

## МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ, ОТОБРАЖАЕМЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИЕЙ ОПОРЫ КАЧЕНИЯ РОТОРНОЙ МАШИНЫ

Воронцов А.Г., Дегтяренко И.В., Ярошенко О.А.  
Донецкий национальный технический университет, факультет КИТА  
E-mail: [vag@fcita.dn.ua](mailto:vag@fcita.dn.ua)

**Abstract**

*Vorontsov A.G., Degtjarenko I.V., Jaroshenko O.A. Multiplication diagnostic parametrical model of the rotor machine bearing based on high frequency vibration. Analyses and basis of diagnostic parameters that one formative with modulation of own rolling bearing vibration are carried-out. The bandwide requirement of measuring channel is elaborated.*

**Постановка проблемы.** Разрешение проблемы достоверности вибродиагностики - одно из необходимых условий повышения эффективности использования роторных машин [1,2]. Для получения потенциальных показателей достоверности диагностических систем, необходим анализ моделей формирования диагностических параметров в рамках единой концепции, обеспечивающей сопоставимость получаемых результатов.

**Анализ существующего состояния решения проблемы** показывает, что к настоящему времени предложены и получили распространение следующие математические диагностические модели [3]:

- аддитивная модель;
- мультипликативная модель;
- комбинированная нелинейная модель.

Однако анализ указанных моделей с единых позиций не производился, потенциальные возможности методов диагностики, построенных на их основе не известны.

В данной работе приводятся результаты исследования мультипликативной модели, развиваются концепции, предложенные в авторской работе [4].

**Целью работы** является обоснование оценок диагностических параметров, получаемых из мультипликативной диагностической модели и выработка рекомендаций по их использованию при разработке методов высокочастотной вибродиагностики.

**Изложение основного материала исследования.** Мультипликативная модель предполагает формирование широкополосной первичной вибрации в контакте трения  $F(t)$  и модуляцию последней воздействиями  $P_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,I$ ), непосредственно связанными с дефектами (см. рис. 1). На рис. 1 обозначены:  $C_i$  - коэффициенты влияния  $i$ -го фактора на форми-

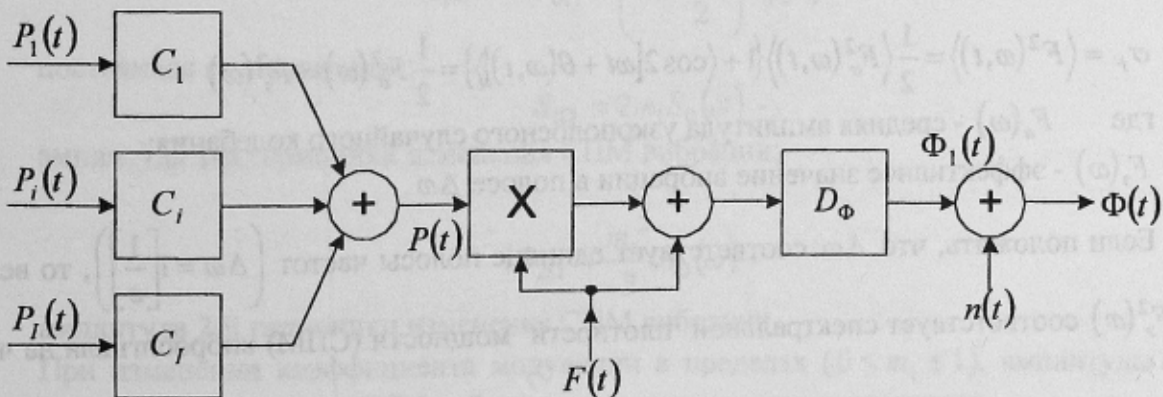


Рис. 1. Структурная схема мультипликативной модели

рование результирующего воздействия  $P(t)$ ;  $D_\phi$  - оператор, описывающий динамические свойства опоры качения.

Во временной области процесс формирования измеряемого колебания  $\Phi(t)$  в соответствии с моделью рис. 1 описывается соотношениями:

$$F_p(t) = F(t) \left[ 1 + \sum_{i=1}^I P_i(t) C_i \right], \quad (1)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t h_\phi(\tau) F_p(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

где  $h_\phi(\tau)$  - импульсная переходная функция опоры;

$F_p(t)$  - колебания, формируемые в процессе модуляции первичной вибрации.

