# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Казакова Е.И.,
Донецкий национальный технический университет

Разработана математическая модель управления при наличии случайных возмущений. На основе доказанных лемм и теорем сформулирован функционал «стоимости» управления, который является устойчивым в среднем квадратическом.

Функционирование любого процесса представляет собой последовательную смену его состояний во времени.

На любой производственный процесс воздействует большое число возмущений, имеющих статический характер и приводящих процесс к сбоям. Источником таких возмущений, с одной стороны, является внешняя среда, с другой, – механизмы, машины, технологические и организационные факторы.

Для реального производственного процесса имеет место конечная длительность состояний и переходов из одного состояния в другое. Но по сравнению с длительностью состояний временем перехода пренебрегаем. При таком допущении смена состояний процесса осуществляется скачком. Моменты появления состояний общей последовательности являются случайным процессом с непрерывным временем.

Рассмотрим управляемое стохастическое дифференциальное уравнение:

$$d\varepsilon(t) = a(\xi(t), t, u)dt + \beta(\xi(t), t, u, dt),$$
$$\beta(x, t, u, dt) = b(x, t, u)dw(t) + \int_{R^m} c(t, x, u, z)\tilde{v}(dt, dz), \quad (1)$$

для которого точка $x = 0$ является неподвижной,

$$a(0, t, u) = b(0, t, u) = c(0, t, u, z) \equiv 0; \quad u(t, 0) = 0.$$

Задача стабилизации движения заключается в том, чтобы выбрать такое управление $u(t)$, при котором траектория $\xi(t)$, определяемая уравнением (1) все время находилась бы в достаточно малой окрестности точки 0. Таким образом, данная задача состоит в том, чтобы добиться с помощью управления устойчивости движения.

При решении задачи об оптимизации стабилизации требуется, кроме того, минимизировать некоторый функционал, который можно назвать стоимостью управления.

Обозначим через $\xi_{t,s}(s)$ – решения уравнения (1) при $s \geq t$, удовлетворяющее начальному условию $\xi_{t,s}(t) = x$.

Решение $\xi_{0,s}(s) \equiv 0$, $s \geq 0$ уравнения (1) назовем:

1) $p$–устойчивым, если наблюдается такое $r$, что при $|x| < r$

$$\lim_{|x| \to 0} \sup_{s \geq 0} M\left|\xi_{0,x}(s)\right|^p = 0;$$

2) асимптотически $p$–устойчивым, если оно $p$–устойчиво и, кроме того,

$$\lim_{s \to \infty} M\left|\xi_{0,x}(s)\right|^p = 0$$

для всех $x$ из некоторой достаточно малой окрестности точки 0;

3) экспоненциально $p$–устойчивым, если существуют постоянные $A > 0$ и $d > 0$ такие, что

$$M\left|\xi_{t,x}(s)\right|^p \leq A|x|^p \exp\{-d(s-t)\}$$

для всех $x$ из некоторой достаточно малой окрестности точки 0.

Наиболее часто обсуждается вопрос об (асимптотической или экспоненциальной) $p$–устойчивости при $p = 2$. Такую устойчивость называют устойчивостью в среднем квадратическом.

В качестве функционала «стоимости» управления будем рассматривать функционал вида:

$$R_{t,x}(u(\cdot)) = \int_t^\infty Mf\left[s, \xi_{t,x,u}(s), u(s)\right] ds \qquad (2)$$

где $(t, x)$ – фиксированная начальная точка и $f(s, x, u) \geq 0$ при $s > 0$, $x \in R^m$, $u \in (-\infty, \infty)$.

В общем случае, задача минимизации функционала (2) не является задачей стабилизации. Если, например, $f(s, x, u) = 0$ при $|x| > C$, то оптимальным управлением может оказаться то управление, которое выводит траекторию процесса $\xi_{t,s}(s)$ из окрестности точки

$x=0$. Но, если на $f(s,x,u)$ наложить некоторые ограничения, то задача об оптимальном управлении при функционале «стоимости» (2) тесно связана с задачей об оптимальной стабилизации системы.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(s,x,u)$ удовлетворяет следующему условию:

$$f(s,x,u) \geq m|x|^p \tag{3}$$

для любого $u \in (-\infty,\infty)$ и некоторых постоянных $m>0,\ p>0$.

