

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,  
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ  
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Ф.Л. ШЕВЧЕНКО**

**КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**  
(Руководство по изучению теории и решению задач)

Донецк – 2013

Курс опору матеріалів. Порада до вивчення теорії та розв'язання задач.  
Навчальний посібник //Ф.Л. Шевченко: - Донецьк, 2013 р. – 260 с.

Навчальний посібник являє собою коротке викладання навчального матеріалу курсу опору матеріалів, передбаченого навчальними програмами для підготовки бакалаврів і магістрів за напрямом підготовки «Інженерна механіка та машинобудування» та відрізняється від раніше виданих посібників з грифом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України тим, що в нагаданих посібниках, крім обов'язкового навчального матеріалу, приведена велика кількість додаткових розрахунків більш складних задач, які виникають в інженерній практиці.

Такі більш складні питання розрахунків конструкцій на міцність, стійкість та коливання приведені в виданнях:

1. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1. Напряженно-деформируемое состояние стержней. //Учебное пособие - Донецк; ООО «NORD-PRESS», 2005, 288 с.

2. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 2. Сложное напряженное состояние.//Учебное пособие. – РИА ДонНТУ, 2007, 306 с.

3. Шевченко Ф.Л. Динамика упругих стержневых систем.//Учебное пособие: - Донецк. ООО «Лебедь», 1999. -268 с.

4. Шевченко Ф. Л., Царенко С.Н. Задачи по сопротивлению материалов. Изд. четвертое, ТОВ. «Цифрова типографія», 2009, 354 с.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Существует мнение многих студентов и даже некоторых инженеров о том, что «Сопротивление материалов» является одним из сложных учебных предметов среди учебных дисциплин, формирующих инженерное мышление студента технического вуза. Наблюдается даже весьма опасное явно вредное мнение - что в век компьютеризации технологических процессов, технических расчетов и проектирования конструкций и инженерных сооружений такие учебные дисциплины как математика, инженерная графика, теоретическая механика и сопротивление материалов могут быть существенно сокращены, так как в компьютере есть все необходимые для расчетов формулы, различные функции, отдельные узлы конструкций, программные комплексы и другое математическое обеспечение для творческой работы инженера. Такая лженаучная эпидемия дошла до абсурда. Например, для подготовки инженеров шахтного строительства и наземных сооружений учебными программами по подготовке бакалавров, специалистов и даже магистров не предусмотрен курс строительной механики. При подготовке инженеров строительства промышленных и гражданских сооружений нет курса теории упругости и пластичности. Для металлургов специальности обработка металлов давлением не предусматривается курс сопротивления материалов и даже прикладной механики. В оправдание такого положения некоторые преподаватели и даже заведующие выпускающими кафедрами ссылаются на то, что они не используют многих вопросов математики или сопротивления материалов, которые читают в общетехнических дисциплинах. Так это значит, что на этих кафедрах читаются дисциплины описательного характера или преподаватели обходят математическое изложение или выводы, основанные на базе сопротивления материалов. А по большому счету серьезное знание математики, инженерной графики, теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости, математической физики – это научный уровень инженера, это его инженерная культура. Тут можно привести такую параллель – филолог, как специалист русского (к примеру) языка не читал классическое произведение Л.Н. Толстого «Война и мир», а знаком с ним лишь по аннотации.

Вышеперечисленные учебные дисциплины формируют инженерное мышление человека, без глубоких знаний этих дисциплин подготовить инженера нельзя. И наоборот, при хороших знаниях инженерных дисциплин человек может быстро переквалифицироваться, т.е. изменить свою профессиональную деятельность на другую инженерную профессию.

Возникает вопрос – как нужно преподнести «сложный» предмет «Сопротивление материалов» студенту, чтобы он мог им овладеть без проблем. Об этом пойдет конкретный разговор в этом учебном пособии. Однако следует заметить, что для успешного изучения сопротивления материалов **нужно систематически работать**, не допускать накопления непонятных вопросов и самостоятельно решать задачи. Сравним студента музыкальной специальности (пианиста) с будущим инженером. Пианист начинает свой жизненный опыт му-

зыканта с бесконечного повторения гамм и маленьких несложных произведений, заучивает отрывки классических произведений, сам сочиняет музыкальные этюды.

Так и будущий инженер – должен заучивать основные расчетные формулы или уравнения, понимать их смысл, решать задачи и сверять ответы с известным правильным решением, консультироваться у преподавателя по непонятным вопросам, чтобы не оставалось пробелов в знаниях, так как в сопротивлении материалов все последующие положения базируются на хороших знаниях предыдущих разделов.

Знайте, что хороший преподаватель не копирует учебник, он рассказывает многие вопросы по-своему с расстановками акцентов и условных знаков, подчеркивающих важность какого-либо положения или формулы. Изучить «Сопротивление материалов» **без наставника** (преподавателя или консультанта) весьма **затруднительно**.

## ВВЕДЕНИЕ

Психологи различают два типа мышления: **конвергентное** (закрытое, не-творческое) и **дивергентное** (открытое, творческое). Тип личности с преобладанием конвергентного мышления называют **интеллектуальным**, дивергентного – **креативным** [1]. По сути дела оба эти мышления творческие. Но в конвергентном мышлении заложены глубокие знания рассматриваемого вопроса и алгоритмов решения поставленных задач. Такие задачи, которые имеют уже известные алгоритмы их решения и даже ответы, называются **закрытыми**. Здесь не надо чего-либо изобретать, все уже решено и известно в литературе или доступно для самостоятельного решения задачи, и интеллектуал знает алгоритм решения задачи.

В дивергентном мышлении нет решения поставленной задачи, нет алгоритма ее решения и нет ответа; но креатив способен найти это решение сам, составить алгоритм решения таких задач, убедиться в правильном ответе. Такие задачи называются **открытыми**.

Нет человека, который обладает лишь конвергентным или креативным мышлением. И задачи могут требовать лишь одного мышления, но могут быть задачи, требующие частично конвергентного и частично креативного мышления.

В «Сопроотивлении материалов» в основном содержатся закрытые задачи, т.е. такие задачи, которые решаются по определенному известному алгоритму. Это значит, что для решения таких задач нечего «изобретать велосипед», **нужно знать алгоритм решения таких задач**, а это с одной стороны очень просто, так как в учебниках эти алгоритмы приведены, но их нужно знать, а иногда они не представлены очень ярко, а с другой стороны здесь нужно проявить усердие по их запоминанию. Но есть задачи частично закрытые, для решения которых нужно знать алгоритм решения, а затем проявить личное творчество, чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос.

Кроме этого нюанса в сопротивлении материалов в алгоритм решения задач часто входят **расчетные формулы**, которые также нужно знать на память.

И еще один важный нюанс: **нужно знать область применимости** расчетных формул или уравнений, на что в учебниках мало уделено внимания и лишь опытный преподаватель может возместить этот недостаток.

Вот почему обязательно **нужно посещать и конспектировать** аудиторные занятия.

Всё, о чем сказано в этом введении, будет продемонстрировано в последующих основных разделах сопротивления материалов на конкретных примерах без вывода расчетных зависимостей, так как это не учебник, а руководство по решению задач, а следовательно, руководство нужно использовать поэтапно по мере изучения курса сопротивления материалов.

Основными видами загрузки стержней являются: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и изгиб. Сначала они рассматриваются изолировано, независимо друг от друга.

В сопротивлении материалов рассматриваются вопросы прочности, жесткости и устойчивости стержневых систем.

Критерием прочности являются напряжения. Напряжения представляют величину внутренних усилий, приходящихся на единицу площади сечения.

Внутренние усилия вычисляются **методом сечений**, который заключается в следующем (**алгоритм 1**):

- конструкция (стержень) разрезается (мысленно) на **две** части;
- одна часть отбрасывается, а другая рассматривается под действием **всех внешних сил**, к ней приложенных;
- действие отброшенной части на оставшуюся **заменяется внутренними усилиями** (равнодействующими);
- из условий **равновесия** рассматриваемой части вычисляются внутренние усилия.

Если наибольшие напряжения в каком-нибудь элементе конструкции не превышает нормативного значения, то такой элемент считается прочным.

# 1. РАСТЯЖЕНИЕ- СЖАТИЕ

## 1.1. Напряжения и продольные деформации

Растяжение (сжатие) возникает в том случае, когда внешние силы действуют вдоль геометрической оси прямого стержня (рис. 1.1).

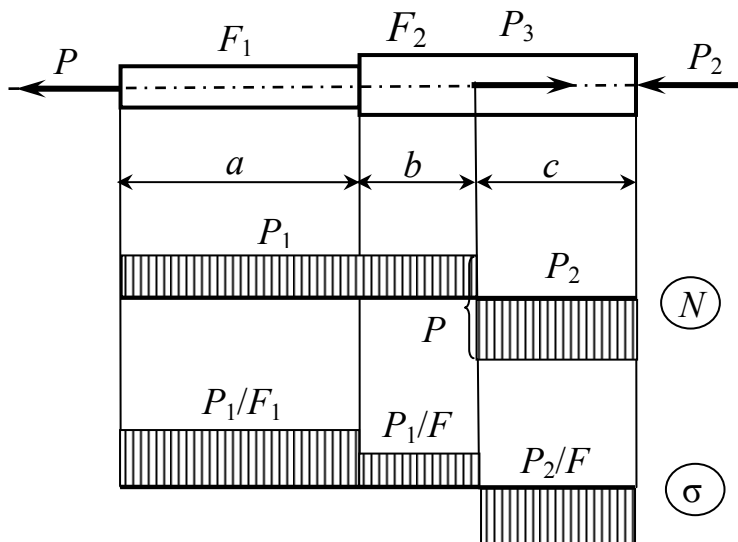


Рис.1.1

В сочетании стержней, т.е. стержень в конструкции будет испытывать растяжение-сжатие в том случае, когда внутреннее усилие будет направлено вдоль геометрической оси стержня. Для этого стержень в конструкции должен быть **прямым, шарнирно закрепленным по концам и между шарнирами не должно быть внешней силы**. На рис 1.2 ни один из стержней не отвечает этим требованиям, т.е. ни один из стержней в ра-

ссмотренной на рис.1.2 конструкции не может испытывать простое растяжение или сжатие.

Используя метод сечений, алгоритм которого изложен на предыдущей странице, легко вычислить внутренние усилия по участкам стержня рис. 1.1 и построить эпюру (график) изменения внутренних усилий по длине стержня. Затем вычисляются напряжения  $\sigma$  по определению - внутреннее усилие  $N$ , приходящееся на единицу площади поперечного сечения  $F$

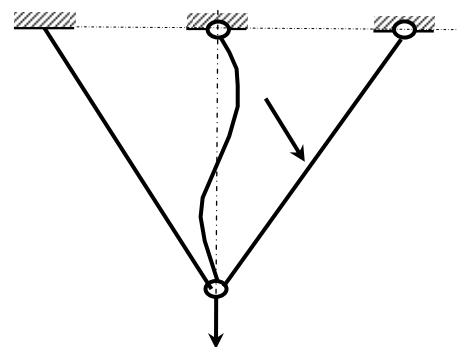


Рис.1.2

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (1.1)$$

При этом имеется в виду, что внутренние усилия при растяжении-сжатии распределяются равномерно по площади сечения. Об этом свидетельствуют одинаковые удлинения продольных линий, размеченных на боковой поверхности стержня, по всей длине стержня, за исключением небольших участков вблизи мест загрузки, рис. 1.3 (принцип Сен-Венана).

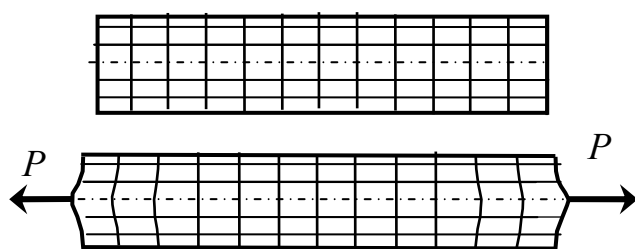


Рис. 1.3

Чтобы прочность конструкции (стержня) была обеспечена, наибольшие напряжения в ней не должны превышать нормативной допускаемой величины, т.е.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \dots\dots\dots(1.2)$$

Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  - это наибольшее напряжение, обеспечивающее гарантийную прочность стержня с коэффициентом запаса прочности  $k$  по отношению к опасному напряжению  $\sigma_{on}$ , при котором материал разрушается или конструкция получает чрезмерные деформации, т.е.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{on}}{k}. \quad (1.3)$$

Под действием нагрузки отдельные точки стержня перемещаются, стержень деформируется. На рис. 1.3 перемещения точек  $A$  и  $B$  представлены отрезками  $u$  и  $u+du$  соответственно. Разность перемещений точек  $A$  и  $B$ , т.е. разность отрезков  $A_1B_1$  и  $AB$ , называется абсолютной продольной деформацией участка  $AB$ . Абсолютная деформация участка  $AB$  равна  $A_1B_1 - AB = du$ . Отношение абсолютной деформации  $du$  к первоначальной длине отрезка  $dx$  называется относительной деформацией

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (1.4)$$

Р. Гуком экспериментально была получена линейная зависимость между относительной деформацией и напряжением

$$\sigma = \varepsilon E, \quad \dots\dots\dots(1.5)$$

Абсолютная деформация всего стержня длиной  $l$   $\Delta l = \sigma l / E$ . С учетом (1.1)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EF}. \quad (1.6)$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности между деформацией и напряжением, носит название - модуль упругости первого рода, модуль продольной деформации, модуль Юнга.

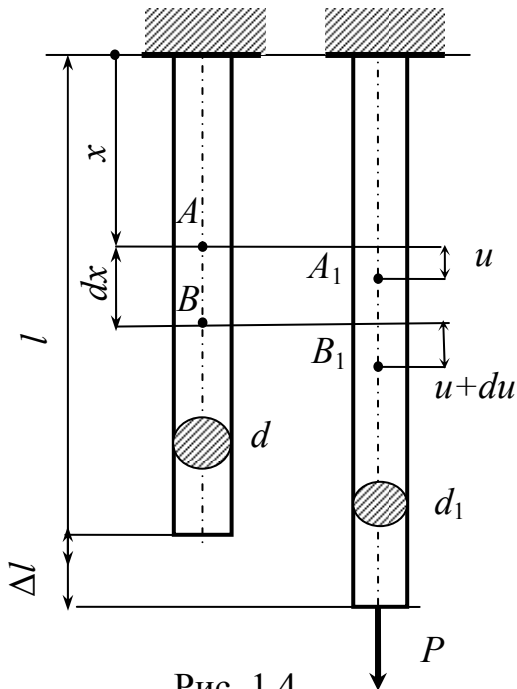


Рис. 1.4

Если стержень загружен продольной растягивающей силой  $P$  (рис. 1.4), то длина его увеличивается на  $\Delta l = l_1 - l$ , а поперечные размеры уменьшаются на  $\Delta d = d - d_1$ . Эти абсолютные деформации называются продольной и поперечной соответственно. Относительные деформации равны:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

Между поперечной и продольной деформациями  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon$  для большинства материалов существует определенная зависимость

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (1.7)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона.



## 1.2. Статически определимые стержневые системы

Статически определимыми называются системы, у которых количество кинематических связей не превышает необходимого для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Для плоской системы таких связей должно быть **три**. Они препятствуют повороту и перемещению по горизонтали и вертикали опорных сечений. В этих связях возникают реакции, которые вычисляются **из трех уравнений равновесия**. Реакции, также как и активные нагрузки, учитываются при рассмотрении условий равновесия при вычислении внутренних усилий, а затем напряжений и перемещений.

**Алгоритм 2** решения статически определимых стержневых систем:

- изображается заданная стержневая система с указанием **всех внешних нагрузок** (активных и реакций),
- разрезается стержень или система стержней **на две части** так, чтобы в рассматриваемой части системы было не более двух неизвестных усилий и согласно алгоритму 1 составляются уравнения равновесия, позволяющие вычислить внутренние усилия,
- **по определению вычисляются напряжения** в разрезанных стержнях,
- **по закону Гука (1.6)** вычисляются деформации стержней,
- по напряжениям и деформациям **строются эпюры** напряжений и перемещений.

**Задача 1.1.** Для стального стержня ступенчато-переменного сечения построить эпюры внутренних усилий, напряжений и перемещений, рис.1.5. Задано:  $P_1=1,5$  кН,  $P_2=2$  кН,  $F_1=1$  см<sup>2</sup>,  $F_2=2$  см<sup>2</sup>,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа.

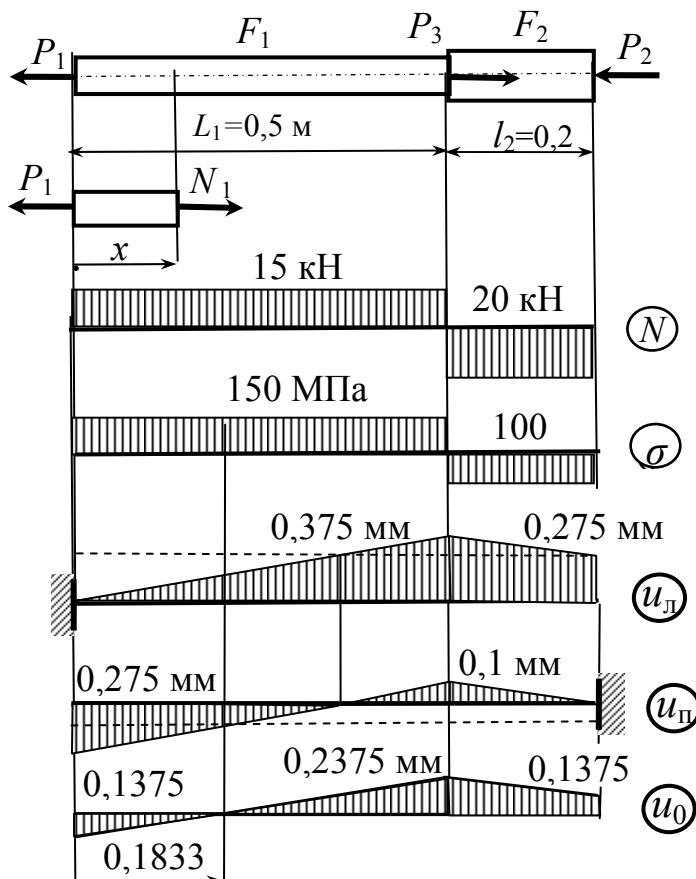


Рис. 1.5

**Решение.** Согласно алгоритму 2 с использованием алгоритма 1 **методом сечений** находим усилия на участках стержня и строим эпюру этих усилий  $N$ , рис.1.5

**По формуле (1.1)** вычисляем напряжения по участкам стержня и строим эпюру  $\sigma$ :

$$\sigma_{\text{л}} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{15 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = 150 \cdot 10^6 \text{ Па,}$$

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6$$

Па,

**По закону Гука (1.6)** вычисляем абсолютные деформации участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EF_1} = \frac{\sigma_{\text{л}}}{E} l_1 = \frac{150 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} \cdot 0,5 = 0,375 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,375 \text{ мм},$$

Абсолютная деформация правого участка

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EF_2} = \frac{\sigma_{\text{п}}}{E} l_2 = -\frac{100 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} \cdot 0,2 = -0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,1 \text{ мм}.$$

Стержень свободный (без опор). Считая левый торец стержня неподвижным (защемленным), эпюра перемещений сечений стержня примет вид  $u_{\text{л}}$  на рис 1.5.

Если принять правый торец стержня за неподвижный (заделка справа), то эпюра перемещений примет вид  $u_{\text{п}}$  на рис. 1.5.

На самом деле торцевые сечения перемещаются относительно неподвижного сечения, положение которого можно найти из условия равенства перемещений торцов стержня при учете деформаций слева или справа от неподвижного сечения, т.е. из равенства  $\frac{\sigma_{\text{л}}}{E} x = \frac{\sigma_{\text{л}}}{E} (l_1 - x) - \frac{\sigma_{\text{п}}}{E} l_2$ , откуда получим

$$x = \frac{\sigma_{\text{л}} l_1 - \sigma_{\text{п}} l_2}{2 \cdot \sigma_{\text{л}}} = \frac{150 \cdot 0,5 - 100 \cdot 0,2}{2 \cdot 150} = 0,18(3) \text{ м}.$$

Эпюра перемещений, построенная на оси с началом координат в неподвижном сечении  $u_0$ , показана на рис. 1.5. Из этой эпюры следует, что левый торец стержня перемещается влево (против направления координатной оси), а правый торец перемещается вправо на одинаковую величину  $\Delta = 0,1375 \text{ мм}$ , т.е. стержень, удлиненный на общую деформацию  $2\Delta$  оказывается симметрично расположенным относительно недеформированного состояния.

**Задача 1.2.** Вычислить полное перемещение узла стержневой системы, если материал и жесткость стержней одинаковы, угол  $\alpha = 30^\circ$ , рис. 1.6.

