Vovk Leonid Petrovich State Technical University "Donetsk National Technical University", professor chair of higher mathematics
Kisel Ekaterina Sergeevna, "Donetsk National Technical University", assistant chair of higher mathematics
Kalashnikova Olga Borisovna "Donetsk National Technical University", student

Solution of boundary problem of thermoelastic areas with irregular border

Вовк Леонид Петрович, Автомобильно-дорожный институт ДВНЗ „Донецкий национальный технический университет”, профессор кафедры высшей математики
Кисель Екатерина Сергеевна Автомобильно-дорожный институт ДВНЗ „Донецкий национальный технический университет”, ассистент кафедры высшей математики
Калашникова Ольга Борисовна Автомобильно-дорожный институт ДВНЗ „Донецкий национальный технический университет”, студент

Решение краевых задач для термоупругих однородных областей с негладкой границей

Инженерные методики прочностного анализа деталей машин в своем большинстве не учитывают локальной концентрации напряжений (ЛКН) в особых областях сечения. Такие вопросы возникают при расчетах разъемных и неразъемных соединений деталей автомобилей и расчетов зубчатых сцеплений и основных видов механических передач. Однако именно в этих областях чаще всего наблюдается возникновения дефектов и их развитие. В связи с этим можно утверждать, что независимо от избранного критерия прочности он обязательно должен учитывать именно максимальные напряжения, которые возникают в зонах ЛКН. Поскольку наличие ЛКН может быть причиной выхода детали из строя, то качественное и количественное определение меры концентрации остаётся всегда важным и актуальным вопросам.

Расчет распределения напряжений в деталях автомобилей связан со значительными трудностями, которые обусловлены сложностью формы и внутренней структуры деталей и условиями их нагрузки. Поэтому в приближенных расчетах чаще всего применяют упрощении модели с экспериментальной оценкой их эффективности, которая по обыкновению приводит к неверным выводам[1].

Погрешности критериев и расчетов еще больше возрастают, если необходимо рассмотреть динамическое деформирование деталей, поскольку интенсивность ЛКН в динамических задачах существенно возрастает[2]. Такие случаи возникают, например, при расчетах кривошипно-шатунных механизмов, прочности поршневых пальцев двигателей внутреннего сгорания (ДВЗ), шатунных шеек коленчатого вала и т.д. Кроме того, появляется необходимость учета возможности проявления резонансных эффектов.

Важная особенность геометрии деталей, которые подвержены ЛКН, обусловленна существованием на границе их сечения сингулярных угловых точек, напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности которых и определяет прочность всей

---

[1] Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах/ В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко – К.: Наук. мысль, 1981.–284с.

[2] Вовк Л.П. Исследование динамических эффектов, возникающих при вибронагружении стыковых паяных соединений/ Л.П. Вовк// Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки.–2004.–№1.–С. 60-64.

детали в целом[3]. Здесь также имеет место появление новых волновых эффектов, связанных с концентрацией динамических напряжений.

Анализ некоторых научных публикаций, посвященных данной проблеме[4], позволяет утверждать, что при исследовании ЛКН в деталях ДВЗ, во-первых, не введены параметры интенсивности ЛКН, аналогичные широко известным коэффициентам концентрации напряжений и, во-вторых, нет анализа особенностей НДС в сингулярных зонах сечения деталей с учетом влияния температурных напряжений на ЛКН.

Рассмотрим постоянные симметричные колебания однородной термоупругой области, сечение которой представляется в виде прямоугольной области $D=\left\{\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right): \left|\tilde{x}_1\right| \le a; \left|\tilde{x}_2\right| \le b\right\}$ где $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ – декартовы координаты. На сторонах прямоугольника $\tilde{x}_1=\pm a;\ \tilde{x}_2=\pm b$ задано перемещения $\Psi_1\left(\tilde{x}_1\right),\ \Psi_2\left(\tilde{x}_2\right)$ соответственно. Предполагается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой.

Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i\left(x,y\right), i=1,2$ и приращения температуры $\Theta\left(x,y\right)$ определяются системой дифференциальных уравнений связанной термоупругости в частных производных[5]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_1 \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}-\frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_2 \qquad (1) \\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}-\frac{a^2 \omega i}{\chi}\Theta-\frac{\delta a^2 i \omega}{T_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=0
\end{gathered}
$$

где $x=\dfrac{\tilde{x}_1}{a};\ y=\dfrac{\tilde{x}_2}{a};\ U_1=\dfrac{\tilde{U}_1}{a};\ U_2=\dfrac{\tilde{U}_2}{a};\ \Theta=\dfrac{\tilde{\Theta}}{T_0}; \sigma_{ij}=\dfrac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}\ ;\ \tilde{\Theta}=T-T_0,$

$\tilde{U}_i,\left(i=1,2\right)$ – компоненты вектора перемещений; $\tilde{\Theta}$ - приращение температуры; T – абсолютная температура точек тела; T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; ρ – плотность; λ, μ – параметры Ляме, $\gamma=\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t$; $\delta=\dfrac{\gamma T_0}{\lambda_0}$; $\chi=\dfrac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$, где α_t – коэффициент линейного температурного расширения; λ_0 – коэффициент теплопроводности; c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Граничные условия сформулированы в следующем виде:

Если $x=\pm 1$:

$$
U_1\left(\pm 1, y\right)=\pm f_1\left(y\right),\quad U_2\left(\pm 1, y\right)=\pm \psi_1\left(y\right),\ \frac{\partial \Theta}{\partial x}+\alpha_t \frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=\psi_3\left(y\right) \qquad (2)
$$

Если $y=\pm \eta$, $\left(\eta=\frac{b}{a}\right)$:

$$
U_2\left(x, \pm \eta\right)=\pm f_2\left(x\right), \qquad U_1\left(x, \pm \eta\right)=\pm \psi_2\left(x\right), \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y}+\alpha_t \frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=\psi_4\left(x\right)
$$

---

[3] Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров/ А.В. Белоконь// Докл. АН СССР.–1977.–Т. 233.–№1.–С. 56-59.

[4] А.А. Лямин Локальные резонансы в слоистых средах/ А.А. Лямин, М.Г. Селезнев и др. – М.: ГНИЦ ПГК МО РФ, 2000.–175с.

[5] Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика/ Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно–Киев: Научная мысль,1976. –312 с.

λ_1 – приведенный коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи.

Система дифференциальных уравнений (1) и граничные условия (2) формулируют соответствующую краевую задачу относительно компонент вектора перемещений $\tilde{U}_i, (i = 1,2)$.

Применяя методику модифицированного метода суперпозиции для получения системы интегральных уравнений рассмотрим вспомогательную задачу которая характеризуется системой уравнений (1) и следующими граничными условиями на границе прямоугольника:

$$U_1(\pm 1, y) = \pm f_1(y); \qquad U_2(x, \pm\eta) = \pm f_2(x)$$
$$\sigma_{12}(\pm 1, y) = \pm\varphi_1(y); \qquad \sigma_{12}(x, \pm\eta) = \pm\varphi_2(x) \tag{3}$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \pm f_3(y),\ \text{если } x = \pm 1; \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = \pm f_4(x),\ \text{если } y = \pm\eta.$$

Учитываем, что $\varphi_1(y), \varphi_2(x)\ f_3(y), f_4(x)$ – неизвестные функции, причем $\varphi_1(y) = -\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x) = -\varphi_2(x)$, $f_3(y) = f_3(-y)$, $f_4(x) = f_4(-x)$, что следует из характера граничных условий (3). Вспомогательная краевая задача (1), (3) не отвечает, конечно, начальной граничной задаче, но предполагает аналитическое решение и позволяет, во-первых, удовлетворить часть начальных граничных условий и, во-вторых, выразить все характеристики начальной задачи через коэффициенты Фурье неизвестных функций $\varphi_1(y), \varphi_2(x)\ , f_3(y), f_4(x)$.

Решая вспомогательную задачу (1)-(3) и принимая во внимание не использованные граничные условия (2), сведем задачу к системе интегральных уравнений, обозначив $T = a_t \dfrac{\alpha}{\lambda_1}$:

$$L_{13}f_3 + L_{14}f_4 + L_{15}\varphi_1 + L_{16}\varphi_2 = \psi_1 - (L_{11}f_1 + L_{12}f_2)$$
$$L_{23}f_3 + L_{24}f_4 + L_{25}\varphi_1 + L_{26}\varphi_2 = \psi_2 - (L_{21}f_1 + L_{22}f_2) \tag{4}$$
$$L_{31}f_1 + L_{32}f_2 + L_{33}f_3 + L_{34}f_4 + L_{35}\varphi_1 + L_{36}\varphi_2 = \frac{1}{T}(\psi_3 - f_3)$$
$$L_{41}f_1 + L_{42}f_2 + L_{43}f_3 + L_{44}f_4 + L_{45}\varphi_1 + L_{46}\varphi_2 = \frac{1}{T}(\psi_4 - f_4)$$

