

Д.В. Неснов, канд. техн. наук
Донецький національний технічний університет

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛІВ У НОРМАЛЬНИХ КОНІЧНИХ ТА НОРМАЛЬНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ КООРДИНАТАХ

Робота присвячена визначенню диференціальних характеристик скалярних і векторних полів складної структури на основі використання положень теорії поля у загальних криволінійних координатах, що дозволяє складати геометричні моделі фізичних процесів.

Постановка проблеми. Більшість фізичних процесів та явищ моделюється із застосуванням математичного апарату теорії поля. Теорія поля у науковій літературі широко представлена у векторному викладенні у прямокутних декартових, сферичних та циліндричних координатах [1-6]. Ускладнення математичного плану, що виникають при описі полів складної структури, наприклад, полів із джерелом та стоком більш складної форми, ніж точка та пряма, потребують нових підходів до вивчення процесів, що відбуваються у середовищі таких полів. Поверхнями рівня теплового поля із джерелом у вигляді зовнішніх конічних та торових поверхонь теплоізоляційного шару є сім'ї еквідистантних конусів та торів. Ці сім'ї не є координатними в жодній із загальних координатних систем, що є причиною ускладнень, які виникають при описі полів та визначенні їх характеристик.

Проблема пошуку засобів запобігання ускладнень, що виникають при аналітичному описі скалярних та векторних полів внаслідок незбігання поверхонь рівня з координатними поверхнями системи його віднесення є актуальною.

Аналіз досягнень та публікацій. Наведені в статті дослідження базуються на:

- положеннях загальної теорії поля у криволінійних координатах (Альпін Н.М., Булах Є.Г., Гольдфайн І.А., Дубнов Я.С., Мінаєв О.А., Кочін М.Ю., Лаптев Г.Ф.);

- теорії параметризації геометричних фігур та умов (Джапарідзе І.С., Котов І.І., Підгорний О.Л., Рижов М.М.);

- досягненнях у галузі геометричного моделювання фізичних процесів та явищ (Ванін В.В., Куценко Л.М., Михайленко В.С., Найдіш В.М., Підгорний О.Л., Хомченко А.Н. та їхні учні);

- нових спеціальних координаціях простору (Скидан І.А. та його учні).

Постановка завдання. Ціллю роботи є адаптування теорії полів, віднесених до криволінійних координат, на їх подання у нормальних конічних та нормальних тороїдальних координатах і створення основи їх геометричного моделювання із застосуванням засобів комп'ютерної графіки.

Основний матеріал дослідження. В роботі досліджено нормальні конічні координати t, u, v [7] $x=(u \sin a+v \cos a)\cos t, y=(u \sin a+v \cos a)\sin t, z=u \cos a-v \sin a$ на предмет їх використання в теорії поля. Показано, що використання обох порожнин конуса-визначника системи для віднесення поля неможливе за причини протилежної орієнтації локального репера. Звідси перше обмеження на область правильної координації простору ($u>0$). Порушення цього обмеження приводить до появи самоперетинів поверхонь рівня скалярного поля.

Друге обмеження на координату v ($v<-utg a$). Його порушення приводить до появи у поверхонь рівня конічних точок, розташованих на осі конуса-визначника.

Подання векторного і скалярного полів у спеціальних координатах. Скалярне поле подають функцією від спеціальних координат $t, u, v - F = F(t, u, v) = \theta$. Векторне поле $\mathbf{a}(t, u, v)$ подають за допомогою трьох скалярних функцій $a_t(t, u, v), a_u(t, u, v), a_v(t, u, v)$, $\mathbf{a}(t, u, v) = a_t(t, u, v)\mathbf{e}_t + a_u(t, u, v)\mathbf{e}_u + a_v(t, u, v)\mathbf{e}_v$

Вирази диференціальних характеристик для будь якого поля у будь-якій системі віднесення, конкретизовано на випадок віднесення поля до системи нормальних конічних координат.