Нетрудно убедиться, что если при данном управлении функционал (2) принимает конечное значение, то

$$\lim_{s\to\infty} M|\xi_{t,x}(s)|^p = 0,$$

так, что одно из требований в определении асимптотической $p$-устойчивости автоматически оказывается выполненным.

При условии, что поля $\alpha(x,t,u)$, $\beta(x,t,u,h)$ линейно ограничены и удовлетворяют равномерному условию Липшица с константами, не зависящими от $u$, уравнение (1) имеет при любых $(x,t)$ единственное решение с конечными моментами второго порядка.

Введем класс $L_p$ стохастических дифференциальных уравнений (1), решения которых $\xi_{t,x}(s)$ при любых $(t,x,s)$, $s\geq t$ имеют конечные моменты $p$-го порядка. Будем писать $\xi_{t,x}(\cdot)\in L_p$, если $\xi_{t,x}(s)$ есть решение стохастического дифференциального уравнения, принадлежащего этому классу. Обозначим через $C_2^p(0)$ – класс всех неотрицательных функций $V(s,x)$, $s\geq 0$, дважды непрерывно дифференцируемых по $x$ и один раз по $s$ в области $x\in R^m\setminus\{0\}$, $s\geq 0$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|x|\geq 1}\left\{\frac{|V(s,x)|}{|x|^p}+\frac{|\nabla V(s,x)|}{|x|^{p-1}}+\frac{|\nabla^2 V(s,x)|}{|x|^{p-2}}\right\}<\infty,\quad 0\leq s\leq T,\quad \forall T>0 \tag{4}$$

Если функция $V(s,x)\in C_2^p$ и выполнены неравенства

$$|a(t,x,u)|^{2p}+|b(t,x,u)|^{2p}+\int|c(t,x,u,z)|^{2p}\prod(dz)\le C\left(1+|x|^{2p}\right),\ \ p\ge 1,\quad (5)$$

то имеет место формула Ито:

$$V(s,\xi_{t,s}(s))-V(t,s)=\int_t^s L_\eta V(\theta,\xi_{t,s}(\theta))d\theta+$$

$$+\int_t^s(\nabla V(\theta,\xi_{t,s}(\theta)))b(\theta,\xi_{t,s}(\theta),\eta(\theta))dw(\theta)+\quad (6)$$

$$+\int_t^s\int[V(\theta,\xi_{t,s}(\theta))+c(\theta,\xi_{t,s}(\theta),\eta(\theta),z)-V(\theta,\xi_{t,s}(\theta))]\tilde{v}(d\theta,dz),$$

где $L_\eta$ – инфинитиземальный оператор марковского процесса, определяемого стохастическим уравнением (1).

Все слагаемые в формуле (6) имеют конечные моменты второго порядка, а члены, содержащие стохастические интегралы, являются мартингалами. Поэтому

$$MV(s,\xi_{t,x}(s))-V(t,x)=M\int_t^s L_u V(\theta,\xi_{t,x}(\theta))d\theta.\quad (7)$$

Применяя метод, основанный на остановке случайного процесса, нетрудно показать, что формула (6) остается справедливой и тогда, когда $\xi_{t,x}(\cdot)\in L_p$.

Рассмотрим функцию $V_\delta=\left(\delta+|x|^2\right)^{p/2}$, $\delta>0,\ p>0$. При $\delta\to 0$ $V_\delta\to V=|x|^p$ функция $V_\delta$ дважды непрерывна дифференцируема по $x$, поэтому к ней можно применить обобщенную формулу Ито. При этом,

$$L_u^\pi V_\delta=\int\left[\left(\delta+|x+C|^2\right)^{p/2}-\left(\delta+|x|^2\right)^{p/2}-p\left(\delta+|x|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}(|x|C)\right]d\Pi,$$

$$C=C(t,x,u,z)$$

Так как

$$|x+y|^p\le K_p\left(|x|^p+|y|^p\right),\quad K_p=\begin{cases}1, & 0<p<1\\ 2^{p-1}, & 1\le p\le\infty\end{cases}\quad (8)$$

и $\left||x+y|^p - |x|^p\right| \le |y|^p$ при $0<p<1$, то при $0<p<1$

$$\left|L_u^\pi V_\delta\right| \le \int\left[\left||x+y|^2-|x|^2\right|^{p/2} + p\left(\delta+|x|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}|x||C|\right]d\Pi \le$$

$$\le \int\left[|2|^{p/2}|x|^{p/2}|C|^{p/2} + |C|^p + p\left(\delta+|x|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}|x||C|\right]d\Pi \le C_1|x|^p, \tag{9}$$

