

УДК 515.2

ВИКОРИСТАННЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ПОБУДОВИ РОЗГОРТКИ ПРЯМОГО КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА

Лихачова В.В., к.т.н.

Автомобільно-дорожній інститут

ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

Тел.: (0624)55-39-99

Анотація – пропонується алгоритм побудови розгортки прямого кругового циліндра за допомогою триортогональної системи на основі узагальнених циліндричних координат.

Ключові слова – триортогональна система, координатні поверхні, прямий круговий циліндр, узагальнені циліндричні координати, розгортна поверхня, ізометрична відповідність.

Постановка проблеми. Відомо, що відчутні спрощення при віднесенні геометричних об'єктів до певних систем координат, мають місце у випадку триортогональності системи віднесення об'єкта. Саме на такому припущенні базуються теорії поля, пружності і зокрема розрахунку оболонок, пластичності, механіки суцільного середовища та інших.

Отже, застосування триортогональних систем становить актуальну проблему як в теоретичному, так і в прикладному аспектах. Зокрема, триортогональні системи можна використовувати при побудові розгортки кусків розгортних поверхонь.

Аналіз останніх досліджень. Триортогональна система, що пропонується для побудови розгортки прямого кругового циліндра є вдосконаленням узагальненої циліндричної системи координат [1].

Узагальнені циліндричні координати дають ефект у застосуванні до опису кінематичних поверхонь.

При обкочуванні без ковзання площини по розгортній поверхні у кожному положенні площина має спільну пряму дотику до розгортної поверхні, при цьому точки розгортної поверхні відображаються ізометрично на площину.

Щоб встановити точкову ізометричну відповідність розгортної поверхні і площини, доцільно скористатися триортогональною системою, однією із сімей Ламе якої є сім'я площин [2], обвідною якої є розгортна поверхня. Оскільки розгортна поверхня, що є обвідною сім'ї площин Ламе, не входить до триортогональної системи, задачі визначення функцій ізометричної відповідності площини і розгортної

поверхні у прямій і оберненій постановці зручно розв'язувати знаходженням рівняння розгортної поверхні, внутрішнього відносно параметричних рівнянь, що вводять триортогональну систему. При цьому на площині сім'ї Ламе необхідно обрати двоортогональну систему, одна з координат якої є лонгальною уздовж лінії дотику площини сім'ї Ламе і розгортної поверхні [2].

Формулювання цілей статті – Перекочування без ковзання площини по розгортній поверхні породжує ізометричне відображення площини на розгортну поверхню, а також розгортної поверхні на площину, що дає можливість будувати розгортки кусків розгортних поверхонь.

Використання властивості будь-якої лінії на площині чи сфері бути лінією кривини приводить до отримання параметричних рівнянь класів поверхонь з сім'єю плоских чи сферичних ліній кривини з довільністю подання двох функцій однієї і тієї ж змінної за умов віднесення поверхонь до ліній кривини.

Основною метою є розробка алгоритму побудови розгортки прямого кругового циліндра за допомогою триортогональної системи, яку було отримано на основі узагальнених циліндричних координат [3].

Основна частина. Функції ізометричного відображення прямого кругового циліндра на площину доцільно одержати, виходячи з функцій введення триортогональної системи [3]:

$$x = r \cos t - (u - rt) \sin t, \quad y = r \sin t + (u - rt) \cos t, \quad z = v. \quad (1)$$

Внутрішнє по відношенню до рівнянь (1) рівняння циліндра, що обгортає сім'ю площин $t = \text{const}$:

$$u = rt. \quad (2)$$

Підстановка внутрішнього рівняння до параметричних рівнянь (1) дає параметричні рівняння циліндра:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = v. \quad (3)$$

Оскільки твірні циліндра (3) є характеристиками сім'ї площин $t = \text{const}$, рівняння (3) можна розглядати як розв'язок параметричних рівнянь сім'ї площин і циліндра.

Таким чином, точка M з криволінійними координатами t_M, v_M циліндра (3) ізометрично відображається на площину $t = 0$ системи (1) у точку M' з координатами

$$u_{M'} = rt_M, \quad v_{M'} = v_M,$$

а точка N з прямокутними декартовими координатами u_N, v_N на площині $t = 0$ сім'ї Ламе відображається на обвідний циліндр у точку

$$t_{N'} = \frac{u_N}{r}, \quad v_{N'} = v_N.$$

Задача побудови розгортки циліндра полягає у відображенні бічної поверхні циліндра на площину.

Лінію на бічній поверхні циліндра у триортогональній системі (1) зручно подавати внутрішніми рівняннями:

$$u = rt, \quad v = v(t), \quad (4)$$

які приводять з одного боку до параметричних рівнянь цієї лінії у прямокутних декартових координатах підстановкою до (1):

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = v(t), \quad (5)$$

а з іншого – вони є параметричними рівняннями цієї ж лінії на площині розгортки.