Вектор-градієнт:

$$\mathbf{G} = \text{grad} F = \frac{1}{(u \sin a + v \cos a)} \frac{\partial F}{\partial t} \mathbf{e}_t + \frac{\partial F}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{\partial F}{\partial v} \mathbf{e}_v \quad (1)$$

Похідна скалярного поля за напрямком:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{G_t}{|G|} \cos \bar{a} + \frac{G_u}{|G|} \cos \bar{b} + \frac{G_v}{|G|} \cos \bar{g} \quad (2)$$

;

де

$$G_t = \frac{I}{u \sin a + v \cos a} \frac{\mathbb{F}F}{\mathbb{F}t}, \quad G_u = \frac{\mathbb{F}F}{\mathbb{F}u},$$

$$G_v = \frac{\mathbb{F}F}{\mathbb{F}v}, \quad |G| = \sqrt{G_t^2 + G_u^2 + G_v^2}.$$

Лапласіан скалярного поля:

$$DF = \frac{I}{u \times \sin a + v \times \cos a} \frac{\acute{e} \mathbb{F}^2 F}{\grave{e} \mathbb{F}^2 t} \frac{I}{u \times \sin a + v \times \cos a} + \quad (3)$$

$$+ \frac{\mathbb{F}^2 F}{\mathbb{F}u^2} (u \times \sin a + v \times \cos a) + \frac{\mathbb{F}F}{\mathbb{F}u} \sin a + \frac{\mathbb{F}^2 F}{\mathbb{F}v^2} \cos a \frac{\grave{u}}{\grave{u}}.$$

Дивергенція векторного поля

$$\text{div} \bar{a} = \frac{I}{u \times \sin a + v \times \cos a} \frac{\acute{e} \mathbb{F}a_t}{\grave{e} \mathbb{F}t} + (u \times \sin a + v \times \cos a) \frac{\mathbb{F}a_u}{\mathbb{F}u} + \quad (4)$$

$$+ a_u \sin a + (u \times \sin a + v \times \cos a) \frac{\mathbb{F}a_v}{\mathbb{F}v} + a_v \cos a \frac{\grave{u}}{\grave{u}}.$$

Ротор (вихор) векторного поля

$$\text{rota} = \frac{\mathbb{F}a_v}{\mathbb{F}u} - \frac{a_u}{\mathbb{F}v} \frac{\grave{o}}{\theta} e_t + \frac{\acute{e} \mathbb{F}a_t}{\grave{e} \mathbb{F}v} + \frac{I}{u \times \sin a + v \times \cos a} \frac{\mathbb{F}a_v \cos a}{\acute{e}} - \frac{\mathbb{F}a_v}{\mathbb{F}t} \frac{\grave{o}\grave{u}}{\theta \grave{u}} e_u \quad (5)$$

$$+ \frac{\acute{e}}{\grave{e}} \frac{I}{u \times \sin a + v \times \cos a} \frac{\mathbb{F}a_u}{\mathbb{F}t} - a_t \sin a \frac{\grave{o}}{\theta} - \frac{\mathbb{F}a_t}{\mathbb{F}u} \frac{\grave{u}}{\grave{u}} e_v.$$

Увагу приділено вивченню скалярних полів за допомогою їхніх поверхонь рівня внутрішнє рівняння яких отримується розв'язанням рівняння сім'ї поверхонь рівня $F(t, u, v) = C$ відносно однієї із змінних u або v [8].

Наведено методику "читання" внутрішніх рівнянь поверхонь рівня скалярного поля, що дозволяє керувати їх формою.

В роботі також наведені диференціально-геометричні характеристики скалярних і векторних полів в нормальних тороїдальних координатах $x = (R + (r+v)\cos u) \cos t$, $y = (R + (r+v)\cos u) \sin t$, $z = (r+v)\sin u$ [9] поля подаються такими ж за виглядом функціями, що і в нормальних кінчатних координатах.

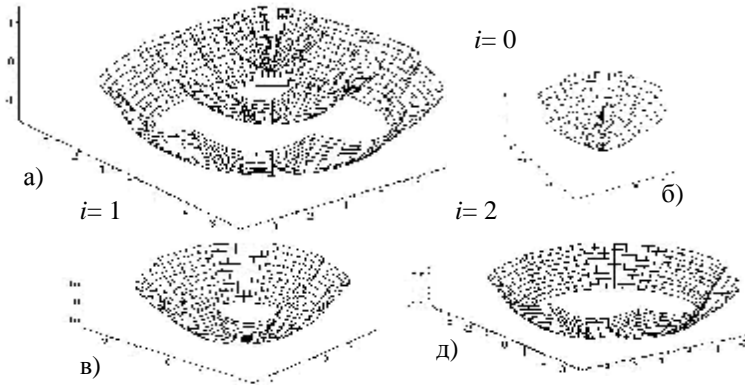


Рис. 1. Поверхні рівня $\mathbf{v} = h \left| \sin u \times \cos(n \times t) \right| + iDC$
 скалярного поля $F = h \left| \sin u \times \cos(n \times t) \right| - v$

