УДК 515.2

# ТРИОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ З СІМ'ЄЮ СФЕР ІЗ ЦЕНТРАМИ НА ПРЯМІЙ

Лихачова В.В., к.т.н.
*Автомобільно-дорожній інститут*
*ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»*
Тел.: (0624)55-39-99

***Анотація* – запропоновано побудову осесиметричних триортогональних систем, до складу яких входить сім'я Ламе у вигляді сфер з центрами на прямій**

***Ключові слова* – триортогональна система, координатні поверхні, ортогональні траєкторії, визначник триортогональної системи, осесиметрична система.**

*Постановка проблеми.* Незважаючи на значну кількість спеціальних ортогональних координацій, представлених в довідниках та енциклопедіях, розробка схем їх побудови і отримання за цими схемами нових координацій, становить актуальну проблему в зв'язку з тим, що вибір координації під об'єкт, процес чи задачу значно спрощує дослідження як в методологічному, так і в обчислювальному аспектах.

*Аналіз останніх досліджень.* Класична теорія триортогональних систем бере свій початок з творів Ламе, Дарбу, Келі, Дюпена. В [1, 2, 3] триортогональні системи отримано за опорною поверхнею циліндра, сфери, конуса, тора, однопорожнинного гіперболоїда обертання на основі нормальної координації простору. Робота [4] містить основні параметричні рівняння щодо триортогональної системи та переходу від однієї до іншої ортогональної системи перетворенням інверсії. Але не меншої уваги заслуговують і осесиметричні триортогональні систем з сім'єю сфер.

*Формулювання цілей статті* – отримати та дослідити функції, що подають осесиметричну триортогональну систему, до складу якої входить сім'я Ламе у вигляді сфер із центрами на прямій.

*Основна частина*. В роботі [5] було показано, що параметричні рівняння ортогональних траєкторій до сім'ї кіл з центрами на прямій та змінного радіуса:

$$x^2+[y-b(u)]^2-r^2(u)=0, \qquad (1)$$

мають вигляд (2), (3).

$$x=\frac{r(u)cE}{c^2+E^2},\quad y=\frac{b(u)(c^2+E^2)+r(u)(c^2-E^2)}{c^2+E^2}, \tag{2}$$

де $c$ - параметр сім'ї ортогональних траєкторій,

$$E=\exp\int\frac{b^{'}(u)}{r(u)}du. \tag{3}$$

Замінимо у рівняннях (2) параметр $c$ на параметр $v$, а також віднесемо як подану сім'ю кіл (1), так і сім'ю ортогональних траєкторій (2), (3) до площини $xoz$. Параметричні рівняння (2) набувають вигляду:

$$x=\frac{2r(u)vE}{v^2+E^2},\quad z=b(u)+\frac{r(u)(v^2-E^2)}{v^2+E^2}, \tag{4}$$

де

$$E=\exp\int\frac{b^{'}(u)}{r(u)}du. \tag{5}$$

Будемо обертати навколо осі $oz$ сім'ї кіл (1) і ортогональних траєкторій (4), (5). Сім'я кіл (1) опише сім'ю сфер, а сім'я траєкторій – конгруенцію траєкторій, рівняння яких

$$x=\frac{2r(u)vE}{v^2+E^2}\cos t,\quad y=\frac{2r(u)vE}{v^2+E^2}\sin t,\quad z=b(u)+\frac{r(u)(v^2-E^2)}{v^2+E^2}, \tag{6}$$

де $E$ має вираз (5).

Покажемо, що з довільністю вибору двох функцій $b(u)$ та $r(u)$ функції (6), (5) вводять триортогональну систему [6] . Примітимо, що

$$E^{'}=\frac{b^{'}}{r}E. \tag{7}$$

Обчислимо частинні похідні функцій (6):

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{2rvE}{v^2+E^2}\sin t,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=\frac{2rvE}{v^2+E^2}\cos t,\quad \frac{\partial z}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2\cos t[\left(r^{'}vE+rv\frac{b^{'}}{r}E\right)(v^2+E^2)-2\frac{b^{'}}{r}E^2rvE]}{(v^2+E^2)^2}=$$

$$=\frac{2\cos tvE[r^{'}(v^2+E^2)+b^{'}(v^2-E^2)]}{(v^2+E^2)^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2\sin[\left(r^{'}vE+rv\frac{b^{'}}{r}E\right)(v^2+E^2)-2\frac{b^{'}}{r}E^2rvE]}{(v^2+E^2)^2}=$$

$$=\frac{2\cos tvE[r^{'}(v^2+E^2)+b^{'}(v^2-E^2)]}{(v^2+E^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=b'+\frac{[r'(v^2-E^2)-2\frac{b'}{r}rE^2](v^2+E^2)-2\frac{b'}{r}E^2r(v^2-E^2)}{(v^2+E^2)^2}=$$

$$=\frac{(v^2-E^2)[r'(v^2+E^2)+b'(v^2-E^2)]}{(v^2+E^2)^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{2\cos t[rE(v^2+E^2)-2v^2rE]}{(v^2+E^2)^2}=-\frac{2\cos t\, rE(v^2-E^2)}{(v^2+E^2)^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2\sin t[rE(v^2+E^2)-2v^2rE]}{(v^2+E^2)^2}=-\frac{2\sin t\, rE(v^2-E^2)}{(v^2+E^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2vr(v^2+E^2)-2vr(v^2-E^2)}{(v^2+E^2)^2}=-\frac{4vrE^2}{(v^2+E^2)^2}.$$

