ВИЗНАЧЕННЯ ДОВЖИНИ ПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ ДОДАВАННІ В СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ З АДИТИВНИМИ ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМИ СПІВВІДНОШЕННЯМИ МІЖ ВАГАМИ РОЗРЯДІВ

Азаров О.Д., Черняк О.І.
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна
E-mail: azarov@lili.vstu.vinnica.ua

Abstract
Azarov O.D., Tchernyak O.I. Definition of bit-serial codes length additing from higher orders in numerical systems with additive and multiplicative relationships between orders. ***The features of bit-serial codes addition from higher orders in numerical systems with additive and multiplicative relationships between orders are considered. The carrier length definition relationships are suggested.***

При організації паралельних обчислень за рахунок розподіленої обробки виникає проблема, що полягає у необхідності реалізації значної кількості інформаційних зв'язків між окремими пристроями.

Одним з відомих підходів зменшення кількості інформаційних зв'язків є порозрядна конвеєрна обробка послідовних кодів чисел [1-5]. Така обробка дозволяє кожному пристрою за один такт приймати, оброблювати та передавати один розряд. Порозрядне виконання всіх арифметичних операцій в єдиному потоці можливе лише зі старших розрядів. Для цього використовуються надлишкові системи числення, оскільки в них можливе обмеження довжини перенесення у старші розряди при додаванні і відніманні. Довжина перенесення визначає апаратні витрати при побудові арифметичних пристроїв порозрядної обробки.

Може існувати багато надлишкових систем числення, але не в кожній такій системі довжина перенесення при виконанні арифметичних операцій є обмеженою. Крім того, відсутні відомі теоретичні розробки, за допомогою котрих можна було б порівнювати довжини перенесення для будь-яких систем числення.

Метою даної статті є розробка теоретичних положень, котрі могли б у будь-якій незнакорозрядній позиційній системі числення визначити можливість конвеєрної порозрядної обробки зі старших розрядів, а також межі, в котрих знаходиться довжина перенесення при виконанні таких операцій.

Для цього авторами запропоновано клас систем числення, що узагальнює відомі та дозволяє створювати нові системи числення з обмеженою довжиною перенесення у старші розряди при порозрядному виконанні арифметичних операцій. Вони названі АМ-системами числення. Будь-яка АМ-система числення може бути описана сукупністю таких параметрів: множиною цифр, основою системи числення та адитивним співвідношенням порядку (t,τ,p)

$$\begin{cases} C_k = \{0,1,\dots,c_{k-1}\}; \\ 1 < w < c_{k-1}+1; \\ {}^{t}A^{\tau,p} : w^{\tau p+t} = R^{\tau,p} \end{cases}$$

де: $k \geq 2$ – значність системи числення;

C_k – множина цифр; w - основа системи числення;

${}^{t}A^{\tau,p}$ – адитивне співвідношення порядку (t,τ,p);

t,τ,p – цілі числа, що задовольняють умовам: $t>0$, $\tau=nt$, $p\geq 0$;

$$R^{\tau,p} = \sum_{i=0}^{p} r_i \cdot w^{\tau i}$$ - граничне значення $(r \in C_k)$.

При цьому на параметри АМ-системи числення накладається обмеження: $r_i \geq r_{i-1} > 0$.

Наявність адитивних співвідношень між розрядами в АМ-системах числення дозволяє ввести операції адитивного перетворення кодів чисел (А-перетворення), що полягають у зміні коду числа при збереженні його числового еквіваленту. За напрямком перенесення адитивні (А) перетворення поділяються на перетворення з перенесенням вліво (AL) і перетворення з перенесенням вправо (AR) в залежності від того, до якої частини коду додається значення перенесення. За типом умов виконання AL і AR-перетворення поділяються на елементарні (Е), універсальні (U) та повні (F).

