

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ КАРАМЕЛЬНОЙ МАССЫ В ПРОЦЕССЕ ЕЕ ОХЛАЖДЕНИЯ

Стародубцева О.Н., Зори А.А.

Донецкий национальный технический университет, кафедра ЭТ

E-mail: xena@kita.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Starodubtseva O., Zori A. Mathematical model of caramel mass temperature distributing in the process of its cooling. The model of distributing of temperature of caramel mass in the process of its cooling is offered in the article, influence of external environment on this process is explored, the received results are analysed and dependence between the temperature of caramel mass and indications of sensor of middle temperature in a chosen point of measuring is set.

Постановка проблемы и ее актуальность. При производстве карамели готовая карамельная масса выходит из варочных аппаратов в виде вязкой жидкости температурой от 115 до 150 °С [1–3]. Эта температура зависит от рецептуры, по которой приготовлена карамельная масса (чем больше в рецептуре патоки, тем ниже температура), способа уваривания (при уваривании без вакуума температура значительно выше), остаточной влажности (чем выше массовая доля сухих веществ, тем выше температура массы). Для дальнейшей обработки карамельная масса должна обладать пластичными свойствами. С этой целью карамельную массу охлаждают до температуры порядка 90 °С. Охлаждение ведут по возможности быстро, так как содержащаяся в карамели в виде пересыщенного раствора сахара может закристаллизоваться. Этот процесс называют засахариванием карамельной массы. Опыт показывает, что чем быстрее карамельная масса охлаждена до температуры 80–90 °С, тем более стойка она против засахаривания.

Поскольку в кондитерском производстве отсутствуют экспресс-методы определения температуры карамельной массы на выходе охлаждающего стола и прямыми измерениями ее получить весьма сложно, то предлагается определять среднеобъемную температуру карамельной массы по измеренному значению температуры в какой-либо доступной точке ее поверхностного слоя с использованием установленной математической зависимости между ними.

Постановка задачи исследований. Для определения среднеобъемной температуры карамели на выходе охлаждающего стола по измеряемой датчиком температуре в доступной точке поверхностного слоя массы необходимо решить следующие задачи:

1. Построить модель распределения температуры карамельной массы по пространственным координатам и определить ее среднеобъемную температуру по сечению, перпендикулярному ее движению на выходе охлаждающего стола.
2. Определить технологически и технически правильное и обоснованное место расположения датчика температуры и установить зависимость его показаний от среднеобъемной температуры карамельной массы.
3. Исследовать влияние воздействий внешней среды на процесс охлаждения карамельной массы, проанализировать полученные результаты и выполнить оценку погрешности определения среднеобъемной температуры с учетом худших условий воздействия внешних факторов.
4. Установить влияние толщины охлаждаемого слоя на зависимость показаний измерителя температуры от среднеобъемной температуры и ввести компенсацию погрешности, обусловленную этим фактором.

Основной материал и результаты работы. Построим модель распределения поля температур при охлаждении карамельной массы. Для расчета модели распределения температуры карамельной массы в пространстве использовано основное уравнение теплопроводности [4]:

$$\left[\omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \tau} \right] = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где $\omega_x \frac{\partial t}{\partial x}, \omega_y \frac{\partial t}{\partial y}, \omega_z \frac{\partial t}{\partial z}$ — скорость внутреннего тепловыделения по пространственным координатам;

$\frac{\partial t}{\partial \tau}$ — скорость изменения внутренней энергии материала на единицу объема;

$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ — результирующие скорости переноса тепла в контрольный объем вследствие теплопроводности (на единицу объема);

a — коэффициент температуропроводности, представляющий собой следующую комбинацию теплофизических свойств материала:

a — коэффициент температуропроводности, представляющий собой следующую комбинацию теплофизических свойств материала:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C}, \quad (2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности карамельной массы;

ρ, C — плотность и удельная теплоемкость карамельной массы.

Направление осей выбрано следующим образом: ось x расположена вдоль стола по направлению от вакуум-аппарата к конвейеру, ось y — поперек стола, ось z — нормаль к столу, то есть характеризует толщину карамельной массы.

Построение распределения температуры в твердом теле с использованием общего уравнения теплопроводности требует решения дифференциального уравнения в частных производных. В большинстве практических задач можно сделать упрощающие предположения, позволяющие исключить тот или другой член из уравнения теплопроводности, упростить задачу и отыскание решения.

