

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЫЧИСЛЕННЫХ КООРДИНАТ СЦИНТИЛЛЯЦИЙ В ПОЗИЦИОННО-ЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ДЕТЕКТОРЕ ТИПА ГАММА-КАМЕРЫ

Плахотник В.Ю.

НИПКИ "Искра", Луганск, Украина

Abstract

Plakhotnik V.Yu. Research of the spatial distributions of the calculated scintillation coordinates characteristics in position-sensitive detector. The results of the simulation experiments by the studying of the spatial distributions of the calculated scintillation coordinates characteristics in different points of continuous position-sensitive detector are presented in this paper. Spatial distribution parameters are investigated in dependence on kind of goodness-of-fit criterion that is used for coordinate calculation and from quantity of Fisher information that consists of sample of photomultiplier tube signals. Specific goodness-of-fit criterion – Shannon's norm of distribution difference – is used for coordinate calculation. Using of the new criterion provides the satisfactory values of spatial resolution even in the points of minima of Fisher information spatial distribution on the field of the detector. The spatial distribution parameters dependences on the value of decision-making threshold are studied.

Введение.

При исследовании применимости статистических критериев согласия для вычисления координат сцинтилляций в позиционно-чувствительном детекторе гамма-камеры [1] отмечено, что выводы о превосходстве критерия Пирсона верны только для исследованной нами точки "тройного контакта" ФЭУ. На рисунке 1 показана схема размещения ФЭУ на выходном окне позиционно-чувствительного детектора. Здесь же показаны тестовые точки, в которых изучались пространственные распределения вычисленных координат сцинтилляций.

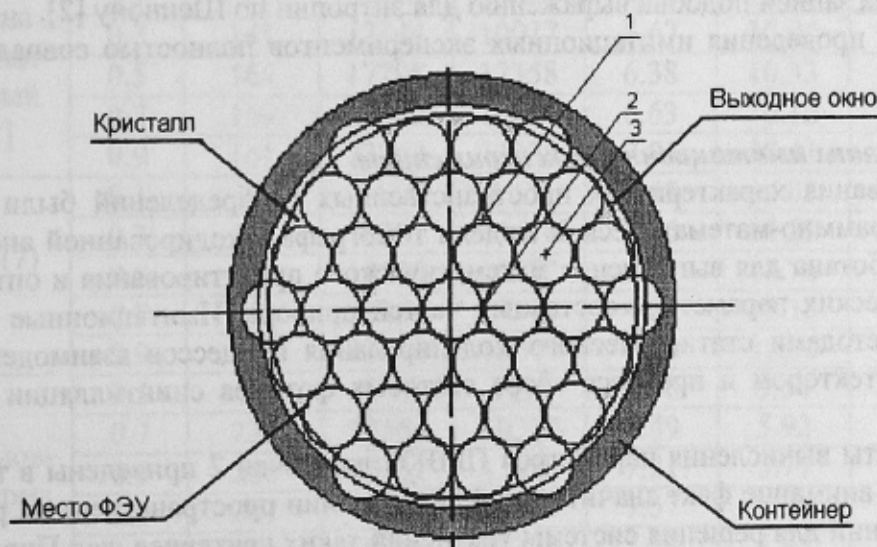


Рисунок 1. Схема расположения ФЭУ на выходном окне позиционно-чувствительного детектора и тестовых точек.

Тестовая точка 1 – это точка "тройного контакта". Как видно из рисунка 1, в тригональной структуре упаковки ФЭУ можно выделить еще две особых точки: точка 2 – точка "двойного" контакта, расположенная в области касания колб двух соседних ФЭУ, и точка 3, расположенная в центре фотокатода ФЭУ. Если для точки 1 центры ближайших соседних ФЭУ расположены на одинаковом удалении и количество соседей 1-го порядка равно трем, то для точки 2 количество ближайших соседей 1-го порядка равно 4, однако расстояния до центров их фотокатодов существенно различны. Точка 3 имеет 6 ближайших соседей 1-го порядка, однако расстояние до их центров максимально возможное в структуре.

Из-за различия расстояний от тестовых точек до центров фотокатодов ближайших соседних ФЭУ, очевидно, существенно будут различаться характеристики выборок сигналов ФЭУ при возникновении сцинтилляции. Следовательно, возможны существенные различия в характеристиках пространственных распределений вычисленных координат сцинтилляций. Для проверки такого предположения мы выполнили исследования пространственных распределений вычисленных координат сцинтилляций (ПРВКС) в точках 2 и 3.