При елементарних А-перетвореннях перевіряються умови в кожному окремому розряді перетворюваної частини коду. Якщо всі розряди перетворюваної частини коду задовольняють умовам, виконується елементарне А-перетворення. Таке перетворення змінює тільки розряди від (і-τр)-го до (і+t)-го і не зачіпає інші розряди коду. Елементарне ЕА-перетворення може бути виконане тільки тоді, коли кожний розряд перетворюваного коду задовольняє умові перетворення. На відміну від елементарних в універсальних UA-перетвореннях перевіряється виконання умов для сумарних значень частин кодів. Нижче наведено узагальнений вираз для EAL-, EAR-, UAL- і UAR-перетворень (V – умова для виконання відповідного перетворення):

$$^{t}A_i^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}) = \begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b} \text{ при } \overline{V} \\ X_{i-\tau b}^{\tau b} \pm w^{i+t} \mp R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при } V. \end{cases}$$

Повні А-перетворення (FAL- та FAR-перетворення) фактично є сукупністю універсальних перетворень того ж напрямку, котрі виконуються не тільки для і-го розряду, але й для усіх молодших від нього розрядів:

$$^{t}FA_i^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}) = {}^{t}UA_{i-\tau b}^{\tau,p}(({}^{t}UA_{i-\tau(b+1)}^{\tau,p}((\cdots$$
$$\cdots {}^{t}UA_{i-1}^{\tau,p}(({}^{t}UA_{i-1}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}))_{i-\tau b}^{\tau(b-1)})\cdots)_{i-\tau b}^{\tau}))_{i-\tau b}^{0}).$$

Результат повних А-перетворень такий самий, як і універсальних та елементарних. Крім того, після виконання і-го повного А-перетворення для жодного з перетворюваних розрядів, молодших від і-го, не задовольняється умова А-перетворення того ж напрямку.

А-перетворення є особливим видом умовних арифметичних операцій, що узагальнюють відомі операції згортки-розгортки та перенесення-запозичення [6]. Дані операції лежать в основі порозрядного додавання і віднімання в АМ-системах числення. Всі арифметичні операції в АМ-системах числення основані на додаванні. Тому довжина перенесення при виконанні додавання визначає кількість одночасно оброблюваних розрядів у порозрядних арифметичних пристроях.

Нехай потрібно знайти код суми Z, що дорівнює сумі кодів X і Y X+Y=Z. Порозрядне додавання кодів в АМ системах числення виконується за відомим методом неавтономної обробки [1,2] і являє собою послідовність кроків додавання окремих розрядів, починаючи зі старшого, на кожному з котрих визначається код суми Z_i таким чином, що на останньому кроці він дорівнює коду суми Z. Визначення результату Z_i на кожному кроці відбувається шляхом додавання коду чергових розрядів до результату, отриманого на попередньому кроці:

$$Z_i = Z_{i-1} + x_i + y_i.$$

Особливістю додавання в АМ-системах числення є можливість обмеження розповсюдження перенесення у старші розряди за рахунок виконання FAL-перетворення над групою розрядів на попередньому такті додавання:

$$Z_i = FAL(Z_{i-1} + (x_{n-1-i} + y_{n-1-i}) \cdot w^{n-1-i}).$$

Результат Z_i можна поділити на дві частини: сталі старші розряди та змінні молодші розряди. Стала частина являє собою розряди коду результату ZC, а змінна частина є проміжною сумою T. Тобто,

$$Z_i = ZC_i + T_i$$

де: $ZC_i = (Z_i)_{n-i+d-1}^{d}$;

$T_i = (Z_i)_{n-i-b-1}^{d+b}$;

d – довжина перенесення у старші розряди;

b – довжина перенесення у молодші розряди.

При достатній кількості розрядів d на кожному кроці порозрядного додавання FAL перетворення потрібно виконувати тільки над проміжною сумою, отриманою на попередньому кроці, до якої додаються чергові розряди доданків. Перенесення через старший розряд проміжної суми, отриманої на попередньому кроці, розповсюджуватись не буде.

Для визначення максимальної довжини d перенесення у старші розряди потрібно кожен такт додавання розділити на два етапи. Перший етап – додавання окремих розрядів і отримання коду їх суми S_i. Другий етап – додавання S_i до результату T_{i-1}, отриманого на попередньому такті. Отже, порозрядне додавання можна зобразити, як додавання S_i до T_{i-1} на кожному i-му такті.