З виразів частинних похідних витікає, що перша та третя з умов (8) триортогональності системи (6), (5) виконуються:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0, \qquad (8)$$
$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Перевіримо виконання другої з умов (8):

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{4vE[r'(v^2+E^2)+b'(v^2-E^2)]rE(v^2-E^2)}{(v^2+E^2)^4}+$$

$$+\frac{(v^2-E^2)[r'(v^2+E^2)+b'(v^2-E^2)]4vrE^2}{(v^2+E^2)^4}=0.$$

Умова виконується і достовірність триортогональності системи (6), (5) доведена.

Координатними поверхнями триортогональної системи є:

$t=const$ – площина пучка з віссю $oz$;

$u=const$ – сфери радіуса $r(u)$ з центрами в точках на осі $oz$, аплікати яких $b(u)$;

$v=const$ – поверхні обертання з віссю $oz$, меридіанами яких є ортогональні траєкторії сфер.

Координатні лінії:

$t$ - лінії – кола у площинах, перпендикулярних $oz$;

$u$ - лінії – ортогональні траєкторії сфер;

$v$ - лінії – кола у перетині сім'ї сфер з сім'єю площин.

Функції (6), (5) визначають клас триортогональних систем з довільністю вибору функцій $b(u)$ та $r(u)$, що входять до (5). Ці функції визначають як сім'ю сфер, так і конгруенцію ортогональних траєкторій.

*Приклад.* Засобами комп'ютерної графіки показати координатні поверхні триортогональної системи, сім'єю Ламе якої є сім'я сфер з центрами у точках $(0,0,b(u))$ і радіусами $r(u)$, для випадків:

$$1)\ b = au,\ r = c; \quad 2)\ b = au,\ r = cu; \quad 3)\ b = \sin u,\ r = \cos u.$$

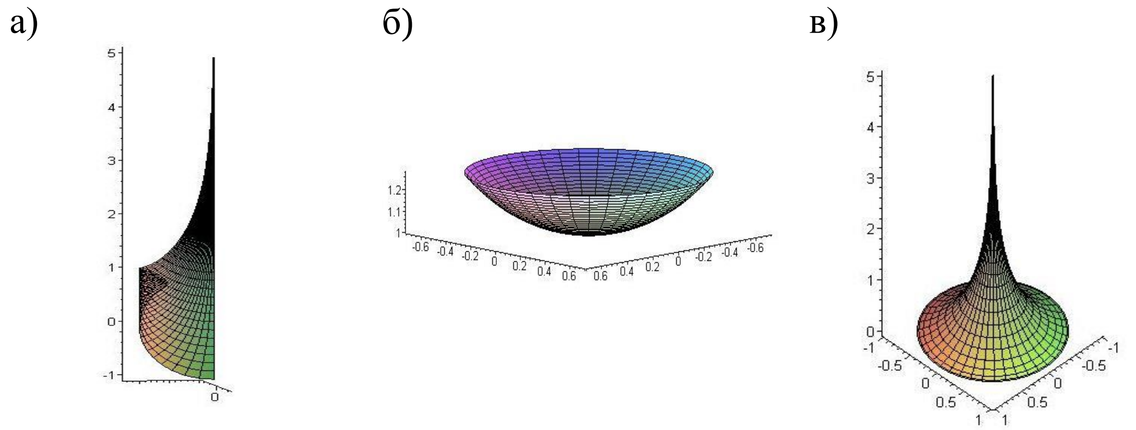


Рис. 1. Координатні поверхні триортогональної системи (6) при $b = au,\ r = c$: а) $t = const$; б) $u = const$; в) $v = const$