Для решения системы уравнений относительно координат сцинтилляции мы использовали еще один критерий, кроме исследованных в [1]. Этот критерий мы назвали Шенновской нормой разности распределений, которая вычисляется по формуле:

$$M_{Sh}(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} [u_i - \gamma_i(x, y)] \cdot \ln \left(\frac{u_i}{\gamma_i(x, y)} \right) \quad (1)$$

Выбор названия очевиден из формулы (1). Определяемая величина есть мера расстояния между двумя распределениями (экспериментальным и теоретическим), а также обладает всеми свойствами нормы в линейном пространстве:

- она всегда положительная и минимум равный нулю достигается в случае совпадения распределений, т.е. при равенстве нулю разности распределений;
- умножение на скаляр разности распределений приводит к умножению величины M на скаляр;
- легко доказать, что неравенство Минковского также выполняется для разности распределений;
- форма записи подобна выражению для энтропии по Шеннону [2].

Условия проведения имитационных экспериментов полностью совпадали с описанными в [1].

Результаты имитационных экспериментов.

Исследования характеристик пространственных распределений были выполнены с помощью программно-математической модели томографа с кодированной апертурой, которая была разработана для выполнения математического проектирования и оптимизации физико-геометрических параметров составных частей прибора. Имитационные эксперименты проводились методами статистического моделирования процессов взаимодействия гамма-излучения с детектором и процесса сбора световых фотонов сцинтилляции на фотокатод ФЭУ.

Результаты вычисления параметров ПРВКС для точки 2 приведены в таблице 1. Обращает на себя внимание факт значительной анизотропии пространственных распределений при использовании для решения системы уравнений таких критериев, как Пирсона, Неймана и Отношения максимального правдоподобия. Типичный вид ПРВКС при использовании этих критериев показан на рисунке 2а). Видно, что пространственное распределение вытянуто вдоль направления оси Y , вдоль линии, соединяющей центры фотокатодов ФЭУ, наиболее

удаленных от тестовой точки. Очевидна также двумодальность распределения. На рисунке 2 б) показано сечение распределения вдоль оси Y, на котором выделяются два максимума.

В случае применения для решения системы уравнений Шенноновской нормы пространственное распределение вычисленных координат сцинтилляций имеет форму, близкую к окружности. Пример ПРВКС при применении Шенноновской нормы с порогом $p = 0.7$ показан на рисунке 3. Нетрудно заметить, что распределение имеет несколько несимметричную форму, однако оно, в отличие от ПРВКС на рис. 2, слегка вытянуто вдоль направления оси X. Этот факт подтверждается также данными таблицы 1.

Таблица 1.
Параметры пространственных распределений вычисленных координат сцинтилляций для точки 2 с координатами (26,0)

Критерий	Значение порога (p)	Максимум пика ПР (Max)	Количество регистраций (Sum)	Количество регистраций в пике (SumP)	Пространственное разрешение, мм		Ширина пика по уровню 0.1·Max, мм	
					R _x	R _y	W _x	W _y
Пирсона χ^2 (4) [1]	0.1	74	4861	4606	3.42	15.42	8.00	25.00
	0.3	177	15926	14876	4.33	16.21	8.75	25.25
	0.5	191	18580	16866	4.47	16.27	9.60	25.80
	0.7	194	20146	17868	4.54	16.38	9.80	25.80
	0.9	210	21316	18864	4.72	16.55	10.20	27.00
Неймана (5) [1]	0.1	32	2022	1826	4.52	13.41	8.60	22.40
	0.3	136	12982	9986	5.95	11.50	12.60	20.20
	0.5	153	17894	11944	6.63	10.61	13.40	20.80
	0.7	168	21204	13626	6.54	10.73	15.40	20.60
	0.9	163	23620	13938	6.96	10.71	16.60	20.40
Неймана модифицированный (6) [1]	0.1	33	2011	1819	4.40	14.03	8.80	22.20
	0.3	141	12844	10027	5.67	10.94	13.20	21.20
	0.5	164	17798	12358	6.38	10.33	13.80	20.60
	0.7	169	21060	13630	6.63	10.12	14.80	20.60
	0.9	161	23268	14288	7.01	10.41	17.00	20.60
ОМП (7) [1]	0.1	70	4434	4122	3.45	14.03	7.60	22.60
	0.3	181	16382	14678	4.26	14.28	9.20	24.20
	0.5	196	19540	16572	4.71	14.76	10.00	24.40
	0.7	203	21366	17576	4.58	15.15	10.00	25.40
	0.9	202	22758	18244	4.66	15.30	10.20	25.00
Шенноновская норма (1)	0.5	94	4319	3778	6.30	5.34	12.20	11.80
	0.7	228	12564	10388	6.49	5.92	12.00	12.60
	0.9	266	16122	13020	7.21	5.77	14.80	12.40
	1.1	267	18006	14890	7.57	5.76	17.20	13.00
	1.3	283	19344	15376	7.74	5.94	16.40	13.00
	1.5	285	20602	16140	7.79	5.86	16.80	12.80