Рассмотрим задачу и упростим уравнение (1). Данную задачу, можно отнести к задачам нестационарной теплопроводности при отсутствии внутреннего тепловыделения, следовательно, из

уравнения (1) исключаем $\omega_x \frac{\partial t}{\partial x}, \omega_y \frac{\partial t}{\partial y}, \omega_z \frac{\partial t}{\partial z}$. Задачу можно свести к двумерной, так как температура зависит только от координат x и z (распределение по длине и толщине карамельной массы).

Уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

Задача решается при граничных условиях третьего рода (условия равенства потоков), имеющих следующий вид:

$$z = 0: \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{вод} (t_{z=0} - t_{вод}); \quad (4)$$

$$z = b: \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{возд} (t_{zb} - t_{возд}); \quad (5)$$

$$\tau = 0, x = 0 \quad t(x, z, \tau) = t(0, z, 0) = 120^\circ C, \quad (6)$$

где $t_{z=0}$ — температура карамельной массы на границе с охлаждающим столом;

t_{zb} — температура карамельной массы на границе с воздухом;

$t_{вод}$ — температура воды, охлаждающей стол; $t_{возд}$ — температура воздуха;

водой (вынужденный конвективный теплообмен), а сверху — воздухом (свободная конвекция).

Представим уравнение (4) в конечных разностях:

$$-\lambda \cdot \frac{t_{0,n} - t_{1,n}}{\Delta z} = \lambda_{\text{воды}} \cdot (t_{0,n} - t_{\text{воды}}), \quad (9)$$

где $T_{0,n}$ — температура нижней границы карамельной массы в n -й момент времени.

Обозначим величину $\frac{\lambda}{\lambda_{\text{воды}} \cdot \Delta z} = a_1$. Уравнение (9) примет следующий вид:

$$(1 + a_1) \cdot t_{0,n} - a_1 \cdot t_{1,n} = t_{\text{воды}}. \quad (10)$$

Аналогично для уравнения (5) получим:

$$-\lambda \cdot \frac{t_{k,n} - t_{k-1,n}}{\Delta z} = \lambda_{\text{возд}} \cdot (t_{k,n} - t_{\text{возд}}), \quad (11)$$

где $t_{k,n}$ — температура верхней границы карамельной массы в n -й момент времени.

Обозначим $\frac{\lambda}{\lambda_{\text{возд}} \cdot \Delta z} = a_2$. Уравнение (11) примет вид:

$$(1 + a_{\text{возд}}) \cdot t_{k,n} - a_2 \cdot t_{k-1,n} = t_{\text{возд}}. \quad (12)$$

Дополняя систему (8) уравнениями (10) и (12), получим систему из $k+1$ уравнений с $k+1$ неизвестными.

Запишем систему в матричной форме.

$$M \cdot T^{<n>} = ME \cdot T^{<n-1>} + T_{\text{ну}}, \quad (13)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 1+a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta a_z & (2 \cdot \Delta a_z + 1) & -\Delta a_z & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta a_z & (2 \cdot \Delta a_z + 1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\Delta a_z & (2 \cdot \Delta a_z + 1) & -\Delta a_z \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 & 1+a_2 \end{bmatrix};$$

$$T^{<n>} = \begin{bmatrix} t_{0,n} \\ t_{1,n} \\ \vdots \\ t_{k-1,n} \\ t_{k,n} \end{bmatrix}; \quad ME = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T^{<n-1>} = \begin{bmatrix} t_{0,n-1} \\ t_{1,n-1} \\ \vdots \\ t_{k-1,n-1} \\ t_{k,n-1} \end{bmatrix}; \quad T_{\text{ну}} = \begin{bmatrix} t_{\text{воды}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ t_{\text{возд}} \end{bmatrix}.$$

Решая систему (13), получим

$$T^{<n>} = M^{-1} \cdot [ME \cdot T^{<n-1>} + T_{\text{ну}}]. \quad (14)$$

Алгоритм расчета поля распределения температуры карамельной массы следующий. Первому столбцу присваивается T_n , $T_{k,0} = T_n$, где $k=0..K$, а каждый последующий вычисляется по формуле (14). M^{-1} вычисляем заранее.

