DOE.

У плануванні експерименту значна увага приділяється способам відображення експериментальної інформації. У STATGRAPHICS включений весь спектр графічних процедур, які дозволяють підбирати, а також ясно і точно «простежувати» особливості аналізованого матеріалу, починаючи від карт Парето і до тривимірних поверхонь відгуку різного виду. При цьому всі графічні відображення є інтерактивними . Можна (як в автоматичному, так і ручному режимах) підібрати найбільш ілюстративні малюнки та графіки експериментальних планів, у супроводі відповідних чисельних результатів .

Модуль планування експерименту програми STATGRAPHICS Plus for Windows надає повний набір різних типів планів аж до тих, в яких враховуються взаємодії аналізованих факторів по восьмий порядок включно. Крім того, за бажанням експериментатора можуть бути розглянуті взаємодії більш високого порядку. Все це разом узятє, включаючи експертну консультаційну систему StatAdvisor, що допомагає інтерпретувати результати і виявляти вади в проведеному аналізі, дозволяє говорити про модуль DOE, як про високорозвинений інструмент, що суттєво підвищує ефективність планування експерименту.

Модуль DOE програмного пакету STATGRAPHICS широко використовується при дослідженні технологічних процесів збагачення корисних копалин. Більшість з цих процесів носять масовий статистичний характер і їхній опис неможливий без застосування методів математичної статистики. У більшості випадків завдання дослідника-збагачувача зводиться до розробки статистичної регресійної моделі процесу у вигляді поліноміальної залежності вихідного параметра (параметрів), званого цільовою функцією або параметром оптимізації від ряду вхідних.

Разом з тим, моделювання процесів збагачення корисних копалин із застосуванням комп'ютерних технологій являє собою окрему специфічну галузь знань і заслуговує на окремий – більш докладний розгляд в рамках спеціального видання.

## **5.7. Практика чисельного (комп'ютерного) моделювання**

Комп'ютерне (або цифрове, чисельне) моделювання (digital simulation, Computer simulation) - дослідження об'єктів, зокрема технологічних процесів, пристроїв і систем за допомогою математичних моделей на комп'ютерах. Основні етапи комп'ютерного моделювання:

- розробка концептуальної моделі – феноменологічної і факторної моделі процесу;
- математичне моделювання (найпоширенішим є цифрове моделювання на основі створення моделей об'єктів планування експерименту);
- проведення комп'ютерних експериментів;
- аналіз та інтерпретація результатів.

Розрізняють аналітичне та імітаційне моделювання.

При аналітичному моделюванні одержують і вивчають математичні моделі реального об'єкта у вигляді алгебраїчних, диференціальних та інших рівнянь, а також передбачають здійснення однозначної обчислювальної процедури, що призводить до їх точного розв'язання.

При імітаційному моделюванні досліджують математичні моделі у вигляді алгоритму, що відтворює функціонування досліджуваної системи. Імітаційна модель – це логіко-математичний опис об'єкта, який може бути використаний для експериментування на комп'ютері з метою проектування, аналізу і оцінки функціонування об'єкта.

Розглянемо більш докладніше порядок одержання математичної моделі.

Нехай експериментальне дослідження якоїсь невідомої закономірності  $y = f(x)$  дає результати спостережень у вигляді таблиці відповідних значень  $x_i$  і  $y_i$ . З використанням цих значень можна побудувати криву залежності  $y(x)$ . Цю ж залежність на основі теоретичних уявлень про характер дослідженого процесу можна приблизно представити емпіричною формулою  $y = \varphi(x)$ . Очевидно, що вибір емпіричної формули диктується умовою найкращого приближення  $\varphi(x)$  до  $f(x)$  в деякому інтервалі  $\alpha \leq x \leq \beta$ .

Функцію  $f(x)$  можна виразити різними емпіричними формулами. В деяких задачах за  $\varphi(x)$  вибирають функцію, для якої в заданому інтервалі  $\alpha \leq x \leq \beta$  найбільше значення величини  $|f(x) - \varphi(x)|$  буде менше, ніж при виборі будь якої іншої емпіричної формули. Більш зручно виконувати оцінку наближення за методом найменших квадратів.

### 5.7.1. Степеневі і показникові функції

В багатьох випадках хід досліджуваного явища добре описується степеневою і показниковою функцією або многочленом.

Многочлен степені  $n$  має наступний вигляд:

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + mx^n. \quad (5.128)$$

В окремих випадках він може мати вигляд:

$$y - k = m(x - l)^n. \quad (5.129)$$

При  $n = 1$  многочлен

$$\left. \begin{array}{l} y = mx \\ \text{або} \\ y = a + mx \end{array} \right\} \quad (5.130)$$

геометрично виражається прямою лінією.



При  $n$  цілому і більшому одиниці рівняння (5.128) являє собою криву параболічного типу з вершиною у точці  $(l, k)$ . Частковими формами цього рівняння є:

$$\left. \begin{aligned} y &= mx^n \\ y &= a + mx^n \end{aligned} \right\} \quad (5.131)$$

При  $n < 0$  рівняння (5.128) являє собою криву гіперболічного типу. Частковими формами цього рівняння є:

$$\left. \begin{aligned} xy &= a; \\ y &= \frac{a}{x^n}; \\ y &= \frac{a}{x^n} + b; \\ xy &= bx + ay; \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.132)$$

Функціональна залежність, яка характеризується  $\frac{dy}{dx} = ky$  зображується показовою функцією виду:

$$\left. \begin{aligned} y &= \\ y &= ae^{bx}. \end{aligned} \right\} ab^x; \quad (5.133)$$

В більш складних випадках іноді зручніше представити емпіричну залежність в формі:

$$\varphi(x) = a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \dots \quad (5.134)$$

Якщо емпіричну функцію  $\varphi(x)$  узяти у вигляді многочлену степеню  $n$ :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (5.135)$$

то при збільшенні степеню цього многочлена можна досягнути будь якого ступеня наближення і навіть повної збіжності між дослідними даними і формулою.

### 5.7.2. Вибір емпіричної формули. Метод вирівнювання

В деяких випадках вибір типу емпіричної формули може бути здійснений на основі теоретичних уявлень про характер дослідженої залежності. В інших випадках вдається підібрати таку формулу порівнянням кривий, побудованої по даним досліджень, із зразками відомих типових кривих (табл. 5.23). Іноді емпірична крива схожа на декілька кривих, рівняння яких різні. З іншого боку бувають випадки, коли та або інша емпірична формула достатньо точно відображає залежність між заданими чисельними значеннями величин, але типовий графік цієї формули зовсім не схожий на експериментальну криву. Це може мати місце, коли крива і графік формули побудовані для різних проміжків змінення аргументу. Змінення чисельних значень коефіцієнтів, що входять у формулу, часто різко змінюють вид її графіка. Вибір масштабу координатних осей відображується на формі побудованої кривій, що також може привести до враження про відмінність експериментальній кривій від графіка формули, яка їй цілком відповідає.

Тому раніше, чим визначати чисельні значення коефіцієнтів у вибраній емпіричній формулі, необхідно перевірити можливість її використання *методом вирівнювання*. Тільки після цього можна перейти до визначення тих значень постійних коефіцієнтів, які дозволять отримати найкраще наближення дослідних і розрахованих величин.