Додавання окремих розрядів виконується у звичайний для позиційних систем числення спосіб. Нехай на i-му такті додаються розряди x_i та y_i. При цьому може виникнути переповнення ($x_i+y_i>c_{k-1}$). Для ліквідації переповнення використовується FAL-перетворення над частинною коду результату, у котрої старшим є переповнений розряд. Таке перетворення може виконуватись декілька разів до тих пір, доки виконується його умова. Кожне FAL-перетворення в загальному випадку викликає перенесення як у деякий старший розряд, так і в Δ молодших по відношенню до групи розрядів. Кількаразове виконання FAL-перетворення може, в свою чергу, призвести до переповнення в тому старшому розряді, до котрого поступає перенесення. Це вимагає виконання нового FAL-перетворення над групою розрядів, що об'єднує як попередні так і ті розряди, у котрі поступило перенесення, і так далі. Результатом додавання окремих розрядів в АМ-системах числення у загальному випадку є багаторозрядний код отриманий FAL-перетворенням:

$$(FAL(\cdots FAL(FAL(x_i + y_i)_{i-\Delta 1}^{\Delta 1})_{i-\Delta 2}^{\Delta 2+1} \cdots)_{i-\Delta(S-1)}^{\Delta(S-1)+dS-1})_{i-\Delta S}^{\Delta S+dS}$$

де dS – довжина перенесення в старші розряди на останньому кроці FAL-перетворення; Δ1=τp<Δ2<…<Δ(S-1)<ΔS – довжина перенесення в молодші розряди на відповідному кроці FAL-перетворення. Якщо наперед відома максимальна довжина перенесення у старші dSmax і в молодші ΔSmax розряди від додавання двох окремих розрядів, то код їхньої суми можна отримати виконуючи лише останнє FAL-перетворення:

$$(FAL(x_i + y_i)_{i-\Delta(S-1)\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max-1})_{i-\Delta S\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max}. \quad (1)$$

Максимальне перенесення буде при додаванні розрядів з максимальними цифрами c_{k-1} і являє собою код Smax, поділений на dSmax+1 старших і ΔSmax молодших розрядів:

$$S\max = 2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i = S_{i-\Delta S\max}^{dS\max+\Delta S\max+1}. \quad (2)$$

Слід відзначити, що при $c_{k-1} > r_p$ може бути декілька кодів максимального значення S_{max} з різною довжиною dSmax і, відповідно, різними старшими цифрами $S_{i+dS\max}$ в залежності від того, над якими розрядами виконувалось FAL-перетворення (1). При мінімальному значенні $dS\max_{min}$ старший розряд коду Smax матиме значення не більше ніж c_{k-1}:

$$(FAL\,(2\cdot c_{k-1}\cdot w^{\,i})_{i-b}^{b+dS\max_{min}-1})_{i+dS\max_{min}}^{0}\le c_{k-1}\cdot w^{\,i+dS\max_{min}}\,. \quad (3)$$

При максимальному значенні $dS\max_{max}$ старший розряд коду Smax матиме значення не більше ніж r_p:

$$(FAL\,(2\cdot c_{k-1}\cdot w^{\,i})_{i-b}^{b+dS\max_{max}-1})_{i+dS\max_{max}}^{0}\le r_p\cdot w^{\,i+dS\max_{max}}\,. \quad (4)$$

Для визначення $dS\max_{max}$ потрібно виконати послідовність операцій, подібних EAR-перетворенню. На відміну від EAR-перетворення ці операції повинні виконуватись навіть при переповненні у молодших розрядах. Їх сутність полягає у тому, що виконуються послідовні перетворення починаючи з одиниці деякого розряду з перенесенням у молодші розряди. На кожному кроці перетворення від найстаршого значущого розряду коду, отриманого на попередньому кроці, віднімається його значення. Еквівалентне значення додається у вигляді коду в розряди, молодші від найстаршого значущого. Таким чином, код, що дорівнює одиниці деякого розряду, на кожному кроці зміщується вправо і при цьому збільшується. Нехай на першому кроці цей код дорівнює одиниці деякого m-го розряду: $X_0 = w^m$. Тоді на i-му кроці значення коду буде

$$X_i = UAL_{m-\tau p-(i+1)}^{\tau,p}(X_{i-1} - r_p^{i-1}\cdot x_{m-(i-1)}\cdot(w^{m-i} - R_{m-\tau p-i}^{\tau,p}))\,,$$

