УДК 515.2 Лихачова В.В., к.т.н

ЗАСТОСУВАННЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПОБУДОВИ ГЕОДЕЗИЧНОЇ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА ПОВЕРХНІ КОНУСА ОБЕРТАННЯ

Автомобільно-дорожній інститут ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

В роботі пропонується алгоритм побудови геодезичної між двома точками на поверхні конуса обертання за допомогою триортогональної системи на основі гіперболічних координат.

Постановка проблеми. Часто успіх у розв'язанні проблеми моделювання забезпечується вдалим введенням спеціальних координат, в яких найкращим чином може бути представлений об'єкт чи процес, що моделюється. Відчутні спрощення мають місце у випадку триортогональності системи віднесення об'єкта. Саме на такому припущенні базуються теорії поля, пружності і зокрема розрахунку оболонок, пластичності, механіки суцільного середовища та інших.

Отже, застосування триортогональних систем становить актуальну проблему як в теоретичному, так і в прикладному аспектах.

Аналіз останніх досягнень і публікацій. Триортогональна система, що пропонується для знаходження геодезичної між двома токами на поверхні конуса обертання є вдосконаленням гіперболічної системи координат [1, 2].

Гіперболічні координати дають ефект у застосуванні до опису кінематичних поверхонь.

При обкочуванні без ковзання площини по розгортній поверхні у кожному положенні площина має спільну пряму дотику до розгортної поверхні, при цьому точки розгортної поверхні відображаються ізометрично на площину.

Щоб встановити точкову ізометричну відповідність розгортної поверхні і площини, доцільно скористатися триортогональною системою, однією із сімей Ламе якої є сім'я площин[3], обвідною якої є розгортна поверхня. Оскільки розгортна поверхня, що є обвідною сім'ї площин Ламе, не входить до триортогональної системи, задачі визначення функцій ізометричної відповідності площини і розгортної поверхні у прямій і оберненій постановці зручно розв'язувати знаходженням рівняння розгортної поверхні, внутрішнього відносно параметричних рівнянь, що вводять триортогональну систему. При цьому на площині сім'ї Ламе необхідно обрати двоортогональну систему, одна з координат якої є лонгальною уздовж лінії дотику площини сім'ї Ламе і розгортної поверхні[3].

Формулювання цілей статті. Перекочування без ковзання площини по розгортній поверхні породжує ізометричне відображення площини на розгортну поверхню, що може бути застосовано при побудові геодезичної на розгортній поверхні у поданому напрямку, а також розгортної поверхні на площину, що дає можливість будувати розгортки кусків розгортних поверхонь.

Використання властивості будь-якої лінії на площині чи сфері бути лінією кривини приводить до отримання параметричних рівнянь класів поверхонь з сім'єю плоских чи сферичних ліній кривини з довільністю подання двох функцій однієї і тієї ж змінної за умов віднесення поверхонь до ліній кривини.

Основною метою є розробка алгоритму побудови геодезичної між двома точками на поверхні конуса обертання за допомогою триортогональної, так званої, конусно-полярної системи поверхонь [5], яку було отримано на основі гіперболічних координат[4].

Основна частина. Нехай на бічній поверхні конуса обертання:

$$x = \rho \sin\alpha \cos t, \quad y = \rho \sin\alpha \sin t, \quad z = -\rho \cos\alpha \tag{1}$$

подано криволінійними координатами точки $M(\rho_1, t_1)$ та $N(\rho_2, t_2)$. Кут нахилу твірної конуса до його осі дорівнює α.

Необхідно на поверхні конуса побудувати геодезичну між точками M і N.

Точки M і N відображаються ізометрично на площину у точки $M_1(x_1, y_1)$ та $N_1(x_2, y_2)$, координати яких обчислюємо за формулами:

$$x_n = -\rho_k \sin(t_k \sin\alpha), \quad y_n = \rho_k \cos(t_k \sin\alpha). \tag{2}$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} x_1 &= -\rho_1 \sin(t_1 \sin\alpha), \quad y_1 = \rho_1 \cos(t_1 \sin\alpha), \\ x_2 &= -\rho_2 \sin(t_2 \sin\alpha), \quad y_2 = \rho_2 \cos(t_2 \sin\alpha). \end{aligned} \tag{3}$$

Геодезична між точками M і N на поверхні конуса ізометрично відображається на площину у пряму, через точки M_1 і N_1. Рівняння прямої M_1N_1 на площині у вигляді:

$$ax + by + c = 0, \tag{4}$$

де $a = y_2 - y_1, \quad b = -(x_2 - x_1), \quad c = x_2 y_1 - x_1 y_2.$

Рівняння цієї ж прямої у полярних координатах ρ, φ [6]:

$$\rho \cos(\varphi - \theta) = p, \tag{5}$$

де

$$p = \frac{sign(c)c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{sign(c)a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin\theta = \frac{sign(c)b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{6}$$

Якщо:

$$\begin{aligned}
&\sin\theta > 0, \quad \cos\theta > 0, \quad \theta = arctg\frac{b}{a};\\
&\sin\theta > 0, \quad \cos\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2};\\
&\sin\theta < 0, \quad \cos\theta = 0, \quad \theta = \frac{3\pi}{2};\\
&\sin\theta < 0, \quad \cos\theta < 0, \quad \theta = arctg\frac{b}{a} + \pi;\\
&\sin\theta < 0, \quad \cos\theta > 0, \quad \theta = arctg\frac{b}{a} + 2\pi.
\end{aligned} \tag{7}$$