Метод вирівнювання (табл. 5.23) полягає у перетворенні функції  $y = \varphi(x)$  таким чином, щоб перетворити її в лінійну функцію. Досягається це заміною перемінних  $x$  і  $y$  новими перемінними  $X = \psi(x, y)$  і  $Y = \xi(x, y)$ , які вибираються так, щоб виходило рівняння прямої лінії:

$$Y = A + BX \quad (5.136)$$

Розраховані значення  $X_i$  і  $Y_i$  відповідно заданих  $x_i$  і  $y_i$  наносять на діаграму з прямокутними координатами  $(X, Y)$ . Якщо побудовані таким чином точки розташовуються поблизу прямої лінії, вибрана формула  $y = \varphi(x)$  підходить для характеристики залежності  $y = f(x)$ .

### 5.7.3. Визначення коефіцієнтів емпіричної формули. Спосіб середніх

Після встановлення придатності вибраної формули для відображення дослідженої залежності перемінних необхідно визначити чисельні значення коефіцієнтів, які входять у формулу. Найкращі результати

дає використання способу найменших квадратів. Однак цей спосіб громіздкий. Тому в багатьох випадках його можна замінити більш простим способом середніх, який дає менш точні, але достатньо задовільні результати. Спосіб середніх полягає у наступному: після використання метода вирівнювання і отримання лінійної залежності (5.136) складають умовні рівняння  $Y_i = A + BX_i$ , число  $n$  яких дорівнює числу відповідних значень  $X_i$  і  $Y_i$ , які існують. Умовні рівняння розділяють на дві приблизно рівні групи. Групування рівнянь звичайно виконують в послідовності дослідних даних. Рівняння, що входять у кожну групу, складають і отримують два підсумкових рівняння (5.137):

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^k Y_i &= kA + B \sum_1^k X_i; \\ \sum_{k+1}^n Y_i &= (n-k)A + B \sum_{k+1}^n X_i \end{aligned} \right\} \quad (5.137)$$

При сумісному вирішенні рівнянь (5.137) знаходять невідомі коефіцієнти  $A$  і  $B$ .

**Приклад 5.22.** В результаті досліджень отримані експериментальні дані залежності параметра  $X$  від параметра  $Y$  (табл. 5.22).

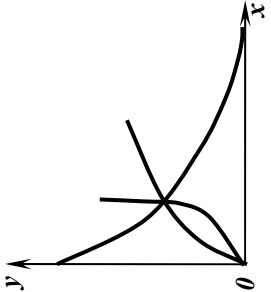
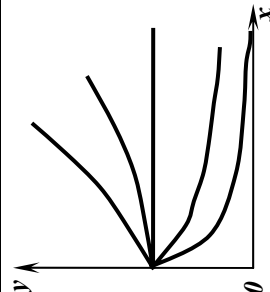
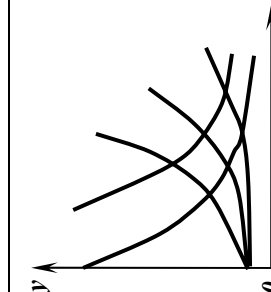
**Таблиця 5.22 – Експериментальні дані**

$x$	273	283	288	293	313	333	353	373
$y$	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

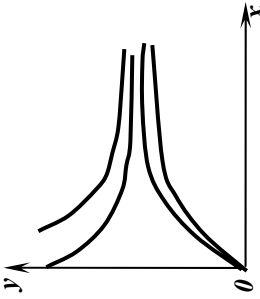
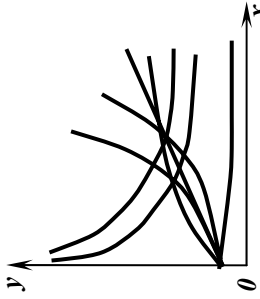
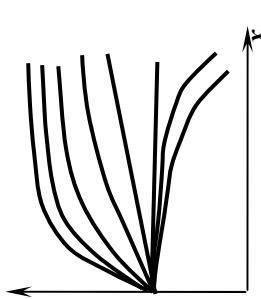
Необхідно вибрати емпіричну формулу, яка найточніше описує отриману експериментальну залежність.

Рішення. Емпіричну формулу будьмо вибирати з залежностей 1 – 7 (табл. 5.24) у відповідності до наведених рекомендацій. Результати розрахунків наведені в табл. 5.25.

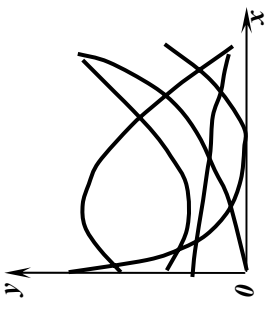
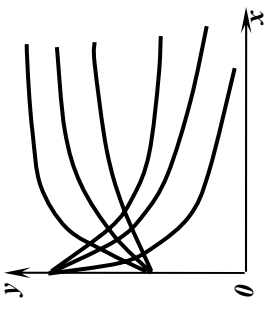
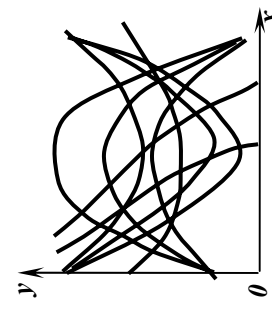
Таблиця 5.23 – Графіки формул і способи їх вирівнювання

№	Типові криві	Формула	Способи вирівнювання	Лінійне рівняння, отримане при вирівнюванні	Примітка
I	2	3	4	5	6
I		$y = ax^b$ (графік для $a = const$ )	$X = \lg y$ $Y = \lg y$	$Y = \lg a + bX$	
II		$y = ae^{bx}$ (графік для $a = const$ )	$Y = \lg y$	$Y = \lg a + 0,4343bX$	$0,4343 = \lg e$
III		$y = \frac{1}{a + bx}$	$Y = \frac{1}{y}$	$Y = a + bX$	

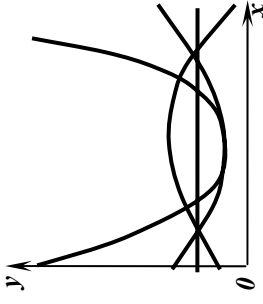
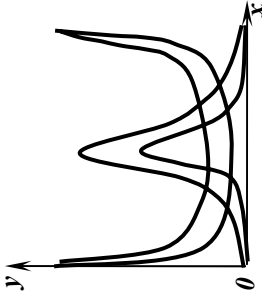
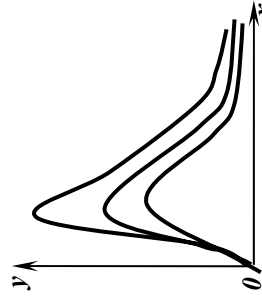
Продовження табл. 5.23