Вектор-градієнт:

$$\mathbf{G} = \text{grad}F = \frac{1}{R + (r + v)\cos u} \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}t} e_t + \frac{1}{r + v} \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}u} e_u + \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}v} e_v \quad (6)$$

Похідна скалярного поля за напрямком:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{G_t}{|G|} \cos a + \frac{G_u}{|G|} \cos b + \frac{G_v}{|G|} \cos g, ; \quad (7)$$

де

$$G_t = \frac{1}{R + (r + v)\cos u} \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}t}, G_u = \frac{1}{r + v} \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}u},$$

$$G_v = \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}v}, G = \sqrt{G_t^2 + G_u^2 + G_v^2}$$

Лапласіан скалярного поля:

$$DF = \frac{1}{[R + (r + v)\cos u]^2} \frac{\mathcal{F}^2 F}{\mathcal{F}t^2} + \frac{1}{(r + v)^2} \frac{\mathcal{F}^2 F}{\mathcal{F}u^2} + \frac{\mathcal{F}^2 F}{\mathcal{F}v^2} + \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{(r + v)[R + (r + v)\cos u]} \frac{\partial}{\partial t} [R + 2(r + v)\cos u] \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}v} - \sin u \frac{\mathcal{F}F}{\mathcal{F}u} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Дивергенція векторного поля

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{R + (r + v) \cos u} \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{1}{r + v} \frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_v}{\partial v} - \frac{a_u \sin u}{R + (r + v) \cos u} + \frac{a_v [R + 2(r + v) \cos u]}{[R + (r + v) \cos u](r + v)}. \quad (9)$$

На рис.2 показано поверхні рівня скалярного поля $F = h \cos^2 u \sin^2 nt - v$ при $R=10, r=5, h=4.2, n=4, u = -0.1 \dots 1.8, t=0 \dots 2\pi$

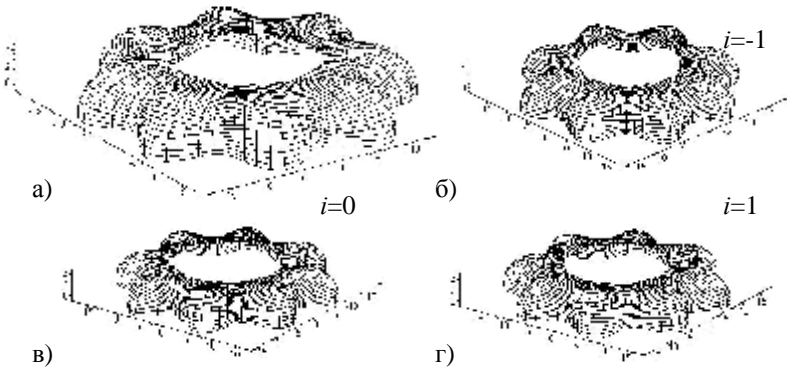


Рис. 2. Поверхні рівня $v = h \cos^2 u \sin^2 (n \times t) + i \times DC$
скалярного поля $F = h \cos^2 u \sin^2 (n \times t) - v$

Як застосування, визначимо функції розподілу температури в конічній та тороїдальній стінках, уявляючи поле стаціонарним.

Теплове поле подають функцією температури від нормальної координати $v - T=T(v)$, іншу координату u будемо уявляти параметром диференціального рівняння стаціонарного теплового поля, яке, як відомо, представляється нульовим значенням лапласіана функції $T=T(v)$ [10, 11].