где $C_1$ не зависит от $\delta$, а $C=C(t,x,u,z)$ удовлетворяет условиям

$$\int|C|^{p/2}d\Pi \le K|x|^{p/2}, \qquad \int|C|^2 d\Pi \le K|x|^2 \tag{10}$$

Аналогичные оценки имеют место для выражений $L_u^w V_\delta$ и $L_u^a V_\delta$. Поэтому, в соотношении

$$MV_\delta\left(s,\xi_{t,x}(s)\right) - V_\delta(t,x) = M\int_t^s L_u V_\delta d\theta$$

можно перейти к пределу при $\delta\to 0$, что приводит к соотношению

$$M\left|\xi_{t,s}(s)\right|^p - |x|^p \le C_1\int_t^s M\left|\xi_{t,s}(\theta)\right|^p d\theta. \tag{11}$$

Данная оценка справедлива и при $p\ge 2$. Действительно, при $p\ge 2$ к функции $V=|x|^p$ можно применить формулу (6). Получим

$$L_u^p|x|^p = \int\left[p|x+\theta C|^{p-2}|C|^2 + p(p-2)|x+\theta C|^{p-4}(x+\theta C\mid C)^2\right]d\Pi,\ 0<\theta<1.$$

Откуда

$$\left|L_u^\pi|x|^p\right| \le C\int\left[|x|^{p-2}|C|^2+|C|^p\right]d\Pi \le C_1|x|^p. \tag{12}$$

при условии $\int|C|^3 d\Pi \le K|x|^p, \qquad \int|C|^2 d\Pi \le K|x|^2.$

Замечание. Приведенные рассуждения можно обобщить на произвольные функции $V(s,x)\in C_2^p(0)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &0\le V(s,x)\le C|x|^p,\\ &\left|L_u V(s,x)\right| \le C_1|x|^p. \end{aligned} \tag{13}$$

В этом случае получаем следующую оценку, аналогичную оценке (11):

$$MV(s,\xi_{t,x}(s)) \le V(t,x) + C_1 \int_t^s M|\xi_{t,x}(\theta)|^p d\theta. \tag{14}$$

Лемма.

Пусть для стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} d\xi_{t,x}(s) &= a(s,\xi_{t,x}(s),u)ds + b(s,\xi_{t,x}(s),u)dw(s) + \\ &+ \int (s,\xi_{t,x}(s),u,z)\widetilde{\nu}(ds,dz), \end{aligned} \tag{15}$$

выполнены следующие условия:

1) $\xi_{t,x}(\cdot) \in L_p$;

2) $a(s,0) = b(s,0) = c(s,0,z) \equiv 0, \quad u(s,0) = 0$;

3)для некоторого $p > 0$

$\int |C|^{p/2} d\Pi \le K|x|^{p/2}, \quad \int |C|^2 d\Pi \le K|x|^2$, если $0 < p < 2$

$\int |C|^p d\Pi \le K|x|^p, \quad \int |C|^2 d\Pi \le K|x|^2$, если $p \ge 2$;

4) $\int_t^\infty M|\xi_{t,x}(s)|^p ds < \infty.$

Тогда
$$\lim_{s\to\infty} M|\xi_{t,x}(s)|^p = 0. \tag{16}$$

Доказательство.

Воспользуемся формулой (11). Получаем неравенство

$$\left| M|\xi_{t,x}(s+h)|^p - M|\xi_{t,x}(s)|^p \right| \le C_1 \int_s^{s+h} M|\xi_{t,x}(\theta)|^p d\theta,$$

где $C_1$ – некоторая постоянная. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial s} M|\xi_{t,x}(s)|^p \le C_1 M|\xi_{t,x}(s)|^p. \tag{17}$$

Из условия (4) леммы и последнего неравенства, следует соотношение (16). Лемма доказана.

Замечание. Из формулы (17) вытекает также неравенство

$$M|\xi_{t,x}(s)|^p \le |x|^p \exp\{C_1(s-t)\}, \quad p > 0, x \ne 0, \tag{18}$$

где $C_1$– некоторая постоянная.

Приведем теперь теорему, являющуюся видоизменением теоремы Беллмана применительно к задачам оптимальной стабилизации стохастической системы (1).

Теорема.