Особенностью тестовой точки 3, расположенной в центре фотокатода ФЭУ, является то, что амплитудно-пространственная характеристика ФЭУ имеет в этой точке максимум и

нулевой наклон. Это сочетание характеристик обеспечивает минимальный вклад сигнала от ФЭУ, в центре фотокатода которого расположена точка, в информацию о координатах сцинтилляции. По-видимому, с этим фактом связаны особенности результатов вычисления параметров ПРВКС для точки 3, приведенные в таблице 2.

Для таких критериев как критерий Пирсона, критерий Неймана и отношение максимального правдоподобия при малых значениях порога принятия решения вычисленные координаты сцинтилляций вообще не формируют пик пространственного распределения вблизи тестовой точки. При значениях $p \approx 0.15 - 0.25$ ПРВКС вблизи тестовой точки 3 имеет вид кольца. Типичное ПРВКС для такого случая показано на рис.4. Только начиная со значений $p \approx 0.3 - 0.4$ указанные критерии обеспечивают формирование широкого пика пространственного распределения.

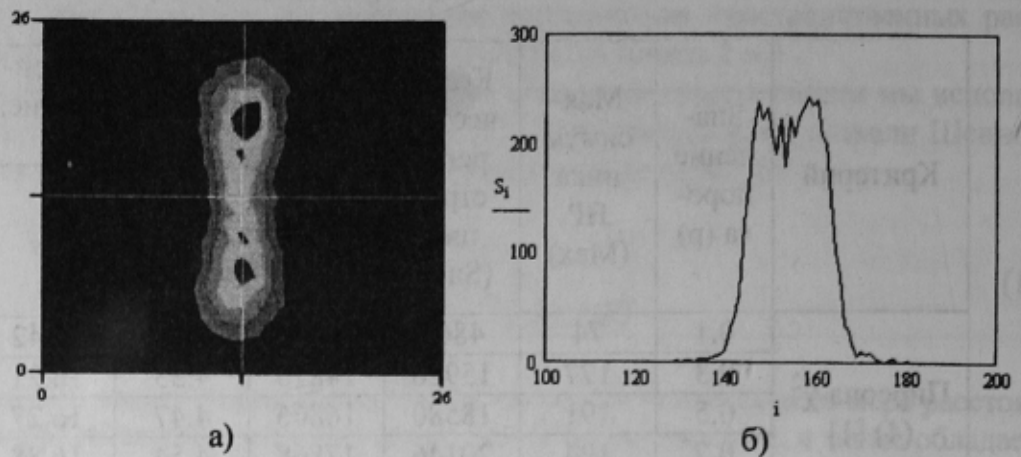


Рисунок 2. ПРВКС при применении критерия Пирсона для точки 2.

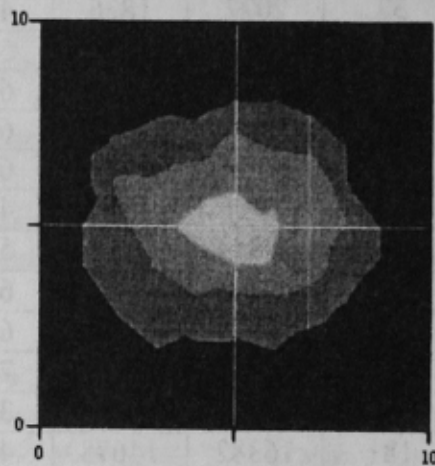


Рисунок 3. ПРВКС при применении Шенноновской нормы в тестовой точке 2.