1	2	3	4	5	6
IV		$y = \frac{x}{a + bx}$	$Y = \frac{x}{y}$	$Y = a + bX$	
V		$y = c + ax^b$	<p>Якщо <math>b</math> відоме:  <math>X = x^b</math>.                      Якщо <math>b</math> невідоме,                      визначають <math>c</math> (див.                      примітку) і тоді  <math>X = \lg x</math>  <math>Y = \lg(y - c)</math></p>	$y = c + ax$  $Y = \lg a + bX$	<p>Криві аналогічні кривим I, але зміщені в напрямку осі ОУ. Для визначення <math>C</math> на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами <math>x_1</math> і <math>x_2</math> і відповідними ординатами <math>y_1</math> і <math>y_2</math> та третю точку з абсцисою <math>x_3 = \sqrt{x_1 x_2}</math> і ординатою <math>y_3</math>:</p> $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$ <p>При <math>b = 1</math> рівняння V перетворюється на лінійне:  <math>y = c + ax</math>.</p>
VI		$y = c + ae^{bx}$ (графік для $c = const,$ $a < 0$ )	<p>Визначають <math>c</math>                      (див. примітку) і                      тоді  <math>Y = \lg(y - c)</math></p>	$Y = \lg a + 0,4343bX$	<p>Криві аналогічні кривим II, але зміщені в напрямку осі ОУ. Для визначення <math>C</math> на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами <math>x_1</math> і <math>x_2</math> і відповідними ординатами <math>y_1</math> і <math>y_2</math> та третю точку з абсцисою <math>x_3 = (x_1 + x_2)/2</math> і ординатою <math>y_3</math>:</p> $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$

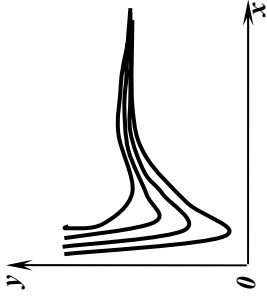
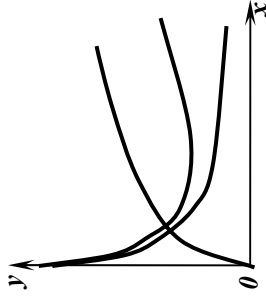
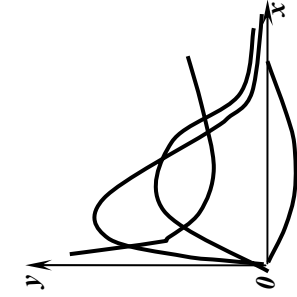
Продовження табл. 5.23

1	2	3	4	5	6
<p><b>VI</b></p>		$y = a + bx + c^2$	$Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ <p>де <math>x_i</math> і <math>y_i</math> – координати будь якої точки заданої кривої. При виборі значень <math>x</math>, які створюють арифметичну прогресію з різницею <math>h</math>  <math>Y = \Delta y = y_{i+1} - y_i</math></p>	$Y = (b + cx_i) + cx$ $Y = (bh + ch^2) + 2chx$	<p>Після визначення <math>b</math> і <math>c</math> знаходять <math>a</math> з рівняння</p> $\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2,$ <p>де <math>n</math> число заданих значень <math>x</math>.</p>
<p><b>VIII</b></p>		$y = \frac{a + bx}{c + dx}$	$Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}$	$Y = A + Bx$	<p>Замість коефіцієнтів <math>a</math>, <math>b</math> і <math>c</math> визначають <math>A</math> і <math>B</math> та висувають емпіричну формулу у вигляді</p> $y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}$
<p><b>IX</b></p>		$y^2 = a + bx + cx^2$			<p>Введенням нової перемінної <math>Z = y^2</math> приходять до формули <b>VI</b>.</p>

Продовження табл. 5.23

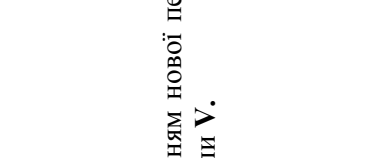
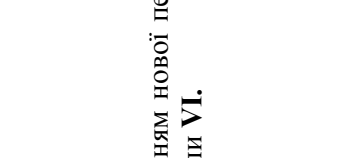
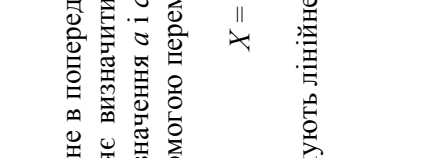
1	2	3	4	5	6
X		$y = ae^{bx+cx^2}$			Введенням нової перемінної $Z = \lg y$ приходять до формули <b>VII</b> .
XI		$y = \frac{1}{a + bx + cx^2}$			Введенням нової перемінної $Z = x/y$ приходять до формули <b>VII</b> .
XII		$y = \frac{x}{a + bx + cx^2}$			Введенням нової перемінної $Z = x/y$ приходять до формули <b>VII</b> .

Продовження табл. 5.23

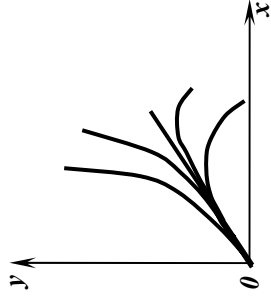
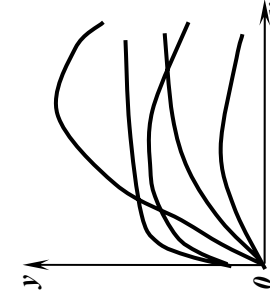
1	2	3	4	5	6
XIII		$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$			<p>Введенням нової перемінної <math>Z = 1/x</math> приходять до формули VII.</p>
XIV		$y = a + b \lg x + c \lg^2 x$			<p>Введенням нової перемінної <math>Z = \lg x</math> приходять до формули VII</p>
XV		$y = ax^b e^{cx}$	<p>При виборі значень <math>x</math>, які створюють арифметичну прогресію з різницею <math>h</math>  <math>X = \Delta \lg x</math>  <math>Y = \Delta \lg y</math></p>	$Y = 0,4343hc + bX$	<p>Після визначення <math>b</math> і <math>c</math> знаходять <math>a</math> з рівняння</p> $\sum \lg y = n \lg a + b \sum \lg x + 0,4343c \sum x$ <p>де <math>n</math> число заданих значень <math>x</math>.</p>



Продовження табл. 5.23

1	2	3	4	5	6
<p>XVI</p>		$y = ae^{bx^c}$			<p>Введенням нової перемінної <math>Z = \lg y</math> приходять до формули V.</p>
<p>XVII</p>		$y = ae^{be^{cx}}$			<p>Введенням нової перемінної <math>Z = \lg y</math> приходять до формули VI.</p>
<p>XVIII</p>		$y = ae^{bx} + ce^{dx}$	<p>При виборі значень <math>x</math>, які створюють арифметичну прогресію з різницею <math>h</math>  <math>X = y_1/y</math>  <math>Y = y_2/y</math>,                  де <math>y, y_1, y_2</math> – ординати точок кривій для послідовних абсцис <math>x, x_1, x_2</math></p>	$Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh} - e^{dh}$	<p>Наведене в попередньому стовбці лінійне рівняння дозволяє визначити коефіцієнти <math>b</math> і <math>d</math>, після чого для визначення <math>a</math> і <math>c</math> знов виконують вирівнювання за допомогою перемінних</p> $X = e^{(b-d)x}, Y = ye^{-dx}$ <p>і отримують лінійне рівняння</p> $Y = c + aX.$