В частотной области этот процесс описывается соотношениями:

$$\dot{F}_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\nu) \sum_{i=1}^I \dot{P}_i[(\nu - \omega)] C_i d\nu + \dot{F}(\omega), \quad (3)$$

$$\dot{\Phi}(\omega) = \dot{D}(\omega) \dot{F}_p(\omega). \quad (4)$$

Исследование модели целесообразно производить, используя соотношения (1) и (4), связав их прямым преобразованием Фурье

$$\dot{F}_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_p(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Для выполнения дальнейшего анализа воспользуемся теорией узкополосного сигнала, применительно к исследованиям преобразующих структур [5].

Выделим узкую полосу частот  $\Delta\omega$  в зоне частоты  $\omega$  широкополосной первичной вибрации такую, что

$$\Delta\omega \ll \Omega \ll \omega, \quad (5)$$

где  $\Omega$  - частота периодического воздействия на опору, обусловленного дефектом.

Узкополосный сигнал, сосредоточенный в этой области частот, описывается соотношением:

$$F(\omega, t) = F_a(\omega, t) \cos[\omega t + \theta(t)],$$

где  $F_a(\omega, t)$ ,  $\theta(t)$  - амплитуда и фаза квазигармонического случайного колебания, которые изменяются медленно.

Дисперсия колебания  $F(\omega, t)$  в предположении стационарности может быть найдена путем усреднения его квадрата по времени

$$\sigma_F = \langle F^2(\omega, t) \rangle = \frac{1}{2} \langle F_a^2(\omega, t) \rangle \{ 1 + \langle \cos 2[\omega t + \theta(\omega, t)] \rangle \} = \frac{1}{2} F_a^2(\omega) = F_s^2(\omega)$$

где  $F_a(\omega)$  - средняя амплитуда узкополосного случайного колебания;

$F_s(\omega)$  - эффективное значение вибрации в полосе  $\Delta\omega$ .

Если положить, что  $\Delta\omega$  соответствует единице полосы частот  $\left( \Delta\omega = 1 \left[ \frac{1}{c} \right] \right)$ , то величина  $F_s^2(\omega)$  соответствует спектральной плотности мощности (СПМ) вибросигнала на частоте  $\omega$

$$F_s^2(\omega) = S(\omega).$$

На начальной стадии развития дефекта, вызванная им динамическая нагрузка на опору, мала в сравнении со статической. Это дает основания приближенно описывать связь эффективного значения вибрации с приращением нагрузки  $\Delta P$  линейной зависимостью

$$F_s(\omega, \Delta P) = F_{s0}(\omega) + k_1 \Delta P.$$

Здесь  $F_{s0}(\omega)$  - эффективное значение вибрации при действии только статической нагрузки ( $\Delta P = 0$ ). В этих условиях связь СПМ с приращением нагрузки на опору близка к квадратичной

$$S(\omega, \Delta P) = k_2 F_s^2(\omega, \Delta P),$$

где  $k_2$  - коэффициент пропорциональности.

Если динамическая нагрузка изменяется по гармоническому закону

$$\Delta P(t) = P_a \cos \Omega t,$$

где  $P_a$  - амплитуда динамической нагрузки, вызванной дефектом, получаем следующую зависимость для СПМ

$$S_p(t) = k_2 [F_{s0}(\omega) + k_1 P_a \cos \omega t]^2 = S_0(\omega) (1 + m_1 \cos \Omega t)^2. \quad (6)$$

Здесь  $S_0(\omega) = k_2 F_{s0}^2(\omega)$  - СПМ при  $\Delta P = 0$ ;

$$m_1 = \frac{k_1 P_a}{F_{s0}(\omega)} = \frac{F_{1\Omega}(\omega)}{F_a(\omega)}. \quad (7)$$

коэффициент глубины модуляции.

Для того, чтобы колебание  $F(\omega, t)$  можно было считать «несущим» относительно воздействия  $\Delta P(t)$ , которое рассматривается как модулирующий сигнал, необходимо выполнение условий (5). Левое условие всегда может быть реализовано за счет выбора достаточно малого значения  $\Delta \omega$ . Правое условие, как правило, выполняется при оборотных частотах ротора до сотен герц, что позволяет распространить получаемые результаты на абсолютное большинство практических задач. Спектральный состав  $S_p(t)$  может быть получен из преобразованного выражения (6):

$$S_p(t) = S_0(\omega) \left( 1 + \frac{m_1^2}{2} + 2m_1 \cos \Omega t + \frac{m_1^2}{2} \cos 2\Omega t \right) = S_{0\Omega} + S_{1\Omega} \cos \Omega t + S_{2\Omega} \cos 2\Omega t,$$

$$\text{где } S_{0\Omega} = \left( 1 + \frac{m_1^2}{2} \right) S_0(\omega) - \quad (8)$$

