ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

Босов А.А., д.т.н., Капица М.И., к.т.н.
Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта

Более адекватное описание процессов в технике и экономике приводит к использованию многозначных отображений, на которых определяются функции множества – количественные показатели процесса.

Например, когда наработке технического объекта сопоставляются затраты средств и времени, которые служат количественной оценкой системы диагностирования при условии, что интенсивность отказов не превосходит наперед заданной величины.

С математической точки зрения приходим к тому, что при $t \in R$ определено множество $V_t \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2 ... \omega_n\}$

где ω_i – элементы технического объекта,

V_t – объем диагностирования при наработке t.

Пусть $F_1(V_t), F_2(V_t)$ затраты средств и времени, а

$\Phi(V_t)$ – количественная характеристика надежности, тогда приходим к задаче, определения таких объемов $V_{t_1}, V_{t_2}, ... V_{t_n}$, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} F_1(V_{t_i}) \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_2(V_{t_i}) \to \min$$

и выполнялись условия

$$\Phi(V_{t_i}) \geq \alpha_i,\ i = \overline{1,n}\ ; \tag{2}$$

$$V_{t_i} \subseteq \Omega$$

Таким образом, задача (1) – (2) является по своей форме задачей векторной оптимизации для функций множества.

Рассмотрение задачи выполним при следующих предположениях:

моменты по наработке $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и заданы;

- функции $F_1(V_t), F_2(V_t)$ и $\Phi(V)$ являются аддитивными и однородными определенными на $A \subseteq \Omega -$ множество подмножеств множества Ω;

Основная задача. Рассматривается задача на условный экстремум

$$F(V) = \sum_{\omega \in v} \oint(\omega) \to \min \tag{3}$$

при условии

$$\Phi(V) = \sum_{\omega \in v} \varphi(\omega) \geq \alpha \tag{4}$$

$$V \in \Omega$$

Необходимым и достаточным условием решения задачи (3), (4) является

$$\Phi(\Omega) \geq \alpha$$

Если это условие выполнено, то с учетом того, что множество Ω дискретно и конечно, то решение задачи (3), (4) существует.

Основой ее решения служит алгоритм, который впервые был дан в работе [1] и известен как отношение правдоподобия.

Не ограничивая общности рассмотрения считаем, что $\varphi(\omega) \geq 0$, тогда упорядочив множество Ω отношением $\oint(\omega)/\varphi(\omega)$.

Получаем, что решение задачи (3) (4) имеет вид

$$V_*(\mu) = \{\omega \in : \oint(\omega)/\varphi(\omega) \leq \mu\}, \tag{5}$$

пороговое значение μ определяется из условия

$$\Phi(V_*(\mu)) \geq \alpha$$

Заметим, что соотношение (5) получается, когда минимизируется функция Лагранжа

$$\angle = F(V) - \mu\Phi(V),$$

а в качестве множества V принимается симметрическая разность этого множества и некоторого другого множества B принадлежащие $A(\Omega)$. Множество B понимается как множество которым варьируется (изменяется) множество V.

Лемма. Если $V_* \in A(\Omega)$ минимизируют функцию (6), то для любого $B \in A(\Omega)$ имеет место

$$F(B) - 2F(V_* \cap B) \geq 0$$

Как следствие данной леммы получаем соотношение (5).

Вспомогательная задача. Незначительным обобщением задачи (3), (4) является задача

$$F(V)=\sum_{\omega\in v} f(\omega)\to \min \tag{7}$$

при условиях

$$\Phi_1(V)=\sum_{\omega\in v}\varphi_1(\omega)\ge \alpha_1, \tag{8}$$

$$\Phi_2(V)=\sum_{\omega\in v}\varphi_2(\omega)\ge \alpha_2$$

$$V\in\Omega$$

С этой задачей связываем две следующие задачи

Задача 1	Задача 2
$F(V)\to \min$;	$F(V)\to \min$;
$\Phi_1(V)\ge\alpha_1$;	$\Phi_2(V)\ge\alpha_2$;
$V\in\Omega$	$V\in\Omega$

Пусть $V_1(\alpha_1)$ и $V_2(\alpha_2)$ - решения сформулированных задач, соответственно. Данные решения получаем по методу решения основной задачи (3), (4).

В общем случае возможны следующие ситуации:

С1. $\Phi_1(V_2(\alpha_2))\ge\alpha_1$;

С2. $\Phi_2(V_1(\alpha_1))\ge\alpha_2$

С3. $\Phi_1(V_2(\alpha_2))\ge\alpha_1$ и $\Phi_2(V_1(\alpha_1))\ge\alpha_2$.