де i=1,2,3,... Ці кроки перетворення потрібно повторювати до тих пір, доки $x_{m-i} < 2\cdot c_{k-1}$. Якщо після закінчення повтору кроків $x_{m-i} = 2\cdot c_{k-1}$, то максимальна довжина перенесення в старші розряди від додавання m-тих розрядів $dS\max_{max}$ дорівнює кількості кроків перетворення. Якщо ж $x_{m-i} > 2\cdot c_{k-1}$, то $dS\max_{max}$ на одиницю менше від кількості кроків перетворення. Аналогічно визначається $dS\max_{min}$. Різниця тільки у тому, що початкове значення m-го розряду встановлюється рівним максимальній цифрі c_{k-1}.

На другому етапі виникає перенесення від перевищення граничного значення при додаванні коду окремих розрядів до проміжної суми. Воно реалізується за допомогою FAL-перетворення результату додавання S_i і проміжної суми T_{i-1}, отриманої на попередньому такті. Максимальна довжина dT цього перенесення визначається кількістю розрядів, необхідних для поглинання даного і послідуючих перенесень від додавання окремих розрядів. Загальна максимальна довжина перенесення у старші розряди d=dS+dT.

Наступне твердження дозволяє визначити межі, в котрих може знаходитись значення d в довільній АМ-системі числення за заданими кількістю цифр, адитивним співвідношенням і довжиною перенесення від додавання окремих розрядів.

Твердження. Нехай для АМ-системи числення задана старша цифра c_{k-1}, граничне значення ${}^{1}R_0^{\tau,p}$, мінімальна $dS\max_{min}$ та максимальна $dS\max_{max}$ довжини перенесення в старші розряди при додаванні максимальних цифр в окремих розрядах. Тоді на будь-якому кроці порозрядного додавання максимальна довжина перенесення у старші розряди d знаходиться в межах

$$dZ + dS\max_{max} + \tau + 2 > d \ge dZ + dS\max_{min}\,, \quad (5)$$

де dZ визначається з виразу:

$$\sum_{i=0}^{dZ-1} c_{k-1}\cdot w^{\tau p-i} < {}^{1}R_0^{\tau,p} \le \sum_{i=0}^{dZ} c_{k-1}\cdot w^{\tau p-i}\,. \quad (6)$$

Доведення твердження. Спочатку доведемо праву частину (5). Розглянемо приклад додавання n-розрядних кодів:

$$\sum_{i=n-1-dZ}^{n-1} c_{k-1}\cdot w^{i} + \sum_{i=0}^{n-dZ-dS\max_{min}} c_{k-1}\cdot w^{i} \quad \text{та} \quad \sum_{i=0}^{n-dZ-dS\max_{min}} c_{k-1}\cdot w^{i}$$

Сума Z цих кодів матиме вид:

$$Z=\sum_{i=n-1-dZ}^{n-1} c_{k-1}\cdot w^{i} + \sum_{i=0}^{n-dZ-dS\max_{min}} 2\cdot c_{k-1}\cdot w^{i}.$$

Для ліквідації переповнення в розрядах з 0-го по $(n-dZ+dS\max_{min}-1)$-й необхідно виконати перенесення за допомогою FAL-перетворення. Будемо виконувати порозрядне додавання з виконанням перенесення на кожному кроці довжиною $dZ+dS\max_{min}-1$ розрядів. Розглянемо два альтернативних варіанти. Перший – коли dZ=0. Тоді сума Z матиме вид:

$$Z=\sum_{i=0}^{n-dS\max_{min}} 2\cdot c_{k-1}\cdot w^{i}.$$

У цьому випадку довжина перенесення буде $dS\max_{min}-1$ розрядів. Оскільки $dS\max_{min}$ мінімальна довжина перенесення, за якої значення S не більше максимального значення її старшого розряду за визначенням (3), то за довжини перенесення $dS\max_{min}-1$ значення S буде більшим від максимального значення старшого розряду розрядної суми S. Тобто:

$$S_{dS\max_{min}}=2\cdot c_{k-1}\cdot w^{n-dS\max_{min}} > c_{k-1}\cdot w^{n-1}$$