Продовження табл. 5.23

1	2	3	4	5	6
XIX		$y = a + bx + ce^{dx}$ (графік для $a = const,$ $b = const$ )	При виборі значень $x$ , які створюють арифметичну прогресію з різницею $h$ $Y = \lg A^x y$	$Y = \lg c(e^{dh} - 1)^2 + 0,4343 dx$	Після визначення коефіцієнтів $c$ і $d$ виконують нове вирівнювання за допомогою $Y = y - ce^{dx}$ $Y = a + bx,$ з якого визначають $a$ і $b$ .
XX		$y = ax^b + cx^d$ (графік для $b > 0,$ $d > 0$ )	$X = \frac{y_1}{y}, Y = \frac{y_2}{y}$ де $y, y_1$ і $y_2$ – ординати точок кривої для будь яких послідовних значень абсцис $x, x_1$ і $x_2$ , які створюють геометричну прогресію з знаменником $q$	$Y = (q^b + q^d) X - q^{b+d}$	Після визначення коефіцієнтів $b$ і $d$ виконують нове вирівнювання за допомогою $X = x^{d-b}, Y = yx^{-b}$ і отримують лінійне рівняння $Y = a + cX$ з якого визначають $a$ і $c$ .
XXI	Графіки кривих мають різну форму	$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$	$Y = A^{n-1} y,$ де постійне значення різностей при значеннях аргумента, які арифметичну прогресію з різницею $h$	$Y = (n-1)h^{n-1} \times (a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ha_n + h!h^{n-1} a_n x$	З рівняння попереднього стовпця визначають коефіцієнти $a_n$ і $a_{n-1}$ при вищих степенях $x$ . Потім здумки, що $Z = y - a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1},$ складають нову раціональну функцію степені $n-2$ : $Z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots$ і тим же способом визначають $a_{n-2}, a_{n-3}$ і т.д. Многочлени вище 4-ої степені використовуються рідко, тому звичайно після першого визначення коефіцієнтів при вищих степенях $x$ ( $a_4$ і $a_3$ ) приводять до формули VII.

*Примітки.*

1. Пояснення до таблиці 5.23.

Перший стовпець таблиці – умовний порядковий номер залежності. Другий стовпець містить графік функцій, наведених у третьому стовпці. Для кожної функції побудовано декілька кривих, які відповідають різним значенням постійних коефіцієнтів. При виборі формули слід враховувати, що емпірична крива може бути подібна тільки частині типової кривої у деяких межах аргументу. Це є достатньо для застосування формули в даних межах. В четвертому стовпці таблиці вказані способи заміни перемінних, які приводять до вирівнювання функціональної залежності, а в п'ятому стовпці – вид отриманій після вирівнювання лінійної залежності. В останньому стовпці наведені примітки, які відносяться до методів визначення постійних коефіцієнтів, до способів перетворення формул і вторинного вирівнювання.

2. Формули, які найчастіше використовуються для описання залежностей між досліджуваними величинами:

$$y = ax + b; \quad (1) \quad y = ab^x; \quad (3)$$

$$y = ax^b; \quad (2) \quad y = I + b/x; \quad (4)$$

$$y = a \ln x + b. \quad (7)$$

Таблиця 5.24 – Простіші необхідні умови для наявності емпіричних залежностей 1 – 7.

№	$\bar{X}_s$	$\bar{Y}_s$	Формула	Вирівнювання	№	$\bar{X}_s$	$\bar{Y}_s$	Формула	Вирівнювання
1	$(x_1+x_n)/2$	$(y_1+y_n)/2$	$y = ax + b$		5	$(x_1+x_n)/2$	$(y_1+y_n)/2$	$y = I/(ax + b)$	$Y = ax + b$ де $Y = I/y$
2	$\sqrt{x_1 \cdot x_n}$	$\sqrt{y_1 \cdot y_n}$	$y = ax^b$	$Y = a + bX$ де $X = \lg x$ , $Y = \lg y$ , $\alpha = \lg a$	6	$2x_1x_n/(x_1+x_n)$	$2y_1y_n/(y_1+y_n)$	$y = x/(ax + b)$	$Y = ax + b$ де $Y = x/y$
3	$(x_1+x_n)/2$	$(y_1+y_n)/2$	$y = ab^x$ або $y = ae^{\beta x}$ , де $\beta = \ln b$	$Y = a + \beta x$ де $Y = \lg y$ , $\alpha = \lg a$ , $\beta = \lg b$	7	$\sqrt{x_1 \cdot x_n}$	$\sqrt{y_1 \cdot y_n}$	$y = a \lg x + b$	$y = aX + b$ де $X = \lg x$
4	$2x_1x_n/(x_1+x_n)$	$2y_1y_n/(y_1+y_n)$	$y = a + b/x$	$Y = ax + b$ де $Y = xy$					

**Таблиця 5.25 – Вибір емпіричної формули**

Розрахункові		Експе- ри- мент $\tilde{y}$	Різниця $\tilde{y} - \bar{y}$	Формула	Висновок
$\bar{x}_s$	$\bar{y}_s$				
$\frac{x_1 + x_n}{2} =$ $= \frac{273 + 373}{2} =$ $= 323$	$\frac{y_1 + y_n}{2} =$ $= \frac{29,4 + 77,3}{2} =$ $= 53,5$	50,5	2,85	$y = ax + b$	Мало під- ходить
$\sqrt{x_1 x_n} =$ $= \sqrt{273 \cdot 373} =$ $= 319,1$	$\sqrt{y_1 y_n} =$ $= \sqrt{29,4 \cdot 77,3} =$ $= 47,7$	48,7	1,0	$y = ax^b$	Підходить краще ін- ших фор- мул
$\frac{x_1 + x_n}{2} = 323$	$\sqrt{y_1 y_n} = 47,7$	50,5	2,8	$y = ab^x$	Мало під- ходить
$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} =$ $= 2 \cdot \frac{273 \cdot 373}{273 + 373} =$ $= 315,3$	$\frac{y_1 + y_n}{2} = 53,35$	46,9	6,45	$y = a + \frac{b}{x}$	Не підхо- дить
$\frac{x_1 + x_n}{2} = 323$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} =$ $= 2 \cdot \frac{29,4 \cdot 77,3}{29,4 + 77,3} =$ $= 42,6$	50,5	7,9	$y = \frac{1}{ax + b}$	Не підхо- дить
$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} = 315,3$	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} = 42,6$	46,9	4,3	$y = \frac{x}{ax + b}$	Не підхо- дить
$\sqrt{x_1 x_n} = 319,1$	$\frac{y_1 + y_n}{2} = 53,35$	48,7	4,65	$y = a \ln x + b$	Не підхо- дить

На основі виконаного рішення слід прийняти степеневу залеж-  
ність  $y = ax^b$ .