**Решение.** В этой стержневой системе вертикальный стержень разрезать не следует, так как он кроме растяжения испытывает изгиб.

Разрезаем наклонный стержень и рассматриваем в равновесии левую часть конструкции.

Из суммы моментов всех сил и усилия в разрезанном стержне относительно точки  $A$  находим усилие (см. рис. 1.6,а)

Из суммы моментов всех сил и усилия в разрезанном стержне относительно точки  $A$  находим усилие (см. рис. 1.6,а)

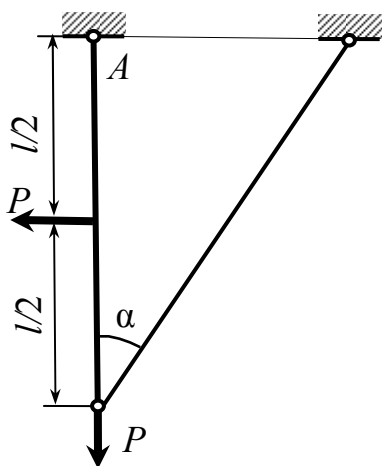


Рис. 1.6

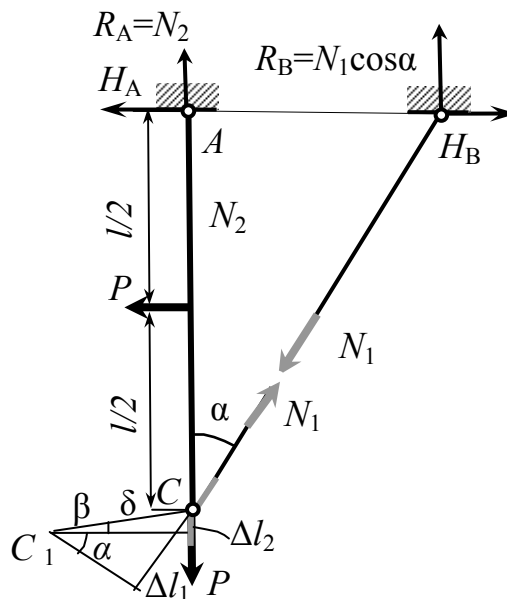


Рис. 1.6,а

$$N_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha} = P.$$

Из суммы проекций всех сил, приложенных к левой части конструкции, на вертикальную ось находим вертикальную реакцию на левой опоре

$$R_A = P - N_1 \cos \alpha = P(1 - \cos \alpha) = 0,134P.$$

и растягивающее усилие  $N_2 = R_A$

Теперь по закону Гука можно найти деформации стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF \cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Pl}{EF} = 1,155 \frac{Pl}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF} = 0,134 \frac{Pl}{EF}.$$

Откладывая эти деформации по направлению стержней и проводя перпендикуляры к ним, получаем диаграмму перемещений, определяющую положение узла в деформированном состоянии, рис. 1.6,а. Из треугольников этой диаграммы с общей гипотенузой  $\delta$  получаем зависимость

$$\delta = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta} = \frac{\Delta l_1}{\sin(\alpha + \beta)}$$

откуда находим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta l_2 \sin \alpha}{\Delta l_1 - \Delta l_2 \cos \alpha} = \frac{0,134 \cdot 0,5}{1,155 - 0,134 \cdot 0,866} = 0,0645,$$

т.е.  $\beta = 3,690^\circ$ .

$$\text{Полное перемещение } \delta = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta} = \frac{Pl}{EF} \frac{0,134}{\sin \beta} = 2,082 \frac{Pl}{EF}.$$

**Задача 1.3.** Вычислить усилия и перемещение узла  $B$  стержневой системы, изображенной на рис. 1.3, если все стержни стальные и поперечные сечения их подобраны на допускаемое напряжение 160 МПа.

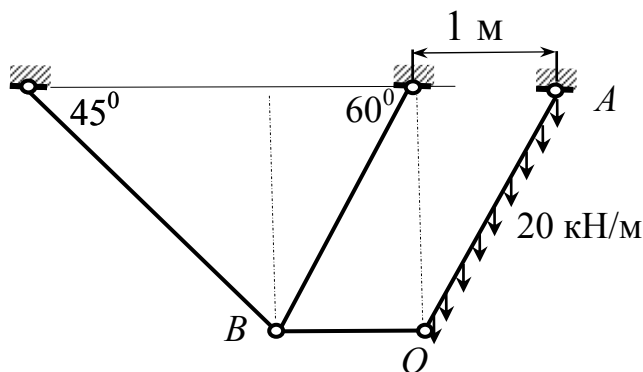


Рис. 1.3

распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 20$  кН на метр проекции стержня  $OA$ , рис. 1.3.

Разрезав стержень  $OB$  и рассмотрев в равновесии правую часть конструкции, из сумм моментов всех сил относительно опоры  $A$ , найдем (рис.1.3,а)

**Решение.** Напоминаем, что усилия определяются методом сечений, алгоритм метода сечений приведен во введении. В заданной конструкции разрезать стержень  $OA$  нельзя, так как к нему приложена

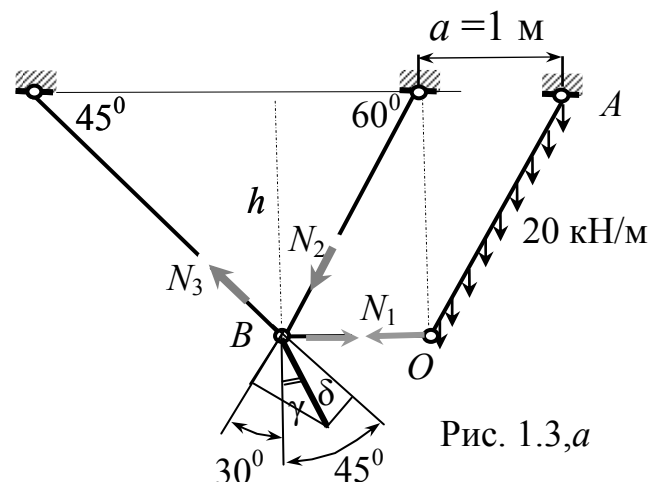


Рис. 1.3,а

$N_1 = \frac{qa^2}{2h} = \frac{qa}{2} \operatorname{tg} 30^\circ = 0,2887 \cdot qa = 5,7735 \text{ кН}$ . После этого можно вырезать узел  $B$

и составить два уравнения равновесия:  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ , т.е.

$$N_3 \sin 45^\circ + N_2 \cos 60^\circ = N_1, \quad N_3 \cos 45^\circ - N_2 \sin 60^\circ = 0.$$

Отсюда находим:  $N_2 = \frac{N_1}{\cos 60^\circ + \sin 60^\circ} = 0,732 N_1 = 4,226 \text{ кН}$ ,

$$N_3 = N_2 \frac{\sin 60^\circ}{\cos 45^\circ} = 1,2247 N_1 = 7,071 \text{ кН}.$$

Вычисляем деформации стержней, учитывая условие задачи о равенстве напряжений в стержнях:

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{\sigma}{E} a = \frac{\sigma}{E}, \quad \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{\sigma}{E} l_2 = \frac{\sigma}{E} \frac{a}{\cos 60^\circ} = 1,1547 \frac{\sigma}{E} a,$$

$$\Delta_3 \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{\sigma}{E} l_3 = \frac{\sigma}{E} \frac{a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}{\cos 45^\circ} = 2,4495 \frac{\sigma}{E}.$$

По деформациям строится диаграмма перемещений узлов упругой системы (диаграмма Виллио). Для этого деформацию  $\Delta_2 = 1,1547 \frac{\sigma}{E} a$  откладываем по направлению стержня 2, а  $\Delta_3 = 2,4495 \frac{\sigma}{E}$  - по направлению стержня 3. Перпендикуляры к этим деформациям определяют положение узла  $B$  деформированной системы. Из диаграммы Виллио находим

$$\delta = \frac{\Delta_3}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)} = \frac{\Delta_2}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right)}, \quad \text{откуда } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta_3 \cdot 0,866 - \Delta_2 \cdot 0,707}{\Delta_2 \cdot 0,707 - \Delta_3 \cdot 0,500} = 0,64.$$

Зная угол  $\gamma = 32,62^\circ$ , найдем полное перемещение узла  $\delta = \frac{\Delta_3}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)} = 2,508 \frac{\sigma}{E}$ .

### 1.3. Статически неопределимые стержневые системы

Статически неопределимыми называются системы, у которых количество кинематических связей больше необходимого для обеспечения геометрической неизменяемости. Для решения статически неопределимых задач кроме уравнений равновесия составляются дополнительные уравнения - уравнения совместности деформаций. Решение уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций позволяет вычислить усилия в кинематических связях или другие неизвестные величины.

**Алгоритм 3** решения статически неопределимых задач при растяжении-сжатии:

- вычислить количество неизвестных (усилий и реакций).
- определить количество независимых уравнений равновесия,

- установить **степень статической неопределимости** как разность количества неизвестных и количества уравнений равновесия,
- **составить уравнения равновесия**,
- согласно степени статической неопределимости **составить уравнения совместности перемещений** (для этого нужно изобразить систему в деформированном состоянии и составить аналитическую связь между деформациями отдельных стержней системы),
- **уравнения совместности перемещений по закону Гука переписать через усилия**,
- решить совместно уравнения равновесия и уравнения совместности перемещений.

**Задача 1.4.** Абсолютно жёсткий диск шарнирно закреплён на опоре и поддерживается двумя тягами одинаковой длины и жёсткости, рис. 1.4.

Вычислить усилия в стержнях от силы  $P$ .

**Решение.** В этой стержневой системе 4 неизвестных: две реакции и два

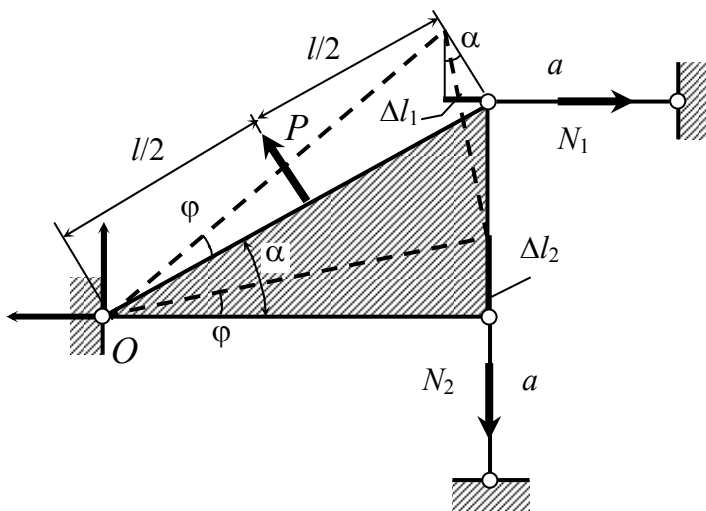


Рис.1.4

усилия в стержнях. Уравнений равновесия три. Задача один раз статически неопределима.

Избегая вычисления реакций, из уравнений равновесия используем лишь одно:

$$\sum M_0 = 0;$$

$$N_1 l \sin \alpha + N_2 l \cos \alpha = Pl/2.$$

Уравнение совместности перемещений составляем, приравняв углы поворота катета и гипотенузы диска:  $\frac{\Delta l_1}{l \sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{l \cos \alpha}$ . Переписываем уравнение деформаций через усилия по закону Гука:

$$\frac{N_1 a}{EF} = \frac{N_2 a}{EF} \operatorname{tg} \alpha, \quad N_1 = N_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляя эту зависимость в уравнение равновесия, находим:

$$N_2 = \frac{P}{2} \cos \alpha, \quad N_1 = \frac{P}{2} \sin \alpha.$$

### Примечания.

В расчетах на растяжение-сжатие небольшая часть стержня вблизи места приложения сосредоточенных сил в сопротивлении материалов не рассматривается, так как в этих местах напряжения распределяются в соответствии с конкретным распределением силовых факторов и могут быть учтены лишь методами

ми теории упругости. По принципу Сен-Венана считается, что такие участки не превышают поперечных размеров примыкающих стержней и практически не влияют на общее напряженное состояние. Такие короткие стержни, пластины или оболочки рассчитываются методами теории упругости.

Длина растянутых стержней может быть неограниченной при загрузке в пределах пропорциональности, а длина сжатых стержней не должна превышать значения гибкости  $\lambda \leq 40$ ,  $\lambda = l/i$ , радиус инерции площади поперечного сечения стержня  $i = \sqrt{J/F}$ . Геометрические характеристики (момент инерции  $J$  площади поперечного сечения  $F$  (см. раздел 3)). При гибкости больше значения  $\lambda \geq 40$  сжатые стержни теряют устойчивость, теряют прямолинейную форму, изгибаются (см. раздел 9).

#### 1.4. Механические характеристики материалов

Необходимые для расчетов механические характеристики материалов (модуль упругости при растяжении, коэффициент Пуассона и др.) определяются экспериментально на специальном испытательном оборудовании.

Все материалы условно делятся на пластичные и хрупкие. В зависимости от условий, главным образом температуры и давления, свойства материалов могут существенно изменяться.

Рассмотрим испытания мягкой стали, как характерного представителя пластичных материалов. Испытание производится на специальных разрывных машинах на стандартных образцах, рис. 1.5

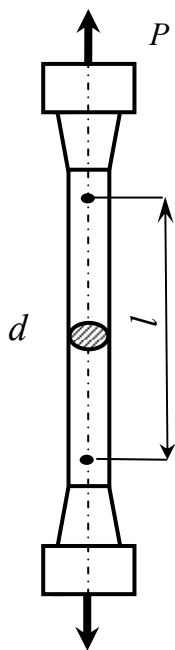


Рис. 1.5

Специальное приспособление фиксирует графически связь между нагрузкой на образец и его удлинением в виде диаграммы растяжения, рис. 1.6.

На прямолинейном участке диаграммы ( $OA$ ) соблюдается линейная зависимость между  $P$  и  $\Delta l$  (закон Гука). Наибольшая нагрузка этого участка  $P_{\text{п}}$  определяет предел пропорциональности  $\sigma_{\text{п}} = P_{\text{п}} / F$ , т.е. напряжение, с превышением которого нарушается закон Гука. Для мягкой стали (Ст.3)  $\sigma_{\text{п}} = 200$  МПа.

При дальнейшем увеличении нагрузки деформации растут все более интенсивно, а при нагрузке  $P_{\text{т}}$  сталь течет, т.е. деформации растут без увеличения нагрузки. Соответствующее напряжение  $\sigma_{\text{т}} = P_{\text{т}} / F$  называется пределом текучести. Для мягких сталей  $\sigma_{\text{т}} = 220 - 260$  МПа. При этом напряжении образец деформируется попрежнему равномерно по всей длине, но деформация за счет площадки текучести ( $CD$ ) становится существенной, чаще всего недопустимой для реальных конструкций. Предел текучести представляет опасное напряжение, по которому устанавливается допустимое напряжение для пластичных материалов, рис. 1.6.

После текучести (на участке  $DE$ ) материал упрочняется и для получения приращения деформаций нагрузку нужно увеличивать. Линейной зависимости между  $P$  и  $\Delta l$  здесь не наблюдается. По мере возрастания нагрузки деформа-

ции растут все более интенсивно, достигая наибольшей интенсивности в точке  $E$ , соответствующей наибольшей нагрузке  $P_{\max}$ .

При максимальной нагрузке  $P_{\max}$  начинается интенсивное местное сужение, образуется шейка, определяющая место разрыва.

Условное напряжение, вычисленное по наибольшей нагрузке и первоначальной площади сечения, называется пределом прочности или временным сопротивлением  $\sigma_B = P_{\max} / F$ . Для мягкой стали  $\sigma_B = 340 - 420$  МПа. Это напряжение считается разрушающим, так как с ростом шейки при неизменной нагрузке

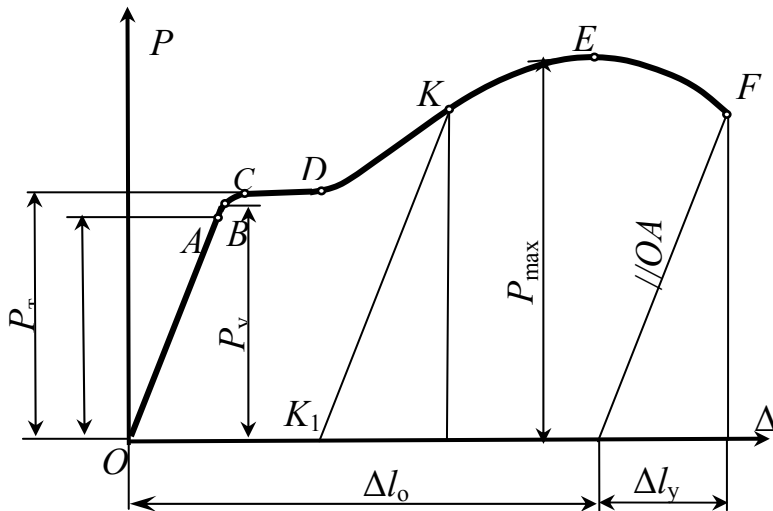


Рис. 1.6

действительное напряжение возрастает и разрыв стержня конструкции произойдет неизбежно.

Если перед самым разрывом образца (точка  $F$ ) измерить деформацию стержня, то она окажется больше той, которая останется после разрыва  $\Delta l_{\text{ост}}$ . Часть деформации  $\Delta l_{\text{упр}}$  исчезнет. Разделение общей деформации на остаточную и упругую графически произойдет, если из точки  $F$  провести прямую, параллельную прямолинейному участку  $OA$ .

Чем больше остаточная деформация  $\Delta l_{\text{ост}}$ , тем пластичнее материал.

Если образец загрузить до точки  $K$ , а затем разгрузить, то также часть деформации (образованная линией, параллельной  $OA$ ) исчезнет и останется некоторая пластическая деформация  $OK_1$ . Остаточной деформации после разгрузки не будет, если не превысить нагрузку  $P_{\text{п}}$ . С превышением этой нагрузки, при

$P_y$  образуется некоторая остаточная деформация. Напряжение  $\sigma_y = \frac{P_y}{F}$ , при котором возникает незначительная (0,01 - 0,03 %) остаточная деформация называется пределом упругости.

При повторном нагружении образца, предварительно загруженного выше предела текучести (например, до точки  $K$ ), линия нагружения пойдет из точки  $K_1$  через точку  $K$  и далее по прежнему пути. При этом остаточная деформация уменьшается, а нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности, увеличивается. Такое искусственное повышение упругих свойств материалов называется наклепом.

От пластичности материала зависит величина работы или энергии, которую нужно израсходовать на растяжение стержня

$$A = \int dA = \int_0^P \frac{Pl}{EF} dP = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{p}{2} \cdot \frac{Pl}{EF} = \frac{1}{2} P \Delta l.$$

Как видно, эта работа численно равна площади диаграммы растяжения.

## 2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Между отдельными элементами напряженно-деформированного состояния под действием внешних нагрузок возникают внутренние усилия взаимодействия, интенсивность которых представляют нормальные и касательные напряжения. Различают три вида напряженного состояния: линейное или одноосное, плоское или двухосное и объемное или трехосное.

### 2.1. Линейное напряженное состояние

Рассмотрим стержень, площадь поперечного сечения которого  $F$ , растянутый силой  $P$  (рис. 2.2) и вычислим напряжение на наклонной площадке. Угол наклона площадки  $\alpha$  считается положительным, если внешняя нормаль к этой площадке отклонена от наиболее напряженной оси против хода часовой стрелки (рис. 2.2, а).