Для более точного вычисления поля распределения температуры карамельной массы оставим уравнение (3) без упрощений.

$$a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

Проведя математические расчеты, аналогичные описанным выше, представим следующую систему уравнений в матричной форме:

$$M \cdot T^{<n>} = ME \cdot [\Delta a \cdot T^{<n-2>} + (1 - 2\Delta a)T^{<n-1>}] + T_{ny}, \quad (15)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 1 + a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta a & \Delta a + 1 & -\Delta a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta a & \Delta a + 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\Delta a & \Delta a + 1 & -\Delta a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 & 1 + a_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta a = a \cdot \frac{\Delta \tau}{\Delta z^2} = a \cdot \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}$$

$$T^{<n>} = \begin{bmatrix} t_{0,n} \\ t_{1,n} \\ \vdots \\ t_{k-1,n} \\ t_{k,n} \end{bmatrix}; \quad ME = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$T^{<n-1>} = \begin{bmatrix} t_{0,n-1} \\ t_{1,n-1} \\ \vdots \\ t_{k-1,n-1} \\ t_{k,n-1} \end{bmatrix}; \quad T^{<n-2>} = \begin{bmatrix} t_{0,n-2} \\ t_{1,n-2} \\ \vdots \\ t_{k-1,n-2} \\ t_{k,n-2} \end{bmatrix}; \quad T_{ny} = \begin{bmatrix} t_{\text{води}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ t_{\text{возд}} \end{bmatrix}.$$

Решая систему (15), получим

$$T^{<n>} = M^{-1} \cdot [ME \cdot (\Delta a \cdot T^{<n-2>} + (1 - 2\Delta a)T^{<n-1>} + T_{ny})]. \quad (16)$$

Алгоритм расчета поля распределения температуры карамельной массы аналогичен вышеописанному с той лишь разницей, что первым двум столбцам присваивается T_n , $T_{k,0} = T_{k,1} = T_n$, где $k=0..K$, а каждый последующий вычисляется по формуле (16).

Проведем имитационное моделирование и проанализируем полученные результаты. Расчет предложенной ранее модели распределения поля температур выполняем с использованием математического редактора Mathcad 2000. Определим среднеобъемную температуру карамельной массы по сечению, перпендикулярному ее движению на выходе охлаждающего стола. Для ее вычисления используем метод Симпсона, вычисляем интеграл по профилю температуры в конце зоны охлаждения и по полученному интегралу вычисляем среднеобъемную температуру карамели. Наиболее удобным расположением датчика температуры является конец охлаждающего стола, где заканчиваются переходные процессы охлаждения карамельной массы. Так как установка датчика над пластом карамели — технически трудноразрешима и по технологии вынужденная конвекция карамельной массы водой является важнейшим фактором, влияющим на процесс ее охлаждения, то следует отдать предпочтение измерениям на нижней границе карамельной массы при расположении датчика температуры "заподлицо" с охлаждающим столом в его конце. Установим зависимость между среднеобъемной температурой карамельной массы и показаниями измерителя температуры в выбранной точке измерения, для чего вычисляем коэффициент связи показаний со среднеобъемной температурой карамельной массы.

С целью исследования влияния воздействий внешней среды на процесс охлаждения карамельной массы, проведем имитационное моделирование, проанализируем полученные резуль-

таты и выполним оценку погрешности определения среднеобъемной температуры с учетом наихудших условий воздействия внешних факторов. Для этого проведем имитационное моделирование в наихудших условиях воздействия окружающей среды при допустимом отклонении температуры карамели на выходе вакуум-аппарата $\pm 10^\circ\text{C}$: а) пониженная температура воздуха и охлаждающего стола — 17°C и 5°C соответственно; б) повышенная температура воздуха и охлаждающего стола — 23°C и 7°C соответственно. На рис. 1, 2 приведены профили распределения поля температур при температуре воздуха 17°C , стола — 5°C ; при температуре воздуха — 23°C , стола — 7°C и при начальной температуре карамельной массы на выходе вакуум аппарата — 120°C . В таблицах 1, 2 приведены рассчитанные значения коэффициента связи при различных условиях воздействия внешней среды.

Таблица 1. — Изменение коэффициента связи показаний измерителя с вычисленной среднеобъемной температурой карамели в наихудших условиях воздействия окружающей среды при изменении начальной температуры карамельного слоя в пределах $110\text{--}130^\circ\text{C}$

| T_n, C | $T_{\text{стола}}$ | $T_{\text{возд.}}$ | $T_{\text{дат.кон.}}$ | $T_{\text{ср.об.}}$ | $K_{\text{зав}}$ |
|-----------------|--------------------|--------------------|-----------------------|---------------------|------------------|
| 110 | 5 | 17 | 57.69 | 80.648 | 1.398 |
| 115 | 5 | 17 | 60.186 | 84.205 | 1.399 |
| 120 | 5 | 17 | 62.683 | 87.762 | 1.4 |
| 125 | 5 | 17 | 65.179 | 91.319 | 1.401 |
| 130 | 5 | 17 | 67.676 | 94.877 | 1.402 |
| 110 | 7 | 23 | 58.78 | 81.54 | 1.387 |
| 115 | 7 | 23 | 61.277 | 85.097 | 1.389 |
| 120 | 7 | 23 | 63.773 | 88.654 | 1.39 |
| 125 | 7 | 23 | 66.269 | 92.212 | 1.391 |
| 130 | 7 | 23 | 68.766 | 95.769 | 1.393 |

