УДК 515.2

ТРИОРТОГОНАЛЬНА КООРДИНАЦІЯ ПРОСТОРУ З ОПОРНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Андрєєва В.В., аспірант
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 338-48-*85*

Анотація **– пропонується алгоритм отримання триортогональної системи, поданої поверхнею, що віднесена до ліній кривини.**

Ключові слова **– триортогональна система, нормаль поверхні, лінія кривини, конгруенція нормалей, еквідистанта поверхня.**

Постановка проблеми. Триортогональні системи мають широкі застосування у багатьох галузях: в математичній фізиці, теорії пружності, теорії суцільного середовища і таке інше. Віднесення простору до триортогональної системи значно спрощує викладання сутності предметів вивчення названих дисциплін. Особливої уваги заслуговує триортогональна параметризація простору на основі поверхні, яка входить в одну з трьох сімей триортогональної системи.

Аналіз останніх досліджень. Загальне рівняння введення параметризації простору, зв'язаної з координацією поверхні, знаходимо в [1]:

$$R = r(u,v) + \lambda n(u,v), \tag{1}$$

де $r(u,v)$ – радіус-вектор поверхні, віднесеної до довільних криволінійних координат, $n(u,v)$ – вектор нормалі у довільній точці поверхні, λ – скалярний множник.

У координатному вигляді функції введення координат простору, нормально зв'язаних з координацією поверхні, що подана параметричними рівняннями у довільній параметризації

$$x = x(t,u),\ y = y(t,u),\ z = z(t,u), \tag{2}$$

містяться в [2]:

$$\begin{aligned} x &= x(t,u) + a\omega, \\ y &= y(t,u) + b\omega, \\ z &= z(t,u) + c\omega, \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$a = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix},\quad b = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix},\quad c = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} \tag{4}$$

– проекції нормалі на координатні осі.

Зручно параметр ω замінити на параметр w нормуванням вектора нормалі $n(a,b,c)$ за формулою

$$\omega = \frac{w}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Формулювання цілей статті – застосувати координацію простору, нормально зв'язану з координацією поверхні, для побудови триортогональних систем.

Основна частина. Умовою придатності параметричних рівнянь поверхні (2) для введення триортогональної системи координат за виразами (3), (4), (5) є віднесення цієї поверхні до ліній кривини, тобто координатні лінії $t = const$ і $v = const$ мусять збігатися з лініями кривини. Ця умова може бути представлена рівностями нулю середнього коефіцієнта першої квадратичної форми

$$F = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \tag{6}$$

та чисельника $M^{'}$ коефіцієнта M другої квадратичної форми:

$$M^{'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} & \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} & \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

При виконанні умов (6), (7) функції (3) з врахуванням (4), (5) будуть представляти триортогональну координатну систему, сім'ями Ламе якої будуть: $v = const$ - поверхні, еквідистантні поверхні (2), $t = const$ та $u = const$ - поверхні конгруенції нормалей, що проходять через координатні лінії $t = const$ та $u = const$, які до речі є лініями кривини поверхні (2).

Наведемо приклад.

Приклад. Побудувати триортогональну систему, до якої входить розгортний гелікоїд:

$$x = r\cos t + (u + rt)\sin t,\ y = r\sin t - (u + rt)\cos t,\ z = -ku, \tag{8}$$

де $r = const, k = const.$

Розв'язання. Впевнимося, що поверхня (8) віднесена до ліній кривини. Частинні похідні функцій (8)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (u + rt)\cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = (u + rt)\sin t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -k,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} = \cos t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} = \sin t, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} = 0$$

і умови (6), (7) виконуються.

Вирази a, b, c згідно з (4):

$$a = -k(u + rt)\sin t, \quad b = k(u + rt)\cos t, \quad c = -(u + rt). \tag{9}$$

Вираз ω згідно з (5):

$$\omega = \frac{w}{(u + rt)\sqrt{k^2 + 1}}. \tag{10}$$

Підстановка правих частин параметричних рівнянь (8) замість $x = x(t,u), y = y(t,u), z = z(t,u),$ виразів (9) a,b,c, виразу (10) ω до рівнянь (3) дає вирази функцій введення триортогональної системи координації простору з початковою умовою належності розгортного гелікоїда (8) до однієї з координатних сімей $v = const$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t + (u + rt)\sin t - \frac{kw\sin t}{\sqrt{k^2 + 1}}, \\ y &= r\sin t - (u + rt)\cos t + \frac{kw\cos t}{\sqrt{k^2 + 1}}, \\ z &= -ku - \frac{w}{\sqrt{k^2 + 1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Достовірність факту триортогональності системи (11) отримаємо підстановкою частинних похідних функцій (11)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (u + rt - \frac{kw}{\sqrt{k^2 + 1}})\cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = (u + rt - \frac{kw}{\sqrt{k^2 + 1}})\sin t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -k,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{k\sin t}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{k\cos t}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

до умов (6), (7). Обидві умови виконуються.

Координатні поверхні триортогональної системи (11):

$t = const$ - сім'я півплощин, дотичних до циліндра радіуса r;

$u = const$ - сім'я співосних розгортних гелікоїдів з ребром звороту на циліндрі радіуса r, кроку $h = 2\pi rk$;

$w = const$ - сім'я співосних розгортних гелікоїдів з ребром звороту на циліндрі радіуса r, кроку $h_1 = -2\pi r\dfrac{1}{k}$.

Координатні лінії:

t-лінії – ортогональні траєкторії площин $t = const$;

u-лінії – прямолінійні твірні сім'ї гелікоїдів $w = const$;

w-лінії – прямолінійні твірні сім'ї гелікоїдів $u = const$.

Висновки. Нормаль до розгортного гелікоїда (8) належить площині $t = const$, тому достовірність триортогональності системи (11) можна встановити як за виконанням умов (6), (7), так і за іншою схемою формоутворення триортогональних систем, згідно з якою на площині

$t = const$ встановлено прямокутну декартову систему з u- та w-ліній, а площина $t = const$ перекочується без ковзання по циліндру r.

Література
1. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. ч.I, М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ., 1947, 542с.
2. *Коломієць О.А.* Математичні та комп'ютерні моделі поверхонь в спеціальних нормальних координатах: Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Донецьк, 2000. – 219с.

TRIPLY COORDINATION OF SPACE USING A SURFACE

V. Andreeva

Summary

A surface with its lines of curvature determines triply system. The Lame's families of which are the equidistant surfaces and two families of normal surfaces along lines of curvature.