Відповідно:

$$S_{dS\max_{min}+1}=2\cdot c_{k-1}\cdot w^{n-dS\max_{min}-1} > c_{k-1}\cdot w^{n-2}$$

і так далі. Тому загальна сума Z буде

$$Z\ge \sum_{i=dS\max_{min}}^{n-1} c\cdot w^{i}$$

де $c>c_{k-1}$. Отже, кожен з розрядів від $dS\max_{min}$-го до (n-1)-го буде переповненим. Це переповнення не можна ліквідувати перенесенням в молодші розряди для будь-якого значення різниці $n-1-dS\max_{min}$. Для випадку dZ=0 права частина твердження доведена.

У випадку, коли dZ>0 перенесення матиме довжину $(dZ+dS\max_{min}-1)$ розрядів. На перших $(dZ-dS\max_{min})$ кроках порозрядного додавання зі старших розрядів умова для FAL-перетворення не виконується, оскільки

$$\sum_{i=0}^{dZ-1} c_{k-1}\cdot w^{n-i-1} < R^{\tau,p}_{n-1-\tau p}$$

за визначенням твердження. На $(dZ+dS\max_{min}+1)$-му кроці при додаванні $(n-dZ-dS\max_{min})$-х розрядів виникає переповнення суми S, що дає перенесення в старші розряди з мінімальною довжиною $dS\max_{min}$, тобто в (n-dZ)-й розряд. Оскільки dZ≥1, то довжина перенесення достатня, щоб ліквідувати переповнення $(n-dZ-dS\max_{min})$-х розрядів, але перенесення у розряди з (n-dZ)-го по (n-1)-й переповнює їх тому, що всі вони вже містять максимальну цифру c_{k-1}. Тобто, довжина перенесення і в цьому випадку не може бути більшою $(dS\max_{min}-1)$ розрядів. Таким чином, права частина виразу (5) доведена.

Для доведення справедливості лівої частини виразу (5) доведемо, що твердження справедливе при $d=dZ+dS\max_{max}+\tau+2$. Тобто, на кожному i-му такті порозрядного додавання максимальне значення проміжної суми $T\max_i$ не більше від максимально допустимого значення коду у розрядах проміжної суми на цьому такті $TMAX_i$

$$T\max_i \le TMAX_i \qquad (7)$$

де $TMAX_i$ визначається з виразу:

$$w^{n-i+d} - w^{n-i-b-1} \le (TMAX_i)_{n-i-b-1}^{b+d} < w^{n-i+d}. \qquad (8)$$

TMAX є найбільшим кодом, що не дає перенесення при виконанні FAL-перетворення. Тобто, одиниця будь-якого розряду має значення більше від коду у молодших розрядах:

$$\underset{0<j<d}{\forall} ((TMAX_i)_{n-i-b-1+j}^{0} > (TMAX_i)_{n-i-b-1}^{j-1}). \qquad (9)$$

Виконання умови (7) буде доводитись методом повної математичної індукції за номером такту i. Доведемо спочатку справедливість цього виразу для i=0. При i=0 значення $T\max_i = S\max_i$, тому вираз (7) матиме вид:

$$S\max_i \le TMAX_i.$$

Ця умова виконується, оскільки розрядність $TMAX_i$ більша ніж розрядність $S\max_i$, що слідує з визначення значення $TMAX_i$ (8) та $S\max_i$ (2). Отже, для 0-го такту вираз (5) справедливий.

Далі, вважаючи, що вираз (5) справедливий для (i-1)-го такту, доведемо його справедливість для i-го такту. Якщо вираз справедливий для (i-1)-го такту, то проміжна сума $T\max_{i-1}$ не більша від максимально допустимого значення коду у розрядах проміжної суми на (i-1)-му такті $TMAX_{i-1}$.