Причем наиболее широкий пик формируется при использовании критерия Пирсона χ^2 и отношения максимального правдоподобия. Самый узкий пик ПРВКС формируется при использовании Шенноновской нормы разности, что подтверждается значениями пространственного разрешения, приведенными в таблице 2.

При проведении имитационных экспериментов в тестовой точке 3 было замечено, что в случае применения Шенноновской нормы разности для вычисления координат сцинтилляции при высоких значениях порога принятия решения вокруг пика ПРВКС образуются артефакты. В горизонтальном сечении пик ПРВКС окружен шестилучевой звездой. Типичный вид горизонтального сечения показан на рисунке 5. Направления лучей звезды совпадают с

направлениями от тестовой точки к центрам фотокатодов ближайших ФЭУ. Причем интенсивность артефактов тем больше, чем выше порог принятия решения.

Таблица 2.
 Параметры пространственных распределений вычисленных координат сцинтилляций для точки 3 с координатами (78,45)

Критерий	Значение порога (p)	Максимум пика ПР (Max)	Количество регистраций (Sum)	Количество регистраций в пике (SumP)	Пространственное разрешение, мм		Ширина пика по уровню 0.1·Max, мм	
					R _x	R _y	W _x	W _y
Пирсона χ^2 (4)	0.1	Пик не формируется						
	0.3	19	5924	5420				
	0.5	36	12988	12028	19.09	24.68	32.60	51.20
	0.7	44	15732	14310	21.01	24.64	33.20	34.80
	0.9	47	17052	15578	23.01	21.64	34.60	35.20
Неймана (5)	0.1	Пик не формируется						
	0.3	90	11430	7982	8.60	8.73	20.20	18.60
	0.5	163	15598	10884	6.98	7.03	17.80	17.80
	0.7	188	18312	12190	6.76	7.13	17.60	17.40
	0.9	222	20028	13018	6.32	6.36	17.40	16.00
Неймана модифицированный (6)	0.1	Пик не формируется						
	0.3	88	11308	7973	8.75	8.50	20.00	20.20
	0.5	153	15464	10864	7.24	7.72	18.00	18.00
	0.7	190	18104	12188	6.58	7.01	17.00	17.20
	0.9	218	19886	13392	5.93	6.26	16.40	25.60
ОМП (7)	0.1	Пик не формируется						
	0.3	33	9969	8541	19.12	23.74	46.20	47.40
	0.5	56	15948	13252	16.18	17.66	30.00	29.80
	0.7	65	18042	15216	16.50	17.48	29.20	30.80
	0.9	68	19190	16034	15.85	16.71	28.80	30.60
Шенноновская норма (1)	0.9	54	2861	1615	5.18	5.00	12.00	10.60
	1.1	463	10230	7912	4.00	3.82	9.00	8.00
	1.3	688	14108	11160	3.93	3.69	8.60	8.00
	1.5	769	15984	12942	3.99	3.95	8.60	8.80
	1.7	808	17230	13840	3.96	3.74	9.00	8.00

Параметры ПРВКС, полученные в результате имитационных экспериментов и приведенные в таблицах 1 и 2, показывают, что применение критерия Шенноновской нормы разности распределений обеспечивают более высокую точность вычисления координат сцинтилляций в тестовых точках 2 и 3. По этой причине мы выполнили более подробные исследования параметров ПРВКС в этих точках при использовании Шенноновской нормы для вычисления координат сцинтилляций. Как и в предыдущей работе [1], мы исследовали зависимости максимума пика (Max), общего количества регистраций (Sum) и количества регистраций в пике (SumP), а также отношения SumP/Sum от значения порога принятия решения.