Таблица 2. — Изменение коэффициента связи показаний измерителя с вычисленной среднеобъемной температурой карамели в наихудших условиях воздействия окружающей среды при изменении толщины карамельного слоя в пределах $3\text{--}7\text{ мм}$

| $l, \text{мм}$ | $T_{\text{стола}}$ | $T_{\text{возд.}}$ | $T_{\text{дат.кон.}}$ | $T_{\text{ср.об.}}$ | $K_{\text{зав}}$ |
|----------------|--------------------|--------------------|-----------------------|---------------------|------------------|
| 3 | 5 | 17 | 47.089 | 55.337 | 1.175 |
| 4 | 5 | 17 | 54.893 | 67.82 | 1.235 |
| 5 | 5 | 17 | 59.186 | 76.604 | 1.294 |
| 6 | 5 | 17 | 61.478 | 82.982 | 1.35 |
| 7 | 5 | 17 | 62.683 | 87.762 | 1.4 |
| 3 | 7 | 23 | 48.783 | 57.07 | 1.17 |
| 4 | 7 | 23 | 56.325 | 69.235 | 1.229 |
| 5 | 7 | 23 | 60.452 | 77.792 | 1.287 |
| 6 | 7 | 23 | 62.638 | 84.002 | 1.341 |
| 7 | 7 | 23 | 63.773 | 88.654 | 1.39 |

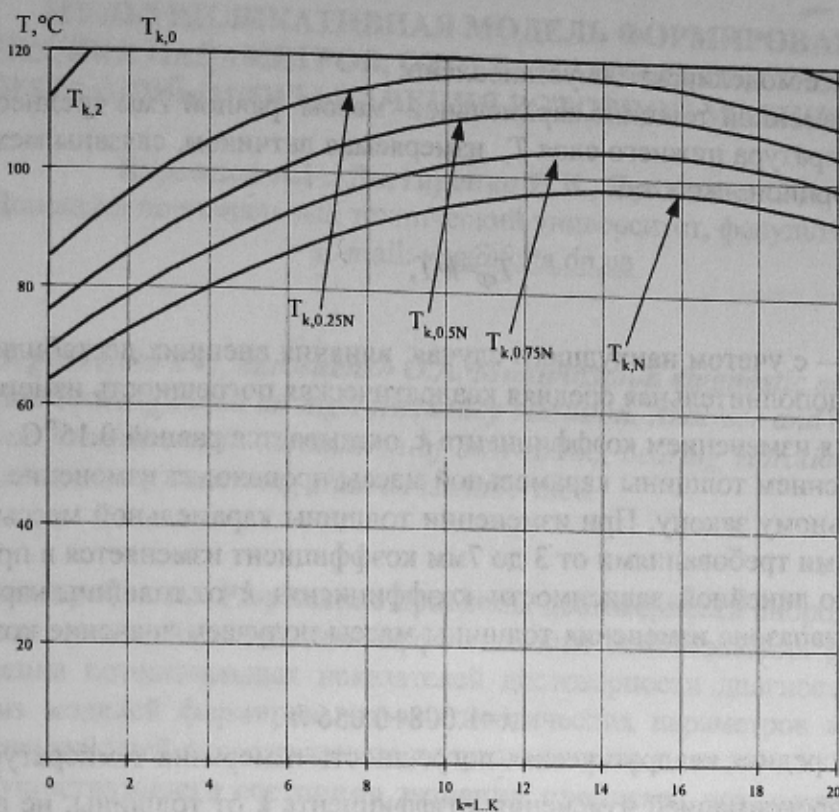


Рисунок 1 — Поле распределения температур карамели при пониженной температуре воздуха и охлаждающего стола и начальной температуре карамельной массы 120 °С