Припустимо, що $T\max_i = TMAX_{i-1}$. Тоді максимальне значення проміжної суми $T\max_i$ на i-му такті буде при додаванні максимальної розрядної суми $S\max_i$ до $TMAX_{i-1}$. На i-му такті максимальне значення розрядної суми

$$S\max_i < w^{n-i+dS\max_{max}}, \qquad (10)$$

що слідує з визначення $dS\max_{max}$ (4). Тому потрібно довести, що

$$T\max_i = TMAX_{i-1} + S\max_i - (TMAX_{i-1})_{n-i-1+d}^{0} \le TMAX_i.$$

Для доведення розглянемо код $TMAX_{i-1}$ на (i-1)-му такті. Розряди цього коду матимуть такі значення:

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{max}+\tau+1}^{dZ-1} = \sum_{j=0}^{dZ-1} c_{k-1} \cdot w^{n-i+dS\max_{max}+\tau+1+j};$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{max}+\tau+1}^{0} \le r_{p-dZ} \cdot w^{n-i+dS\max_{max}+\tau+1} <$$

$$< c_{k-1} \cdot w^{n-i+dS\max_{max}+\tau+1}; \qquad (11)$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{max}} < w^{n-i+dS\max_{max}+1} < w^{n-i+dS\max_{max}+\tau};$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{max}-1} < w^{n-+dS\max_{max}}. \qquad (12)$$

Оскільки p≥1, то можливі два випадки: перший, коли p>1 і другий, коли p=1. У першому випадку на (i-1)-му такті

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{max}+\tau}^{0} = r_p \cdot w^{n-i-dS\max_{max}+\tau}; \qquad (13)$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{max}}^{0} \le r_{p-1} \cdot w^{n-i+dS\max_{max}}. \qquad (14)$$

У другому випадку значення будь-якого розряду $TMAX_{i-1}$ дорівнює $r_p - 1$:

$$\underset{b-1\le j\le dS\max_{max}+\tau}{\forall} ((TMAX_{i-1})_{n-i+j}^{0} = (r_p - 1) \cdot w^{n-i-j}). \qquad (15)$$

У кожному з цих випадків на i-му такті до $TMAX_{i-1}$ додається i-та розрядна сума $Smax_i$. З (10) і (12) слідує, що

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dSmax_{max}-1} + Smax_i < 2 \cdot w^{n-i+dSmax_{max}}. \quad (16)$$

При цьому може виникнути перенесення у старші розряди. Оскільки значення $(n-i+dSmax_{max}+\tau)$-го розряду проміжної суми $TMAX_{i-1}$ менше, ніж c_{k-1}(11), то у даний розряд може бути виконане FAL-перетворення

$$FAL((TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dSmax_{max}+\tau} + Smax_i)_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}}. \quad (17)$$

Це перетворення додає до $(n-i+dSmax_{max}+\tau+1)$-го розряду і віднімає від розрядів з (n-i-b)-го по $(n-i+dSmax_{max}+\tau)$-й значення, що дорівнює одиниці $(n-i+dSmax_{max}+\tau+1)$-го розряду. Додавання одиниці до $(n-i+dSmax_{max}+\tau+1)$-го розряду не викликає його переповнення внаслідок (11). Тому не виникає потреба подальшого перенесення у розряди, старші від $(n-i+dSmax_{max}+\tau+1)$-го. При виконанні FAL-перетворення (17) від $(n-i+dSmax_{max}+\tau)$-го розряду віднімається значення r_p. Тому з (13) слідує, що значення цього розряду стає нульовим.

Доведемо, що перенесення з молодших розрядів не збільшить його значення. Для цього знову розглянемо окремо два випадки p>1 та p=1.

Для p>1 при виконанні FAL-перетворення (17) від $(n-i+dSmax_{max})$-го розряду віднімається значення r_{p-1}. З (14) слідує, що без врахування перенесення з молодших розрядів, значення $(n-i+dSmax_{max})$-го розряду стає нульовим. З (16) слідує, що перенесення у цей розряд не більше одиниці. При виробленні одиниці перенесення у $(n-i+dSmax_{max})$-й розряд від суми $(TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}} + Smax_i$ віднімається значення $w^{n-i+dSmax_{max}}$. З (12) слідує, що це призводить до зменшення коду $(TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}}$:

$$(FAL(TMAX_{i-1} + Smax_i))_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}} < (TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}}.$$