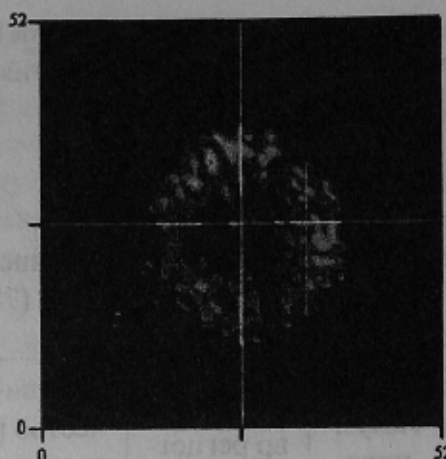


Рисунок 4. ПРВКС при решении системы с помощью критерия Пирсона ($p = 0.25$) для точки 3 (78,45)

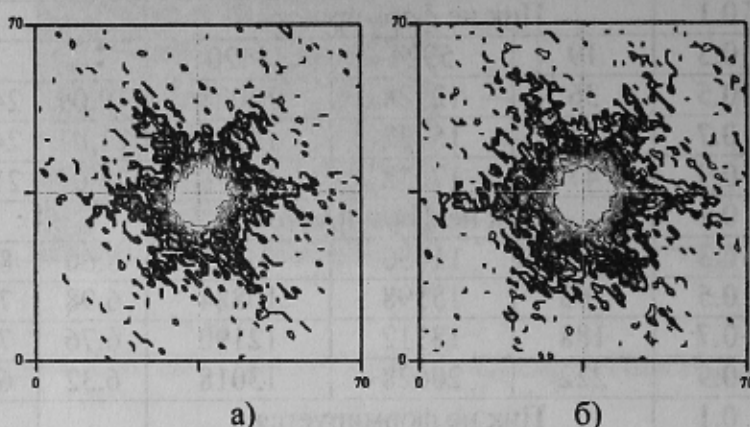


Рисунок 5. Артефакты при использовании Шенноновской нормы разности распределений (а) $p = 1.5$; б) $p = 1.7$) в точке 3 (78,45)

В результате экспериментов установлено, что зависимости максимума пика (Max), общего количества регистраций (Sum) и количества регистраций в пике (SumP) имеют такой же характер, как и зависимости этих параметров, приведенные в [1]. С увеличением значения порога принятия решения p значения Max, Sum и SumP увеличиваются нелинейно, проявляя уменьшение приращений с увеличением p . Возможно, что параметры ПРВКС асимптотически приближаются к некоторым предельным значениям. Зависимость отношения SumP/Sum, определяющего устойчивость критерия к образованию артефактов, в тестовой точке 2 с координатами (26,0) имеет такой же вид, как и зависимость в точке 1, приведенная в [1]. График зависимости отношения SumP/Sum для точки 2 показан на рис.6 а). С увеличением значения порога p доля событий, отнесенных к пику, быстро возрастает, достигая максимума при значениях $p \approx 0.5$, а затем уменьшается. Таким образом, при $p > 0.5$ возрастает количество регистраций в артефактах. Совершенно иной вид имеет зависимость отношения SumP/Sum от значения порога p в тестовой точке 3. График этой зависимости показан на рис. 6 б). Как видно из этого рисунка, доля регистраций, отнесенных к пику ПРВКС, постоянно возрастает с увеличением значения порога принятия решения. Наблюдается тенденция замедления темпа возрастания при высоких значениях p , что, вероятно, свидетельствует об асимптотическом стремлении к пределу.

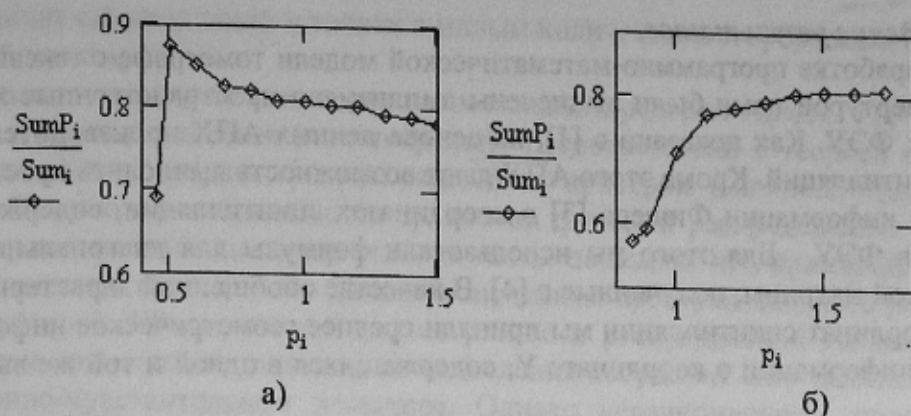


Рисунок 6. Зависимость отношения количества регистраций в пике к общему количеству регистраций ($SumP/Sum$) от значения порога принятия решения в тестовых точках 2 (а) и 3(б)