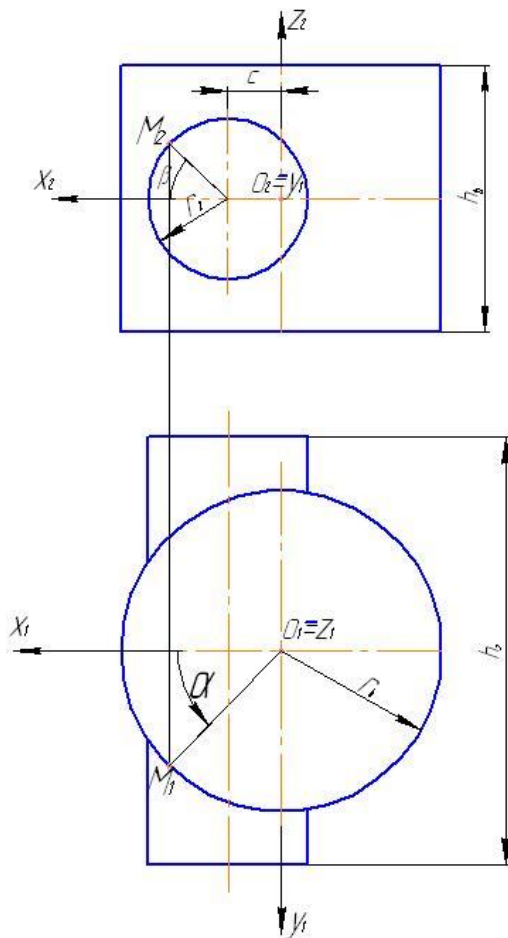


Рис. 1. Ортогональні проєкції циліндрів

Приклад. Побудувати розгортки двох циліндрів радіусів r_2 та r_6 висотою h_2 та h_6 відповідно, осі яких перехрещуються під прямим кутом на відстані c за умови $r_6 > r_2 + c$.

Розв'язання. Зафіксуємо відносно циліндрів прямокутну декартову систему координат як показано на рис. 1.

Параметричні рівняння циліндрів:

з вертикальною віссю

$$x = r_6 \cos \alpha, \quad y = r_6 \sin \alpha, \quad z = z, \quad (6)$$

і горизонтальною віссю

$$x = r_2 \cos \beta + c, \quad y = y, \quad z = r_2 \sin \beta. \quad (7)$$

Параметричні рівняння лінії перетину знайдемо сумісним розв'язанням рівнянь (6), (7). Оскільки $0 \leq \beta < 2\pi$ для лінії перетину, з рівності абсцис рівнянь (6), (7) знайдемо α :

$$\alpha_1 = \arccos \frac{r_2 \cos \beta + c}{r_6}, \quad \alpha_2 = 2\pi - \arccos \frac{r_2 \cos \beta + c}{r_6} \quad (8)$$

для двох гілок лінії перетину.

Щоб привести позначення аргументів у відповідність з позначеннями (5) і з врахуванням (8), параметричні рівняння лінії перетину представимо у вигляді ($\beta \equiv t$):

$$x = r_2 \cos t + c, \quad y = r_6 \sin \alpha_{1,2}, \quad z = r_2 \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad (9)$$

На рис. 2 показано аксонометричну проекцію циліндрів з нанесеною лінією перетину (9). На рис. 3 показано подані циліндри при $c = 0$, $r_6 = r_2$.

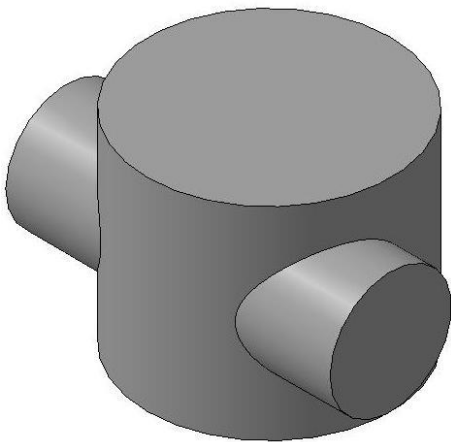


Рис. 2. Аксонометрична проекція циліндрів при $c < r_6 - r_2$, $r_6 > r_2$

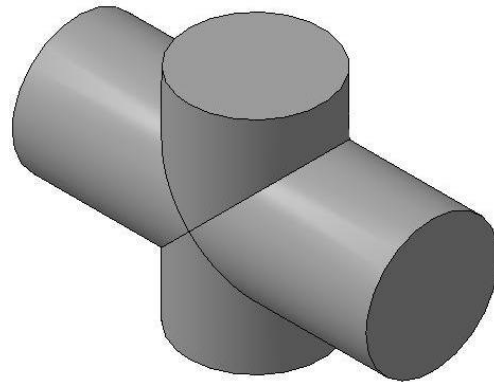


Рис. 3. Аксонометрична проекція циліндрів при $c = 0$, $r_6 = r_2$

Розгортку лінії перетину на розгортці циліндра з горизонтальною віссю будуємо у відповідності з (4)

$$u = r_2 t, \quad v = r_6 \sin \alpha_{1,2}. \quad (10)$$

- при $c < r_6 - r_2$, $r_6 > r_2$ (рис. 4);
- при $c = 0$, $r_6 = r_2$ (рис. 5).