постоянная составляющая;

$$S_{1\Omega} = 2m_1 S_0(\omega) - \quad (9)$$

амплитуда 1-й гармоники изменения СПМ вибрации;

$$S_{2\Omega} = \frac{m_1^2}{2} S_0(\omega) - \quad (10)$$

амплитуда 2-й гармоники изменения СПМ вибрации.

При изменении коэффициента модуляции в пределах ( $0 \leq m_1 \leq 1$ ), амплитуды соответствующих составляющих СПМ вибрации изменяются в таких границах:

$$S_0(\omega) \leq S_{0\Omega} \leq 1,5 S_0(\omega),$$

$$0 \leq S_{1\Omega} \leq 2,0S_0(\omega),$$

$$0 \leq S_{2\Omega} \leq 0,5S_0(\omega).$$

Важным выводом, который следует из анализа соотношений (6-10), является однозначность связи величины динамической нагрузки и СПМ вибрации, а также ограничение сверху как на диапазон пульсаций нагрузки, так и на СПМ вибропроцесса, что обуславливает границы, в которых данный параметр имеет диагностическую ценность.

Относительная крутизна преобразования может быть определена как крутизна изменения СПМ при изменении коэффициента модуляции

$$\frac{\partial}{\partial m_1} S_{0\Omega}(\omega, m_1) = \frac{\partial}{\partial m_1} \left( 1 + \frac{m_1^2}{2} \right) S_0(\omega) = m_1 S_0(\omega), \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_1} S_{1\Omega}(\omega, m_1) = \frac{\partial}{\partial m_1} [2m_1 S_0(\omega)] = 2S_0(\omega), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_1} S_{2\Omega}(\omega, m_1) = \frac{\partial}{\partial m_1} \left[ \frac{m_1^2}{2} S_0(\omega) \right] = m_1 S_0(\omega). \quad (13)$$

В общем случае модуляционная характеристика контакта - нелинейная функция. Разложение закона изменения СПМ как функции внешнего модулирующего воздействия для нелинейной модуляционной характеристики имеет вид

$$S_p(\omega, t) = S_{0\Omega}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n\Omega}(\omega) \cos(n\Omega t), \quad (14)$$

где  $S_{0\Omega}(\omega) = \frac{1}{T_{\Omega}} \int_0^{T_{\Omega}} S_p(\omega, t) dt$  - постоянная составляющая СПМ;

$S_{n\Omega}(\omega) = \frac{1}{T_{\Omega}} \int_0^{T_{\Omega}} S_p(\omega, t) \cos(n\Omega t) dt$  - амплитуда  $n$ -й составляющей пульсаций СПМ

вибрации;

$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega}$  - период возбуждающей динамической нагрузки, обусловленной дефектом.

Ряд содержит косинусные составляющие, так как приращение уровня вибрации и увеличение мощности связаны четной зависимостью.

Из равенства (14) следует

$$S_p(\omega, t) = S_{0\Omega}(\omega) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos n\Omega t \right), \quad (15)$$

где  $M_n = \frac{S_{n\Omega}(\omega)}{S_{0\Omega}(\omega)}$  - коэффициент глубины модуляции  $n$ -й гармоники СПМ.

В свою очередь закон изменения величины вибрации как узкополосного процесса с центральной частотой  $\omega$  при наличии модуляции будет иметь вид

$$F_p(\omega, t) = F_a(\omega) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \cos n\Omega t \right) \cos[\omega t + \theta(\omega, t)] \quad (16)$$

где  $m_n = \frac{F_{n\Omega}(\omega)}{F_a(\omega)}$  - коэффициент глубины модуляции для  $n$ -й гармоники возбуждающей силы.