Из условия равновесия отрезанной части стержня (рис. 2.2, б) следует, что внутреннее усилие в рассматриваемом сечении равно  $P$ , а полное напряжение  $p_\alpha = \frac{P}{F} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$ . Но вектор полного напряжения можно представить в его проекциях на нормаль и направление сечения. Одна проекция (рис. 2.2, в)

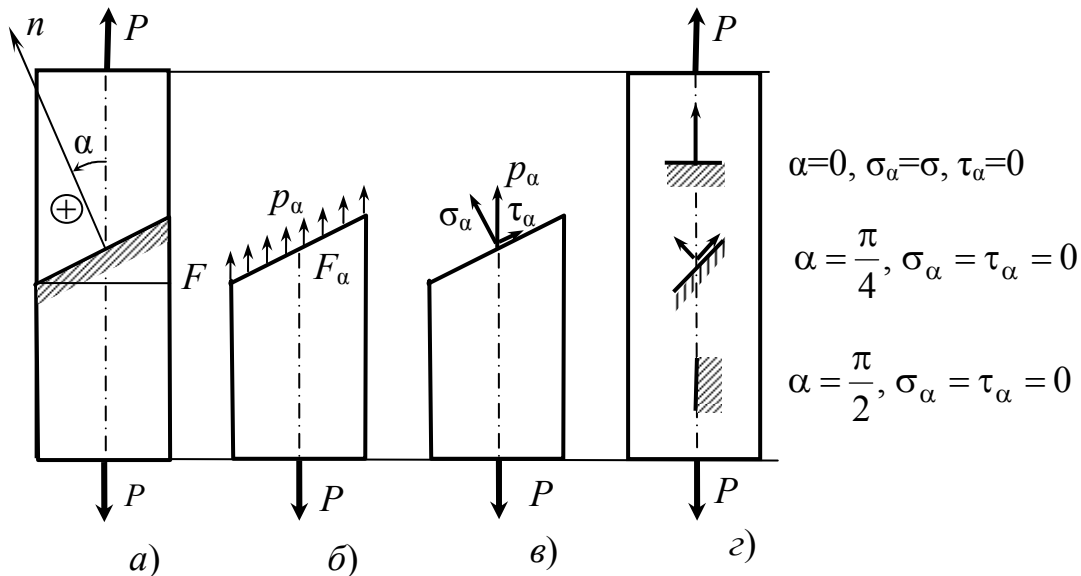


Рис. 2.2

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos^2 \alpha \quad (2.1)$$

называется нормальным напряжением на наклонной площадке. Это напряжение считается положительным в случае растяжения. Другая проекция

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (2.2)$$



называется касательным напряжением на наклонной площадке. Это напряжение считается положительным, если оно стремится повернуть рассматриваемую часть стержня относительно любой точки внутри нее, по ходу часовой стрелке.

С изменением угла наклона площадки напряжения изменяются так, как показано на рис. 2.2, г: наибольшие нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях, максимальные касательные напряжения возникают под углом  $45^\circ$ . Сечения, где не возникают касательные напряжения называются главными.

## 2.2. Плоское напряженное состояние

Допустим, что по граням элемента, испытывающего плоское напряженное состояние, напряжения заданы, т.е. известны, рис. 2.2. Требуется определить напряжения на площадке, повернутой на некоторый угол  $\alpha$  от большего (алгебраически) напряжения  $\sigma_x$ .

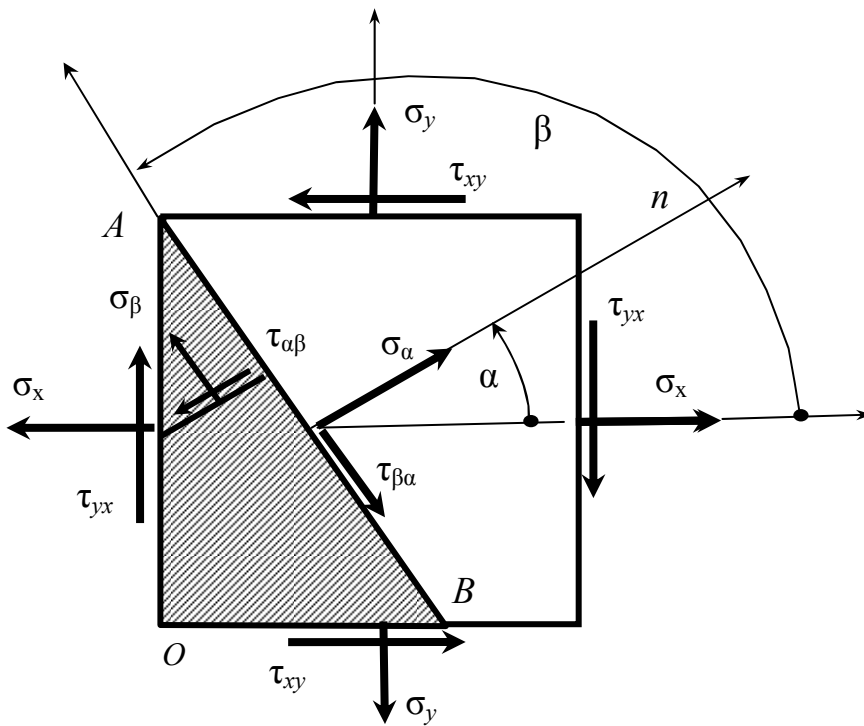


Рис.2.3

Рассмотрим в равновесии квадратный элемент, т.е. из  $\sum M_0 = 0$  находим, что  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . (2.3)

Равенство касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках называется законом парности касательных напряжений.

Рассмотрим в равновесии отрезанный треугольник  $OAB$ . Из суммы проекций всех сил на направление нормали к гипотенузе  $AB$ , размер которой

примем равным единице, получим

$$\sigma_\alpha \cdot AB = \sigma_x \cdot OA \cos \alpha + \sigma_\beta \cdot OB \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot OA \sin \alpha - \tau_{xy} \cdot OB \cos \alpha, \text{ т.е.}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_\beta \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha. \quad (2.4)$$

Из суммы проекций всех сил на направление грани  $AB$  получим  $\tau_{\beta\alpha} \cdot AB = \sigma_x \cdot OA \sin \alpha - \sigma_y \cdot OB \cos \alpha + \tau_{yx} \cdot OA \cos \alpha - \tau_{xy} \cdot OB \sin \alpha$ , т.е.

$$\tau_{\beta\alpha} = \tau_{yx} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.5)$$

На площадке, взаимно перпендикулярной, т.е. при  $\beta = \alpha + \pi/2$  по (2.4) и (2.5) получим:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha, \quad (2.6)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -\tau_{yx} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha.$$

Отсюда получаем закон парности касательных напряжений  $\tau_{\beta\alpha} = \tau_{\alpha\beta}$ , а сумма напряжений (2.4) и (2.6) приводит к закону суммы нормальных напряжений

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (2.7)$$

### 2.3. Главные напряжения

Для расчета на прочность нужно знать наибольшие напряжения. Для вычисления  $\alpha_{\max}$  первую производную из (2.4) приравняем нулю

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0, \quad -2\sigma_x \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2\sigma_y \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2\tau_{yx} \cos 2\alpha = 0, \text{ т.е.}$$

$$(\sigma_{\alpha} - \sigma_y) \sin 2\alpha = -2\tau_{yx} \cos 2\alpha.$$

Отсюда находим положение площадки с экстремальным нормальным напряжением

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (2.8)$$

Такую же формулу получим из (2.7) при условии  $\tau_{\beta\alpha} = 0$ . Это значит, что на площадках с экстремальными нормальными напряжениями касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются главными.

Для вычисления напряжений на главных площадках  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в (2.4), (2.6) нужно подставить значения синуса и косинуса из (2.8):

$$\sin 2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}}. \quad (2.9)$$

Итак:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \sin^2 \alpha_0 - \tau_{yx} \sin 2\alpha_0,$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \alpha_0 + \sigma_y \cos^2 \alpha_0 + \tau_{yx} \sin 2\alpha_0.$$

Отсюда суммированием и вычитанием этих равенств находим:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_0 - 2\tau_{yx} \sin 2\alpha_0.$$

Суммированием и вычитанием этих равенств с учетом (2.9) получаем расчетные формулы главных напряжений

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (2.10)$$

Используя формулу (2.8), при отсчете угла  $\alpha_0$  от направления  $\sigma_x > \sigma_y$  получим положение главной площадки с напряжением  $\sigma_1 > \sigma_2$ , а при отсчете от  $\sigma_y$

найдем направление  $\sigma_2$ . При этом поворот нормали к главной площадке против хода часовой стрелки считается положительным.

Однако, вместо (2.8) можно получить более удобную формулу. Для этого используем расчетные формулы (2.4), (2.5) при условии, что главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  уже вычислены, (а  $\tau_{yx}=0$ ). При этом формулы (2.4) и (2.5) будут упрощаться:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{\beta\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Суммируя, умноженное на  $\cos \alpha$  верхнее уравнение и на  $\sin \alpha$  нижнее, получим

$$\sigma_\alpha \cos \alpha + \tau_{\beta\alpha} \sin \alpha = \sigma_1 \cos \alpha, \text{ т.е. } \tau_{\beta\alpha} \cdot \sin \alpha = (\sigma_1 - \sigma_\alpha) \cos \alpha.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_\alpha}{\tau_{\beta\alpha}}. \quad (2.11)$$

Этой формулой можно пользоваться при отсчете положения главной площадки с напряжением  $\sigma_1$  (или  $\sigma_2$ ) от площадки с напряжением  $\sigma_\alpha$  (или  $\sigma_\beta$ ). Положительный угол поворота – по ходу часовой стрелки.

**Задача 2.1.** Заданы нормальные и касательные напряжения на вертикальной и горизонтальной площадках:  $\sigma_x = -5$  МПа,  $\sigma_y = 25$  МПа,  $\tau_{xy} = 26$  МПа, рис. 2.4.

Найти главные напряжения и положение главных площадок.

**Решение.** По формуле (2.10) вычисляем главные напряжения

$$\sigma_{1,2} = \frac{25 - 5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(25 + 5)^2 + 4 \cdot 26^2} = 10 \pm 30 \text{ МПа.}$$

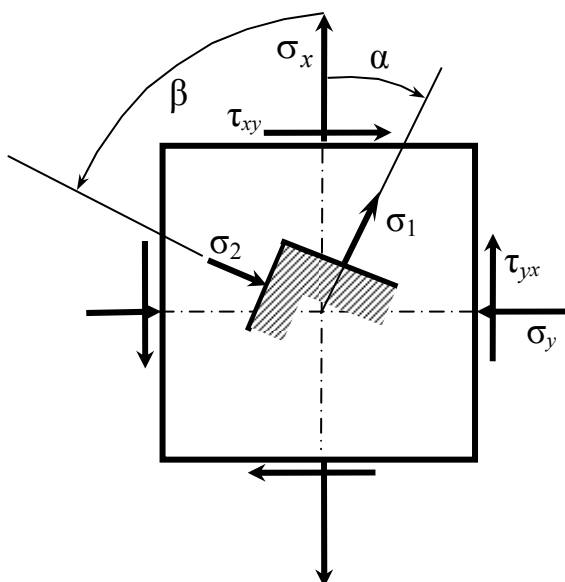


Рис. 2.4

По формуле (2.11) находим направление главного напряжения  $\sigma_1 = 40$  МПа при отсчете от нормали к площадке с напряжением  $\sigma_x = 25$  МПа

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40 - 25}{26} = 0,577, \quad \alpha = 30^\circ. \text{ Этот угол}$$

нужно отложить по часовой стрелке от оси с напряжением  $\sigma_y$ , т.е. от вертикали.

Если бы потребовалось определить направление  $\sigma_2$  от вертикали, то согласно (2.13) :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = -\frac{20 + 25}{26} = -1,73, \quad \beta = -60^\circ.$$

Отрицательный угол  $\beta$  нужно откладывать против хода часовой стрелки.

## 2.4. Объемное напряженное состояние

В объемном напряженном состоянии по трем взаимно перпендикулярным направлениям действуют напряжения  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (рис. 2.5, а).

Поскольку главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  экстремальные, то на любых на-

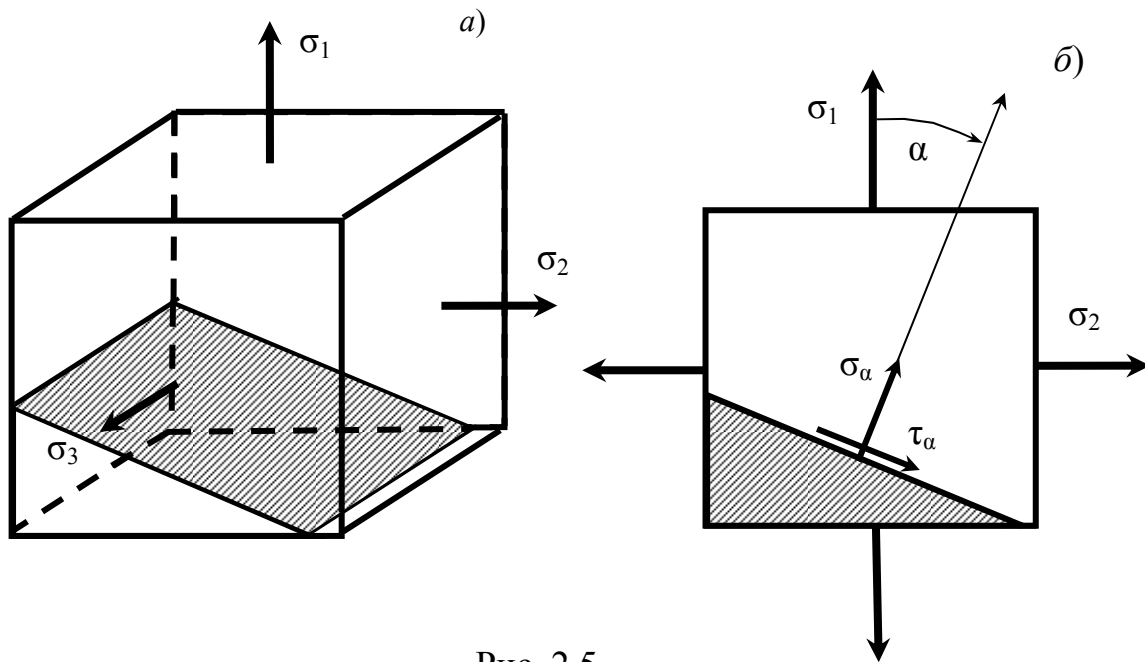


Рис. 2.5

клонных площадках нормальные напряжения меньше  $\sigma_1$  и больше  $\sigma_3$ . На наклонной площадке, параллельной направлению напряжения  $\sigma_3$  (рис. 2.5, б), это напряжение ( $\sigma_3$ ) не оказывает влияния на напряженное состояние. Поэтому для вычисления напряжений на такой площадке можно выполнить по формулам (2.4), (2.5):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

На этих площадках  $\sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_3$ , а максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ возникает под углом } 45^\circ.$$

На вертикальных площадках напряжение  $\sigma_1$  не оказывает влияния, здесь

$$\sigma_2 > \sigma_\alpha > \sigma_3, \text{ а } \tau_{\max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}.$$

Аналогично в сечениях, параллельных  $\sigma_2$  возникают наибольшие касательные напряжения  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ .

Таким образом, при объемном напряженном состоянии наибольшее нормальное напряжение равно  $\sigma_1$ , а наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.12)$$

Если заданы напряжения на произвольных площадках с тензором напряжений (рис. 2.6)

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

то главные напряжения  $\sigma_i$  вычисляются из кубического уравнения [2]

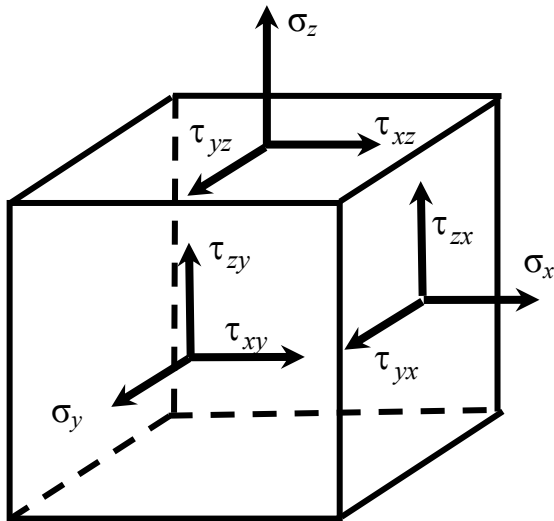


Рис. 2.6

$$\sigma_i^3 - J_1 \sigma_i^2 + J_2 \sigma_i - J_3 = 0. \quad (2.14)$$

Здесь  $J_i$  – инварианты напряжений:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{zy}^2 - \tau_{xz}^2,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

### 2.5. Обобщенный закон Гука

Обобщенный закон Гука определяет деформации при объемном напряженном состоянии, когда главные напряжения известны, рис. 2.5. Известно, что при линейном напряженном состоянии (1.1) продольная относительная деформация  $\varepsilon = \sigma / E$  ( $\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} E$ ), а поперечная - связана с продольной зависимостью (1.7)  $\varepsilon' = -\mu \varepsilon$ , ( $\varepsilon' = \frac{a - a_1}{a} = -\mu \frac{l_1 - l}{l}$ ) т.е.  $\varepsilon' = -\mu \sigma / E$ , рис. 2.7.

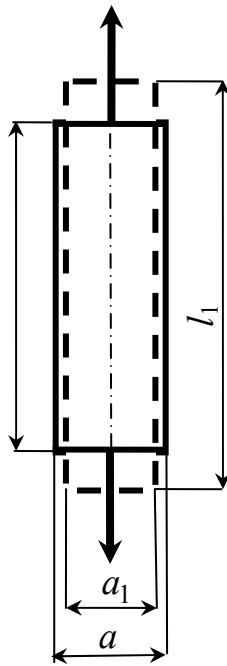


Рис. 2.7

Деформации отдельно и результаты просуммируем, рис. 2.8.

Суммируя деформации по

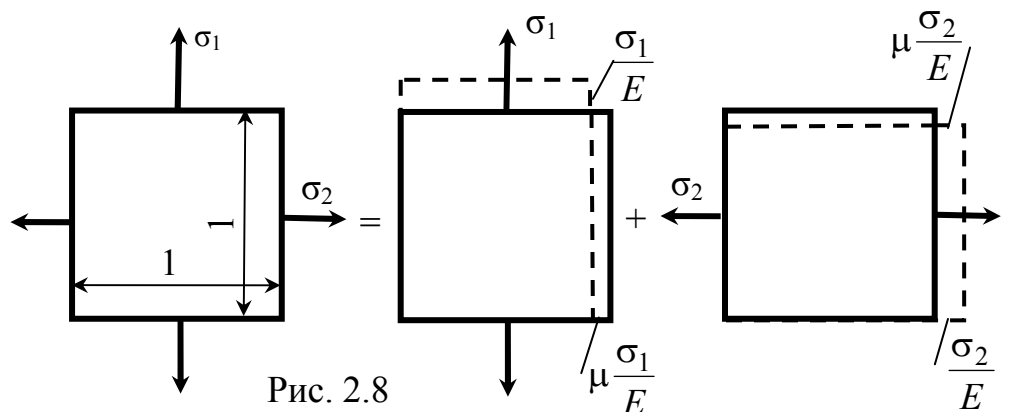


Рис. 2.8

вертикали, т.е. по направлению напряжения  $\sigma_1$ , получим  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}$ . Аналогично находим деформацию по направлению напряжения  $\sigma_2$   $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E}$ .

Таким же путем легко получить деформации при объемном напряженном состоянии, рис. 2.5:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}. \quad (2.16)$$

Все эти формулы вместе взятые или каждая в отдельности представляют обобщенный закон Гука. Положив одно из этих напряжений равным нулю, получим закон Гука при плоском напряженном состоянии, а при двух нулевых напряжениях будет закон Гука при линейном напряженном состоянии.

Заметим, что линейные деформации при общем напряженном состоянии не зависят от наличия касательных напряжений, т.е. не только по направлению главных напряжений, но по любым взаимно перпендикулярным направлениям линейные деформации вычисляются по формулам (2.16) с заменой главных напряжений на соответствующие нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , рис. 2.6.

## 2.6. Теории прочности

Теории прочности это гипотезы о существенном, превалирующем влиянии того или иного расчетного фактора на прочность сложно напряженного элемента.

В теории прочности, основанной на деформациях, считается, что прочность сложно-напряженного состояния обеспечивается в том случае, когда наибольшие деформации расчетного состояния не превысят тех деформаций, которые получены экспериментально на образцах при растяжении или сжатии, т.е. условие прочности по этой теории принимает вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \leq \frac{[\sigma]}{E}, \text{ или} \\ \sigma_{\text{расч}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (2.17)$$

Эта теория применима для расчета конструкций из хрупких материалов.

Теория расчетных касательных напряжений учитывает наибольшие касательные напряжения, обуславливающие прочность конструкции в сложном напряженном состоянии.

Условие прочности по этой теории имеет вид

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2}, \\ \sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (2.18)$$

Эта теория применяется для расчета прочности изделий из пластичных материалов.

Энергетическая теория основана на равенстве удельной энергии формоизменения и энергии, затраченной на деформирование изделия при загрузении. Условие прочности по этой теории имеет вид

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]. \quad (2.19)$$

Эта теория также, как третья теория, применима для пластичных материалов.

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В расчетах на прочность и жесткость используются геометрические характеристики площади поперечного сечения стержней. Например, при растяжении стержня используется простейшая геометрическая характеристика – площадь поперечного сечения. В других случаях напряженно-деформированного состояния потребуются другие, более сложные геометрические характеристики, которые целесообразно изучить заранее, прежде чем приступить к непосредственному изучению расчетов на прочность и жесткость.