Розгортку лінії перетину на розгортці циліндра з вертикальною віссю

у відповідності з (4) будуємо за формулами:

$$u = r_6 \alpha_{1,2}, \quad v = r_2 \sin t. \quad (11)$$

- при $c < r_6 - r_2$, $r_6 > r_2$ (рис. 6);
- при $c = 0$, $r_6 = r_2$ (рис. 7).

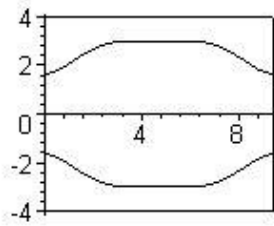


Рис. 4. Розгортка циліндра з горизонтальною віссю при $c < r_6 - r_2, r_6 > r_2$

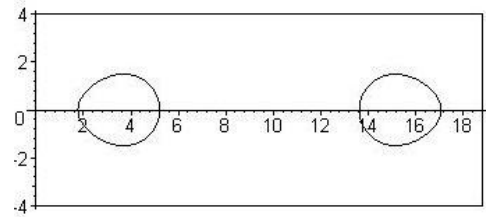


Рис. 5. Розгортка циліндра з вертикальною віссю при $c < r_6 - r_2, r_6 > r_2$

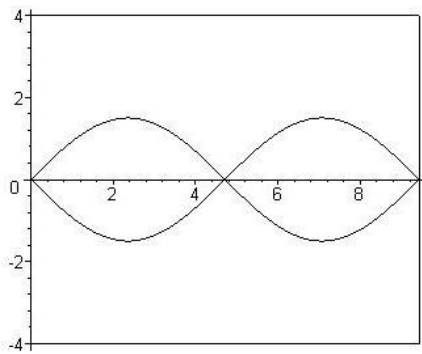


Рис. 6. Розгортка циліндра з горизонтальною віссю при $c = 0, r_6 = r_2$

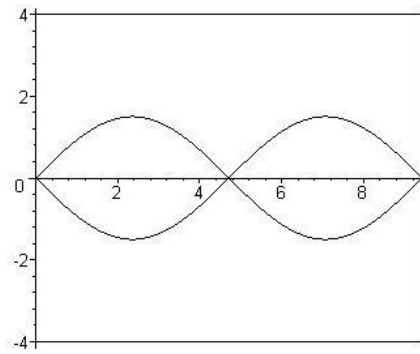


Рис. 7. Розгортка циліндра з вертикальною віссю при $c = 0, r_6 = r_2$

Висновки. Вдалиий вибір ортогональної системи віднесення значно спрощує як в методологічному, так і в обчислювальному плані отримання аналітичних моделей об'єктів дослідження і є основою для розвитку автоматизованих систем наукових досліджень (АСНД), проектування (САПР) і технологічної підготовки виробництва (АСТПВ), про що свідчать приклади застосування ортогональних систем з сім'єю площин для розв'язання прямої і оберненої задач ізометричного відображення розгортної поверхні на площину, що мають практичне значення.

Література

1. Скидан И.А. Обобщенные цилиндрические координаты и их приложения в прикладной геометрии / И.А. Скидан // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: "Будівельник", 1971. – Вып. 13. – С. 15–20.
2. Андреева В.В. Триортогональні системи з координатною сім'єю площин / В.В. Андреева // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь, 2007. – Вип. 4, т.34. – С.134–143.

3. Андреева В.В. Триортогональная система на основе узагальнених циліндричних координат / В.В. Андреева // Наукові нотатки: міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (квітень 2008). – Луцьк , 2008. – Вип. 22. – С. 6–12.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАЗВЕРТКИ ПРЯМОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В.В. Лихачёва

Аннотация – предлагается алгоритм построения развертки прямого кругового цилиндра при помощи триортогональной системы на основе обобщенных цилиндрических координат.

USE OF TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEM FOR CONSTRUCTION SWEEP OF A RIGHT CIRCULAR CYLINDER

V. Likhachova

Summary

Propose an algorithm for construction sweep of a right circular cylinder with triply-orthogonal system based on the generalized cylindrical coordinates.