## ДОДАТОК А

Густина і твердість мінералів розділюваних  
гравітаційними процесами

Мінерал	Хімічний склад		Густина, кг/м <sup>3</sup>	Твердість (по Моосу)
	формула	вміст, %		
1	2	3	4	5
<i>Алмаз</i>	C	100,0 C	3500	10,0
<i>Алюміній</i>	Al	100,0 Al	2600	2,9
Андалузит	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·SiO <sub>2</sub>	63,2 Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3200	7,0
Каолін	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·2SiO <sub>2</sub> ·2H <sub>2</sub> O	39,5 Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2600	2,3
Корунд	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	100,0 Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4000	9,0
Шпінель	MgO·Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	71,8 Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3800	8,0
<i>Барій</i>	Ba	100,0 Ba	3600	3,5
Барит	BaSO <sub>4</sub>	65,7 BaO	4500	3,7
Вітерит	BaCO <sub>3</sub>	82,7 BaO	3750	4,2
<i>Вольфрам</i>	W	100,0 W	19000	7,5
Вольфраміт	(Fe, Mn) WO <sub>4</sub>	74,0 WO <sub>3</sub>	7000	6,0
Гюбнерит	MnWO <sub>4</sub>	75,0 WO <sub>3</sub>	7400	4,5
Ферберит	FeWO <sub>4</sub>	76,3 WO <sub>3</sub>	7000	4,5
Шеєліт	CaWO <sub>4</sub>	80,6 WO <sub>3</sub>	6000	5,0
<i>Залізо</i>	Fe	100,0 Fe	7800	4,5
Гематит	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	70,0 Fe	5100	6,0
Гетит	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·H <sub>2</sub> O	63,0 Fe	3800	5,0
Лімоніт	2Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·3H <sub>2</sub> O	66,5 Fe	3800	5,4
Магнетит	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	72,4 Fe	5100	6,0
Пірит	FeS <sub>2</sub>	46,6 Fe	5100	6,3
Сидерит	FeCO <sub>3</sub>	48,3 Fe	3800	4,0
<i>Золото(самородне)</i>	Au	до 99,7 Au	19000	2,5
Калаверит	(Au, Ag) Te <sub>2</sub>	39,5 Au; 3,1 Ag	9000	2,5
Кренерит	(Au, Ag) Te <sub>2</sub>	39,5 Au; 3,1 Ag	8350	2,0
Петцит	(Au, Ag) <sub>2</sub> Te	25,4 Au; 41,8 Ag	9000	3,0
Сильваніт	(Au, Ag) Te <sub>4</sub>	24,2 Au; 13,3 Ag	8100	2,5
<i>Магній</i>	Mg	100,0 Mg	1700	2,5
Доломіт	CaCO <sub>3</sub> ·MgCO <sub>3</sub>	21,9 MgO; 30,4 CaO	2800	3,8
Змійовик	Mg <sub>6</sub> [Si <sub>4</sub> O <sub>10</sub> ](OH) <sub>8</sub>	43,5 MgO; 43,5 SiO <sub>2</sub>	2800	4,0
Магнезит	MgCO <sub>3</sub>	47,8 MgO	3100	4,0
<i>Марганець</i>	Mn	100,0 Mn	7400	6,0
Манганіт	Mn <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·H <sub>2</sub> O	62,5 Mn	4300	3,8
Піролюзит	MnO <sub>2</sub>	63,0 Mn	5000	2,3
Псиломелан	Mn <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	63,0 Mn	4150	5,5
Родоніт	MnSiO <sub>3</sub>	42,0 Mn	3500	6,2
Родохрозит	MnCO <sub>3</sub>	62,0 Mn	3500	4,2
<i>Мідь(самородна)</i>	Cu	до 100,0 Cu	8800	2,8
Азурит	2CuCO <sub>3</sub> ·Cu(OH) <sub>2</sub>	55,2 Cu	3700	3,8
Ковелін	CuS	66,4 Cu	4600	2,0
Малахіт	CuCO <sub>3</sub> ·Cu(OH) <sub>2</sub>	57,4 Cu	3900	3,8
Халькозин	Cu <sub>2</sub> S	79,8 Cu	5600	3,0
Халькопірит	CuFeS <sub>2</sub>	34,5 Cu	4200	3,7
Хризосола	CuSiO <sub>3</sub> ·2H <sub>2</sub> O	36,1 Cu	2100	3,5

**Продовження табл.**

1	2	3	4	5
<u>Молибден</u>	Mo	100,0 Mo	10200	5,5
Вульфеніт	PbMoO <sub>4</sub>	26,0 Mo	6800	3,0
Молибденіт	MoS <sub>2</sub>	до 60,0 Mo	4700	1,3
Молибдит	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·MoO <sub>3</sub> ·7H <sub>2</sub> O	66,7 Mo	4500	1,5
Повеліт	CaMoO <sub>4</sub>	48,0 Mo	4500	3,5
<u>Нікель</u>	Ni	100,0 Ni	8900	4,0
Герсдорфіт	NiAsS	35,4 Ni	5800	5,5
Нікелін	NiAs	44,0 Ni	7500	5,5
Пентландит	(Fe, Ni) <sub>9</sub> S <sub>8</sub>	до 44,0 Ni	4600	3,5
<u>Олово</u>	Sn	100,0 Sn	7300	2,0
Каситерит	SnO <sub>2</sub>	79,0 Sn	6900	6,5
Станін	Cu <sub>2</sub> FeSnS <sub>4</sub>	27,6 Sn; 29,6 Cu	4400	4,0
<u>Платина (самородна)</u>	Pt	до 96,0 Pt	21400	4,5
Поліксен	(Pt, Fe)	88,0 Pt; 11,0 Fe	17400	4,5
Спериліт	PtAs <sub>2</sub>	56,5 Pt; 43,5 As	10600	6,5
<u>Свинець</u>	Pb	100,0 Pb	11300	1,5
Англезит	PbSO <sub>4</sub>	68,3 Pb	6200	2,5
Вульфеніт	PbMoO <sub>4</sub>	60,0 Pb	6700	3,5
Галеніт	PbS	86,6 Pb	7450	2,5
Церусит	PbCO <sub>3</sub>	83,5 Pb	6550	3,3
Піроморфіт	Pb <sub>5</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> Cl	76,0 Pb	7000	4,0
<u>Срібло (самородне)</u>	Ag	До 99,9 Ag	10500	2,8
Аргентит	Ag <sub>2</sub> S	87,1 Ag	7300	2,5
Піраргірит	AgSbS <sub>3</sub>	59,8 Ag	5830	2,3
Полібазит	(Ag, Cu) <sub>16</sub> Sb <sub>2</sub> S <sub>11</sub>	84,9 Ag	6100	3,0
Прустит	Ag <sub>3</sub> AsS <sub>3</sub>	65,4 Ag	5600	2,5
Стефаніт	Ag <sub>5</sub> SbS <sub>4</sub>	68,3 Ag	6200	2,5
<u>Титан</u>	Ti	100,0 Ti	4500	4,0
Анагаз	TiO <sub>2</sub>	до 99,5 Ti	3900	6,0
Брукіт	TiO <sub>2</sub>	до 99,5 Ti	4000	6,3
Ільменіт	FeTiO <sub>3</sub>	до 52,8 Ti	4600	5,5
Лейкоксен	(TiO <sub>2</sub> ) <sub>18</sub> ·Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	до 97,6 Ti	4000	5,0
Лопарит	(Ce, Na, Ca)(Ti, Nb)O <sub>3</sub>	до 99,5 Ti	4800	5,8
Перовськіт	CaTiO <sub>3</sub>	до 57,8 Ti	4000	5,8
Рутил	TiO <sub>2</sub>	до 99,5 Ti	4200	6,0
Сфен	CaSiTiO <sub>5</sub>	до 40,8 Ti	3500	5,5
<u>Хром</u>	Cr	100,0 Cr	7100	9,0
Хроміт	FeCr <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	65,0 Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4700	6,5
Хромшпінеліди	(Mg, Fe)(Cr, Al, Fe) <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	до 75,0 Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4700	6,5
<u>Цинк</u>	Zn	100,0 Zn	7100	2,5
Вілеміт	Zn <sub>2</sub> [SiO <sub>4</sub> ]	59,0 Zn	5600	4,3
Вюртцит	ZnS	до 63,0 Zn	4300	4,0
Каламін	Zn <sub>4</sub> [(OH) <sub>2</sub> Si <sub>2</sub> O <sub>7</sub> ]-H <sub>2</sub> O	54,0 Zn	3450	4,7
Смітсоніт	ZnCO <sub>3</sub>	52,0 Zn	5100	6,3
Сфалерит	ZnS	67,0 Zn	4100	4,0
Франклініт	ZnFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	до 25,0 Zn	6500	5,3