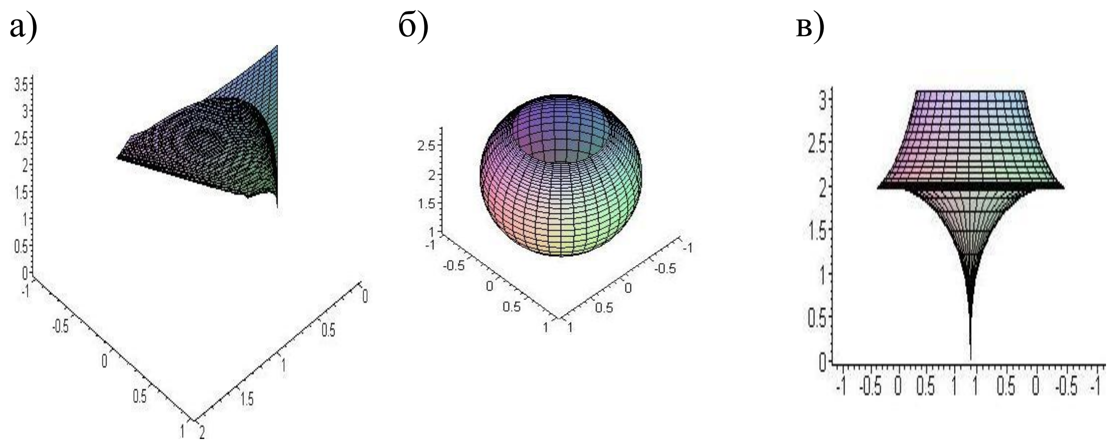


Рис. 2. Координатні поверхні триортогональної системи (6) при $b = au, r = cu$: а) $t = const$; б) $u = const$; в) $v = const$

а) б) в)

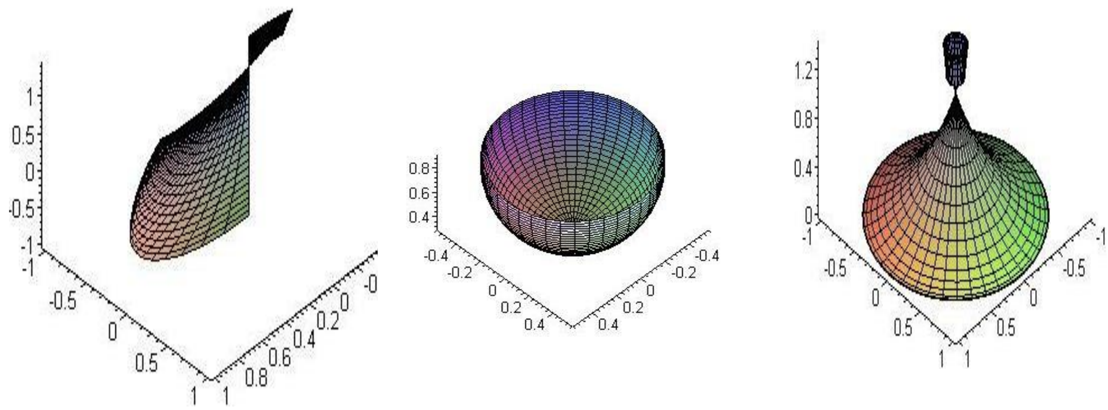

Рис. 3. Координатні поверхні триортогональної системи (6) при $b = \sin u, r = \cos u$ : а) $t = const$ ; б) $u = const$ ; в) $v = const$

Зображення координатних поверхонь отримані за рівняннями (6) для виразів (5)

1) $E = e^{\int \frac{a}{c}du} = e^{\frac{a}{c}u}$ (рис. 1),

2) $E = e^{\int \frac{adu}{cu}} = u^{\frac{a}{c}}$ (рис. 2),

3) $E = e^{\int \frac{\cos u du}{\cos u}du} = e^{u}$ (рис. 3).

*Висновки.* Функції введення триортогональних систем, до складу яких входить сім'я сфер із центрами на прямій, виражають клас триортогональних систем поверхонь і відповідних ортогональних координацій з довільністю вибору визначника сім'ї сфер: призначенням функцій $r(u)$ та $b(u)$, однієї з ортогональних траєкторій в площині $t = const$, обвідної в площині $t = const$.

Література


1. Коломієць О.А. Математичні та комп'ютерні моделі поверхонь в спеціальних нормальних координатах: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Коломієць Олена Анатолівна. – Донецьк, 2000. – 219 с.
2. Скідан І.А. Поверхні в нормальних координатах одно порожнинного гіперболоїда обертання / І.А. Скідан, О.А. Катькалова // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь, 2002. – Вип.4, т.17. – С. 34–38.
3. Скідан І.А. Нормальна координація простору з опорним однопорожнинним гіперболоїдом обертання / І.А. Скідан,

О.А. Катькалова // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь, 2003. – Вип.4, т.18. – С. 48–51.
4. Андрєєва В.В. Триортогональні системи: формоутворення, подання, застосування / В.В. Андрєєва, І.А. Скідан // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – 2004. – Вип. 4, т.25. – С.26–33.
5. Фролов О.В. Віднесення поверхонь до ліній кривини стосовно проектування оболонок: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Фролов Олег Васильович. – Донецьк, 2005. – 245 с.

## ТРИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С СЕМЬЁЙ СФЕР С ЦЕНТРАМИ НА ПРЯМОЙ

В.В. Лихачёва

*Аннотация* – **предлагается построение осесимметричных триортогональных систем, в состав которых входит семья Ламе в виде сфер с центрами на прямой**

## TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEMS WITH A FAMILY OF SPHERES WITH THE CENTERS ON THE STRAIGHT

V. Likhachova

**Summary**

**Propose an algorithm for construction of axially symmetric triply-orthogonal systems, which include the family Lamé as spheres with the centers on the straight.**