#### 3.1. Определения

В основных простейших видах напряженно-деформированного состояния стержня используются следующие геометрические характеристики площади поперечного сечения (рис. 3.1):

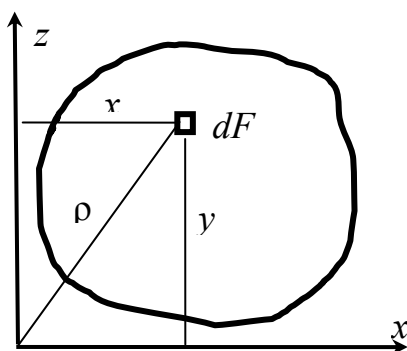


Рис. 3.1

- **статические моменты площади сечения** относительно осей  $z$  и  $y$  (соответственно)

$$S_z = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F z dF; \quad (3.1)$$

- **моменты инерции площади сечения** относительно осей  $z$  и  $y$  (соответственно)

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F z^2 dF; \quad (3.2)$$

- **полярный момент инерции площади сечения**

$$J_p = \int_F \rho^2 dF; \quad (3.3)$$

- **центробежный момент инерции** площади сечения

$$J_{zy} = \int_F zy dF. \quad (3.4)$$

Так как  $\rho^2 = z^2 + y^2$ , то согласно (3.3) следует

$$J_p = \int_F (z^2 + y^2) \cdot dF = J_y + J_z \quad (3.5)$$

#### 3.2. Вычисление геометрических характеристик непосредственным интегрированием

Для прямоугольника (рис. 3.2) в качестве элементарной площади можно взять заштрихованную полосу  $dF = bdy$ . Тогда согласно (3.1)

$$S_z = b \int_0^h y dy = \frac{bh^2}{2}, \quad S_y = \frac{hb^2}{2}$$

Согласно (3.2)

$$J_z = b \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{2}, \quad J_y = \frac{hb^3}{2} \quad (3.6)$$

Согласно (3.5)

$$J_p = \frac{bh}{3}(b^2 + h^2)$$

Согласно (3.4)

$$J_{zy} = \int_F b dy \cdot \frac{b}{2} y = \frac{b^2 h}{2} \int_0^h y^2 dy = \frac{b^2 h^2}{4}. \quad (3.7)$$

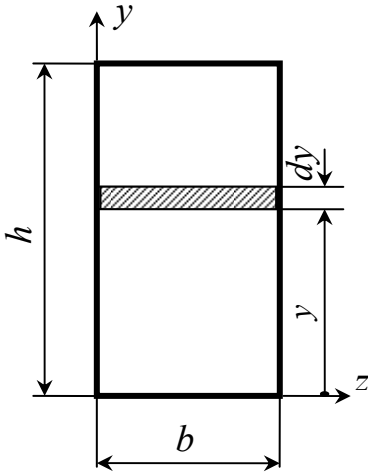


Рис. 3.2

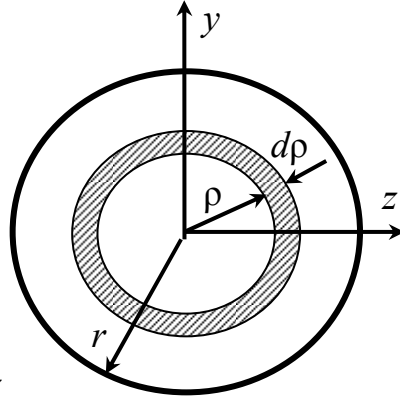


Рис. 3.3

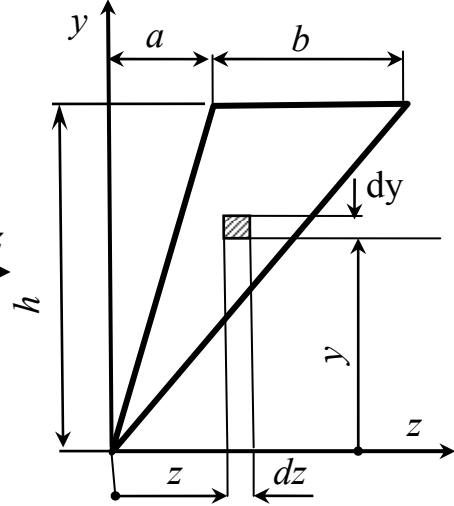


Рис. 3.4

Для круга (рис. 3.3) в качестве элементарной площади можно взять площадь заштрихованного кольца  $dF = 2\pi\rho d\rho$ . Согласно (3.3)

$$J_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (3.8)$$

Так как для круга  $J_z = J_y$ , то согласно (3.5)

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (3.9)$$

В более сложных случаях геометрические характеристики вычисляются двойными интегралами. Так, для треугольника (рис. 3.4), полагая  $dF = dydz$ , согласно (3.2) находим:

$$J_z = \iint y^2 dydz = \int y^2 dy \int_{y \operatorname{tg} \alpha}^{y \operatorname{tg} \beta} dz = \int_0^h y^2 dy \cdot y(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{h^4}{4}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{bh^3}{4}, \quad (3.10)$$

$$J_y = \iint z^2 dydz = \int dy \int_{y \operatorname{tg} \alpha}^{y \operatorname{tg} \beta} z^2 dz = \frac{1}{3}(\operatorname{tg}^3 \beta - \operatorname{tg}^3 \alpha) \int_0^h y^3 dy = \frac{h^4}{12}(\operatorname{tg}^3 \beta - \operatorname{tg}^3 \alpha) = \frac{bh}{12}(3a^2 + 3ab + b^2), \quad (3.11)$$

$$J_{zy} = \iint zy dydz = \int y dy \int_{y \operatorname{tg} \alpha}^{y \operatorname{tg} \beta} z dz = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha) \int_0^h y^3 dy = \frac{h^4}{8}(\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{bh^2}{8}(b + 2a),$$



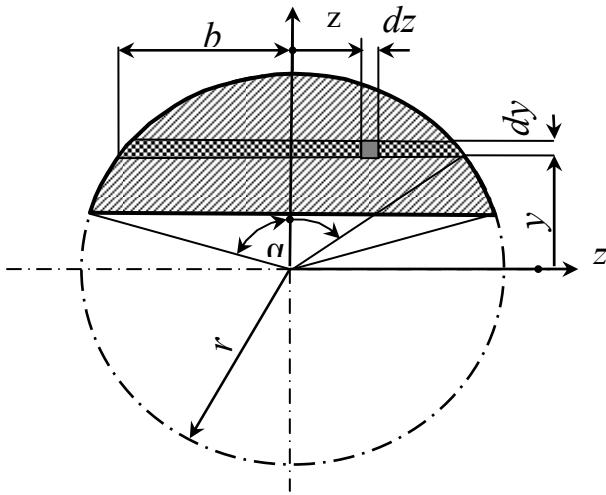


Рис. 3.5

оси  $z$ .

Вычислим все геометрические характеристики (3.1)- (3.4).

Согласно (3.1) получаем статический момент площади сегмента

$$S_z = \iint y dy dz = \int y dy \int_{-b_y}^{b_y} dz = 2r^3 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \alpha. \quad (3.13)$$

Согласно (3.2) вычисляем моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_z &= \iint y^2 dy dz = \int y^2 dy \cdot 2 \int_0^{b_y} dz = 2 \int_0^\alpha r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{r^4}{2} \int_0^\alpha \sin^2 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{r^4}{4} \left( \alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} J_y &= \iint z^2 dy dz = 2 \int dy \int_0^{b_y} z^2 dz = \frac{2}{3} \int_0^\alpha r^3 \sin^3 \varphi \cdot r \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^4 \frac{1}{4} \int_0^\alpha (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{r^4}{12} \left( 3\alpha - 2 \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для полукруга при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{8}$ .

При  $\alpha = 0$ ,  $a = 0$ ,  $\operatorname{tg} \beta = b/4$ :  $J_y = \frac{hb^3}{12}$ ,

$$J_{zy} = \frac{b^2 h^2}{8}. \quad (3.12)$$

Для сегмента круга (рис. 3.5) задача по вычислению геометрических характеристик удобно решается в полярных координатах:

$$b_y = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi, \quad dy = -r \sin \varphi d\varphi.$$

Отрицательный знак  $dy$  при интегрировании учитывать не нужно. Он указывает на то, что с увеличением угла  $\varphi$  координата  $y$  уменьшается. Можно избежать этого знака отсчетом угла  $\varphi$  от горизонтальной

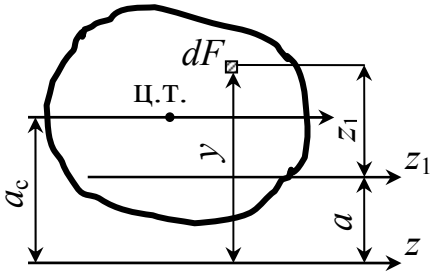
### 3.3. Преобразование системы координат

Геометрические характеристики сложных составных сечений непосредственным интегрированием вычислять затруднительно. Можно составную фигуру разбить на отдельные простейшие, для которых геометрические характеристики уже известны, и интегрирование заменить суммированием. При этом используются преобразования системы координат путем поступательного смещения и поворота ее вокруг начала координат

### 3.3.1. Параллельный перенос осей

Вычислим статический момент площади (рис. 3.6) относительно оси  $z_1$ , смещенной параллельно на расстояние  $a$  от прежней оси  $z$ , относительно которой статический момент известен,

$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y - a) dF = \int_F y dF - a \int_F dF = S_z - aF.$$



При некотором расстоянии между осями  $a_c$  статический момент окажется равным нулю.

Положив  $S_{z_1} = 0$ , находим

$$a_c = \frac{S_z}{F}. \quad (3.16)$$

Рис. 3.6

Ось, относительно которой статический момент площади равен нулю, называется центральной. Пересечение таких осей определяет положение центра тяжести фигуры.

Из (3.16) следует, что при известном положении центра тяжести фигуры, статический момент можно вычислить не прибегая к интегрированию, т.е.

$$S_z = y_c F, \quad S_y = z_c F. \quad (3.17)$$

Здесь  $y_c, z_c$  - координаты центра тяжести фигуры.

Для составной фигуры:  $S_z = \sum y_i F_i = y_c \sum F_i, \quad S_y = \sum z_i F_i = z_c \sum F_i,$

откуда

$$y_c = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}, \quad z_c = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}, \quad (3.18)$$

где  $z_c, y_c$  - координаты общего центра тяжести составной фигуры.

Так, для фигуры рис. 3.7.  $y_c = (F_1 y_1 + F_2 y_2 - F_3 y_3) / (F_1 + F_2 + F_3).$

В дальнейшем за исходную систему координат будем принимать систему центральных осей. Пусть в системе центральных осей  $z_c y_c$  моменты инерции  $J_{z_c}, J_{y_c}, J_{z_c y_c}$  заданы (рис. 3.8).

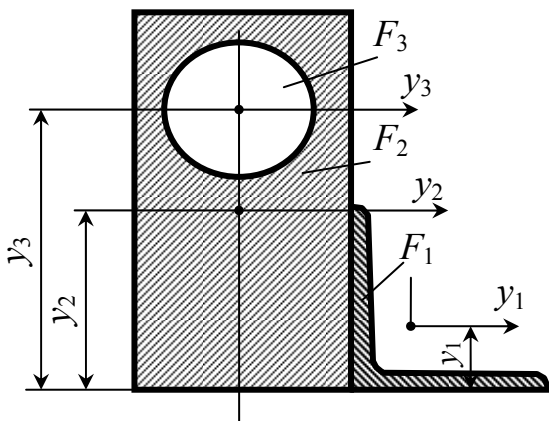


Рис. 3.7

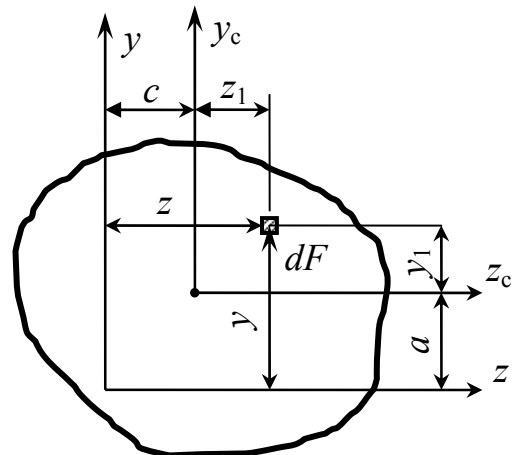


Рис. 3.8

Требуется вычислить моменты инерции в системе координат, поступательно смещенных на расстояние  $a$  и  $c$  от прежней системы.

Согласно определению (3.2)

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_F (a + y_1)^2 dF = a^2 F + 2aS_{z_c} + J_{z_c}.$$

Так как  $S_{z_c} = 0$ , то

$$J_z = J_{z_c} + a^2 F. \quad (3.19)$$

Аналогично вычисляется

$$J_{zy} = J_{z_c y_c} + acF. \quad (3.20)$$

Например, для прямоугольника моменты инерции в системе координат, проходящей через стороны прямоугольника известны:  $J_z = bh^3/3$ ,  $J_y = hb^3/3$  (см. рис. 3.2 и формулы (3.6), (3.7)). Вычислить моменты инерции в системе центральных осей, параллельных заданным.

Согласно (3.19), (3.20) находим:

$$J_{z_c y_c} = J_{zy} - \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} F = 0, \quad J_{z_c} = J_z - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot F = \frac{bh^3}{12}. \quad (3.21)$$

Для прямоугольного треугольника (см. рис. 3.4 при  $\alpha = 0$ ) известны моменты инерции:  $J_z = bh^3/4$ ,  $J_y = hb^3/12$ ,  $J_{zy} = h^2 b^2 / 8$ , (см. (3.10), (3.11), (3.12)). Вычислить моменты инерции относительно осей, параллельных исходным.

Согласно (3.19), (3.20) получаем:

$$J_{z_c} = J_z - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot F = \frac{bh^3}{36}, \quad J_{y_c} = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}, \quad J_{z_c y_c} = \frac{b^2 h^2}{72}.$$

Для кругового сегмента известны геометрические характеристики (рис. 3.5):  $J_z = \frac{r^4}{4}(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha)$ ,  $S_z = \frac{2}{3}r^3 \sin^3 \alpha$ ,  $F = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$ . Вычислить момент инерции относительно центральной оси  $z_c$

$$\text{Согласно (3.16), (3.19): } y_c = a = \frac{4r}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha},$$

$$J_{z_c} = \frac{r^4}{4}(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha) - \frac{8r^4}{9} \frac{\sin^6 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Для полукруга при  $\alpha = \pi/2$ :  $y_c = \frac{4r}{3\pi}$ ,  $J_{z_c} = 0,109r^4$ .

### 3.3.2. Поворот координатных осей

Пусть в системе координат  $zy$  моменты инерции  $J_z$ ,  $J_y$ ,  $J_{zy}$  известны.

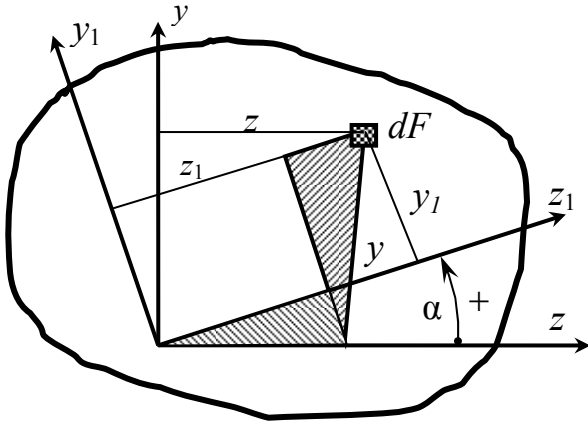


Рис. 3.9

Вычислить моменты инерции в системе  $z_1y_1$ , повернутой на положительный угол  $\alpha$  по отношению к исходной системе координат.

Из заштрихованных на рис. 3.9. треугольников следует, что

$$\begin{aligned} y_1 &= y \cos \alpha - z \sin \alpha, \\ z_1 &= y \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{aligned}$$

Согласно определению (3.2) момент инерции относительно повернутой оси  $z_1$

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ J_{z_1} &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогично находим

$$J_{y_1} = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha \quad (3.23)$$

Согласно (3.4) находим центробежный момент инерции в заданной системе координат

$$\begin{aligned} J_{z_1y_1} &= \int_F z_1 y_1 dF = (J_z - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{zy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ J_{z_1y_1} &= J_{zy} \cos 2\alpha + \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.24)$$

С изменением угла поворота осей моменты инерции изменяются, но согласно (3.22), (3.23) их сумма остается постоянной

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y \quad (3.25)$$

Из (3.24) видно, что при повороте осей на  $90^\circ$  центробежный момент инерции изменяет знак при прежнем абсолютном значении. Убедимся в этом, подставляя в (3.24) угол  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$  (рис. 3.10):

$$J_{z_2y_2} = J_{zy} \cos 2\beta + \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\beta = -J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha = -J_{z_1y_1}.$$

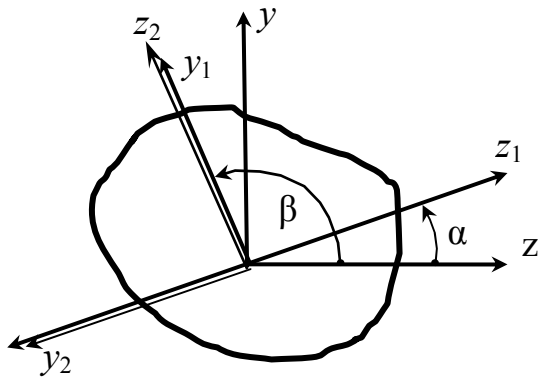


Рис. 3.10

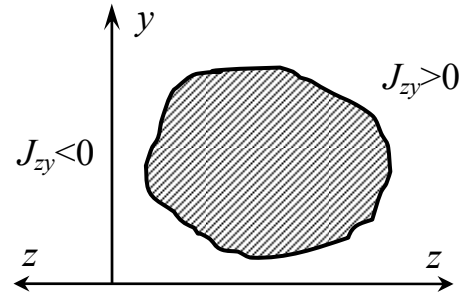


Рис. 3.11

Но  $J_{z_2 y_2} = J_{y_1 z_1}$ , следовательно,  $J_{z_1 y_1} = J_{y_1 z_1}$ , т.е. центробежные моменты инерции с переставленными индексами имеют противоположные знаки. Индексы центробежного момента инерции ставятся по наименованию координат осей первого квадранта (см. рис. 3.11).

Есть такой угол поворота  $\alpha$ , при котором  $J_{z_1 y_1} = 0$ . Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными.

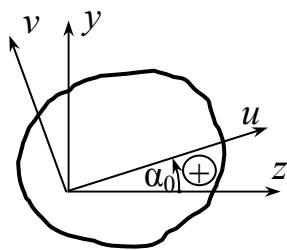


Рис. 3.12

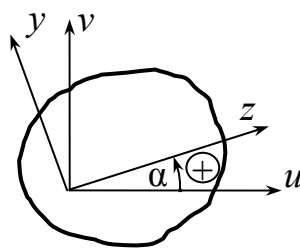


Рис. 3.13

Положение главных осей можно найти из (3.24), положив  $J_{z_1 y_1} = 0$ , см. рис. 3.12

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (3.26)$$

В системе главных осей моменты инерции экстремальные. В этом легко убедиться на осно-

вании (3.22), положив  $\frac{dJ_{z_1}}{d\alpha} = 0$ . Отсюда получим (3.26), т.е.  $J_u, J_v$  - экстремальные.

Если за исходные оси принять главные оси, то согласно (3.22) – (3.24) получим (см. рис. 3.13)

$$J_z = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha,$$

$$J_y = J_v \cos^2 \alpha + J_u \sin^2 \alpha,$$

$$J_{zy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha.$$

### 3.4. Главные оси

Так как формулы моментов инерции при повороте осей (3.22) – (3.24) аналогичны формулам (2.4) - (2.6), то формулы главных моментов инерции и

угла наклона главных осей можно получить по аналогии с формулами (2.8), (2.10), (2.11):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}. \quad (3.26)$$

$$J_{u,v} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}. \quad (3.27)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_{\max/\min} - J_{z/y}}{J_{zy/yz}}. \quad (3.28)$$

Согласно этой формуле положительный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $z$  или  $y$  по ходу часовой стрелки до направления оси с моментами инерции  $J_{\max}$  или  $J_{\min}$ .

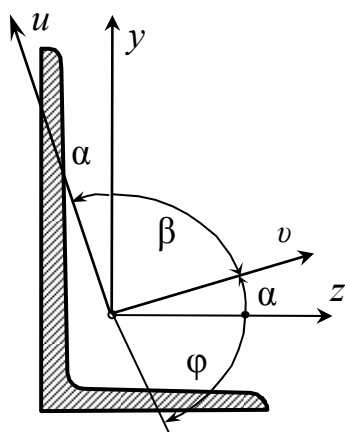


Рис. 3.14

**Задача 3.1.** Для уголка 2,5/1,6 (рис. 3.14) известны:  $J_z = 0,70 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 0,22 \text{ см}^4$ ,  $J_u = J_{\min} = 0,13 \text{ см}^4$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = 0,392$ .

