УДК 515.2

ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК ФОРМОУТВОРЕННЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ З СІМ'ЄЮ ЛАМЕ У ВИГЛЯДІ ПЛОЩИН

Лихачова В.В., к.т.н.
Автомобільно-дорожній інститут
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»
Тел.: (0624)55-39-99

Анотація **– пропонується алгоритм формоутворення триортогональних систем поверхонь з сім'єю Ламе у вигляді площин у випадку, коли торс не вироджений.**

Ключові слова **– триортогональна система, координатні поверхні, сім'я Ламе, ортогональні траєкторії, сім'я площин, визначник триортогональної системи.**

Постановка проблеми. Триортогональні системи мають широкі застосування у багатьох галузях. Віднесення простору до триортогональної системи значно спрощує викладання сутності предметів вивчення багатьох дисциплін. Особливої уваги заслуговує триортогональна система з сім'єю Ламе у вигляді нормальних площин визначника.

Аналіз останніх досліджень. Загальний алгоритм формоутворення триортогональних систем з сім'єю площин наступний. На площині сім'ї Ламе подається ортогональна двовимірна система координації. Триортогональна система утворюється перекочуванням без ковзання площини інциденції двоортогональної системи по торсу Φ. Координатними поверхнями є: площини інциденції двоортогональної системи і дві ортогональні сім'ї різьблених поверхонь Монжа, що описуються координатними лініями двоортогональної системи. Координатні лінії – дві координатні лінії двоортогональної системи і ортогональні траєкторії сім'ї площин їх інциденції.

Виходячи із цієї загальної схеми формоутворення триортогональних систем з плоскою сім'єю Ламе, раніше були розглянуті її окремі випадки, а саме: торс вироджується у конус – ортогональні траєкторії сім'ї площин, дотичних до конуса – сферичні лінії; торс вироджується у циліндр – ортогональні траєкторії – плоскі лінії; торс вироджується у власну пряму – ортогональні траєкторії –

кола; торс вироджується у невласну пряму – ортогональні траєкторії – прямі [1].

Формулювання цілей статті – визначення алгоритму формоутворення триортогональних систем поверхонь з сім'єю Ламе, що складається з площин у загальному випадку, коли торс не вироджений.

Основна частина. У загальному випадку, коли торс не вироджений, зручніше визначником триортогональної системи з плоскою сім'єю Ламе вважати не торс, а одну із ортогональних траєкторій, яка мусить бути не плоскою і не сферичною. Сім'ю Ламе складуть у цьому випадку нормальні площини визначника.

Нехай параметричні рівняння однієї з ортогональних траєкторій сім'ї площин, що входить як сім'я Ламе в шукану триортогональну систему,

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t). \tag{1}$$

Отримаємо функції введення триортогональної системи у вигляді (2) [2, 3],

$$\begin{aligned} x &= (\tau - D_1)A_1 + (\alpha - D_2)A_2 + (\beta - D_3)A_3, \\ y &= (\tau - D_1)B_1 + (\alpha - D_2)B_2 + (\beta - D_3)B_3, \\ z &= (\tau - D_1)C_1 + (\alpha - D_2)C_2 + (\beta - D_3)C_3, \end{aligned} \tag{2}$$

де

$$\tau = 0, \quad \alpha = X(u)\cos\varepsilon - Y(u)\sin\varepsilon, \quad \beta = X(u)\sin\varepsilon + Y(u)\cos\varepsilon,$$

$$\varepsilon = -\int_{t_0}^{t} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} & \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} & \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} \end{vmatrix} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}} dt,$$

$$A_1 = f' M_\tau, \quad B_1 = \phi' M_\tau, \quad C_1 = \psi' M_\tau, \quad D_1 = -(ff' + \phi\phi' + \psi\psi') M_\tau,$$

$$M_\tau = \pm \frac{1}{\sqrt{f'^2 + \phi'^2 + \psi'^2}},$$

$$A_3 = (\phi'\psi'' - \psi'\phi'')M_\beta, \quad B_3 = (\psi' f'' - f'\psi'')M_\beta, \quad C_3 = (f'\phi'' - \phi' f'')M_\beta,$$
$$D_3 = -[(\phi'\psi'' - \psi'\phi'')f + (\psi' f'' - f'\psi'')\phi + (f'\phi'' - \phi' f'')\psi]M_\beta,$$

$$M_\beta = \frac{1}{\sqrt{(\phi'\psi'' - \psi'\phi'')^2 + (\psi' f'' - f'\psi'')^2 + (f'\phi'' - \phi' f'')^2}},$$
$$A_2 = (B_3C_1 - C_3B_1), \quad B_2 = (C_3A_1 - C_1A_3), \quad C_2 = (A_3B_1 - A_1B_3),$$
$$D_2 = -A_2 f - B_2\phi - C_2\psi.$$

але не будемо визначати меридіан різьбленої поверхні Монжа рівняннями (3) [2, 3],

$$X = X(u), \quad Y = Y(u) \tag{3}$$

а через u, v позначимо прямокутні декартові координати довільної точки на площині сім'ї $t = const$.

Таким чином, вирази α і β в (2) набуватимуть вигляду

$$\alpha = u\cos\varepsilon - v\sin\varepsilon, \quad \beta = u\sin\varepsilon + v\cos\varepsilon, \tag{4}$$

де ε матиме вигляд

$$\varepsilon = -\int_{t_0}^{t} \frac{\begin{vmatrix} f' & \varphi' & \psi' \\ f'' & \varphi'' & \psi'' \\ f''' & \varphi''' & \psi''' \end{vmatrix} \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\,dt}{\sqrt{(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2 + (f''\psi' - \psi'' f')^2 + (\varphi'' f' - f''\varphi')^2}}. \tag{5}$$

Решта виразів $\tau, A_i, B_i, C_i, D_i, M_\tau, M_\beta$ такими ж, як і у [2].

Висновки. Оскільки будь-яка лінія на сфері (як і на площині) є лінією кривини, триортогональні системи зі сферичною сім'єю Ламе зручно використовувати для формоутворення поверхонь, віднесених до ліній кривини.

Література

1. Андрєєва В.В. Триортогональні системи з координатною сім'єю площин / В.В. Андрєєва // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. –Мелітополь, 2007. – Вип. 4, т.34. – С.134–143.
2. Фролов О.В. Віднесення поверхонь до ліній кривини стосовно проектування оболонок: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Фролов Олег Васильович. – Донецьк, 2005. – 245 с.

3. Скідан І.А. Математичні та комп'ютерні моделі різьблених поверхонь Монжа / І.А. Скідан, О.В. Фролов // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь, 2002. – Вип.4, т.17. – С. 13–17.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОВЕРХНОСТЕЙ С СЕМЬЁЙ ЛАМЕ В ВИДЕ ПЛОСКОСТЕЙ

В.В. Лихачёва

Аннотация – **предлагается алгоритм формообразования триортогональных систем поверхностей с семьёй Ламе в виде плоскостей в случае, когда торс не вырожденный.**

THE GENERAL CASE FORMATION OF TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEMS OF SURFACES WITH A FAMILY LAME IN THE FORM OF PLANES

V. Likhachova

Summary

Propose an algorithm to formation triply-orthogonal systems of surfaces with family Lamé in the form of planes when the torso is not the degenerate.