Между коэффициентами модуляции первичной вибрации  $m_n$  и коэффициентом модуляции СПМ  $M_n$  существует жесткая связь, так как изменение уровня вибрации и его спектральной интенсивности являются проявления единого процесса модуляции. Так для  $M_1$  имеем [5]

$$M_1 = \frac{S_{1\Omega}(\omega)}{S_{0\Omega}(\omega)} = 2 \frac{m_1 + \frac{1}{2} m_1 m_2 + \frac{1}{2} m_2 m_3 + \dots}{1 + \frac{1}{2} m_1^2 + \frac{1}{2} m_2^2 + \dots} \quad (17)$$

Из соотношения (16) следует, что при модуляции узкополосного случайного процесса с центральной частотой  $\omega$  низкочастотными колебаниями с частотой  $\Omega \gg \Delta\omega$  формируется спектр, подобный к спектру амплитудной модуляции гармонической несущей. В явном виде это отображает преобразованное выражение (16)

$$F_p(\omega, t) = F_a(\omega) \cos[\omega t + \theta(\omega, t)] + \frac{1}{2} F_a(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n \cos[(\omega + n\Omega)t + \theta(\omega, t)] \quad (18)$$

Результирующее распределение СПМ определяется суммированием компонент, порождаемых каждой несущей из диапазона частот первичного широкополосного процесса  $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ .

Выберем две частоты  $\omega_1 = \omega - n\Omega$  и  $\omega_2 = \omega - (n-1)\Omega$  в спектре  $F_p(\omega)$ , которые отстоят друг от друга на величину

$$\omega_2 - \omega_1 = \Omega \quad (19)$$

Частоты ряда «несущих», что удовлетворяют равенству (19), определяются из выражения

$$\omega = \omega_1 + n\Omega = \omega_2 + (n-1)\Omega$$

Внешняя возбуждающая сила значительно превышает амплитуды первичных вибраций. Это позволяет рассматривать нелинейный контакт качения в опоре ротора как линейное параметрическое звено, для которого справедлив принцип суперпозиции. Тогда амплитуду результирующего колебания с центральной частотой  $\omega = \omega_1$ , получим путем суммирования амплитуды «несущего» колебания на этой частоте и гармонических компонент боковых полос, связанных со смежными «несущими»

$$F_p(\omega_1) = F_a(\omega_1) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n F_a(\omega_1 \pm n\Omega), \quad (20)$$

где  $F_a(\omega_1 \pm n\Omega)$  - амплитуды «несущих» колебаний с частотами  $\omega = \omega_1 \pm n\Omega$ , изменяющиеся медленно.

В силу широкополосности первичного вибропроцесса, его различные частотные компоненты коррелированы слабо [2]. Поэтому справедливо следующее равенство

$$\langle F_a(\omega_1 \pm n\Omega, t) \cdot F_a(\omega_1 \pm k\Omega, t) \rangle = \begin{cases} F_a^2(\omega_1), & \text{при } n = k, \\ 0, & \text{при } n \neq k. \end{cases} \quad (21)$$

где  $F_a^2(\omega_1) = \langle F_a^2(\omega_1, t) \rangle$ .

Здесь предполагается, что интервал частот, который представляет интерес, расположен в границах  $\omega_{\min} \leq \omega_1 \leq \omega_{\max}$ , где размещены модуляционные компоненты невысокого порядка  $n$  (см. выражение (18)). За пределами этой области уровни боковых модуляционных компонентов быстро убывают. В пределах указанных границ среднее значение амплитуды узкополосных «несущих» колебаний приблизительно одинаково и равняется  $F_a(\omega_1) = \langle F_a(\omega_1, t) \rangle$ . Тогда с учетом равенств (20) и (21) получим соотношение

$$\langle F_p^2(\omega_1, t) \rangle = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} m_1^2 + \frac{1}{2} m_2^2 + \dots \right) F_a^2(\omega_1), \quad (22)$$

откуда следует, что среднее значение СПМ в зоне частоты  $\omega_1$  при наличии модуляции, возрастает. Для частоты  $\omega_2$  имеет место равенство аналогичное равенству (20)

$$F_p(\omega_2, t) = F_a(\omega_2) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_{n-1} F_a(\omega_2 \pm (n-1)\Omega).$$

С учетом соотношения  $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$  будем иметь

$$F_p(\omega_2, t) = F_a(\omega_1 + \Omega) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_{n-1} F_a(\omega_1 \pm n\Omega). \quad (23)$$

Из выражений (20-23) следует соотношение

$$\langle F_p(\omega_1, t) F_p(\omega_2, t) \rangle = 2 \left( m + \frac{1}{2} m_1 m_2 + \frac{1}{2} m_2 m_3 + \dots \right) F_a^2. \quad (24)$$

Здесь предполагается, что  $F_a(\omega_1) = F_a(\omega_2) = F_a$ , так как справедливо неравенство