Вычислить центробежный момент инерции  $J_{zy}$ .

**Решение.** На основании (3.28) находим

$$J_{zy} = -J_{yz} = -\frac{J_{\min} - J_y}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{0,13 - 0,22}{-0,392} = -0,229 \text{ см}^4.$$

### Задача 3.2.

Моменты инерции относительно главных осей фигур, изображенных на рис 3.15, одинаковы  $J_u = J_v$ .

Вычислить момент инерции относительно произвольной оси  $z$ .

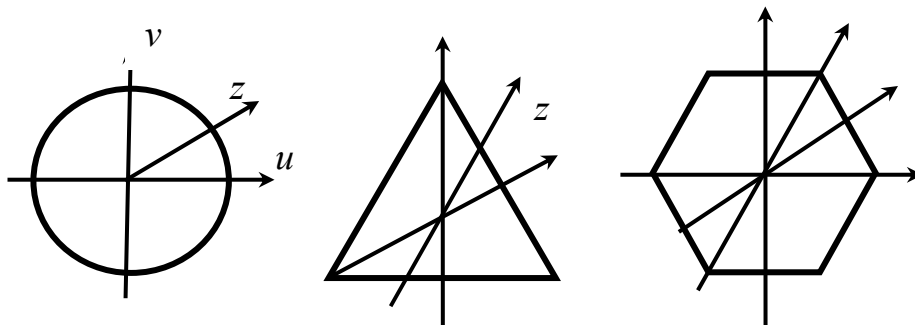


Рис. 3.15

**Решение.** Согласно (3.29) получаем  $J_z = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha = J_u$ .

Из (3.31) следует, что центробежный момент инерции равен нулю, т.е. в таких фигурах все оси главные с одинаковыми моментами инерции.

**Задача 3.3.** Для прокатного уголка 2,5/1,6 известны моменты инерции:  $J_z = 0,70 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 0,22 \text{ см}^4$ ,  $J_{zy} = -0,229 \text{ см}^4$  (рис. 3.14). Вычислить моменты инерции в системе главных центральных осей и найти положение этих осей.

**Решение.** Согласно (3.27) получаем

$$J_{u,v} = J_{\max,\min} = \frac{0,70 + 0,22}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0,70 - 0,22)^2 + 4 \cdot 0,229^2} = 0,79 (0,13) \text{ см}^4.$$

Положение оси  $v$  при отсчете угла от оси  $y$  согласно (3.28)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{J_{\min} - J_y}{J_{zy}} = \frac{0,13 - 0,22}{0,229} = -0,392, \\ \alpha &= -21^\circ 30'. \end{aligned}$$

Положение оси  $u$  при отсчете угла  $\beta$  от оси  $y$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{J_{\max} - J_y}{J_{yz}} = \frac{0,79 - 0,22}{0,229} = 2,48, \\ \beta &= 68^\circ 30'. \end{aligned}$$

Положение оси  $u$  при отсчете угла  $\beta$  от оси  $z$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{J_{\max} - J_z}{J_{yz}} = \frac{0,79 - 0,70}{-0,229} = -0,392, \\ \gamma &= -21^\circ 30'. \end{aligned}$$

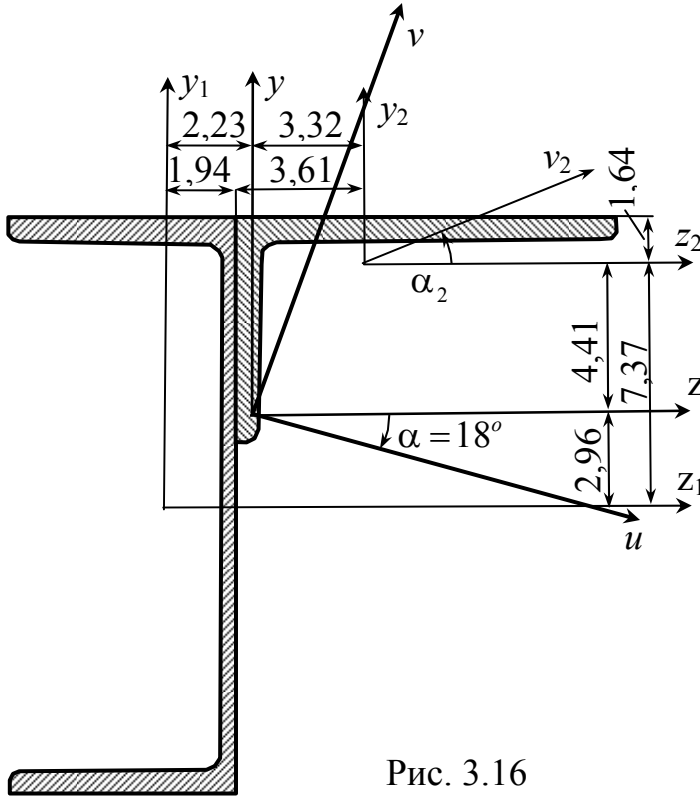


Рис. 3.16

Положительный угол откладывается от соответствующей оси до

главной по ходу часовой стрелки.

**Задача 3.4.** Для сечения, состоящего из швеллера № 18 и уголка 11/7/0,8 вычислить моменты инерции в системе главных центральных осей (рис. 3.16).

**Решение.** Исходные данные прокатных профилей берем из таблиц ГОСТ 8239-89 и ГОСТ 8510-86:

$$\begin{aligned} \text{для швеллера } J_{z_1} &= 1090 \text{ см}^4, J_{y_1} = 86 \text{ см}^4, F_1 = 20,7 \text{ см}^2, \\ \text{для уголка } J_{z_2} &= 54,6 \text{ см}^4, J_{y_2} = 172 \text{ см}^4, J_{v_2} = 32,3 \text{ см}^4, F_2 = 13,9 \text{ см}^2, \operatorname{tg} \alpha_2 = 0,40. \end{aligned}$$

В системе координат  $z_1 y_1$  находим положение центра тяжести составного сечения

$$y_c = \frac{13,9 \cdot 7,36}{13,9 + 20,7} = \frac{1023}{34,6} = 2,96 \text{ см}, z_c = \frac{13,9(1,94 + 3,61)}{34,6} = 2,23 \text{ см}.$$

Вычисляем осевые моменты инерции относительно центральных осей  $z, y$  по (3.19):

$$\begin{aligned} J_z &= 1090 + 20,7 \cdot 2,96^2 + 54,6 + 13,9 \cdot 4,41^2 = 1595,07 \text{ см}^4, \\ J_y &= 86 + 20,7 \cdot 2,23^2 + 172 + 13,9 \cdot 3,32^2 = 514,15 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Вычисляем центробежный момент инерции. Для уголка в системе координат  $z_2y_2$  согласно (3.28) (угол  $\alpha_2$  отрицательный)

$$J_{z_2y_2} = \frac{J_{\min} - J_{z_2}}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{32,3 - 54,6}{-0,40} = 55,75 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции всего сечения согласно (3.20)

$$J_{zy} = 20,7 \cdot 2,96 \cdot 2,23 + 55,75 + 13,9 \cdot 4,4 \cdot 3,32 = 395,44 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции относительно главных осей (3.29)

$$J_{\nu}^u = \frac{1595,07 + 514,15}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1595,07 - 514,15)^2 + 4 \cdot 395,44^2} = 1724,29 \text{ (384,93) см}^4.$$

Положение главных осей (3.30) при отсчете угла  $\alpha$  от оси  $z$  до оси  $u$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_{\max} - J_z}{J_{zy}} = \frac{1724,29 - 1595,07}{395,44} = 0,327, \quad \alpha = 18^\circ.$$

Положительный знак угла указывает на поворот осей по ходу часовой стрелки.

### ПРИМЕЧАНИЯ

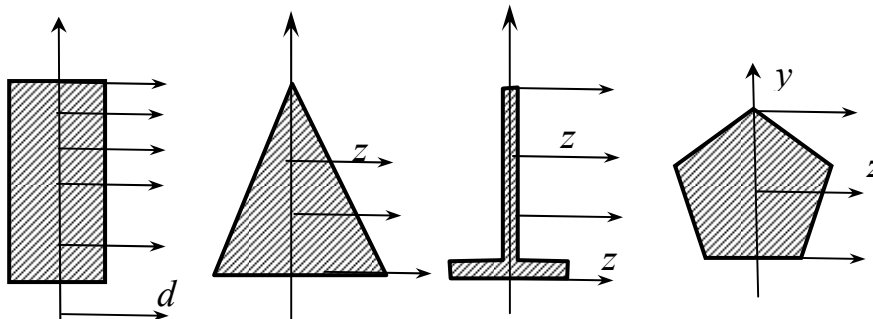


Рис. 3.17

#### Примечание 1.

Если для плоской фигуры хотя бы одна ось системы координат является осью симметрии, то такие оси главные, см. рис. 3.172.

**Примечание 2.** Если относительно двух произвольных осей  $z_1$  и  $z_2$  моменты инерции одинаковы, то для такой фигуры все оси, проходящие через точку пересечения этих осей, главные с одинаковыми моментами инерции, рис. 3.18.

Так как для любого сечения есть оси главные, то выразим моменты инерции относительно заданных осей  $z_1$  и  $z_2$

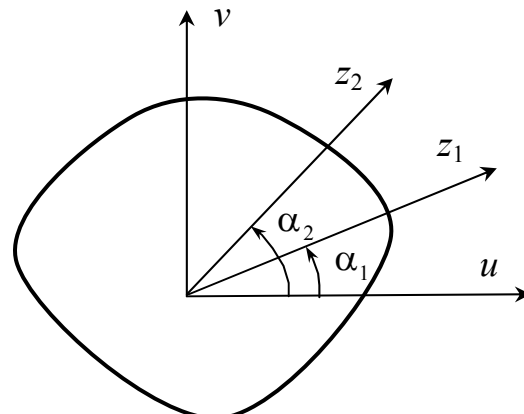


Рис. 3.18



через главные

$$J_{z_1} = J_u \cos^2 \alpha_1 + J_v \sin^2 \alpha_1, J_{z_2} = J_u \cos^2 \alpha_2 + J_v \sin^2 \alpha_2$$

и приравняем их, заменив косинус через синус

$$J_u (1 - \sin^2 \alpha_1) + J_v \sin^2 \alpha_1 = J_u (1 - \sin^2 \alpha_2) + J_v \sin^2 \alpha_2.$$

Отсюда получаем равенство  $J_u (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2) = J_v (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2)$ , указывающее на то, что в этом случае моменты инерции относительно главных осей должны быть одинаковыми. Но при этом согласно (3.29) моменты инерции относительно любых осей будут одинаковыми и главными.

Но если моменты инерции одинаковы относительно взаимно перпендикулярных осей, то это не значит, что здесь все оси главные. Примером может быть равнобокий уголок, у которого  $J_z = J_y$ , но

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha = J_z - J_{zy} \sin 2\alpha \neq J_z.$$

**Алгоритм 4** решения задач по вычислению геометрических характеристик составных сечений:

- разделить заданное составное сечение на несколько простейших фигур, для которых геометрические характеристики относительно собственных центральных осей известны;
- по (3.18) найти положение центра тяжести заданной составной фигуры;
- по (3.19), (3.20) вычислить моменты инерции относительно центральных осей заданной фигуры (при этом для прокатных уголков предварительно вычислить центробежный момент инерции уголков относительно собственных центральных осей, используя (3.22) или (3.28);
- по (26) или (28) вычислить угол наклона главных осей заданной фигуры;
- поворотом центральных осей заданной фигуры (3.22) - (3.24) или по (3.27) вычислить моменты инерции относительно главных центральных осей заданной составной фигуры.

## 4. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

### 4.1. СДВИГ

Сдвигом называется такое напряженное состояние, когда в поперечном сечении возникают преимущественно касательные напряжения.

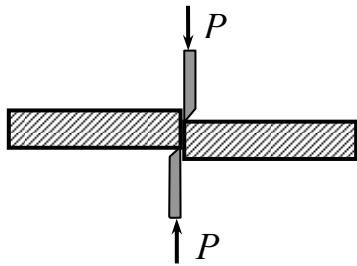


Рис. 4.1

Сдвиг в пластичных материалах называется срезом, в хрупких и дереве – скалыванием.

Простейшим примером сдвига может быть срез полосы ножницами (рис. 4.1). В этом случае по плоскостям среза возникают в основном касательные напряжения.

Практическим примером среза может быть заклепочное соединение (рис. 4.2).

Недостаточно прочная заклепка может быть перерезана по плоскости среза (рис. 4.2, б). Напряжения по плоскости среза вычисляются в предположении равномерного их распределения по площади среза  $F_{ср} = \pi d^2 / 4$  т.е.

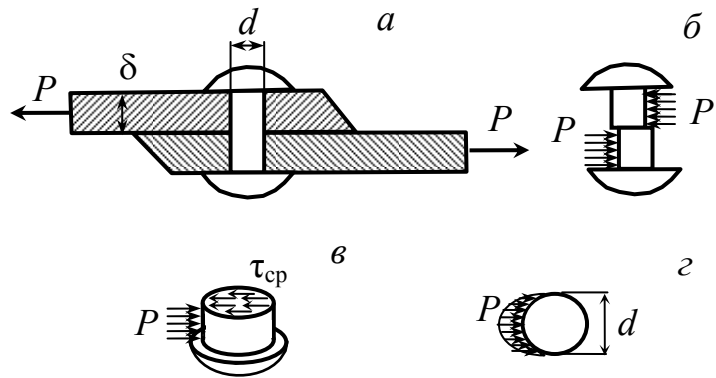


Рис. 4.2

$$\tau_{ср} = \frac{P}{F_{ср}}. \quad (4.1)$$

Условие прочности на срез  $\tau_{ср} \leq [\tau_{ср}]$  дает возможность вычислить диаметр заклепки.

Кроме того заклепки рассчитываются на смятие. Смятие – это местное сжатие, вызывающее пластическую деформацию в местах передачи больших нагрузок через малые площади контакта. В заклепке смятию подвергается по

В заклепке смятию подвергается половина боковой цилиндрической поверхности с разных сторон от плоскости среза. Давление на эту поверхность

неравномерное. Считается, что давление  $q(\varphi)$ , а значит и напряжение смятия на боковой поверхности, изменяется пропорционально изменению проекции площадки  $dF = \delta ds$  на диаметрально направление  $dF \cdot \sin \varphi$ , т.е.

$$q(\varphi) / q = \sigma_{см}(\varphi) / \sigma_{см} = dF \sin \varphi / dF,$$

$$\sigma_{см}(\varphi) = \sigma_{см} \sin \varphi \text{ см. рис. 4.3.}$$

Из условия равновесия полужаклепки получаем:

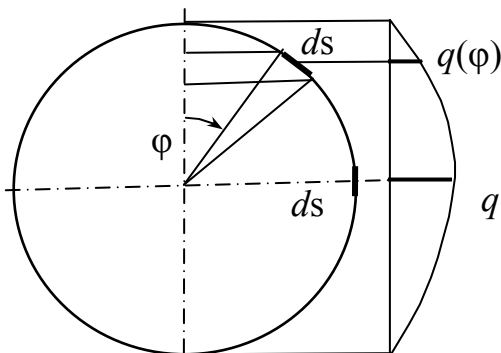


Рис. 4.3

$$P = \int_0^{\pi} \sigma_{см}(\varphi) \delta ds = \delta \sigma_{см} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot r d\varphi = 2r \delta \sigma_{см} = d \delta \sigma_{см}.$$

Отсюда находим напряжение по условной площади смятия  $F_{см} = d\delta$

$$\sigma_{см} = \frac{P}{F_{см}}. \quad (4.2)$$

Условие прочности на смятие  $\sigma_{см} \leq [\sigma_{см}]$  дает возможность вычислить диаметр заклепки.

#### 4.1.1. Чистый сдвиг

Если в напряженно-деформированном состоянии можно выделить элемент, по граням которого действует только касательные напряжения, то такое состояние называется чистым сдвигом (рис. 4.4).

На рис. 4.4, а показан элемент (проекция кубика), по граням которого действуют касательные напряжения. Этот элемент находится в условиях чистого сдвига. В других сечениях (произвольного наклона) возникают касательные и нормальные напряжения, которые можно найти по (2.4), (2.5). Отсчитывая угол поворота от нормали правой вертикальной грани, где касательное напряжение, показанное на рис. 4.4, б отрицательное, получим:

$$\sigma_{\alpha} = \tau \sin 2\alpha, \quad \tau_{\alpha} = -\tau \cos 2\alpha.$$

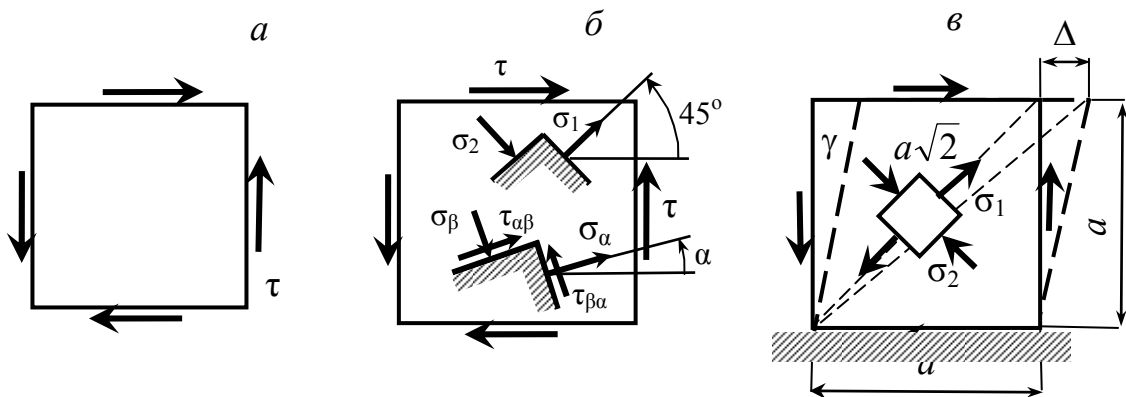


Рис. 4.4

На взаимно перпендикулярной площадке, т.е. под углом  $\beta = \alpha + \pi/2$ , нормальное напряжение  $\sigma_{\beta} = -\tau \sin 2\alpha$  изменило знак.

Можно найти такие площадки, по граням которых действуют только нормальные напряжения. Это главные площадки с главными напряжениями, которые согласно (2.10) численно равны касательным  $\sigma_{1,2} = \pm \tau$ . Заметим, что с учетом  $\sigma_{\beta} = -\sigma_{\alpha}$

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\beta\alpha}^2} = \pm \sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\beta\alpha}^2},$$

т.е. при чистом сдвиге геометрическая сумма напряжений на площадке равна главному напряжению.

Согласно (2.11) направление главного напряжения  $\sigma_1$  от нормали к горизонтальной площадке определяется углом  $\alpha$  (рис. 4.4, б)

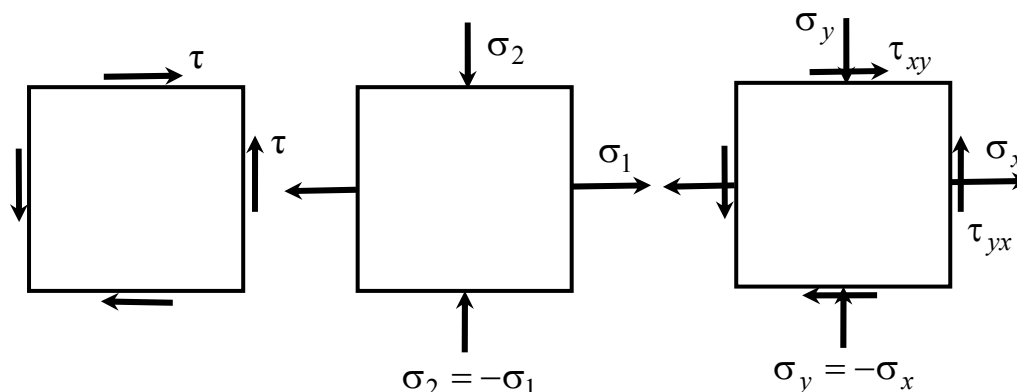


Рис. 4.5

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{yx}} = \frac{\tau}{-\tau} = -1, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Итак, признаками чистого сдвига являются, рис. 4.5:

- наличие только касательных напряжений по граням элемента;
- наличие только одинаковых нормальных напряжений с противоположными знаками;
- наличие нормальных и касательных напряжений при условии, что нормальные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках одинаковые по модулю и противоположны по знаку, рис. 4.5.