Операторы $L_{m\gamma}$, где $m = \overline{1,4}$, $\gamma = \overline{3,6}$ определяются по формулам:

$$L_{13}f_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{13k}\, sin\,\alpha_k(y-\eta)\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f_{3k}\, cos\,\alpha_k(\xi-\eta)\,d\xi,\ L_{14}f_4 = \sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{14j}\int_{-1}^{1} f_{4j}\, cos\,\beta_j(\xi-1)\,d\xi$$

$$L_{15}\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{15k}\, sin\,\alpha_k(y-\eta)\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} \varphi_{1k}\, cos\,\alpha_k(\xi-\eta)\,d\xi,\ L_{16}\varphi_2 = \sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{16j}\int_{-1}^{1} \varphi_{2j}\, cos\,\beta_j(\xi-1)\,d\xi \ \text{ и т.д.}$$

Где, например, $\Delta_{13k} = \dfrac{1}{\alpha_k^2}\cdot\dfrac{\Theta_1}{2(E_1+1)}$, $\Delta_{14j} = e^{-\beta_j(\eta-y)}(\eta-y)\cdot\dfrac{1}{2\beta_j}\cdot\dfrac{\Theta_1}{E_1+1}$ и т.д.

Разложив гиперболические и тригонометрические функции, которые входят в в структуру операторов $L_{m\gamma}$ по тригонометрическими функциями $cos\,\alpha_k(y-\eta)$, $sin\,\alpha_k(y-\eta)$, $cos\,\beta_j(x-1)$, $sin\,\beta_j(x-1)$, сведем (4) к бесконечной системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье f_{3k}, f_{4j}, φ_{1k}, φ_{2j}.

Для эффективного решения системы исследуем поведение функций $f_3(y), f_4(x), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ в угловых точках прямоугольника.

Предположим, функции $f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$, $\varphi_1(x),\varphi_2(y)$ имеют особенность в угловых точках, то есть

$$f_3(\xi)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm C(\eta\mp\xi)^{\lambda-1};\ f_4(\xi)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm D(1\mp\xi)^{\lambda-1},$$

$$\varphi_1(\xi)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm G(\eta\mp\xi)^{\beta-1};\ \varphi_2(\xi)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm I(1\mp\xi)^{\beta-1}.$$

λ,β - параметры, которые характеризуют особенности функций $f_3(\xi)$, $f_4(\xi),\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$, а C,D,G,I - произвольные постоянные.

Проводим асимптотический анализ левых частей CIP(4) при приближении к угловой точке[6].

Имеем:

$$L_{13}f_3+L_{14}f_4+L_{15}\varphi_1+L_{16}\varphi_2=C\frac{\Theta_1}{2(E_1+1)}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda+1}}+D\frac{\Theta_1}{2(E_1+1)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda+2}}+$$

$$+G\frac{E_1}{2(E_1+1)}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}+I\frac{E_1}{2(E_1+1)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}}=0$$

$$L_{23}f_3+L_{24}f_4+L_{25}\varphi_1+L_{26}\varphi_2=C\frac{\Theta_1}{2(E_1+1)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\lambda+2}}+D\frac{\Theta_1}{2(E_1+1)}(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda+1}}+$$

$$+G\frac{E_1}{2(E_1+1)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+1}}+I\frac{E_1}{2(E_1+1)}(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}=0$$

$$L_{33}f_3+L_{34}f_4+L_{35}\varphi_1+L_{36}\varphi_2=-C\left(\frac{T}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\lambda+1}}-\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\lambda}}\right)+$$

$$+DT\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda+1}}-\frac{1}{2}(\eta-y)\left(\Omega_2+\frac{\Theta_1\Omega_1}{(E_1+1)}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda+2}}\right)+G\left(\frac{T}{\eta}\cdot\frac{\Omega_1}{2(E_1+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+2}}\right)+$$

$$+IT\frac{\Omega_1}{(E_1+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta+2}}-(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta+1}}\right)=0$$

$$L_{43}f_3+L_{44}f_4+L_{45}\varphi_1+L_{46}\varphi_2=CT\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda+1}}-\frac{1}{2}(1-x)\left(\Omega_2+\frac{\Theta_1\Omega_1}{(E_1+1)}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda+2}}\right)+$$

$$-D\left(T\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda+1}}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda}}\right)+GT\frac{\Omega_1}{(E_1+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+2}}-(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right)+$$

$$+IT\left(\frac{\Omega_1}{2(E_1+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+2}}\right)=0$$