**Закінчення табл.**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<i>Цирконій</i>	Zr	100,0 Zr	-	-
Баделейт	ZrO <sub>2</sub>	до 99,0 Zr	5800	6,5
Циркон	ZrSiO <sub>4</sub>	67,2 Zr	4700	7,5
<i>Інші мінерали</i>				
Дистен	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> [SiO <sub>4</sub> ]	63,2 Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3600	6,0
Монацит	(Ce, La){PO <sub>4</sub> }	до 70,0 TR <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5200	5,8
Ставроліт	Fe <sub>2</sub> Al <sub>9</sub> [SiO <sub>4</sub> ] <sub>4</sub> (OH)O <sub>7</sub>	48,1 Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3700	7,2
Флюорит	CaF <sub>2</sub>	51,3 Ca; 48,7 F	3150	4,0
<i>Породні мінерали</i>				
Галуазит	Al <sub>4</sub> (OH) <sub>8</sub> [Si <sub>4</sub> O <sub>10</sub> ] <sub>n</sub> H <sub>2</sub> O	-	2600	2,0
Глина	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·2SiO <sub>2</sub> ·2H <sub>2</sub> O	-	2600	2,3
Кальцит	CaCO <sub>3</sub>	-	2710	3,2
Кварц	SiO <sub>2</sub>	-	2650	7,0
Мусковіт	KAl <sub>2</sub> [AlSi <sub>3</sub> O <sub>10</sub> ](OH) <sub>2</sub>	-	2830	2,5
Польові шпати	(K, Na, Ca)[AlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub> ]	-	2700	6,2
Флогопіт	KMg <sub>3</sub> [AlSi <sub>3</sub> O <sub>10</sub> ](F, OH) <sub>2</sub>	-	2900	2,5
Хлорити	(Mg, Fe) <sub>6-n</sub> (Al, Fe) <sub>n</sub> Al <sub>n</sub> Si <sub>4-n</sub> O <sub>10</sub>	-	3000	2,5

## ДОДАТОК Б

## Питома магнітна сприйнятливість деяких мінералів

Мінерал	Хімічна формула	Питома магнітна сприйнятливість, $\text{м}^3/\text{кг}\cdot 10^{-6}$
Амфібол	Мінерал класу силікатів	0,080 – 0,115
Апатит	$\text{Ca}_5[\text{CO}_3][\text{PO}_4]_3(\text{Fe}, \text{Cl}, \text{OH})$	0,001 – 0,004
Берил	$\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$	0,001
Біотит	$\text{KFe}_3(\text{OH}, \text{F})_2[\text{Al}, \text{Si}_3\text{O}_{10}]$	0,040 – 0,120
Брауніт	$\text{MnO}\cdot 3\text{Mn}_2\text{O}_3\cdot \text{SiO}_2$	0,150
Бурій залізняк	$n\text{Fe}_2\text{O}_3\cdot m\text{H}_2\text{O}$	0,025 – 0,250
Вернадіт	$\text{MnO}_2\cdot m\text{H}_2\text{O}$	0,050
Вольфраміт	$(\text{Fe}, \text{Mn})\text{WO}_4$	0,025 – 0,150
Гаусманіт	$\text{Mn}_2\text{O}_4$	0,070
Гематит	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	0,050 – 0,250
Гетит	$\text{Fe}_2\text{O}_3\cdot \text{H}_2\text{O}$	0,200 – 0,300
Гіпс	$\text{CaSO}_4\cdot 2\text{H}_2\text{O}$	0,010
Глауконіт	Силікат групи слюд	0,080
Гранат	Ортосилікат	0,100 – 0,200
Гюбнерит	$\text{MnWO}_4$	0,100
Дистен	$\text{Al}_2\text{O}_3[\text{SiO}_4]$	0,002 – 0,012
Егірин	Силікат групи піроксенів	0,110
Ільменіт	$\text{FeTiO}_3$	0,3 – 1,2
Каситерит	$\text{SnO}_2$	0,001 – 0,010
Колумбіт	$(\text{Fe}, \text{Mg})(\text{Nb}, \text{Ta})_2\text{O}_6$	0,025
Магнетит	$\text{Fe}_3\text{O}_4$	25 – 50
Маггеміт	$\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$	10 – 25
Манганіт	$\text{MnOOH}$	0,035 – 0,150
Мартит	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	0,2 – 10
Монацит	$(\text{Ce}, \text{La})\{\text{PO}_4\}$	0,010 – 0,025
Пірит	$\text{FeS}_2$	0,005 – 0,040
Піроксен	Мінерал класу силікатів	0,080
Піролюзит	$\text{MnO}_2$	0,025 – 0,100
Псиломелан	$\text{Mn}_2\text{O}_3$	0,060 – 0,120
Родохрозит	$\text{MnCO}_3$	0,170
Рутил	$\text{TiO}_2$	0,002 – 0,015
Сидерит	$\text{FeCO}_3$	0,035 – 0,150
Спекулярит	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	0,250 – 0,370
Ставроліт	$\text{Fe}_2\text{Al}_9[\text{SiO}_4]_4(\text{OH})\text{O}_7$	0,040 – 0,50
Тальк	$\text{Mg}_3[\text{Si}_4\text{O}_{10}](\text{OH})_2$	0,030