Рассмотрим деформации при чистом сдвиге. С этой целью удобно нижнюю грань элемента закрепить (рис. 4.4, в). Смещение граней  $\Delta$  называется абсолютным сдвигом, а угол  $\gamma$  - относительным сдвигом или углом сдвига. По малости угла  $\gamma = \Delta/a$ . Очевидно  $\gamma = f(\tau)$ , найдем эту зависимость. Для этого

рассмотрим абсолютную деформацию диагонали  $\Delta \cos \frac{\pi}{4} = \Delta \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Относитель-

ная линейная деформация  $\varepsilon = \frac{\Delta \cos \pi/4}{a\sqrt{2}} = \Delta/(2a) = \gamma/2$ . Эта деформация может

быть вычислена по (2.16)

$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu)$ . Приравнявая эти два значения деформации  $\varepsilon$ , находим

$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu)$ . Отсюда получаем закон Гука при сдвиге

$$\tau = \gamma G. \quad (4.3)$$

где  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$  - модуль сдвига или модуль упругости второго рода. Для мяг-

кой стали с  $\mu = 0,25$   $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

#### 4.1.2. Допускаемые напряжения при чистом сдвиге

Считая чистый сдвиг объемным напряженным состоянием, имеем  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ .

Согласно второй теории прочности (2.17)  $\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma]$ , т.е.  $\tau(1 + \mu) \leq [\sigma]$ . Значит  $[\tau] = [\sigma]/(1 + \mu) = (0,75...0,80)[\sigma]$ .

По третьей теории (2.18)  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ , т.е.  $2\tau \leq [\sigma]$  или  $[\tau] = 0,5[\sigma]$ .

По четвертой теории (2.19)  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]$ , т.е.  $\sqrt{3}\tau \leq [\sigma]$  или  $[\tau] = 0,577[\sigma]$ .

Обычно принимают для хрупких материалов  $[\tau] = 0,5[\sigma]$ , а для пластичных  $[\tau] = 0,625[\sigma]$ .

#### 4.2. Вычисление напряжений по деформациям

На практике при изучении напряженно-деформированного состояния часто приходится вычислять напряжения по деформациям, которые находятся измерением при помощи тензометров или тензорезисторов, т.е. датчиков омического сопротивления. Тензорезисторы представляют собою тонкую спиралеобразно наклеенную на бумаге или фольге тонкую проволоку большого омического сопротивления, рис. 4.6. Датчик наклеивается на испытываемую деталь и через него пропускается электрический ток постоянного напряжения. При деформации детали проволока датчика растягивается (сжимается), ее омическое сопротивление увеличивается (уменьшается), в связи с чем изменяется сила проходящего тока. Так как это изменение силы тока пропорционально деформации проволоки датчика, то оно позволяет найти деформации или непосредственно напряжения, если датчик предварительно протарировать, т.е. узнать цену деления прибора, измеряющего изменение омического сопротивления.

Рис. 4.6

Если заранее известно, что напряженное состояние детали линейное, то достаточно одиночного датчика, наклеенного вдоль оси загрузки. При этом используется закон Гука при одноосном напряженном состоянии.

В случае плоского напряженного состояния нужно наклеивать два, взаимно перпендикулярно направленных, датчика и использовать закон Гука при плоском напряженном состоянии.

В общем случае произвольного напряженного состояния, когда по граням элемента действуют нормальные и касательные напряжения, нужно устанавливать розетку датчиков. Прямоугольная розетка состоит из трех датчиков – двух взаимно перпендикулярных и третьего, направленного под углом  $45^\circ$ .

Итак, деформации розетки датчиков нам известны, т.е.  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon$  заданы. Найти напряжения, возникающие по граням элемента рис. 4.7.

По принципу суперпозиции представим заданное напряженное состояние в виде двух, на первом из которых действуют только нормальные напряжения, а на втором – только касательные.

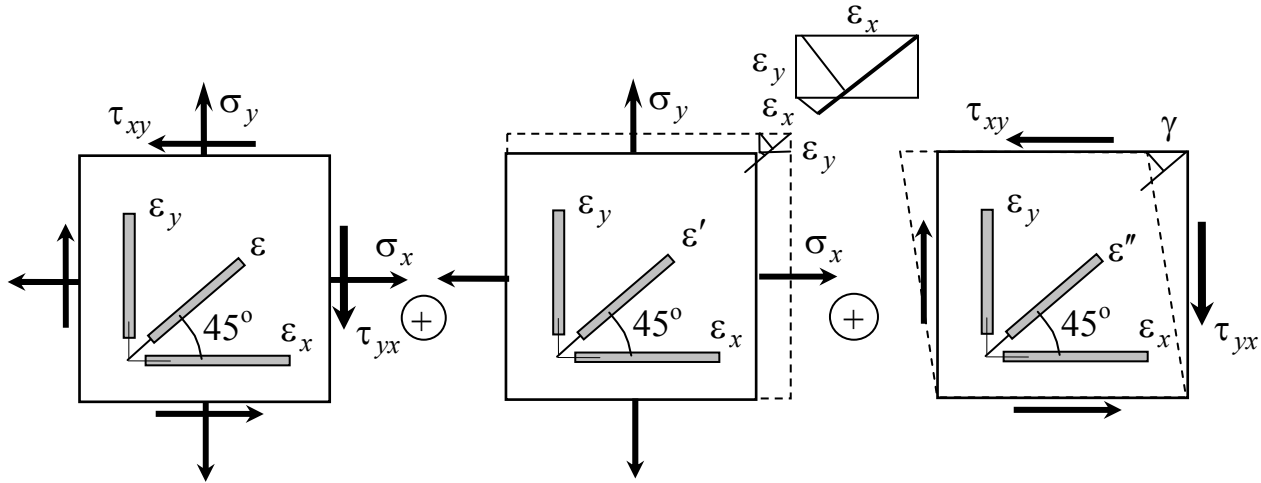


Рис. 4.7

В первом состоянии, как видно из рисунка, все датчики покажут деформации:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon'$ , причем диагональная деформация равна сумме проекций деформаций боковых граней элемента на направление диагонали, отнесенной к ее длине, т.е.  $\varepsilon' = (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \cos \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$ . Используя закон Гука при плоском напряженном состоянии (2.16)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E},$$

находим формулы для определения нормальных напряжений

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x). \quad (4.4)$$

Во втором напряженном состоянии датчики, параллельные граням элемента, не покажут деформаций. Диагональный датчик покажет деформацию чистого сдвига, которая равна проекции абсолютной деформации  $1\gamma$ , отнесенной к длине диагонали, т.е.  $\varepsilon'' = \gamma \cos 45^\circ \frac{1}{\sqrt{2}} = \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2}$ . Суммарная диагона-

льная деформация  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\gamma}{2}$ . Отсюда находим относительную деформацию сдвига  $\gamma = \varepsilon_x + \varepsilon_y - 2\varepsilon$ , а затем по закону Гука при чистом сдвиге (4.3) получаем формулу касательных напряжений

$$\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y - 2\varepsilon). \quad (4.5)$$

Заметим, что касательные напряжения не оказывают влияния на деформации сторон элемента, т.е. по (4.4) вычисляются нормальные напряжения не только главные, но и произвольные, т.е. нормальные напряжения на произвольных площадках.

**Пример 1.** Заданы деформации прямоугольной розетки датчиков:  $\varepsilon_x = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_y = -\mu\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon \frac{1-\mu}{2}$ , рис. 4.8. Определить характер напряженного состояния.

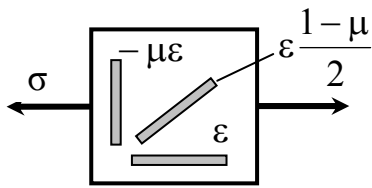


Рис. 4.8

**Решение.** По формулам (4.4), (4.5) находим:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon - \mu^2\varepsilon) = \varepsilon E, \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(-\mu\varepsilon + \mu\varepsilon) = 0,$$

$$\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu^2)}\left(\varepsilon - \mu\varepsilon - 2\varepsilon \frac{1-\mu}{2}\right) = 0. \text{ Значит, элемент}$$

испытывает осевое растяжение.

**Пример 2.** Показания всех датчиков одинаковы:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon$ , рис. 4.9. Какое это напряженное состояние?

**Решение.** Согласно (4.4) получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon + \mu\varepsilon) = \frac{\varepsilon E}{1-\mu},$$

$$\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)}[(\varepsilon + \varepsilon) - 2\varepsilon] = 0. \text{ Значит, это всестороннее}$$

растяжение.

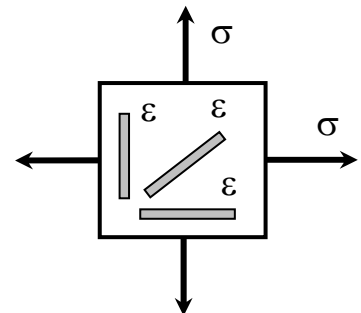


Рис. 4.9

**Пример 3.** Деформации по направлению датчиков:  $\varepsilon_x = (1+\mu)\varepsilon$ ,

$\varepsilon_y = -(1+\mu)\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{45^\circ} = 0$ , рис. 4.10. Определить вид напряженного состояния.

**Решение.** По (4.4) находим:

$$\sigma_x = \frac{E\varepsilon}{1-\mu^2}[1+\mu - \mu(1+\mu)] = \varepsilon E,$$

$$\sigma_y = \frac{E\varepsilon}{1-\mu^2}[-(1+\mu) + \mu(1+\mu)] = -\varepsilon E.$$

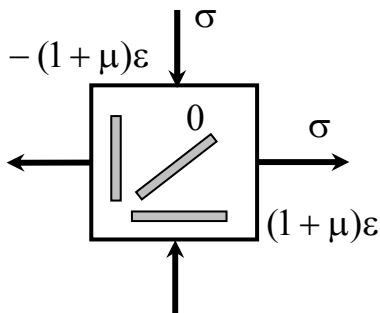


Рис. 4.10

По (4.5) получаем  $\tau = 0$ . Это соответствует растяжению по горизонтали и такому же сжатию по вертикали.

**Пример 4.** По диагонали  $\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon$ , а  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  
рис. 4.11.

**Решение.** По (4.4) получаем  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , а из (4.5) находим  $\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)} 2\varepsilon = \frac{\varepsilon E}{1+\mu}$ , что соответствует чистому сдвигу.

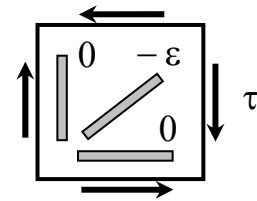


Рис. 4.11

### 4.3. КРУЧЕНИЕ

Кручением называется деформация стержня под действием пар сил, расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Стержень, испытывающий кручение, называется валом. На рис. 4.12 показан стержень, жестко защемленный сверху, с диском на свободном торце. К диску приложены две равные, противоположно направленные силы  $P$ , образующие пару сил с моментом  $M_k = 2PR$ . На расчетной схеме вал изображается сплошной линией с силовыми факторами в виде крутящих моментов внешних сил  $M_k$ , направление которых указывается стрелками, рис. 4.12.

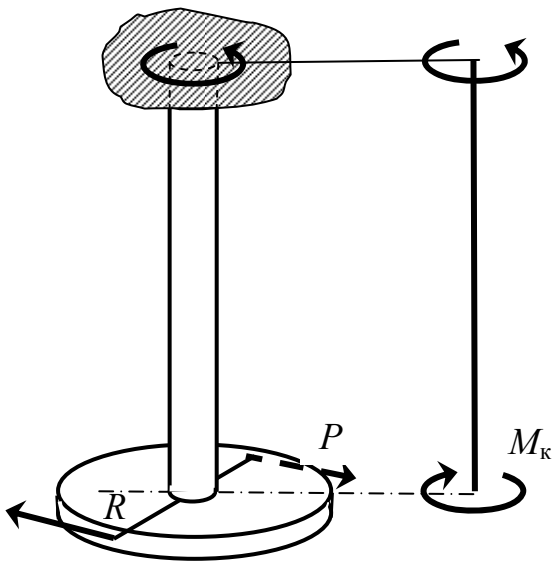


Рис.4.12

#### 4.3.1. Вычисление крутящего момента по мощности и скорости вращения вала

Вычислим работу пары сил на угловом перемещении  $\alpha$

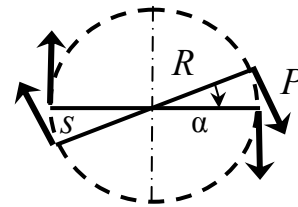


Рис. 4.13

(рис. 4.13)  $A = 2PS = 2PR\alpha = M_k \alpha$ . За один оборот угол  $\alpha = 2\pi$ , а за  $n$  оборотов  $\alpha = 2\pi n$ .

При равномерном вращении вала мощность  $W = A/t = M_k 2\pi \frac{n}{t}$ .

Отсюда находим крутящий момент в Ньютонометрах, если мощность  $W$  задана в ваттах, а скорость вращения вала – в оборотах за секунду

$$M_k = \frac{W}{2\pi n/t}$$

Если мощность задана в киловаттах  $K$ , а скорость вращения – в оборотах в минуту, то



$$M_k = \frac{1000 \cdot K \cdot 60}{2\pi n} = 9549,3 \frac{K}{n}, \text{ Нм.} \quad (4.6)$$

Если мощность  $N$  задана в лошадиных силах, а  $1 \text{ л.с.} = 75 \text{ кГм/с} = 75 \cdot 9,81 \text{ Нм/с} = 735,75 \text{ ватт}$ , то

$$M_k = \frac{735,7 \cdot N \cdot 60}{2\pi n} = 7025,9, \text{ Нм.} \quad (4.7)$$

### 4.3.2. Напряжения и деформации при кручении круглых стержней

Как получить расчетные формулы? Для познания любой истины нужно пройти три этапа : «От **живого созерцания к абстрактному мышлению и от**

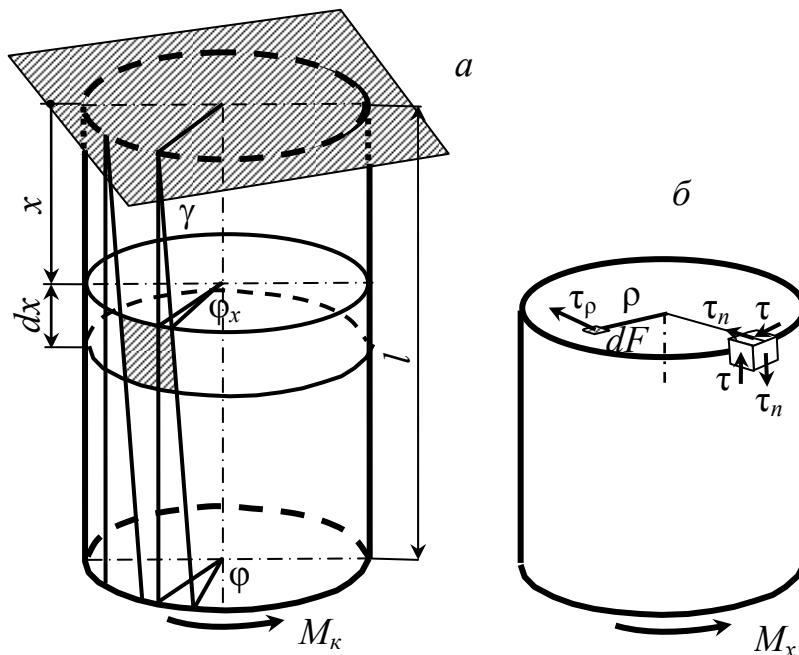


Рис. 4.14

**него к практике** – таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» (В.И. Ленин «Философские тетради»).

Итак, на первом этапе рассмотрим круглый стержень, жестко зашпеленный верхним сечением (рис. 4.14, а). До загрузки на боковой поверхности стержня проводим продольные (образующие) и поперечные (кольцевые) линии, образуя сетку квадратов. На торце стержня проводим радиусы.

После загрузки образующие, не искривляясь, поворачиваются на некоторый угол  $\gamma$  (угол сдвига); кольцевые линии не искривляются, а расстояния между ними не изменяются; торец вала не депланирует (остается плоским); радиусы на торце не искривляются, а лишь поворачиваются на угол  $\phi$  - угол закручивания.

Второй этап. Сопротивление материалов – элементарная учебная дисциплина по сравнению с теорией упругости потому, что здесь **вводятся упрощающие гипотезы**.

На основании вышеперечисленных наблюдений вводятся следующие гипотезы:

- поперечные сечения стержня, плоские до загрузки, остаются плоскими и после загрузки; так как нижнее торцевое сечение плоское, верхнее зашпелено, а следы произвольных поперечных сечений (кольцевые линии) не искривляются;

- расстояния между сечениями не изменяются, следовательно, в поперечных сечениях стержня, находящегося в плоском напряженном состоянии, нормальные напряжения не возникают;

- радиусы в сечениях не искривляются, а только поворачиваются на некоторый угол, так на торце радиусы не искривляются, а в защемлении радиусы неподвижны.

Для вычисления напряжений поперечным сечением разрезаем вал на две части и рассматриваем нижнюю часть в равновесии (рис. 4.14, б), т.е. применяем **метод сечений**.

В соответствии с принятой гипотезой о плоских сечениях вала, из суммы проекций всех сил на продольную ось следует, что в поперечных сечениях вала нет нормальных напряжений, а возникают только касательные напряжения. Касательное напряжение общего направления можно разложить на радиальную составляющую  $\tau_r$  и составляющую, перпендикулярную радиусу. Радиальной составляющей по закону парности должно сопутствовать напряжение вдоль оси стержня (в продольных кольцевых сечениях). Но на поверхности вала такого напряжения нет, следовательно, и радиальной составляющей быть не может. Отсюда заключаем, что касательные напряжения при кручении направлены в кольцевом направлении, т.е. перпендикулярно радиусам.

На элементарной площадке  $dF$  усилие  $\tau_\rho dF$  относительно оси стержня вызывает момент  $\tau_\rho dF \rho$ . Момент всех внутренних сил  $M_x = \int_F \tau_\rho dF \rho$  должен быть равен моменту внешней нагрузки  $M_k$ , т.е.  $M_x = M_k$ . Крутящий момент внутренних сил равен

$$M_x = \int_F \tau_\rho \rho dF \quad (4.8)$$

Для вычисления этого интеграла нужно знать характер изменения напряжения по площади сечения. Вспомним, что в случае, когда из уравнений равновесия задача не решается, нужно составлять дополнительные уравнения – **уравнения совместности деформаций**. Так как напряжения пропорциональны деформациям, то изучим закон изменения деформаций. С этой целью двумя поперечными сечениями на расстоянии  $dx$  друг от друга из стержня вырезаем диск (рис 4.15). Углы поворота радиусов этого диска равны соответственно  $\varphi(x)$  и  $\varphi(x) + d\varphi(x)$ . Из диска двумя радиальными вертикальными плоскостями вы

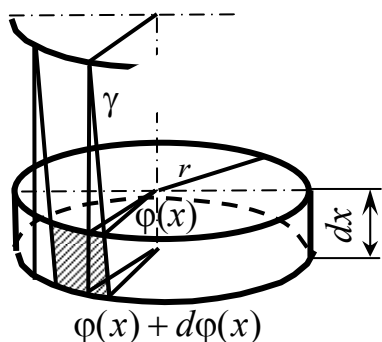


Рис. 4.15

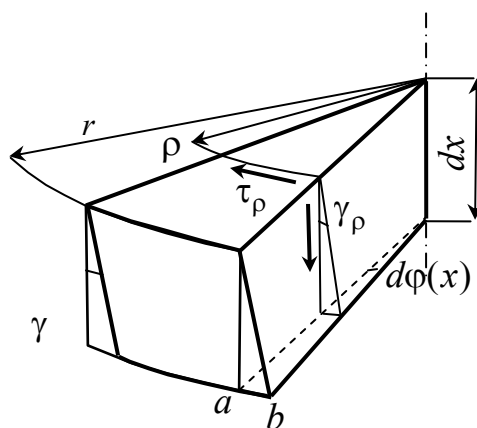


Рис.4.16

резаем клин (рис. 4.16), по граням которого действуют касательные напряжения, вызывая чистый сдвиг. Дуга  $ab$  равна  $\gamma dx = r d\varphi$ . Отсюда угол сдвига  $\gamma = r \frac{d\varphi(x)}{dx}$ . Аналогично на расстоянии  $\rho$  от центра  $\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$ .

Замечаем, что относительный угол закручивания  $\frac{d\varphi(x)}{dx}$  для конкретных неизменных условий величина постоянная. По закону Гука (4.3) находим закон изменения напряжений по площади сечения

$$\tau_\rho = \gamma_\rho G = G \frac{d\varphi(x)}{dx} \rho. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (4.8), находим

$$M_x = G \frac{d\varphi(x)}{dx} \int_F \rho^2 dF = G J_p \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (4.10)$$

В соответствии с (3.3) здесь  $J_p = \int_F \rho^2 dF$  - полярный момент инерции площади поперечного сечения вала.