Допустим, что функция $f(s,x,u)$ удовлетворяет условию $f(s,x,u)\ge |x|^p$, $p>0$ и пусть существуют функция $V_o(s,x)\in C_2^p(0)$ и функция $u_o(s,u)\in U$, которые при всех $s\ge 0$, $x\in R^m$, $u\in(-\infty,\infty)$ удовлетворяют условиям:

$$L_{u_o}(s,t)V_o(s,x)+f(s,x,u_o(s,t))\equiv 0,$$
$$L_u(s,t)V_o(s,x)+f(s,x,u(s,t))\ge 0. \tag{19}$$

Тогда функция $u_o(s,u)$ является оптимальным управлением для стохастической системы в смысле функционала стоимости (2), причем

$$R_{t,x}(u_o)=\min_{u\in U}R_{t,x}(u)=V_o(t,x). \tag{20}$$

Кроме того, управление $u_o(s,u)$ стабилизирует систему до экспоненциальной $p$ – устойчивой.

Применяя формулу Ито к функции $V_o(s,x)$ и процессу $\xi_{t,x,u}(\cdot)$, где $u=u(t,x)$ – некоторое управление, используя неравенство (13), получим

$$MV_o(s,\xi_{t,x,u}(s))=M\int_t^s L_uV_o(\theta,\xi_{t,x,u}(\theta))d\theta+V_o(t,x),\quad s>t.$$

При $u=u_o(t,x)$ имеем

$$M\int_t^s f(\theta,\xi_{t,x,u_o}(\theta),u_o(\theta,\xi_{t,x,u_o}(\theta)))d\theta=V_o(t,x)-MV_o(s,\xi_{t,x,u}(s)). \tag{21}$$

Отсюда следует, что

$$R_{t,x}(u_o(\cdot))=M\int_t^s f(\theta,\xi_{t,x,u_o}(\theta),u_o(\theta,\xi_{t,x,u_o}(\theta)))d\theta<\infty$$

и в силу леммы

$$\lim_{s\to\infty}M|\xi_{t,x,u_o}(s)|^p=0, \tag{22}$$

а поэтому

$$\lim_{s\to\infty} MV_o\left(s,\xi_{t,x,u_o}(s)\right)=0.$$

Переходя в (21) к пределу при $s\to\infty$, получим

$$R_{t,x}(u_o(\cdot))=V_o(t,s).$$

Аналогично убеждаемся, что для любого другого управления $u_o(t,s)$ решение системы (1) экспоненциально $p$–устойчиво.

Используя неравенства (13) и (18) для экспоненциальной $p$–устойчивости системы (1) при $u=u_o(s,x)$ достаточно, чтобы $V_o(s,x)$ удовлетворяла условиям

$$C_1|x|^p\le V_o(s,x)\le C_2|x|^p, \tag{23}$$

$$L_{u_o}V_o(s,x)\le -C_3|x|^p, \tag{24}$$

где $C_1,C_2,C_3$ – некоторые константы.

Условие (24) автоматически вытекает из условий (3) и (19), а справедливость правой части неравенства (23) следует из (13).

Остается доказать, что $V_o(s,x)\ge C_1|x|^p$. Учитывая (3), (20), имеем

$$V_o(t,x)=M\int_t^s f\left(\theta,\xi_{t,x,u_o}(\theta),u_o\left(\theta,\xi_{t,x,u_o}(\theta)\right)\right)d\theta\ge m\int_t^s M\left|\xi_{t,x,u_o}(\theta)\right|^p d\theta.$$

В силу соотношения (24) для любых $x\ne 0, t\ge 0$ можно указать такое $T=T(t,x)$, при котором

$$M\left|\xi_{t,x,u_o}(T)\right|^p<\frac{1}{2}|x|^p.$$

Применяя теперь формулу Ито, учитывая, что

$$L_{u_o}\left(|x|^p\right)\ge -C_4|x|^p,$$

получим

$$V_o(t,x)\ge m\int_t^T M\left|\xi_{t,x,u_o}(\theta)\right|^p d\theta\ge -\frac{m}{C_4}\int_t^T ML_{u_o}\left(\left|\xi_{t,x,u_o}(\theta)\right|^p\right)d\theta\ge$$

$$\ge C_5\left(|x|^p-M\left|\xi_{t,x,u_o}(T)\right|^p\right)\ge\frac{C_5}{2}|x|^p=C_1|x|^p.$$

Теорема доказана.