**ДОДАТОК В**  
**Електричні властивості деяких мінералів**

Мінерал	Хімічна формула	Електричні властивості	
		Питомий опір, Ом·м	Діелектрична проникність
1	2	3	4
Алмаз	C	10 <sup>14</sup>	16,5
Альбіт	Na[AlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub> ]	10 <sup>14</sup>	4,0
Ангідрит	CaSO <sub>4</sub>	10 <sup>11</sup>	5,7 – 7,0
Антрацит	C	10 <sup>10</sup>	7,4 – 9,5
Апатит	Ca <sub>5</sub> [CO <sub>3</sub> ][PO <sub>4</sub> ] <sub>3</sub> (Fe,Cl,OH)	10 <sup>16</sup>	7,4 – 10,5
Арсенопірит	FeAsS	10 <sup>8</sup>	81,0
Барит	BaSO <sub>4</sub>	10 <sup>14</sup>	5,0 – 12,0
Берил	Al <sub>2</sub> Be <sub>3</sub> [Si <sub>6</sub> O <sub>18</sub> ]	10 <sup>10</sup>	3,9 – 7,7
Біотит	KFe <sub>3</sub> (OH,F) <sub>2</sub> [Al,Si <sub>3</sub> O <sub>10</sub> ]	10 <sup>14</sup>	6,0 - 9,3
Боксит	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10 <sup>12</sup>	8,0 – 10,0
Брауніт	MnO·3Mn <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·SiO <sub>2</sub>	10 <sup>8</sup>	81,0
Бурий залізняк	nFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·mH <sub>2</sub> O	10 <sup>12</sup>	10,0
Вольфраміт	(Fe, Mn) WO <sub>4</sub>	10 <sup>9</sup>	15,0
Галеніт	PbS	10 <sup>8</sup>	81,0
Галіт	NaCl		5,6 – 7,3
Гематит	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10 <sup>8</sup>	25,0
Гетит	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·H <sub>2</sub> O	10 <sup>8</sup>	25,0
Гіпс	CaSO <sub>4</sub> ·2H <sub>2</sub> O	10 <sup>14</sup>	8,0 – 11,6
Графіт	C	10 <sup>8</sup>	81,0
Дистен	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> [SiO <sub>4</sub> ]	–	5,7 – 7,2
Золото	Au	10 <sup>8</sup>	81,0
Ільменіт	FeTiO <sub>3</sub>	10 <sup>8</sup>	33,7 – 81,0
Кальцит	CaCO <sub>3</sub>	10 <sup>11</sup> – 10 <sup>16</sup>	7,8 – 8,5
Каолініт	Al <sub>4</sub> [Si <sub>4</sub> O <sub>10</sub> ](OH) <sub>8</sub>	10 <sup>11</sup>	12,0
Каситерит	SnO <sub>2</sub>	10 <sup>11</sup>	24,0
Кварц	SiO <sub>2</sub>	10 <sup>14</sup>	4,2 – 5,0
Кіновар	HgS	10 <sup>11</sup>	33,7 – 81,0
Корунд	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10 <sup>9</sup>	5,6 – 6,3
Куприт	Cu <sub>2</sub> O	10 <sup>8</sup>	6,0
Магнетит	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	10 <sup>8</sup>	33,7 – 81,0
Манганіт	MnOOH	10 <sup>8</sup>	81,0
Марказит	Fe <sub>2</sub> S	10 <sup>8</sup>	33,7 – 81,0
Мікроклін	K[AlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub> ]	10 <sup>14</sup>	5,0 – 6,9
Молібденіт	MoS <sub>2</sub>	10 <sup>8</sup>	81,0
Монацит	(Ce, La){PO <sub>4</sub> }	10 <sup>15</sup>	12,0
Мусковіт	KAl <sub>2</sub> [AlSi <sub>3</sub> O <sub>10</sub> ](OH) <sub>2</sub>	10 <sup>14</sup>	6,0 – 8,0
Олігоклаз	nNa[AlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub> ]·mCa[Al <sub>2</sub> Si <sub>2</sub> O <sub>8</sub> ]	10 <sup>14</sup>	6,8
Ортоклаз	K[AlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub> ]	10 <sup>14</sup>	5,0 – 6,2
Пірит	FeS <sub>2</sub>	10 <sup>8</sup>	33,7 – 81,0
Піролюзит	MnO <sub>2</sub>	10 <sup>8</sup>	81,0
Піротин	Fe <sub>2</sub> S	10 <sup>8</sup>	81,0

Закінчення табл.

1	2	3	4
Пірохлор	$\text{NaCa}[\text{N}_2\text{O}_6](\text{OH}, \text{F})$	$10^{13}$	4,1 – 4,5
Платина природна	Pt	$10^8$	81,0
Польові шпати	Алюмосилікати Na, K, Ca, Ba	$10^{14}$	6,8
Псиломелан	$\text{Mn}_2\text{O}_3$	$10^8$	49,0 – 58,0
Рогова обманка	Гідросилікат Ca, Mg, Fe	$10^{13}$	7,0 – 8,0
Рутил	$\text{TiO}_2$	$10^8$	89,0 – 173,0
Сірка самородна	S	$10^{14}$	3,0 – 3,6
Срібло самородне	Ag	$10^8$	81,0
Сидерит	$\text{FeCO}_3$	$10^8$	7,0
Силіманіт	$\text{AlAlO}[\text{SiO}_4]$	–	9,3
Сільвін	KCl	$10^{14}$	4,8
Смітсоніт	$\text{ZnCO}_3$	$10^{14}$	8,0 – 9,3
Сподумен	$\text{LiAl}[\text{Si}_2\text{O}_6]$	$10^{12}$	8,4
Ставроліт	$\text{Fe}_2\text{Al}_9[\text{SiO}_4]_4(\text{OH})\text{O}_7$	–	6,8
Сфалерит	ZnS	–	7,8
Сфен	$\text{CaSiTiO}_5$	–	4,0 – 6,6
Танталіт	$(\text{Fe}, \text{Mn})\text{Ta}_2\text{O}_6$	$10^6$	–
Титаномагнетит	$(\text{Fe}, \text{Ti})\text{Fe}_2\text{O}_4$	$10^8$	–
Фаяліт	$\text{Fe}_2[\text{SiO}_4]$	$10^{11}$	81,0
Флюорит	$\text{CaF}_2$	$10^{14}$	62,0 – 85,0
Халькозин	$\text{Cu}_2\text{S}$	$10^8$	81,0
Халькопірит	$\text{CuFeS}_2$	$10^8$	–
Церусит	$\text{PbCO}_3$	$10^9$	2,3
Циркон	$\text{ZrSiO}_4$	$10^{12}$	8,6 – 15,0
Шееліт	$\text{CaWO}_4$	$10^{14}$	8,0

## ДОДАТОК Г

Критерій Ст'юдента  $t$ 

Число ступенів свободи $f$	Рівень значимості $\alpha$			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,71	2,05	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,76	3,66
29	1,70	2,05	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,58	3,29

## ДОДАТОК Д

Критерій Фішера  $F$ 

Рівень значимості $\alpha = 0,01$								
$\begin{matrix}  f_1 \\ f_2  \end{matrix}$	4	7	10	16	24	40	100	$\infty$
1	5625,0	5928,0	6056,0	6169,0	6234,0	6286,0	6334,0	6366,0
2	99,25	99,34	99,40	99,44	99,46	99,48	99,49	99,50
3	28,71	27,67	27,23	26,83	26,60	26,41	26,23	26,12
4	15,98	14,98	14,54	14,15	13,93	13,74	13,57	13,46
5	11,39	10,45	10,05	9,68	9,47	9,29	9,13	9,02
6	9,15	8,26	7,87	7,52	7,31	7,14	6,99	6,88
7	7,85	7,00	6,62	6,27	6,07	5,90	5,75	5,65
8	7,01	6,19	5,82	5,48	5,28	5,11	4,96	4,86
9	6,42	5,62	5,26	4,92	4,73	4,56	4,41	4,31
10	5,99	5,21	4,85	4,52	4,33	4,17	4,01	3,91
12	5,41	4,65	4,30	3,98	3,78	3,61	3,46	3,36
14	5,03	4,28	3,94	3,62	3,43	3,26	3,11	3,00
16	4,77	4,03	3,69	3,37	3,18	3,01	2,86	2,75
18	4,58	3,85	3,51	3,19	3,00	2,83	2,68	2,57
Рівень значимості $\alpha = 0,05$								
$\begin{matrix}  f_1 \\ f_2  \end{matrix}$	4	7	10	16	24	40	100	$\infty$
1	225,0	237,0	242,0	246,0	249,0	251,0	253,0	254,0
2	19,25	19,36	19,39	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
3	9,12	8,88	8,78	8,69	8,64	8,60	8,56	8,53
4	6,39	6,09	5,96	5,84	5,77	5,71	5,66	5,63
5	5,19	4,88	4,74	4,60	4,53	4,46	4,40	4,36
6	4,53	4,21	4,06	3,92	3,84	3,77	3,71	3,67
7	4,12	3,79	3,63	3,49	3,41	3,34	3,28	3,23
8	3,84	3,50	3,34	3,20	3,12	3,05	2,98	2,93
9	3,63	3,29	3,13	2,98	2,90	2,82	2,76	2,71
10	3,48	3,14	2,97	2,82	2,74	2,67	2,59	2,54
12	3,26	2,92	2,76	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
14	3,11	2,77	2,60	2,44	2,35	2,27	2,19	2,13
16	3,01	2,66	2,49	2,33	2,24	2,16	2,07	2,01
18	2,93	2,58	2,41	2,25	2,15	2,07	1,98	1,92

Примітка:  $f_1$  – відноситься до більшої дисперсії,  $f_2$  – до меншої.