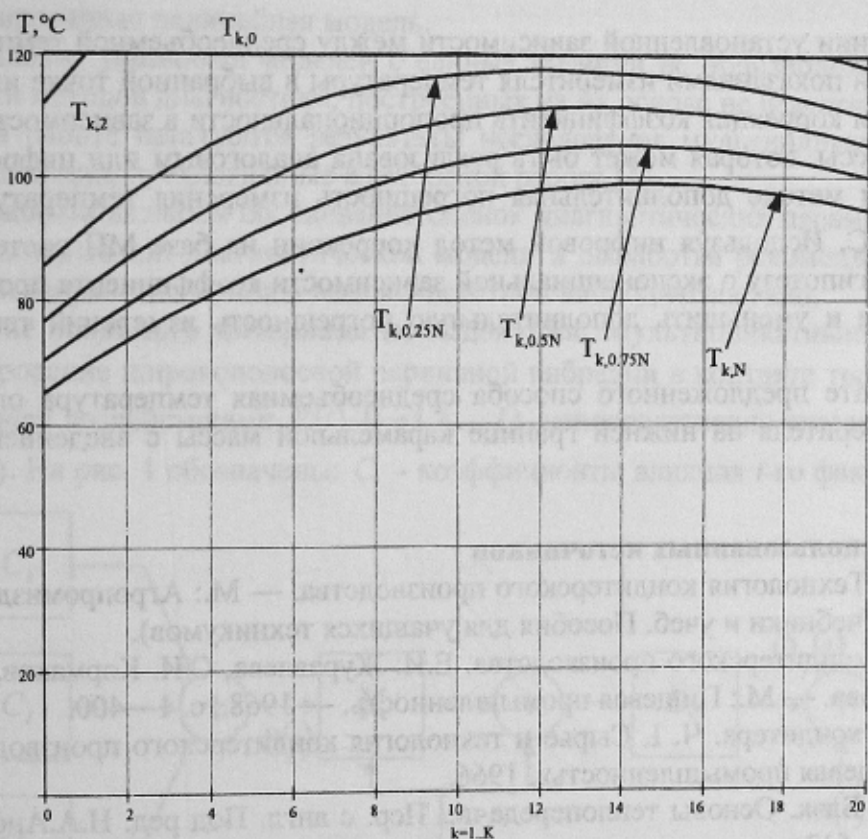


Рисунок 2 — Поле распределения температур карамели при повышенной температуре воздуха и охлаждающего стола и начальной температуре карамельной массы 120 °С

В результате моделирования установлено:

1) при неизменной толщине карамельной массы равной 7мм среднеобъемная температура T_{cp} и температура нижнего слоя T , измеряемая датчиком, связаны между собой коэффициентом пропорциональности:

$$T_{cp}=k \cdot T, \quad (17)$$

где $k=1.39 \pm 0.01$ — с учетом наихудшего случая влияния внешних дестабилизирующих факторов. При этом дополнительная средняя квадратическая погрешность измерения температуры, обусловленная изменением коэффициента k , оказывается равной 0.15°C .

2) с изменением толщины карамельной массы происходит изменение коэффициента k по экспоненциальному закону. При изменении толщины карамельной массы в соответствии с технологическими требованиями от 3 до 7мм коэффициент изменяется в пределах 1.17–1.4. Приняв гипотезу о линейной зависимости коэффициента k от толщины карамельной массы $h(\text{м})$ в рабочем диапазоне изменения толщины массы получаем значение коэффициента k в виде:

$$k=1.008+0.056 \cdot h. \quad (18)$$

Дополнительная средняя квадратическая погрешность измерения температуры, обусловленная линейной аппроксимацией изменения коэффициента k от толщины, не превышает 0.45°C . При этом среднеобъемная температура определяется выражением:

$$T_{cp}=[1.008+0.506 \cdot h] T. \quad (19)$$

Выводы.

1. На основании установленной зависимости между среднеобъемной температурой карамельной массы и показаниями измерителя температуры в выбранной точке измерения предложена линейная коррекция коэффициента пропорциональности в зависимости от толщины карамельной массы, которая может быть реализована аналоговым или цифровым методом. При аналоговом методе дополнительная погрешность измерения температуры массы не превышает 0.5°C . Используя цифровой метод коррекции на базе МП систем или ПЭВМ, можно принять гипотезу о экспоненциальной зависимости коэффициента пропорциональности от толщины и уменьшить дополнительную погрешность измерений температуры в 2 раза.

2. В результате предложенного способа среднеобъемная температура определяется по показаниям измерителя на нижней границе карамельной массы с введением поправки по толщине.

Перечень использованных источников

1. Лурье И. С. Технология кондитерского производства. — М.: Агропромиздат. — 1992. — 399 с.: ил. (Учебники и учеб. Пособия для учащихся техникумов).
2. Технология кондитерского производства. Е.И. Журавлева, С.И. Кормаков, Л.И. Токарев, К.Г. Рахманова. — М.: Пищевая промышленность. — 1968., с. 1—400.
3. Справочник кондитера. Ч. I. Сырье и технология кондитерского производства. Изд. 2-е. Изд-во «Пищевая промышленность», 1966.
4. Ф. Крейт, У. Блэк. Основы теплопередачи./ Пер. с англ. Под ред. Н.А.Анфимова. — М.: Мир, 1983. — 512с