Оскільки $r_{p-1} \geq 1$, то

$$(FAL(TMAX_{i-1} + Smax_i))_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}+1} < (TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}+1}.$$

Отже, враховуючи (9), можна записати

$$(FAL(TMAX_{i-1} + Smax_i))_{n-i-b-1}^{b+dSmax_{max}+1} < w^{n-i+dSmax_{max}+\tau}.$$

Тобто, перенесення у $(n-i+dSmax_{max}+\tau)$-й розряд з молодших розрядів не виникає. Отже, на i-му такті максимальний проміжний результат $Tmax_i$ у розрядах з (n-i-b)-го по $(n-i+dSmax_{max}+\tau+dZ)$-й менший від значення максимально можливого коду у цих розрядах:

$$Tmax_i < TMAX_i.$$

Для випадку p>1 ліва частина твердження доведена. У випадку p=1 виконується rp>1 і τ=1. З (15) слідує, що

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dSmax_{max}+\tau}^{0} = (r_p - 1) \cdot w^{n-i+dSmax_{max}+\tau} <$$
$$< c_{k-1} \cdot w^{n-i+dSmax_{max}+\tau}.$$

При виконанні FAL-перетворення у $(n-i+dSmax_{max}+\tau+1)$-й розряд від $(n-i+dSmax_{max}+\tau)$-го розряду віднімається значення r_p. Оскільки

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dSmax_{max}} < w^{n-i+dSmax_{max}+\tau}$$

і

$$Smax_i < w^{n-i+dSmax_{max}+\tau},$$

то

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dSmax_{max}} + Smax_i < 2 \cdot w^{n-i+dSmax_{max}+\tau}.$$

Тобто, при FAL-перетворенні суми $TMAX_{i-1} + Smax_i$ перенесення у $(n - i + dSmax_{max} + \tau)$-й розряд з молодших розрядів буде не більшим одиниці цього розряду. Тому додавання одиниці перенесення $(n - i + dSmax_{max} + \tau + 1)$-й розряд за допомогою FAL-перетворення призведе до обнуління $(n - i + dSmax_{max} + \tau)$-го розряду через віднімання від нього значення r_p. Тому у даному випадку

$$Tmax_i < TMAX_i.$$

Отже, для випадку для випадку p=1 ліва частина твердження теж доведена. Таким чином твердження доведене.

Використовуючи доведене твердження, можна порівнювати між собою різні АМ-системи числення за довжиною перенесення при додаванні і визначати ті з них, що забезпечують найменші витрати обладнання на реалізацію конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів.

Висновки

1. Запропоновано клас систем числення з адитивними і мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів (АМ системи числення), у котрих можливе порозрядне виконання арифметичних операцій, починаючи зі старших розрядів.

2. Додавання і віднімання в АМ-системах числення основані на операціях адитивного перетворення, що відіграють роль перенесення-запозичення.

3. Доведено, що при виконанні додавання кодів в АМ-системах числення довжина перенесення у старші розряди обмежена виразами, значення котрих залежить від параметрів адитивного співвідношення.

Отримані вирази для максимальної довжини перенесення при додаванні можуть в подальшому використовуватись для порівняння апаратних витрат при розробці порозрядних конвеєрних пристроїв в різних АМ-системах числення.

Література

1. Avizenis A. Binary-compatible signet-digit arithmetic. IN: AFIPS Conf Proc. – Vol. 26 – P1. – 1964 – P.663.

2. Ch. Frougny, On-line finite automata for addition in some numeration systems. Theoretical Informatics and Applications 33 (1999), 79–101.

3. Самофалов К.Г., Луцкий Г.М. Основы построения конвейерных ЭВМ.- Киев: Вища школа, 1981. – 234 с.

4. Каляев А.В. Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. – М.: Радио и связь, 1984. – 240 с.

5. Методи конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів золотої пропорції / О.І. Черняк, О.Д. Азаров // Вісник ВПІ. – 1996. - №1. – С. 14-17.

6. Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів / О.Д.Азаров, О.І.Черняк, П.О.Черняк // Вісник ВПІ. – 2001. - №1. – С. 58-64.