Получим систему для определения параметров λ,β :

[6] Вовк Л.П., Вести Автомобильно-дорожного института: научно производственный сборник / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель/ АДИ ДВНЗ «ДонНТУ». - Горловка, 2009. - №1(8). - С. 13-23.

$$\begin{cases} G\beta + I\,sin\dfrac{\pi\beta}{2} = 0 \\ I\beta + G\,sin\dfrac{\pi\beta}{2} = 0 \\ C\lambda\,sin\dfrac{\pi\lambda}{2} = 0 \\ D\lambda\,sin\dfrac{\pi\lambda}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G\beta + I\,sin\dfrac{\pi\beta}{2} = 0 \\ I\beta + G\,sin\dfrac{\pi\beta}{2} = 0 \end{cases}$$

Из условия существования нетривиального решения первых двух уравнений данной системы получим характеристическое уравнение для определения параметра β:

$$\beta^2 - sin^2\frac{\pi\beta}{2} = 0 \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение (5) имеет один действительный корень $\beta_0 = 1$ и множество комплексных корней $\beta_k = \tau_k \pm i\sigma_k$. Конечно, надо учесть лишь те комплексные корни, для которых $\operatorname{Re}\beta_k > 1$. Раньше в работе Вильямса[7] для разных граничных условий была исследована зависимость порядка сингулярности поля статических напряжений в вершине клина от величины его угла. Уравнение (5) отвечает уравнению (15) этой работы для клина с незакрепленными гранями и углом 90º. Как видим, характер особенности механического поля в угловой точке не зависит от упругих параметров области сечения.

Учитывая механическое содержание функций $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$ и требуя ограниченности энергии всей системы приходим к выводу, что при построении асимптотики решения следует учитывать только один действительный корень $\beta_0 = 1$ и множество комплексных корней $\beta_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ с положительной действительной частью.

Два последних уравнения системы дают основание говорить, что температура не имеет особенности в угловых точках области, поскольку $D = C = 0$.

После определения дополнительных функций $f_3(y), f_4(x), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ из системы интегральных уравнений (4) имеем возможность найти все неизвестные краевой задачи (1)-(2) и все характеристики волнового поля.

Выводы. Необходимо отметить, что нахождение показателей локальной особенности β дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние во всей области D, включая ее угловые точки. Это в свою очередь приводит к эффективной оценке концентрации динамических напряжений в окрестности этих точек, которая обусловливает прочностные характеристики всей области.

Предложенный метод дает возможность рассматривать все возможные вариации граничных условий как в смещениях, так и в напряжениях, включая смешанные краевые задачи. Для этого необходимо иначе формулировать вспомогательные задачи и соответственно вводить другие неизвестные функции СИУ.

Список литературы:

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах/ В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко – К.: Наук. мысль, 1981. - 284с.
2. Вовк Л.П. Исследование динамических эффектов, возникающих при вибронагружении стыковых паяных соединений/ Л.П. Вовк// Известия вузов. Северо-кавказский регион. Технические науки. - 2004. - №1. - С. 60-64.

---

[7] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension/ M.L. Williams// J. Appl. Mech. - 1952. - Vol. 19. - №4. - P. 526-528.

3. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров/ А.В. Белоконь// Докл. АН СССР. - 1977. - Т. 233. - №1. - С. 56-59.
4. А.А. Лямин Локальные резонансы в слоистых средах/ А.А. Лямин, М.Г. Селезнев и др. – М.: ГНИЦ ПГК МО РФ, 2000. - 175с.
5. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика/ Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно — Киев: Научная мысль, 1976. - 312 с.
6. Вовк Л.П., Вести Автомобильно-дорожного института: научно производственный сборник/ Л.П. Вовк, Е.С. Кисель/ АДИ ДВНЗ «ДонНТУ». - Горловка, 2009. - №1(8). - С. 13-23.
7. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension/ M.L. Williams// J. Appl. Mech. - 1952. - Vol. 19. - №4. - P. 526-528.