Выразив из (4.10)

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{M_x}{G J_p} \quad (4.11)$$

и подставив в уравнение равновесия (4.9), получим расчетную формулу напряжений

$$\tau_\rho = \frac{M_x}{J_p} \rho. \quad (4.12)$$

Отсюда видно, что напряжения изменяются пропорционально расстоянию от центра  $\rho$  (см. рис.4.17) и при  $\rho = r$  достигают наибольшего значения

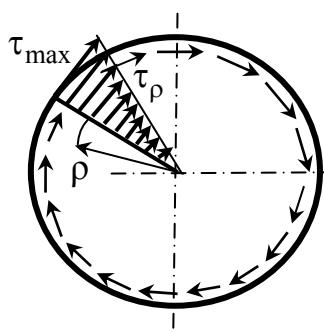


Рис. 4.17

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{J_p} r = \frac{M_x}{W_p} \quad (4.13)$$

Здесь  $W_p = J_p / r$  - полярный момент сопротивления площади поперечного сечения вала.

Согласно (3.8) для сплошного вала

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} \quad (4.14)$$

Интегрируя (4.11), находим угол закручивания в сечении на расстоянии  $x$  от

защемления  $\varphi(x) = \int \frac{M_x(x)}{GJ_p} dx + \varphi_0$ . Если крутящий момент  $M_x$  на участке  $x$  постоянный, то

$$\varphi(x) = \frac{M_x}{GJ_p} x + \varphi_0 = \varphi_0 + \frac{\omega(x)}{GJ_p}. \quad (4.15)$$

где  $\omega(x)$  – площадь эпюры крутящих моментов на участке загрузки  $x$ .

Если начало координат принято в заделке, то угол закручивания на торце стержня при  $x = l$

$$\varphi = \frac{M_x l}{GJ_p}. \quad (4.16)$$

Здесь  $GJ_p$  – жесткость при кручении.

### 4.3.3. Расчет вала на прочность и жесткость

Условие прочности требует, чтобы  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ , а с учетом (4.13)  $M_x / W_p \leq [\tau]$ . Отсюда находим

$$W_p \geq \frac{M_x}{[\tau]}$$

и по моменту сопротивления  $W_p$  определяем поперечные размеры вала.

Для сплошного вала, подставляя (4.14), получаем

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2M_x}{\pi[\tau]}} = 0,863 \sqrt[3]{\frac{M_x}{[\tau]}} \quad (4.17)$$

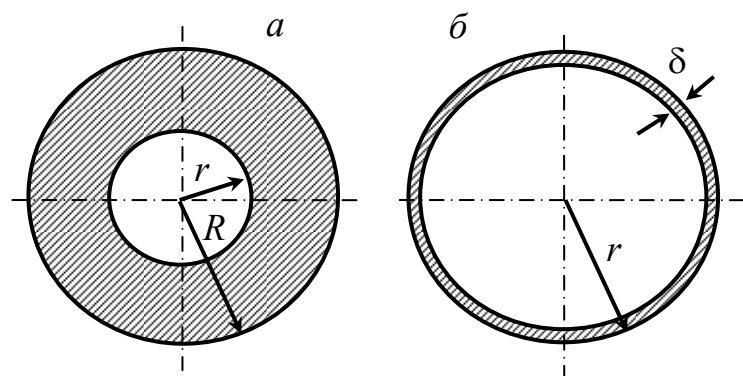


Рис. 4.18

Для пустотелого вала (рис. 4.18, а)

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi R^4}{2} \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right), \text{ а}$$

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right).$$

Следовательно, из (4.14) находим

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2M_x}{\pi(1 - r^4/R^4)}}. \quad (4.18)$$

Для тонкостенной трубы при  $\delta < r/10$  (рис. 4.18, б) находим  $J_p = \int_F \rho^2 dF = r^2 \int_F dF = 2\pi r^3 \delta$ . Значит

Для тонкостенной трубы при  $\delta < r/10$  (рис. 4.18, б) находим  $J_p = \int_F \rho^2 dF = r^2 \int_F dF = 2\pi r^3 \delta$ . Значит

$$W_p = 2\pi r^2 \delta. \quad (4.19)$$

Следовательно,

$$r \geq 3 \sqrt{\frac{M_x}{2\pi[\tau]} \cdot \frac{r}{\delta}}. \quad (4.20)$$

Условие жесткости требует, чтобы  $\varphi_{\max} \leq [\varphi]$ . С учетом (4.15) получаем  $\frac{M_x l}{GJ_p} \leq [\varphi]$ , откуда находим

$$J_p \geq \frac{M_x l}{G[\varphi]}, \quad (4.21)$$

а по моменту инерции  $J_p$  вычисляем радиус вала. Так, для сплошного вала  $\frac{\pi r^4}{2} \geq \frac{M_x l}{G[\varphi]}$ , откуда

$$r \geq 4 \sqrt{\frac{2M_x l}{G\pi[\varphi]}}. \quad (4.22)$$

Обычно в нормативах приводятся относительные допускаемые углы закручивания  $[\theta]$  в градусах на погонный метр. Тогда согласно (4.22)

$$r \geq 4 \sqrt{\frac{2M_x 180}{G\pi^2[\theta]}} = 2,464 \sqrt{\frac{M_x}{G[\theta]}}. \quad (4.23)$$

Аналогично рассчитывается пустотелый и трубчатый вал на жесткость:

$$R \geq 4 \sqrt{\frac{2M_x}{\pi G[\theta](1 - r^4/R^4)}}, \quad r \geq 4 \sqrt{\frac{M_x}{2\pi G[\theta]} \frac{r}{\delta}},$$

если  $[\theta]$  задан в рад/м.

#### 4.3.4. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания

Расчетный момент при вычислении диаметра вала нужно брать из эпюры крутящих моментов внутренних усилий, которая строится общим методом сечений. Рассмотрим вал, на который действуют моменты внешних сил так, как показано на рис. 4.19.

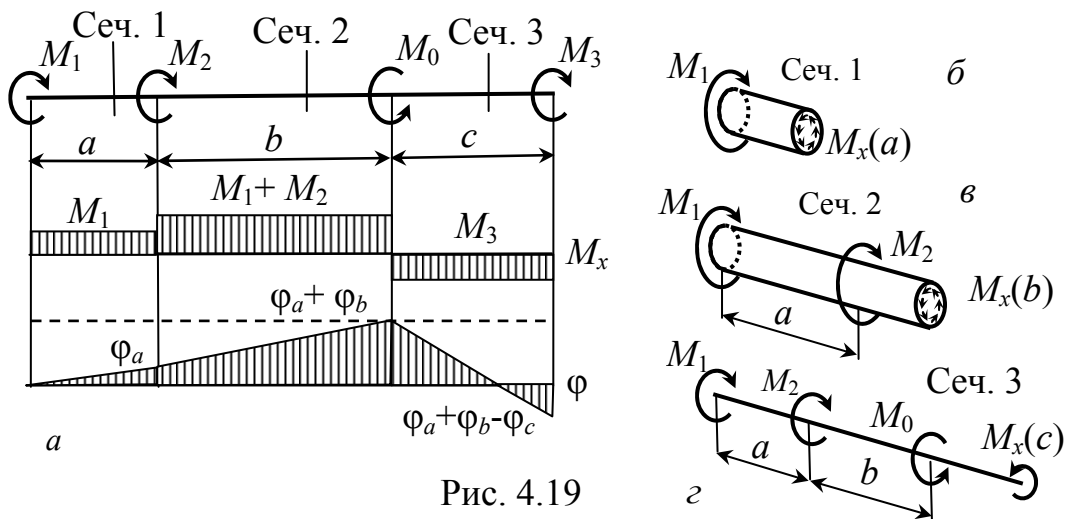


Рис. 4.19

Чтобы вычислить момент внутренних усилий на первом участке, рассмотрим часть вала слева от сечения I (рис. 4.19, б). В сечении действуют касательные напряжения, образующие момент внутренних усилий  $M_x(a)$ , противодействующий моменту внешних сил  $M_1$ . Из условия равновесия следует, что  $M_x(a) = M_1$ .

Аналогично на втором участке (рис. 4.19, в)  $M_x(b) = M_1 + M_2$ . На третьем участке  $M_x(c) = M_1 + M_2 - M_0$ . Но из условия равновесия всего вала следует, что  $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$ . Значит,  $M_x(c) = -M_3$ .

Обычно при построении эпюры крутящих моментов берут сумму внешних моментов с одной стороны от сечения (без рассмотрения в равновесии отрезанной части вала). При этом нужно пользоваться правилом знаков – крутящий момент внутренних усилий  $M_x(x)$  считается положительным, если момент внешней нагрузки направлен по ходу часовой стрелки при взгляде со стороны разрезанного торца вала.

Углы закручивания по участкам вала вычисляются по (4.15) с учетом крутящих моментов, взятых из эпюры крутящих моментов внутренних усилий  $M_x$ . Так  $\varphi_a = \frac{M_1 a}{GJ_\rho}$ ,  $\varphi_b = \frac{M_1 + M_2}{GJ_\rho} b$ ,  $\varphi_c = \frac{M_1 + M_2 - M_0}{GJ_\rho} c = -\frac{M_3 c}{GJ_\rho}$ .

Если считать, что левое сечение не поворачивается, то сечение, в котором приложен момент  $M_2$ , повернется на угол  $\varphi_a$ . В сечении с моментом  $M_0$  возникает угол закручивания  $\varphi_a + \varphi_b$ ; на правом торце вала угол закручивания равен  $\varphi_a + \varphi_b - \varphi_c$ .

Если неподвижное сечение будет в месте приложения момента  $M_0$ , то для построения новой эпюры углов закручивания достаточно в предыдущей эпюре провести горизонтальную линию через точку, соответствующую месту приложения момента  $M_0$  (на рис. 4.19, а такая эпюра представляет незаштрихованную площадь ниже штриховой линии).

При распределенной моментной нагрузке интенсивностью  $m_x(x)$  максимальный крутящий момент  $M_x(x)$  находится в сечении, где  $\frac{dM_x(x)}{dx} = m_x(x) = 0$ , т.е. в сечении с нулевым значением интенсивности распределенного крутящего момента  $m_x(x)$ . Максимальный угол закручивания будет там, где  $\frac{d\varphi(x)}{dx} = M_x(x) = 0$ , т.е. в сечении с нулевым значением крутящего момента внутренних усилий (см. Задачу 4.1).

**Задача 4.1.** Вал постоянного диаметра загружен двумя сосредоточенными моментами  $M_1=20$  кНм и  $M_2=30$  кНм, а также линейно распределенной моментной нагрузкой интенсивностью  $m_k=200$  кНм/м, рис. 4.20. Построить эпюру крутящих моментов внутренних усилий и эпюру углов закручивания.

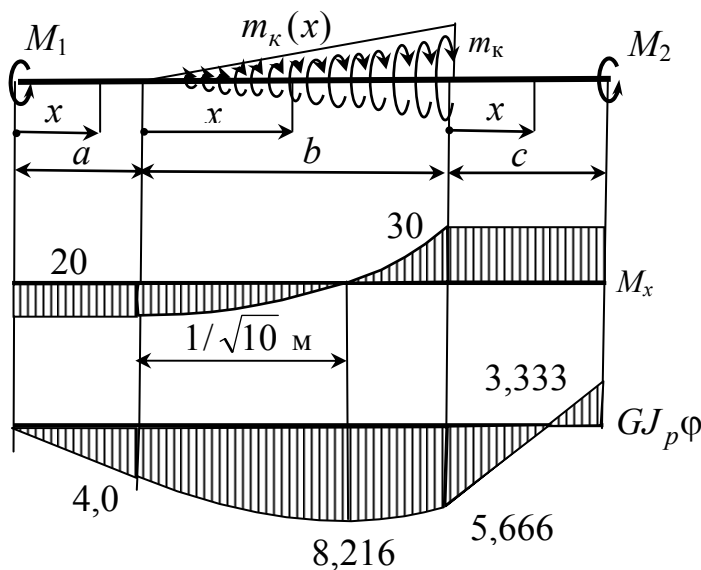


Рис. 4.20

Размеры участков:  $a=20$  см,  $b=50$  см,  $c=30$  см.

**Решение.**

На левом участке:

$$M_x(x) = -M_1 = -20 \text{ кНм,}$$

$$\varphi(x) = -\frac{M_1}{GJ_p} x, \quad \varphi(a) = -\frac{4}{GJ_p}.$$

На среднем участке интенсивность крутящих

моментов внешней нагрузки  $m_x(x) = m_k x / b$ .

Крутящий момент внутренних усилий

$$M_x(x) = -M_1 + \int_0^x m_x(x) dx = -M_1 + \frac{m_k}{b} \int_0^x x dx = -M_1 + \frac{m_k x^2}{2b} = -20 + \frac{200}{2 \cdot 0,5} x^2,$$

$M_x(b) = 30$  кНм. Экстремальный крутящий момент  $M_x(x)$  возникает в сечении, где интенсивность распределенной моментной нагрузки  $m_x(x)$  равна нулю, т.е. в начале второго участка.

Согласно (4.15) угол закручивания

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_0^x \frac{M_x(x)}{GJ_p} dx = -\frac{M_1 a}{GJ_p} - \frac{M_1 x}{GJ_p} + \int_0^x \frac{m_k x^2}{2b} dx = -\frac{4}{GJ_p} - \frac{20x}{GJ_p} + \frac{200x^3}{6 \cdot 0,5 GJ_p} \Big|_0^x,$$

$$\varphi(b) = \left( -4 - 10 + \frac{200 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2}{6 \cdot 0,5} \right) \frac{1}{GJ_p} = -5,666 / GJ_p.$$

Максимальный угол закручивания будет в сечении, где

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = M_x(x) = 0, \text{ т.е. при } x = 1/\sqrt{10} \text{ м, } \varphi_{\max} = -8,216/GJ_p.$$

На правом участке:  $M_x(x) = M_x(b) = 30 \text{ кНм}$ ,

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \frac{M_x(x)}{GJ_p}x = -5,666/GJ_p + 30x/GJ_p,$$

$$\varphi(c) = -5,666/GJ_p + 30 \cdot 0,3/GJ_p = 3,333/GJ_p.$$

### 4.3.5. Напряжения на произвольных площадках при кручении

Если при кручении известны напряжения в поперечном сечении, и требуется вычислить напряжения на произвольных площадках, то предварительно можно найти главные площадки с главными напряжениями. В поперечных сечениях (следовательно, и в продольных) напряжения вычисляются по (4.12). По этим напряжениям согласно (2.10) находим главные напряжения  $\sigma_{1,2} = \pm\tau$ , а по

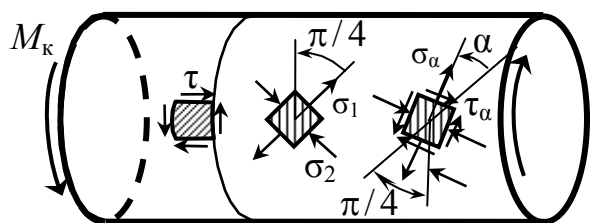


Рис. 4.21

(2.8) или (2.13) их направления. Они направлены под углом  $45^\circ$  к образующей (рис. 4.21). Напряжения на произвольной площадке вычисляются по (2.11), (2.12) при отсчете угла наклона площадки  $\alpha$  от направления главного напряжения  $\sigma_1$  до нормали к рассматриваемой площадке.

Однако, главные напряжения можно не находить, если воспользоваться переходом от произвольных площадок к любым, т.е. использовать формулы (2.4), (2.5).

**Задача 4.2.** Найти положение элемента, по граням которого действуют одинаковые нормальные и касательные напряжения  $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 10 \text{ МПа}$ . Какой крутящий момент испытывает при этом вал диаметром 5 см?

**Решение.** Учитывая, что  $\sigma_1 = \tau$ , а  $\sigma_2 = -\tau$ , по (2.11), (2.12) получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \tau(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \tau \cos 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau \sin 2\alpha.$$

Отсюда находим  $\text{tg} 2\alpha = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = 1$  т.е.  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ . Этот угол нужно отложить от направления  $\sigma_1$  против хода часовой стрелки (рис. 4.21). После этого можно вычислить касательное напряжение в поперечном сечении  $\tau_\alpha = \sigma_\alpha / \cos 2\alpha = 14,1 \text{ МПа}$ . Такое напряжение вызывает крутящий момент



$$M_k = \tau W_p = \tau \frac{\pi d^3}{16} = 14,1 \cdot 10^6 \pi 5^3 \cdot 10^{-6} / 16 = 346 \text{ Нм.}$$

### 4.3.6. Статически неопределимые валы

Рассмотрим жестко зашпеленный вал, загрузенный моментами  $M_1$  и  $M_2$ . От этой нагрузки возникают моменты реакций опор  $M_A$  и  $M_B$  (рис.4.22). Так как неизвестных величин две (моменты на опорах), а уравнений равновесия одно (сумма всех моментов относительно оси вала), то задача один раз статически неопределима. Кроме уравнения равновесия

$$M_1 - M_2 - M_A - M_B = 0$$

нужно составить одно дополнительное уравнение деформаций. Такое уравнение можно составить из условия, что правое опорное сечение по отношению к левому не поворачивается, т.е. угол закручивания  $\varphi_{BA} = 0$ . Но общий угол закручивания равен сумме углов закручивания участков вала, т.е.  $\varphi_{BA} = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$ . Для

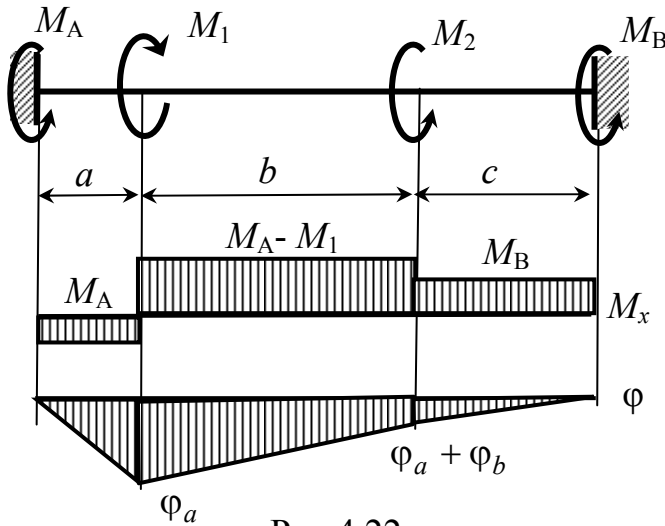


Рис.4.22

вычисления углов закручивания отдельных участков нужно учитывать крутящие моменты внутренних усилий на этих участках, которые определяются методом сечений, как при построении эпюры крутящих моментов. Так получаем уравнение деформаций

$$\frac{M_A}{GJ_p} a + \frac{M_A - M_1}{GJ_p} b + \frac{M_A - M_1 + M_2}{GJ_p} c = 0.$$

Отсюда находим крутящий момент в зашпелении левой опоры

$$M_A = \frac{M_1(b+c) - M_2 c}{a+b+c}, \text{ а из уравнения равновесия } M_B = \frac{M_1 a - M_2(a+b)}{a+b+c}.$$

Теперь легко построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

**Задача 4.3.** Вал жестко зашпелен на опорах и загрузен моментами, показанными на рис. 4.23, где:  $M_1=25$  кНм,  $m=100$  кНм/м,  $a=0,2$  м,  $b=0,5$  м,

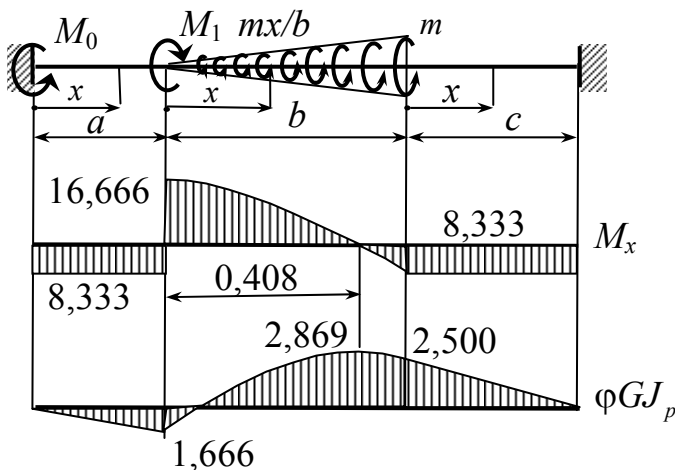


Рис. 4.23

$c=0,3$  м. Построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания

**Решение.** Составляем уравнения крутящих моментов и углов закручивания по участкам вала.

На левом участке:

$$M(x) = -M_0, \quad \varphi(x) = -\frac{M_0}{GJ_p} x, \quad \varphi(a) = -\frac{M_0 a}{GJ_p}.$$

На среднем участке:

$$M(x) = -M_0 + M_1 - \frac{mx^2}{2b},$$

$$\varphi(x) = -\frac{M_0 x}{GJ_p} + \frac{M_1 x}{GJ_p} - \frac{mx^3}{6bGJ_p} + \varphi(a), \quad \varphi(b) = -\frac{M_0 a}{GJ_p} - \frac{M_0 b}{GJ_p} + \frac{M_1 b}{GJ_p} - \frac{mb^2}{6GJ_p}.$$

На правом участке:

$$M(x) = -M_0 + M_1 - \frac{mb}{2},$$

$$\varphi(x) = -\frac{M_0 a}{GJ_p} - \frac{M_0 b}{GJ_p} + \frac{M_1 b}{GJ_p} - \frac{mb^2}{6GJ_p} - \frac{M_0 x}{GJ_p} + \frac{M_1 x}{GJ_p} - \frac{mbx}{2GJ_p},$$

$$\text{Из условия } \varphi(c) = -\frac{M_0(a+d+c)}{GJ_p} + \frac{M_1(b+c)}{GJ_p} - \frac{mb}{6GJ_p}(b+3c) = 0$$

находим момент в защемлении при заданных условиях задачи

$$M_0 = \frac{M_1(b+c) - mb(b+3c)/d}{a+b+c} = 0,8M_1 - \frac{m}{6}0,5(0,5+0,9) = 8,333 \text{ кНм.}$$

При этом значении момента в защемлении на основании вышеприведенных уравнений легко построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

### Примечания.

По формулам (4.12, 4.15) производится расчет вала только круглого поперечного сечения. Некруглые стержни рассчитываются методами теории упругости или упрощенными инженерными формулами. Длинные валы аналогично сжатым стержням теряют устойчивость, принимая форму винтовых линий. Критический крутящий момент, при котором длинный вал теряет устойчивость, вычисляется по формуле (см. раздел 7 в [4])

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{l} EJ.$$

## 5. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

### 5.1. Общие понятия о поперечном изгибе

Поперечным изгибом называется напряженно-деформированное состояние стержня под действием внешних нагрузок (сил и пар сил), расположенных в плоскостях, проходящих через продольную ось стержня (рис. 5.1). Если вся нагрузка действует в одной плоскости, проходящей через одну из главных осей поперечного сечения стержня, то такой изгиб называется плоским. На рис. 5.2 показан стержень, нагрузка которого приложена в вертикальной плоскости, проходящей через главную ось  $y$ . Стержень изгибается относительно главной центральной горизонтальной оси также в вертикальной плоскости. Такой плоский поперечный изгиб чаще всего называют просто изгибом.

