

И.А. Скидан  
Н.В. Стребиж  
Государственное высшее учебное  
заведение “Донецкий национальный  
технический университет”  
г. Донецк, Украина

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В математике вообще и в геометрии в частности по широте трактовки математических объектов с позиций единого понятия трудно найти конкурента понятию отображения.

В [1, с. 291] отображение определяется как соответствие элементов одного множества элементам другого. Так функцию можно трактовать как отображение области определения функции на область значений функции.

В геометрии к числу отображений относят преобразования, изображения, проекции, например, конформное преобразование, сферическое изображение поверхности, проекция поверхности на плоскость.

Отображаемый объект называют прообразом, объект – результат отображения – образом. Образ и прообраз могут иметь одинаковую и различную размерность, общую и различную координацию, общего и различных носителей. Например, носителем прообраза двумерной поверхности является трёхмерное пространство. Носителем образа – сферического изображения поверхности также является трёхмерное пространство. При этом образ получается в результате произведения двух проецирований: лучами конгруэнции нормалей на несобственную (бесконечно удалённую) плоскость и центральным проецированием из центра единичной сферы на её поверхность, то есть соответствие между точечными множествами поверхности и её сферического изображения устанавливается посредством промежуточного носителя – несобственной плоскости. Заметим, что двумерное сферическое изображение поверхности в общем случае двумерное, в частном, если поверхность развёртываемая, – одномерное. Аналогично, проекция цилиндра на плоскость (поверхность) может быть линией, которая называется вырожденной проекцией цилиндра.

Особое место в теории отображений имеют параметрические уравнения, в которых роль функций и аргументов играют прямоугольные и криволинейные координаты. Здесь понятия образа и прообраза применимы только к аргументам и функциям.

Параметрические уравнения трёхмерного пространства

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \quad (1)$$

можно трактовать как отображение области определения функций на область их значений. Область определения функций (1) находится из условия неравенства нулю якобиана

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

В этой области возможно разрешение уравнений (1) относительно  $u, v, w$  в виде

$$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z). \quad (2)$$

О свойствах функций (1) и (2) можно сказать, что произведение отображений, которые они выражают, приводит к тождественному преобразованию.

Покажем как оперирование понятиями, связанными с термином “отображение”, может привести к решению неэлементарной с теоретической точки зрения, но важной для практического применения, задачи формообразования поверхности, отнесенной к линиям кривизны.

Рассмотрим конструктивную схему решения этой задачи. Пусть

$$x = u, y = v, z = w - \quad (3)$$

тождественное преобразование в виде (1).

Если считать  $u, v$  параметрами положения конгруэнции (связки) прямых, параллельных  $Oz$ , а  $w$  – параметром положения точки на прямой конгруэнции, то форма прямого цилиндра определяется формой направляющей

$$x = u(t), y = v(t). \quad (4)$$

Объединяя (3) и (4), получим параметрические уравнения цилиндра

$$x = x(t), y = y(t), z = w, \quad (5)$$

в которых  $t = const, w = const$  – линии кривизны.

Пусть теперь необходимо составить параметрические уравнения складчатой циклической поверхности (условия простоты технологии

изготовления), отнесенной к линиям кривизны (условие применимости метода конечных разностей расчета на прочность).

Условия диктуют выбор функций ввода системы координат, удовлетворяющей следующим трём требованиям:

- она должна быть ортогональной;
- она должна содержать координатное семейство  $w = const$  сфер (в схеме – горизонтальных плоскостей);
- она должна содержать конгруэнцию координатных  $w$ –окружностей (в схеме – конгруэнция прямых, параллельных  $Oz$ ).

Всем этим условиям удовлетворяют циклические координаты, функции ввода которых в виде (1)

$$x = w\varphi \cos u, \quad y = w\varphi \sin u, \quad z = v\varphi, \quad (6)$$

где  $\varphi = \frac{w\sqrt{v^2 + kc^2} + v\sqrt{w^2 - kc^2}}{v^2 + w^2}$ ,  $c$  – внутренний параметр.

Функции зависимости  $w, v, u$  от  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2z} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - kc^2)^2 + 4kc^2 z^2}, \\ v &= \frac{1}{x^2 + y^2} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + kc^2)^2 - 4kc^2(x^2 + y^2)}, \\ u &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

На сферах  $w = const$  зададим линию.

Зададим  $w$  значение  $w_1$  и введем вместо  $v$  новый параметр  $t$

$$v = \frac{\sqrt{w_1^2 - kc^2} + w_1 \sin t}{\cos t}. \quad (8)$$

Свяжем параметры  $t$  и  $u$  соотношением

$$t = t_0 + h \cos(nu), \quad (9)$$

где  $t_0, h, n$  – константы.

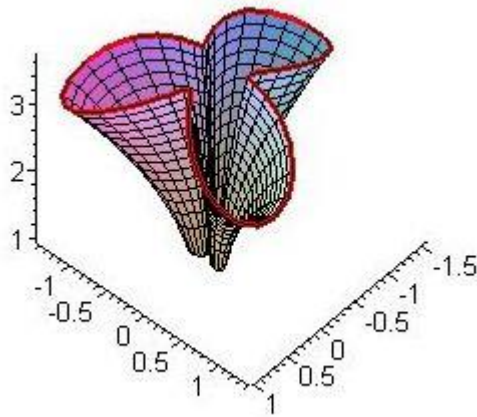
Тогда параметрические уравнения линии на сфере  $w = w_1$  будут выражены суперпозицией функций (1)  $\leftarrow$  (8)  $\leftarrow$  (9), которые, в конечном счете, будут иметь вид

$$x x_i = x x_i(u); (i = 1, 2, 3), \quad (10)$$

а уравнения искомой поверхности – суперпозиция функций (1) ← второе и третье уравнение (7) ← (10) в виде

$$x_i = x_i(u, w). \quad (11)$$

На рисунке показана поверхность (11) при  $c = 1, k = 1, t_0 = \pi / 3, h = 0.35, n = 3$ .



Подчеркнем, что роль формообразующего элемента играет внутреннее уравнение (9).

Литература.

1. Мантуров О.В. Толковый словарь математических терминов / О.В. Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И. Соркин, Н.Г. Федин – М.: Просвещение, 1965.