Очевидно, что в ситуации С1 решением задачи (7), (8) является множество $V_2(\alpha_2)$, а в ситуации С2 решением будет множество $V_1(\alpha_1)$, а если имеет место С1 и С2, то в качестве решения принимается то из множеств $V_1(\alpha_1)$, $V_2(\alpha_2)$, которое обеспечивает минимальность функции $F(V)$.

В случае, когда имеет место ситуация С3 и для определенности, не ограничивая общность рассмотрения, принимаем

$$F(V_2(\alpha_2))<F(V_1(\alpha_1)),$$

тогда в качестве начального приближения решения задачи (7), (8) принимаем

$V_\circ = V_2(\alpha_2)$,

и рассматриваем задачу

$F(V) \to \min$

при условии

$$\Phi_1(V) \geq \alpha_1 - \Phi_1(V_\circ) = \widetilde{\alpha}_1 \qquad (9)$$

причем

$V \subseteq V_1(\alpha_1) \setminus V_2(\alpha_2)$.

Данная задача по своей структуре аналогична задачам 1, 2. Пусть решение задачи (9) является множество $V_1(\widetilde{\alpha}_1)$, тогда решение задачи (7),(8) представляет собой

$$V_*(\alpha_{1,}\alpha_2) = V_2(\alpha_2) \cup V_1(\widetilde{\alpha}_1) \qquad (10)$$

Доказательство. Очевидно, что множество

$\widetilde{V}(\alpha_{1,}\alpha_2) = V_1(\alpha_1) \cup V_2(\alpha_2)$

обеспечивает ограничения (8). Действительно,

$\Phi_1(\widetilde{V}(\alpha_{1,}\alpha_2)) = \Phi_1(V_1(\alpha_1)) + \Phi_1(V_2(\alpha_2) \setminus V_1(\alpha_1))$,

но

$\Phi_1(V_1(\alpha_1)) \geq \alpha_1$

и считая, что $\varphi_1(\omega) \geq 0$ убеждаемся в соотношении

$\Phi_1(\widetilde{V}(\alpha_{1,}\alpha_2)) \geq \alpha_1$.

Аналогично получаем и для второго ограничения

$\Phi_2(\widetilde{V}(\alpha_{1,}\alpha_2)) \geq \alpha_2$.

Функция $F(V)$ в задаче (7),(8) на множестве $V_*(\alpha_{1,}\alpha_2)$ будет равна

$$F(V_*(\alpha_{1,}\alpha_2)) = F(V_2(\alpha_2)) + F(V_1(\widetilde{\alpha}_1)), \qquad (11)$$

так как

$V_2(\alpha_2) \cap V_1(\widetilde{\alpha}_1) = \emptyset$.

В соотношении (11) первое слагаемое $F(V_2(\alpha_2))$ представляет собой самое меньшее значение $F(V)$, при котором выполняется одно из ограничений (8), а второе слагаемое $F(V_1(\widetilde{\alpha}_1))$ – самое меньшее увеличение функции $F(V)$, которое обеспечивает выполнение и второе ограничение (8).

Что и доказывает справедливость (10).

Как следствие изложенного является алгоритм решения задачи

$$F(V)=\sum_{\omega\in v} f(\omega)\to \min$$

при ограничениях

$$\Phi_i(V)=\sum_{\omega\in v}\varphi_i(\omega)\ge \alpha_i; \qquad i=\overline{1,m},$$

имеющий следующие основные элементы:

n1. Решением m задач вида

$$F(V)\to \min$$

$$\Phi_i(V)\ge \alpha_i, \qquad i=\overline{1,m},$$

решения которых обозначим через $V(\alpha_i)$, $i=\overline{1,m}$.

n2. Среди всех $V(\alpha_i)$ определяем такой $V(\alpha_{i_\circ})$, что

$$F(V(\alpha_{i_\circ}))\le F(V(\alpha_i)), \qquad i=\overline{1,m}.$$

n3. Все множество индексов $I=\{i:1\le i\le m\}$ разбиваем на два подмножества

$$I_{\ge}=\{i:F_i(V(\alpha_{i_\circ}))\ge \alpha_i\};$$

$$I_{<}=\{i:F_i(V(\alpha_{i_\circ}))< \alpha_i\}.$$

Если множество $I_{<}=\emptyset$ то $V(\alpha_{i_\circ})$ является решением исходной задачи с m ограничениями.