**ДОДАТОК Е**

**Критерій Кохрена G**

Рівень значимості $\alpha = 0,01$								
$\lfloor \frac{f}{k} \rfloor$	1	3	6	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9999	0,9794	0,9172	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,8831	0,7606	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,7814	0,6410	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,6957	0,5531	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,6258	0,4866	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,5685	0,4347	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,5209	0,3932	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,4810	0,3592	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,4469	0,3308	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
15	0,5747	0,3317	0,2386	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,2654	0,1877	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
30	0,3632	0,1913	0,1327	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1508	0,1033	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1069	0,0722	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,1225	0,0585	0,0387	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
$\infty$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Рівень значимості $\alpha = 0,05$								
$\lfloor \frac{f}{k} \rfloor$	1	3	6	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9985	0,9392	0,8534	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,7977	0,6771	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,6841	0,5598	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,5981	0,4783	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,5321	0,4184	0,3568	0,3135	0,2612	0,2129	0,1667
7	0,7271	0,4800	0,3726	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,4377	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4027	0,3067	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,3733	0,2823	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
15	0,4709	0,2758	0,2034	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2205	0,1602	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
30	0,2929	0,1593	0,1137	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1259	0,0887	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,0895	0,0623	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0495	0,0337	0,0260	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
$\infty$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ДОДАТОК Ж

Критерій Пірсона  $\chi^2$

Число ступенів свободи $f$	Рівень значимості					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пілов П.І., Анісімов М.Т., Анісімов В.М. Математичне моделювання процесів збагачення корисних копалин: Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 104 с.
2. Козин В.З. Экспериментальное моделирование и оптимизация процессов обогащения полезных ископаемых. – М.: Недра, 1984. – 112 с.
3. Білецький В.С., Смирнов В.О. Технологія збагачення корисних копалин. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2007. – 272 с.
4. Шупов Л.П. Моделирование и расчет на ЭВМ схем обогащения. – М.: Недра, 1980. – 288 с.
5. Шупов Л.П. Прикладные математические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1972. – 168 с.
6. Рубинштейн Ю.Б., Волков Л.А. Математические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1987. – 296 с.
7. Папушин Ю.Л., Білецький В.С. Основи автоматизації гірничого виробництва. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2007. – 168 с.
8. Папушин Ю.Л., Смирнов В.О., Білецький В.С. Дослідження корисних копалин на збагачуваність. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2006. – 344 с.
9. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
10. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы. – М.: Мир, 1968. – 304 с.
11. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824 с.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
13. Рязанов Г.А. Электрическое моделирование с применением вихревых полей. – М.: Наука, 1969 – 336 с.
14. Барский Л.А., Рубинштейн Ю.Б. Кибернетические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1970. – 312 с.
15. Митрофанов С.И., Барский Л.А., Самыгин В.Д. Исследование полезных ископаемых на обогатимость. – М.: Недра, 1974. – 352 с.
16. Справочник по проектированию рудных обогатительных фабрик: Т. 1 / Редкол. О.Н. Тихонов – М.: Недра, 1988. – 374 с.
17. Фоменко Т.Г., Бутовецкий В.С., Погарцева Е.М. Исследование углей на обогатимость. – М.: Недра, 1978. – 262 с.

18. Тихонов О.Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
19. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 254 с.
20. Коткин А.М., Ямпольский М.Н., Геращенко К.Д. Оценка обогатимости угля и эффективности процессов обогащения. – М.: Недра, 1982. – 200 с.
21. Пожидаев В.Ф. Научные основы оценки обогатимости каменных углей и создание ресурсосберегающей технологии их переработки //Дис. на стиск. уч. степ. докт. техн. наук. Луганск: Восточнoукраинский национальный университет. 2001. - 285 с.
22. Горобець Л.Ж. Развитие научных основ измельчения твердых полезных ископаемых //Дис. на стиск. уч. степ. докт. техн. наук. Днепропетровск: Национальный горный университет. 2004. – 412 с.
23. Кирнаркский А.С. Технологические основы мокрой винтовой сепарации //Дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. Днепропетровск: Национальный горный университет. 2000. – 355 с.
24. Шпильовий Л. В. Технологічні основи автоматизації процесу згущення на збагачувальних фабриках (монографія). Донецьк: Східний видавничий дім. Донецьке відділення НТШ. 2011. — 184 с.
25. Младецький І.К. Моделювання процесу магнітної сепарації руд. Дніпропетровськ. 1986.
26. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М.: Издат. физ.-мат. литер., 1959. - 700 с.
27. Пилов П.И. Научные основы сепарации и водопотребления при обогащении руд. // Автореф. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. - Дн-ск, 1993, 42 с.
28. Мостика Ю.С. Развитие научных основ кинетики мокрой высокоградиентной магнитной сепарации слабомагнитных руд. //Дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. Днепропетровск: Национальный горный университет. 2005. – 285 с.
29. Пилов П.И., Мильцын А.М., Олевский В.И. Математическое моделирование и структурно-экстраполярный анализ в задачах обогащения: монография – 2-е изд., испр. и доп. – Д., Национальный горный университет, 2011. – 187 с.
30. Технологическая оценка минерального сырья. Методы исследования: Справочник / Под ред. П.Е. Остапенко. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
31. Технологическая оценка минерального сырья. Опытные установки: Справочник / Под ред. П.Е. Остапенко. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
32. Кармазин В.В. Магнитные, электрические и специальные методы обогащения полезных ископаемых. – М. – 2002.



*Для нотаток*



НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**Білецький Володимир Стефанович  
Смирнов Валерій Олександрович**

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ  
ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН**

Редакція авторська

Обкладинка і верстка

І. Венгренюк

Підп. до друку 20.10.2013. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.  
Друк цифровий. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 17,4.  
Обл. вид. арк. 15,2. Зам. 3-10202013. Наклад 150 пр.

Видавниче підприємство "Східний видавничий дім"  
(Державне свідоцтво № ДК 697 від 30.11.2001)  
83086, м. Донецьк, вул. Артема, 45  
тел/факс (062) 338-06-97, 337-04-80  
e-mail: svd3380697@gmail.com

УДК 622.7

**Білецький В.С., Смирнов В.О.**

**С 50 Моделювання процесів збагачення корисних копалин. –**  
Донецьк: Східний видавничий дім, 2013. – 304.с.

ISBN 978-966-317-191-3

Викладені основи моделювання процесів збагачення корисних копалин. Зокрема описані методи фізичного і математичного моделювання процесів. Наведено математичні описи гранулометричного і фракційного складу, технологічних операцій – дезінтеграції, сепарації, зневоднення та ін., а також методи переходу від лабораторних показників до промислових. З використанням праць провідних вітчизняних і зарубіжних науковців наведені приклади моделювання підготовчих, основних та заключних процесів збагачення корисних копалин.

Книга може бути корисною для робітників дослідних лабораторій збагачувальних фабрик, науково-дослідних і проектних інститутів і геологічних організацій а також для студентів спеціальності “Збагачення корисних копалин”.