УДК 515.2

Лихачова В.В., аспірант
Автомобільно-дорожній інститут Донецького національного технічного університету

ЗАСТОСУВАННЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПОБУДОВИ ГЕОДЕЗИЧНОЇ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА

В роботі пропонується алгоритм побудови геодезичної між двома точками на поверхні циліндра за допомогою триортогональної системи на основі узагальнених циліндричних координат.

Постановка проблеми. Відомо, що з метою позбавитися від віднесення геометричних об'єктів до певних систем координат, які є значним тягарем в процесі дослідження, доповнюючи труднощі в описі об'єкта властивостями координації, були винайдені прямі числення: точкове, векторне і тензорне.

Але будь-яке впровадження в практику результатів, отриманих методами прямих числень, неминуче зв'язано з віднесенням досліджуваного геометричного об'єкта до системи координат. Відчутні спрощення мають місце у випадку триортогональності системи віднесення об'єкта. Саме на такому припущенні базуються теорії поля, пружності і зокрема розрахунку оболонок, пластичності, механіки суцільного середовища та інших.

Отже, застосування триортогональних систем становить актуальну проблему як в теоретичному, так і в прикладному аспектах.

Аналіз досягнень і публікацій. Триортогональна система, що пропонується для знаходження геодезичної між двома токами на поверхні циліндра є вдосконаленням узагальненої циліндричної системи координат [1].

Узагальнені циліндричні координати дають ефект у застосуванні до опису кінематичних поверхонь.

При обкочуванні без ковзання площини по розгортній поверхні у кожному положенні площина має спільну пряму дотику до розгортної поверхні, при цьому точки розгортної поверхні відображаються ізометрично на площину.

Щоб встановити точкову ізометричну відповідність розгортної поверхні і площини, доцільно скористатися триортогональною системою, однією із сімей Ламе якої є сім’я площин[2], обвідною якої є розгортна поверхня. Оскільки розгортна поверхня, що є обвідною сім’ї площин Ламе, не входить до триортогональної системи, задачі визначення функцій ізометричної відповідності площини і розгортної поверхні у прямій і оберненій постановці зручно розв’язувати знаходженням рівняння розгортної поверхні, внутрішнього відносно параметричних рівнянь, що вводять триортогональну систему. При цьому на площині сім’ї Ламе необхідно обрати двоортогональну систему, одна з координат якої є лонгальною уздовж лінії дотику площини сім’ї Ламе і розгортної поверхні[2].

Формулювання цілей статті. Перекочування без ковзання площини по розгортній поверхні породжує ізометричне відображення площини на розгортну поверхню, що може бути застосовано при побудові геодезичної на розгортній поверхні у поданому напрямку, а також розгортної поверхні на площину, що дає можливість будувати розгортки кусків розгортних поверхонь.

Використання властивості будь-якої лінії на площині чи сфері бути лінією кривини приводить до отримання параметричних рівнянь класів поверхонь з сім’єю плоских чи сферичних ліній кривини з довільністю подання двох функцій однієї і тієї ж змінної за умов віднесення поверхонь до ліній кривини.

Основною метою є розробка алгоритму побудови геодезичної між двома точками на поверхні циліндра за допомогою триортогональної системи, яку було отримано на основі узагальнених циліндричних координат[3].

Основна частина. Функції ізометричного відображення прямого кругового циліндра на площину доцільно одержати, виходячи з функцій введення триортогональної системи [3]:

$$x = r\cos t-(u-rt)\sin t,\ y = r\sin t+(u-rt)\cos t,\ z = v. \qquad (1)$$

Внутрішнє по відношенню до рівнянь (1) рівняння циліндра, що обгортає сім’ю площин $t = const$:

$$u = rt. \qquad (2)$$

Підстановка внутрішнього рівняння до параметричних рівнянь (1) дає параметричні рівняння циліндра:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = v. \tag{3}$$

Оскільки твірні циліндра (3) є характеристиками сім'ї площин $t = const$, рівняння (3) можна розглядати як розв'язок параметричних рівнянь сім'ї площин і циліндра.