З умови

$$DT = \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\cos a}{u \sin a + v \cos a} = 0 \quad (10)$$

Функція розподілу температури у конічній стінці

$$T = \frac{T_{w_1} \ln \frac{utga + v}{utga + v_2} + T_{w_2} \ln \frac{utga + v_1}{utga + v}}{\ln \frac{utga + v_1}{utga + v_2}}. \quad (11)$$

У випадку нормальних тороїдальних координат –

$$DT = \frac{\mathbb{I}^2 T}{\mathbb{I} v^2} + \frac{\mathbb{I} T \dot{\epsilon} \mathbb{I}}{\mathbb{I} v \dot{\epsilon} \mathbb{I} r + v} + \frac{\cos u}{R + (r + v) \cos u} \dot{u} = 0 \quad (12)$$

Функція розподілу температури у тороїдальній стінці

$$T = - \frac{T_{w_1} \ln \frac{\mathfrak{e}(r + v)(R + (r + v_2) \cos u)}{\mathfrak{e}(r + v_2)(R + (r + v) \cos u)} \ddot{\theta}}{\ln \frac{\mathfrak{e}(r + v_1)(R + (r + v_2) \cos u)}{\mathfrak{e}(r + v_2)(R + (r + v_1) \cos u)} \ddot{\theta}} + \frac{T_{w_2} \ln \frac{\mathfrak{e}(r + v_1)(R + (r + v) \cos u)}{\mathfrak{e}(r + v)(R + (r + v_1) \cos u)} \ddot{\theta}}{\ln \frac{\mathfrak{e}(r + v_1)(R + (r + v_2) \cos u)}{\mathfrak{e}(r + v_2)(R + (r + v_1) \cos u)} \ddot{\theta}} \quad (13)$$

Як бачимо, закон розподілу температури по товщині стінок нелінійний, при поданих температурах зовні стінки (T_{w_1}) та усередині (T_{w_2}). Показано, що ізотермічними поверхнями конічної стінки є конуси, еквідистантні конусу-визначнику системи. У випадку тороїдальної стінки відносно відхилення ізотермічних поверхонь від поверхонь рівня нормальної тороїдальної системи координат не перевищує 2%. Розрахунки було виконано при різних

співвідношеннях $\frac{R}{r}$ та $\frac{r}{v}$.

Закономірність розподілу температури у конічній та тороїдальній стінках та рекомендації по термозахисту тороїдальних фрагментів було впроваджене у КБ космічних апаратів та систем ДКБ “Південне”.

Висновки. Напведені дослідження вирішують наукову задачу геометричного моделювання полів, віднесених до нормальних конічних та нормальних тороїдальних координат, із застосуванням засобів комп'ютерної графіки.

Крім галузі теплообміну, приклад застосування в якій наведено у роботі, результати досліджень застосовні у інших галузях: в аеро- та гідродинаміці, в теорії суцільного середовища, зокрема в теоріях пружності і пластичності, в теорії електричних та електромагнітних полів.

Список літератури

- 1.** Альпін Л.М. Теория поля. - М.: Недра, 1966. – 348 с.**2.** Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теории поля. - Киев: Наукова думка, 1998. - 300 с.**3.** Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. - Москва: Физматгиздат, 1962. – 132 с.**4.** Дубнов Я.С. Основы векторного исчисления. - М.: Л.: ГИТТЛ, 1950. – Ч. 1. – 368 с., 1952. – Ч. 2. – 416 с.**5.** Лантев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. - М.: Наука, 1975. – 280 **6.** Мінаєв О.А., Ілюкович Б.М., Ізмайлова М.К. Механіка суцільних середовищ. - К.: Вища школа, 1995. – 272 с.**7.** Коломієць О.А. Математичні та комп'ютерні моделі поверхонь в спеціальних нормальних координатах: Дис... канд. техн. наук: 05.01.01. - Донецьк, 2000. – 219 с.**8.** Неснов Д.В. Теорія поля в нормальних конічних координатах // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: - 2001. - Т.14, Вип.4 - С. 91-98.**9.** Неснов Д.В. Теорія поля в нормальних тороїдальних координатах // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Київ: КНУБА. - 2002. - Вип.71. – С. 213-216.**10.** Неснов Д.В. Розрахунок стаціонарної теплопровідності торового тіла // Сучасні роблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: - 2003.-С. 200-201.**11.** Неснов Д.В. Теплоизоляционный расчет и раскрой поверхности тора // V міжнародна молодіжна науково-практична конференція “Людина і космос”. – Дніпропетровськ: - 2003.-С. 46.

Отримано ХХ.ХХ.ХХХХ, ХДУХТ, Харків
© Д.В. Неснов, 2005