Визначимо φ з (5):

$$\varphi = \arccos\frac{p}{\rho} + \theta. \tag{8}$$

Може статися, що при $\sin\theta < 0, \quad \cos\theta > 0$ (див. останній рядок (7)) φ опиниться більше за 2π. В цьому випадку значення φ слід привести до інтервалу $0 \le \varphi \le 2\pi,$ тобто, в цьому випадку:

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} + \arccos\frac{p}{\rho}. \tag{9}$$

Таким чином, алгоритм побудови геодезичної на конусі між двома точками M і N полягає у наступному:

1. За поданими криволінійними координатами точок $M(\rho_1, t_1)$ та $N(\rho_2, t_2)$ обчислити за формулами (3) прямокутні координати x_1, y_1, x_2, y_2 точок M_1, N_1, які є ізометричним відображенням точок M, N на площину.
2. Обчислити коефіцієнти a, b, c рівняння (4) прямої, яка є ізометричним відображенням шуканої геодезичної.
3. Обчислити p та θ за формулами (6), (7).
4. Обчислити кутові полярні координати φ_1, φ_2 за поданими лонгальними координатами ρ_1, ρ_2 точок M_1, N_1 за формулою (8).
5. Змінюючи φ на інтервалі $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, якщо $\varphi_1 < \varphi_2$, або $\varphi_2 \le \varphi \le \varphi_1$, якщо $\varphi_2 < \varphi_1$, з рівняння (5) обчислити ρ_i, відповідне φ_i.
6. Визначити

$$t_i = \frac{\varphi_i}{\sin\alpha} \tag{10}$$

і за формулами (1) нанести геодезичну на поверхню конуса.

На рис. 1 показано ізометричне відображення геодезичної на розгортці конуса, на рис. 2 – зображення геодезичної на поверхні конуса.

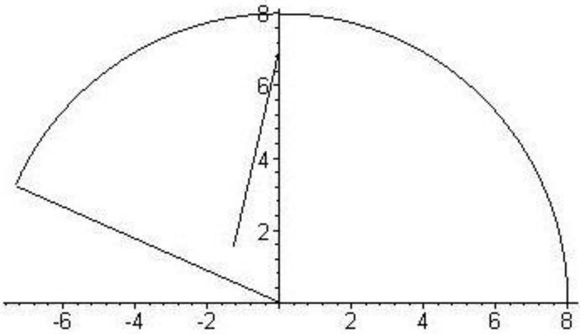

Рис.1. Відображення геодезичної на площину

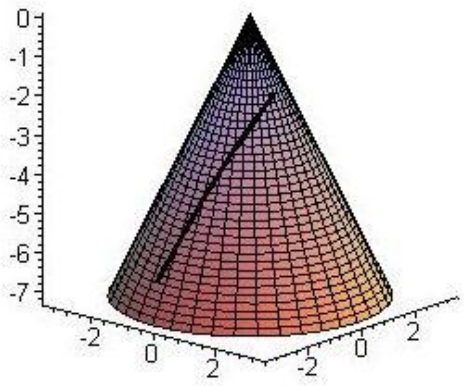

Рис.2. Геодезична на прямому круговому конусі

Примітимо, якщо точки M і N на поверхні конуса матимуть рівні координати $t(t_1 = t_2)$, це означатиме тривіальний випадок побудови геодезичної між двома точками, розташованими на твірній конуса. Частина твірної між ρ_1 та ρ_2 буде геодезичною.

Висновки. Застосування нових триортогональних систем, зокрема, триортогональної конусно-полярної системи на основі гіперболічних координат, має перспективу як в самій прикладній геометрії, так і в численних прикладних галузях науки, а також в практиці передпроектних досліджень і автоматизованого проектування.

Список літератури

1. Скидан И.А. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: дис. … доктора техн. наук: 05. 01.01 / Скидан Иван Андреевич. – М., 1989. – 340 с.
2. Скидан И.А. Кинематические поверхности в гиперболических координатах / И.А. Скидан // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: ”Будівельник”, 1972. – Вып. 14. – С. 78–82.
3. Андрєєва В.В. Триортогональні системи з координатною сім'єю площин / В.В. Андрєєва // Прикладна геометрія та інженерна

графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь, 2007. – Вип. 4, т.34. – С.134–143.

4. Андрєєва В.В. Триортогональна система на основі гіперболічних координат / В.В. Андрєєва // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь, 2008. – Вип. 4, т.39. – С.128–134.
5. Лихачова В.В. Триортогональна конусно-полярна система поверхонь / В.В. Лихачова // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь, 2009. – Вип. 4, т.43. – С.105–111.
6. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА ВРАЩЕНИЯ

Лихачева В.В.

Аннотация

В работе предлагается алгоритм построения геодезической между двумя точками на поверхности конуса вращения при помощи триортогональной системы на основе гиперболических координат.

APPLICATION OF TRIPLY ORTHOGONAL OF SYSTEMS FOR CONSTRUCTION GEODESIC BETWEEN TWO POINTS ON SURFACE OF CONE OF ROTATION

V. Likhatchova

Summary

The algorithm of construction is in-process offered by geodesic between two points on the surface of cone of rotation through the triply orthogonal system on the basis of hyperbolic coordinates.