Особое внимание в наших исследованиях уделялось зависимости пространственного разрешения, как одному из основных параметров ПРВКС, от значения порога принятия решения. Графики зависимостей пространственного разрешения в тестовых точках 2 и 3 при использовании Шенноновской нормы показаны на рис. 7. В тестовой точке 2 пространственное разрешение вначале возрастает, проявляя в дальнейшем тенденцию к выходу на постоянный уровень. При этом значения пространственного разрешения в направлении оси X (R_x) выше, чем значения пространственного разрешения в направлении оси Y (R_y) для всех значений порога принятия решения p . Иначе выглядит зависимость пространственного разрешения в тестовой точке 3. Здесь пространственное разрешение достаточно быстро уменьшается с ростом значения порога p и выходит на практически постоянный уровень. Возможно, что с дальнейшим увеличением значения порога может проявиться тенденция к небольшому увеличению значения пространственного разрешения. Отметим, что здесь, как и в тестовой точке 2, значения пространственного разрешения R_x превышают значения R_y для всех значений порога p .

В дополнение к проведенным исследованиям были выполнены имитационные эксперименты по вычислению координат сцинтилляций с помощью критерия Шенноновской нормы в тестовой точке 1. Мы не приводим здесь результатов этих экспериментов, так как они в основном совпадают с результатами, приведенными в [1]. Отметим только, что критерий Шенноновской нормы может обеспечить в этой тестовой точке пространственное разрешение не лучше, чем 9 – 10 мм. Эта величина значительно превосходит пространственное разрешение даже для случая использования модифицированного критерия Неймана (≈ 8 мм). Очевидно, что для тестовой точки 1 Шенноновская норма является наихудшим критерием для вычисления координат сцинтилляций.

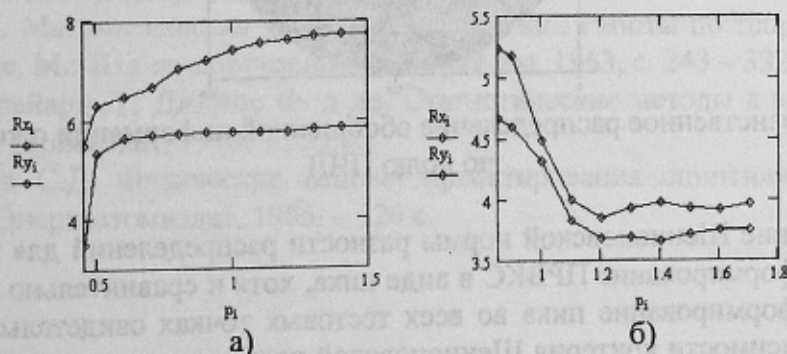


Рисунок 7. Зависимости пространственного разрешения R_x и R_y в тестовых точках 2 (а) и 3 (б)) от значения порога принятия решения.

Обсуждение результатов.

При разработке программно-математической модели томографа с гексагональной кодированной апертурой нами были вычислены амплитудно-пространственные характеристики (АПХ) всех ФЭУ. Как показано в [1], на основе данных АПХ производится вычисление координат скинтилляций. Кроме этого АПХ дают возможность вычислить пространственные распределения информации Фишера [3] о координатах скинтилляции, содержащейся в выборке сигналов ФЭУ. Для этого мы использовали формулы для диагональных элементов информационной матрицы, полученные в [4]. В качестве обобщенной характеристики точности оценки координат скинтилляции мы приняли среднее геометрическое информации о координате X и информации о координате Y, содержащихся в одной и той же выборке сигналов.

$$R = \sqrt{I_X \cdot I_Y} \tag{2}$$

На рисунке 8 показано пространственное распределение значения обобщенной информации R по полю ПЧД. На рисунке также отмечено расположение тестовых точек. Очевидно, что тестовая точка 1 расположена в локальном максимуме, а точка 3 – в локальном минимуме пространственного распределения обобщенной информации.

Обращает на себя внимание сходство пространственного распределения обобщенной информации в окрестности тестовой точки 2 и ПРВКС для этой точки, получаемых при применении критериев Пирсона, Неймана и Отношения максимального правдоподобия для оценки координат скинтилляции (рис.2). Распределение обобщенной информации в окрестности точки 2 имеет вытянутый вдоль оси Y характер и выраженную двумодальность. Таким образом, ПРВКС в точке 2 при использовании указанных критериев формируется в соответствии с распределением обобщенной информации. По-видимому, из-за того, что точность оценок координат скинтилляции при использовании критериев Пирсона, Неймана и Отношения максимального правдоподобия сильно зависит от количества информации, в тестовой точке 3 формируется кольцевое ПРВКС при малых значениях порога принятия решения и широкий пик при его высоких значениях.