Таким чином, точка M з криволінійними координатами t_M, v_M циліндра (3) ізометрично відображається на площину $t = 0$ системи (1) у точку з координатами

$$u_M = rt_M, \quad v_M = v_M,$$

а точка N з прямокутними декартовими координатами u_N, v_N на площині $t = 0$ сім'ї Ламе відображається на обвідний циліндр у точку:

$$t_N = \frac{u_N}{r}, \quad v_N = v_N.$$

Прообразами точок (t_1, v_1) та (t_2, v_2) прямого кругового циліндра є точки $(u_1 = rt_1, v_1)$ та $(u_2 = rt_2, v_2)$ на площині $t = 0$ сім'ї, для якої циліндр є обвідним. Прообразом геодезичної прямого кругового циліндра є пряма

$$u = (u_2 - u_1)\omega + u_1, \quad v = (v_2 - v_1)\omega + v_1 \tag{4}$$

на площині сім'ї $t = 0$ Ламе.

Скориставшись рівнянням (2), підставимо до першого з рівнянь (4) замість u_1, u_2 їхні вирази через t_1, t_2.

Отримаємо

$$u = r(t_2 - t_1)\omega + rt_1,$$

звідки

$$\frac{u}{r} = t = (t_2 - t_1)\omega + t_1. \tag{5}$$

Таким чином, параметричні рівняння шуканої геодезичної отримуємо підстановкою (5) замість t до (3), а також другого з рівнянь (4) замість v:

$$\begin{gathered} x = r\cos[(t_2 - t_1)\omega + t_1], \\ y = r\sin[(t_2 - t_1)\omega + t_1], \quad z = (v_2 - v_1)\omega + v_1. \end{gathered} \tag{6}$$

Примітимо, що початкову точку геодезичної отримаємо при $\omega = 0$, а кінцеву – при $\omega = 1$, проміжні точки – при $0 < \omega < 1$.

Приклад 1. Побудувати геодезичну на прямому круговому циліндрі радіуса $r = 3$ між точками $v_1 = 1,\ t_1 = \dfrac{\pi}{8}$ та $v_2 = 3,\ t_2 = \dfrac{3\pi}{8}$.

Розв'язання. Підстановкою t_1, t_2, v_1, v_2, r до (6) при $0 \le \omega \le 1$ отримуємо параметричні рівняння геодезичної на циліндрі між точками $v_1 = 1,\ t_1 = \dfrac{\pi}{8}$ та $v_2 = 3,\ t_2 = \dfrac{3\pi}{8}$.

На рис.1 показано прообраз відображення геодезичної на площині, побудовану за формулами (4).

На рис.2 показано геодезичну на прямому круговому циліндрі, побудовану за формулами (6), де $0 \le \omega \le 1$.

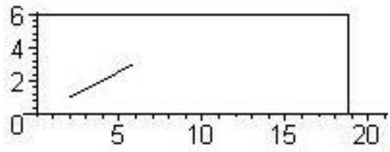

Рис.1. Відображення геодезичної на площину

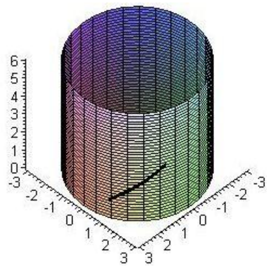

Рис.2. Геодезична на прямому круговому циліндрі

Висновки. Застосування нових триортогональних систем, зокрема, триортогональної системи на основі узагальнених циліндричних координат, має перспективу як в самій прикладній геометрії, так і в численних прикладних галузях науки, а також в практиці передпроектних досліджень і автоматизованого проектування.

Список літератури

1. *Скидан И.А*. Обобщенные цилиндрические координаты и их приложения в прикладной геометрии // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 13. – К.: ”Будівельник”, 1971. – с. 15-20.
2. *Андрєєва В.В.* Триортогональна система з координатною сім’єю площин.// Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. – Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. т.34. – с.134-143.
3. *Андрєєва В.В.* Триортогональна система на основі узагальнених циліндричних координат// Міжвузівський збірник «Наукові нотатки» (за напрямом «Інженерна механіка»). – Вип. 22. Частина 1 «Сучасні проблеми геометричного моделювання», Луцьк 2008. – с. 6-11.