Асимптотические свойства функций Ферреса

Н.П. Волчкова

Донецкий национальный технический университет

Функции Ферреса $T_\nu^\mu(x)$ ($\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $x \in (-1,1)$) определяются равенством

$$T_\nu^\mu(x) = \frac{e^{i\pi\mu}}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right),$$

где F - гипергеометрическая функция Гаусса (см.[1]).

В работе исследуются асимптотические свойства $T_\nu^\mu(x)$ при $\nu \to \infty$. Получено разложение для $T_\nu^\mu(x)$, аналогичное асимптотическому ряду Бесселя.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r \in (0,\pi)$ положим

$$d_k(r) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1} \operatorname{ctg} r, & \text{если } k \text{ нечетно}, \\ \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно}, \ k \neq 0, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

$$A_0 = (\sin r)^{\alpha - \frac{1}{2}},$$

$$A_p = (\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \ldots k_m!} d_{k_1}(r) \ldots d_{k_m}(r),$$

где $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0,\pi)$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $|\arg\lambda| \le \pi - \varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение*

$$T^\mu_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos r) \sim \frac{2e^{i\pi\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)(\sin r)^{-\mu}} \times$$

$$\left(\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}\right).$$

Относительно различных частных случаев теоремы 1 см. [1] - [4].

Список литературы

[1] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. -М.: ИЛ, 1952. - 476 с.

[2] Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. - Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ., 2003. - 454 p.

[3] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. -London: Springer., 2009. - 671 p.

[4] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. - Basel: Birkhäuser., 2013. - 592 p.