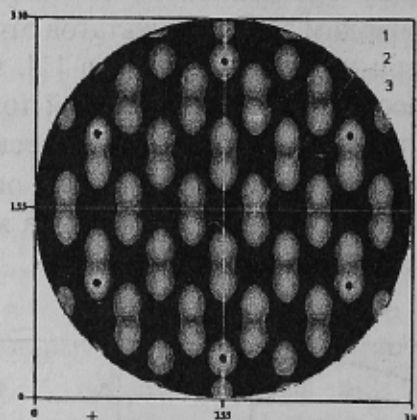


Рисунок 8. Пространственное распределение обобщенной информации о координатах X и Y по полю ПЧД

Использование Шенноновской нормы разности распределений для всех тестовых точек обеспечивает формирование ПРВКС в виде пика, хотя и сравнительно широкого в точке 1. По-видимому, формирование пика во всех тестовых точках свидетельствует об относительно слабой зависимости критерия Шенноновской нормы от вида распределения сигналов в выборке. Особенно важно, что критерий Шенноновской нормы эффективно работает при

оценке координат сцинтилляций в точках с малым количеством информации (тестовая точка 3 – локальный минимум).

При оценке координат сцинтилляции методами проверки гипотез [1] мы пользуемся данными, не сгруппированными в гистограмму. В соответствии с теорией статистических методов [3] для такого случая должны подходить критерии Смирнова-Крамера-Мизеса и Колмогорова-Смирнова, основанные на сравнении функций распределения. Однако проведенные для проверки имитационные эксперименты показали, что применение упомянутых критериев приводит к недопустимо высоким значениям пространственного разрешения. По-видимому, критерий Шенноновской нормы разности распределений является специфическим критерием, подходящим для задачи вычисления координат сцинтилляций в непрерывном позиционно-чувствительном детекторе. Однако неравномерность пространственного разрешения при использовании этого критерия требует дополнительных исследований. По нашему мнению перспективный путь решения проблемы неравномерности лежит в направлении использования комбинированных критериев, которые обеспечат наиболее полное использование информации о координатах сцинтилляции, содержащейся в выборке сигналов ФЭУ.

Заключение.

Пространственное разрешение непрерывного позиционно-чувствительного детектора типа гамма-камеры при вычислении координат сцинтилляций существенно зависит от вида критерия согласия, применяемого для сравнения выборки сигналов ФЭУ с выборкой из амплитудно-пространственных характеристик. Из-за неравномерного распределения информации о координатах, содержащейся в выборке сигналов, по полю детектора пространственное разрешение также неравномерно. При использовании оптимальных критериев согласия неравномерность пространственного разрешения может быть значительно уменьшена. Применение нового критерия – Шенноновской нормы разности распределений – позволило получить приемлемые значения пространственного разрешения даже в точках локальных минимумов пространственного распределения информации Фишера по полю детектора.

Результаты проведенной работы дают основания предполагать, что проблема неравномерности пространственного разрешения может быть разрешена путем использования критериев согласия, наиболее полно использующих информацию о координатах, содержащуюся в выборке сигналов ФЭУ. Такими критериями могут быть комбинированные критерии согласия, составленные из независимых критериев.

Список литературы.

1. Плахотник В.Ю., Поляков Г.А.. Исследование статистических критериев согласия в применении к вычислению координат сцинтилляции в позиционно-чувствительном детекторе типа гамма-камеры. // Інформаційні технології. / Міжвід. наук.-техн. зб.-вип.1(34) 03. Дніпропетровськ. 2003. С.9-16.
2. Шеннон К. Математическая теория связи. – В кн.: Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963, с. 243 – 332.
3. Идье В., Драйард Д., Джеймс Ф. и др. Статистические методы в экспериментальной физике. М.: Атомиздат, 1976. – 335 с.
4. Калашников С.Д. Физические основы проектирования сцинтилляционных гамма-камер. М.: Энергоатомиздат, 1985. – 120 с.