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1, \omega_2.$$

Формулы (22) и (23) позволяют найти коэффициент взаимной корреляции между вибропроцессами в сопредельных полосах

$$\rho_1 = \frac{\langle F(\omega_1, t) F(\omega_2, t) \rangle}{\sqrt{\langle F^2(\omega_1, t) \rangle} \sqrt{\langle F^2(\omega_2, t) \rangle}} = \frac{m_1 + \frac{1}{2} m_1 m_2 + \frac{1}{2} m_2 m_3 + \dots}{1 + \frac{1}{2} m_1^2 + \frac{1}{2} m_2^2 + \dots}$$

Принимая во внимание равенство (17), получим

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \frac{S_{1\Omega}(\omega_1)}{S_{0\Omega}(\omega_1)} = \frac{1}{2} M_1. \quad (25)$$

Аналогично можно показать, что при выборе  $\omega_2 - \omega_1 = n\Omega$ , коэффициент корреляции равен следующей величине

$$\rho_n = \frac{1}{2} \frac{S_{n\Omega}(\omega_1)}{S_{0\Omega}(\omega_1)} = \frac{1}{2} M_n. \quad (26)$$

Соотношение (26) справедливо для любой частоты, которая удовлетворяет условию

$$\omega_{\min} + n\Omega < \omega < \omega_{\max} - n\Omega. \quad (27)$$

Мощность  $n$ -й гармоники пульсаций СПМ есть результат суммирования мощностей производных компонент «несущих» из области, определяемой соотношением (27). Тогда результирующая мощность пульсаций, соответствующая  $n$ -й гармонике возмущения, равна

$$S_{\Sigma n} = M_n \int_{\omega_{\min} + n\Omega}^{\omega_{\max} - n\Omega} S_{0\Omega}(\omega_1) d\omega_1 = M_n S_{0\Omega} \int_{\omega_{\min} + n\Omega}^{\omega_{\max} - n\Omega} d\omega_1 = M_n S_{0\Omega} (\omega_{\max} - \omega_{\min} - 2n\Omega) \quad (28)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Из соотношения (28) следует, что мощность гармоник пульсаций СПМ вибрации убывает с повышением их номеров по двум причинам:

- уменьшения коэффициента глубины модуляции с повышением номера гармоники;
- уменьшения полосы частот, в границах которой интегрируется СПМ.

Из соотношения (28) могут быть получены два следствия:

- максимальный номер гармоники пульсаций средней мощности вибрации, которая может быть зарегистрирована при заданной полосе, выделяемой фильтром, составляет

$$N_{\max} = \text{int} \left( \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2\Omega} \right);$$

- минимальная полоса пропускания полосового фильтра системы диагностики, для того, чтобы была зарегистрирована хотя бы 1-я гармоника, равняется

$$\Delta\omega_{\min} = \omega_{\min} - \omega_{\max} = 2\Omega.$$

### Выводы

1. Модуляционные процессы, описываемые мультипликативной моделью, не изменяют закона распределения СПМ широкополосной вибрации, возбуждаемой в контакте качения подшипника опоры роторной машины, а только влияют на ее уровень.
2. Изменение амплитуды периодической нагрузки на опору в наибольшей мере влияет на первую гармонику пульсаций средней мощности высокочастотной вибрации, что определяет ее амплитуду и частоту как наиболее информативные диагностические параметры.
3. Для выделения пульсаций средней мощности высокочастотной вибрации, вызванные дефектами роторной машины, необходимо, чтобы ширина полосы пропускания фильтра основной селекции измерительного канала системы вибродиагностики превышала удвоенное значение самой высокой информативной частоты рассматриваемой машины.

### Литература

1. Барков А.В., Баркова Н.А., Азовцев А.Ю. Мониторинг и диагностика роторных машин по вибрации. – Л.: АО ВАСТ, 1997. – 170 с.
2. Генкин М.Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. – М.: Машиностроение, 1987. – 288 с.
3. Barkov A.V., Barkova N.A., Mitchell J.S. Condition Assessment and Life Prediction of Rolling Element Bearings// Sound & Vibration. – 1995. - №6. - P.10-17.
4. Воронцов А.Г. Элементы теории высокочастотной вибродиагностики роторных машин. Монография. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2002. – 137с.
5. Айнбиндер И.М. Шумы радиоприемников (Основы обобщенной теории и инженерного расчета). – М.: Связь, 1974. – 328 с.