В противном случае переходим к n4.

n4. Среди индексов $I_{<}$ определяем такой индекс ν, что относительная невязка

$$\varepsilon_\nu=\frac{\alpha_\nu-F_\nu(V(\alpha_{i_\circ}))}{\alpha_\nu},$$

максимальна.

n5. Решаем задачу

$$F(V)\to \min$$

при условии

$$F_\nu(V)\ge \alpha_\nu-F_\nu(V(\alpha_{i_\circ}))=\tilde{\alpha}_\nu$$

$$V\subseteq V(\alpha_\nu)\setminus V(\alpha_{i_\circ}).$$

Пусть решение этой задачи является множество $V(\widetilde{\alpha}_\nu)$, тогда полагаем

$V(\alpha_{i_\circ}) := V(\alpha_{i_\circ}) \cup V(\widetilde{\alpha}_\nu)$;

$I=I_<$

и переходим к п3.

Теперь переходим к рассмотрению задачи (1), (2).

Так как показатели эффективности (1) являются аддитивными функциями, то необходимо решить n задач вида

$F_1(V_Q) \to \min$

(12)

$F_2(V_Q) \to \min$

при ограничении

$\Phi(V_Q) \geq \alpha_i$; $V \subseteq \Omega$

В основу решения данной задачи полагаем идеологию решения подобных задач, изложенную в работе [2].

Рассматриваются две задачи:

Задача A_1	Задача A_2
$F_1(V) \to \min$	$F_2(V) \to \min$
$F_2(V) \geq t_2$;	$F_1(V) \geq t_1$;
$\Phi(V) \geq \alpha_i$;	$\Phi(V) \geq \alpha_i$;
$V \in \Omega$	$V \in \Omega$

Данные задачи по своей структуре аналогичны задаче (7), (8).

Обозначим через $V_1(t_2)$ и $V_2(t_1)$ решения задач A_1 и A_2 соответственно.

В этих задачах параметры t_1 и t_2 произвольны, которые должны быть согласованы условием

$V_1(t_2) = V_2(t_1)$.

Если T набор согласованных пар (t_1 , t_2), то имеет место

Теорема. Пусть $V_* \subseteq \Omega$ является решением задачи (12), то справедливо соотношение

$$V_* \in \bigcup_{t_2 \in T} \{V_1(t_2)\} = \bigcup_{t_1 \in T} \{V_2(t_1)\}$$

Заметим, что согласование пар (t_1 , t_2) приводит к их взаимосвязи и определенного предела изменений

$\underline{t}_1 \le t_1 \le \bar{t}_1$;

$\underline{t}_2 \le t_2 \le \bar{t}_2$,

причем $\underline{t}_1(\alpha_i) = \min F_1(V)$;

$V \subseteq \Omega$

$\Phi(V) \ge \alpha_i$

$\underline{t}_2(\alpha_i) = \min F_2(V)$;

$V \subseteq \Omega$

$\Phi(V) \ge \alpha_i$.

Смысл $\bar{t}_1(\alpha_i)$ и $\bar{t}_2(\alpha_i)$ очевиден.

Таким образом, для каждого α_i, $i = \overline{1,n}$ получаем пределы изменения показателей F_1 и F_2 и их взаимосвязь, что и решат исходную задачу векторной оптимизации для аддитивных функций множества.

Список источников:

1. Neyman J. Person E.S. On the use and interpretation of certain test criteria for purpose of staticrical inference, Biometrika, 1928. Vol. 20A, Part I, p.p. 175-240, Part II,p.p. 263-294.

2. Босов А.А., Скалозуб В.В. О Парето оптимальных решениях задач векторной оптимизации. //Диференціальні рівняння та іх застосування. Зб. наукових праць ДДУ. Дніпропетрвськ, 1998.с. 66-70.

ЕФЕКТИВНИЙ МЕНЕДЖМЕНТ ЯК ЗАСІБ ЗАПОБІГАННЯ БАНКРУТСТВ В ЕЛЕКТРОННІЙ КОМЕРЦІЇ

Константінов С.М., торговельна компанія “Аладдин”,
Пономаренко Ю.Л., Київський національний
торговельно-економічний університет

Минулий рік, як це передбачали аналітики, виявився останнім роком існування багатьох торгових компаній, які працювали на електронному ринку. При чому серед невдах опинилися навіть компанії, котрі ще вчора успішно функціонували. У більшості