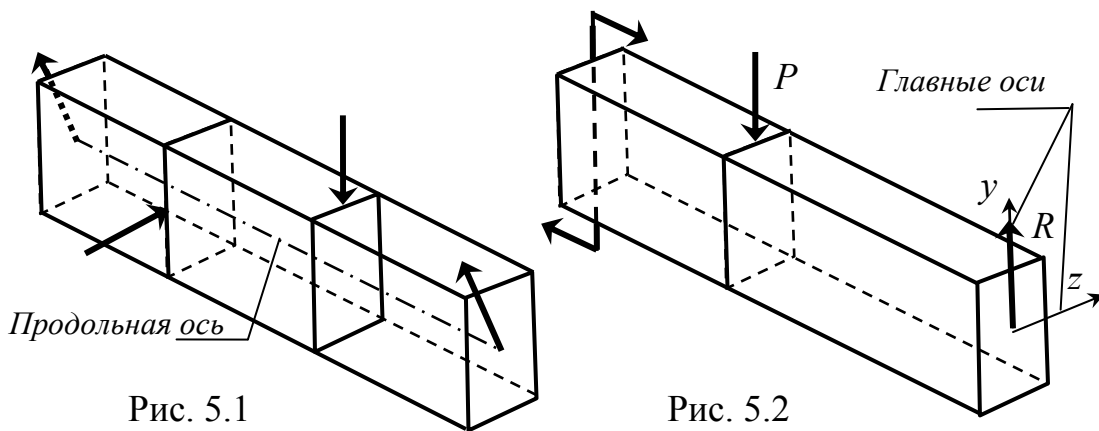


Рис. 5.1

Рис. 5.2

Стержни, испытывающие изгиб, называются балками. Балки прикрепляются к неподвижным основаниям при помощи опорных устройств. Все опоры условно можно разделить на четыре основных типа.

На рис. 5.3 показан один из вариантов шарнирно-подвижной опоры, когда балка 1 посредством балансира 2 опирается на цилиндрический каток 3, позволяющий балке беспрепятственно перемещаться по неподвижному основанию 4. Эта опора не позволяет балке перемещаться по вертикали вниз и вверх (опора может быть сверху балки), следовательно, в такой опоре есть одна кинематическая связь, в которой может возникнуть лишь одна вертикальная реакция. На расчетной схеме балка изображается лишь одной осью в виде сплошной линии, а шарнирно-подвижная опора представляется одним из вариантов, показанных на рис. 5.3.

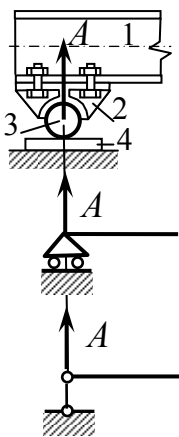


Рис. 5.3

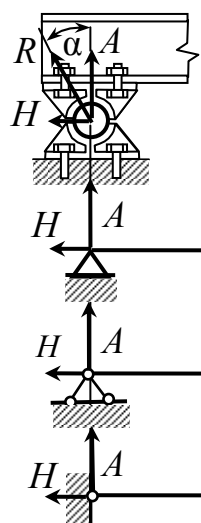


Рис. 5.4

В шарнирно-неподвижной опоре устанавливается два балансира (рис. 5.4). Такая опора не позволяет опорному сечению балки перемещаться ни по вертикали, ни по горизонтали. Следовательно, в такой опоре есть две кинематические связи, в которых возни-

Следовательно, в такой опоре есть две кинематические связи, в которых возни-

кает две реакции  $A$  и  $H$ , т.е. две проекции одной реакции  $R$ , направленной под углом  $\alpha$ . На схеме такая опора представляется одним из вариантов, показанных на рис. 5.4.

Если опора препятствует не только перемещению, но и повороту балки, то она называется жестким защемлением или заделкой (рис. 5.5). Это может быть опорная плита балки, прикрепленная болтами к неподвижному основанию или балка, уложенная в стену. На нижнем рисунке 5.5 показана расчетная схема заделки. Такая опора имеет три кинематические связи, в ней возникают три реакции – две реактивные силы и реактивный момент.

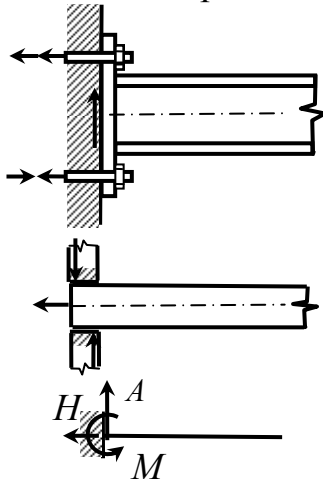


Рис. 5.5

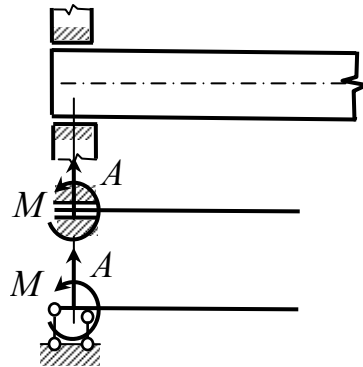


Рис. 5.6

На рис. 5.6 показана скользящая заделка. Это может быть балка в нише или стержень в трубке. Вдоль оси балка с такой опорой может свободно перемещаться, здесь возникает две связи, препятствующие перемещению по вертикали и повороту в плоскости, т.е. горизонтальной реакции в такой опоре быть не может. В

такой опоре могут возникать две реакции – реактивная сила поперек оси скольжения и реактивный момент.

Для расчета балки нужно знать всю внешнюю нагрузку как активную, так и реактивную. Так как опорные реакции чаще всего не задаются, то расчет балки нужно начинать с вычисления опорных реакций. Для этого используются уравнения равновесия. Для системы сил, как угодно расположенных в плоскости, можно составить лишь три независимых уравнения равновесия. Эти уравнения могут быть какими угодно, но во избежание их дублирования рекомендуется составлять сумму проекций всех сил на две взаимно перпендикулярные

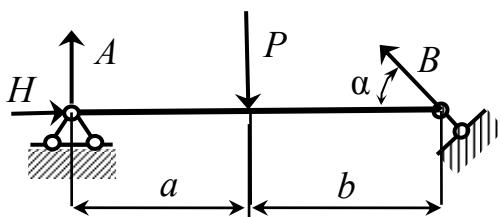


Рис. 5.7

оси и сумму моментов относительно произвольной точки:  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum M = 0$ .

Так, для балки, изображенной на рис. 5.7, получаем:

$$\sum M_A = 0: Pa - B(a + b)\sin \alpha = 0,$$

$$B = P \frac{a}{(a + b)\sin \alpha}.$$

$$\sum Y = 0: A - P + B\sin \alpha = 0, \quad A = Pb/(a + b).$$

$$\sum X = 0: H - B\cos \alpha = 0, \quad H = P \frac{a}{a + b} \operatorname{ctg} \alpha, \quad B = P \frac{a}{(a + b)\sin \alpha},$$

## 5.2. Внутренние силовые факторы при изгибе

В поперечном сечении балки возникает три вида внутренних усилий.

Они вычисляются методом сечений, описанным во введении.

На рис. 5.8 показана балка, нагруженная сосредоточенной силой  $P$ . Разрежем ее поперечным сечением на расстоянии  $x$  от левой опоры и рассмотрим в равновесии левую часть. Внешняя нагрузка на левом участке (реакция  $A$ ) может быть уравновешена потоком касательных усилий, направленных вниз. Равнодействующая потока внутренних касательных усилий в сечении называется **поперечной силой**. Из условия равновесия следует, что  $Q(x) = A$ .

Однако только поперечной силой  $Q(x)$  нельзя уравновесить левую часть балки, нагруженную реакцией  $A$ . Очевидно, в поперечном сечении, кроме касательных, возникают еще нормальные усилия. Из суммы проекций на продольную ось следует, что часть этих усилий направлена влево, а другая часть – вправо, так как в противном случае не будет удовлетворяться уравнение равновесия.

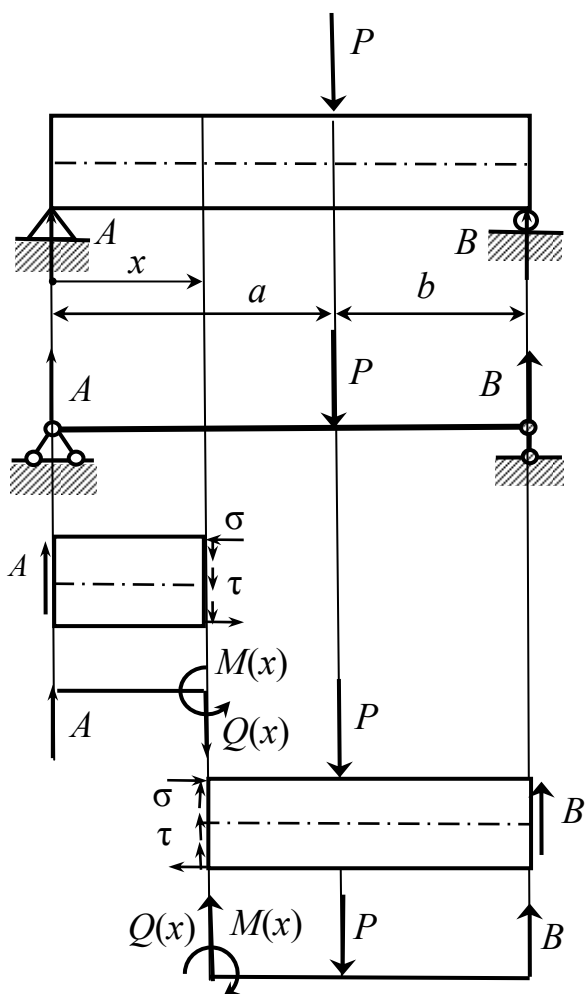


Рис. 5.8

Если не разрезать балку, то нельзя ставить вопрос об изображении поперечной силы. Ведь поперечная сила это усилие внутреннее, а внутреннее усилие можно показать только в месте разреза балки. Действительно, сложив две части балки, получим целую балку и поперечные силы при этом будут уравновешены. Поэтому на расчетной схеме балки (не разрезанной) поперечные силы не показываются, есть только внешняя нагрузка.

Таким же образом из условий равновесия правой части балки находим изгибающий момент  $M(x) = B(a + b - x) - P(a - x)$ . Подставляя сюда значение реакции  $B = P - A$ , получим прежнее значение  $M(x) = Ax$ .

Не рассматривая закона распределения этих усилий по площади сечения, можно заметить, что нормальные усилия образуют момент, противоположно направленный моменту, образованному силами  $A$  и  $Q(x)$ . Момент внутренних нормальных усилий в сечении балки называется **изгибающим моментом**. Из условия равновесия левой части балки следует, что  $M(x) = Ax$ .

Из условия равновесия правой части балки следует, что поток касательных усилий в рассматриваемом сечении направлен вверх. Обозначив его также через  $Q(x)$ , находим, что  $Q(x) = P - B$ , но  $P - B = A$ , т. е. это та же поперечная сила, которая была приложена к левой части балки вниз, но теперь она приложена к правой части балки вверх.

Если не разрезать балку, то нельзя ставить вопрос об изображении поперечной силы. Ведь поперечная сила это усилие внутреннее, а внутреннее усилие можно показать только в месте разреза балки.

Итак, **поперечная сила равна сумме проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения**, на направление, перпендикулярное оси стержня (на поперечное направление). Обращаем внимание на то, что при вычислении поперечной силы, нагрузка, направленная **слева от сечения вверх, берется с положительным знаком**, а при рассмотрении правой части балки, силы, направленные вверх, нужно брать с отрицательным знаком. С помощью метода сечений эти знаки получаются автоматически. Однако на практике при вычислении внутренних силовых факторов все этапы метода сечений не производятся, а просто учитывается вся нагрузка с одной стороны от сечения. При этом нужно строго придерживаться правила знаков.

**Изгибающий момент равен сумме моментов всех внешних нагрузок (сил и пар сил), взятых с одной стороны от сечения, относительно центра сечения. Изгибающий момент положительный, если нагрузка слева (справа) от сечения образует момент, направленный по ходу (против хода) часовой стрелки.**

Внутренние силовые факторы изменяются в зависимости от положения сечения. Характер изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки представляется в виде эпюр. Для построения эпюр следует: взять сечение на произвольном расстоянии  $x$  от любого начала координат; по вышеприведенному определению и правилу знаков составить аналитические функции поперечной силы и изгибающего момента; вычислив значения внутренних

силовых факторов на границах участков балки, построить графики функций  $Q(x)$  и  $M(x)$ .

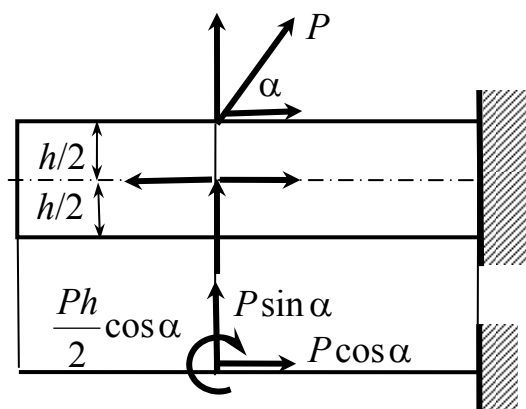


Рис. 5.9

На рис. 5.8. показана балка, нагруженная силой, направленной по нормали к оси балки. В общем случае силы могут быть наклонными (рис. 5.9). В этом случае заданная сила заменяется проекциями на продольное и поперечное направления. Проекции силы приводятся к оси балки, образуя поперечную нагрузку  $P \sin \alpha$  и момент  $Ph \cos \alpha / 2$  и продольную силу  $P \cos \alpha$ .

Аналогичным путем распределенная наклонная нагрузка  $q(x)$  (рис. 5.10) заменяется нормальной  $q(x) = p(x) \cos \alpha$  и касательной  $t(x) = p(x) \sin \alpha$  составляющими и распределенным моментом интенсивностью  $m(x) = p(x) h \cos \alpha / 2$ . От этих внешних нагрузок вычисляются внутренние силовые факторы и строятся эпюры.

Таким образом, в общем случае в поперечном сечении балки возникает три внутренних силовых фактора – **изгибающий мо-**

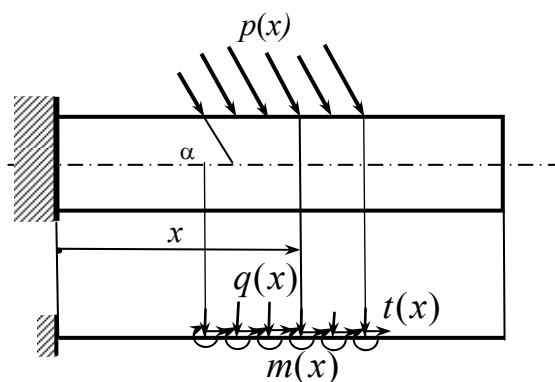


Рис. 5.10

мент  $M(x)$ , поперечная сила  $Q(x)$  и продольное усилие  $N(x)$ . Продольное усилие равно сумме проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, на направление оси стержня (на продольное направление). Так как продольное усилие вызывает растяжение или сжатие стержня, т.е. ранее изученную деформацию, то при изучении изгиба обычно рассматривается нагрузка, направленная по нормали к оси стержня. От такой нагрузки возникают только поперечная сила и изгибающий момент. Поэтому чаще всего в балках строятся только эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$ . Между эпюрами и нагрузкой существуют определенные дифференциальные зависимости, которые используются для проверки правильности построения эпюр.

### 5.3. Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами

Рассмотрим балку под действием произвольной нагрузки как сосредоточенной  $P$ ,  $M$  так и распределенной  $q$  (рис. 5.11).

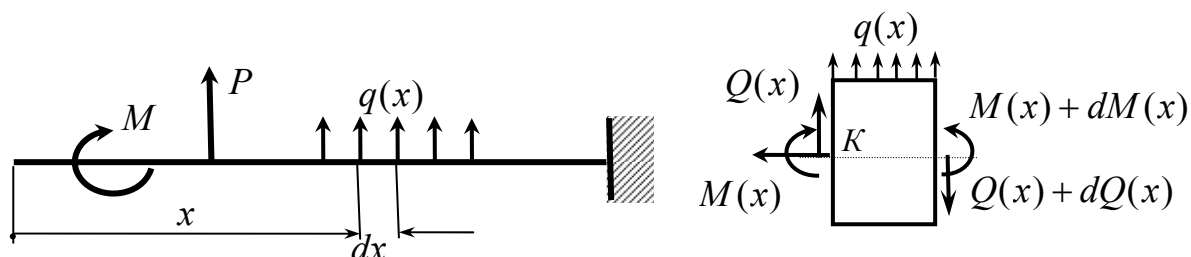


Рис. 5.11

Двумя поперечными сечениями, взятыми на расстоянии  $dx$  друг от друга, вырежем из балки элемент и рассмотрим его в равновесии под действием внешних нагрузок и внутренних усилий. Как внешние, так и внутренние усилия принимаем в соответствии с вышеприведенным правилом знаков положительно направленными. Условия равновесия принимают следующий вид:

$$\sum Y = Q(x) - Q(x) - dQ(x) + q(x)dx = 0,$$

$$\sum M_K = M(x) - M(x) - dM(x) + q(x)dx \frac{dx}{2} + Q(x)dx = 0.$$

Отсюда, пренебрегая величиной второго порядка малости, находим

$$q(x) = \pm \frac{dQ(x)}{dx}, \quad Q(x) = \pm \frac{dM(x)}{dx} \quad (5.1)$$

Первая зависимость (5.1) называется первой теоремой Журавского, вторая – второй теоремой. Отрицательные знаки в (5.1) окажутся в том случае, когда ось  $x$  будет направлена влево.

Характер изменения внутренних силовых факторов вдоль оси балки представляется в виде графиков, которые называются эпюрами.

## 5.4. Построение эпюр в балках

Построение эпюр внутренних силовых факторов выполняется в такой последовательности (**алгоритм 5**):

- определяется и показывается на расчетной схеме вся внешняя нагрузка (обычно активная нагрузка задается, а реакции опор следует вычислить);
- по определениям с учетом правила знаков составляются аналитические функции внутренних силовых факторов;
- по аналитическим функциям внутренних силовых факторов и их значениям на границах участков балки строятся эпюры;
- дифференциальные зависимости (5.1) используются для контроля правильности построения эпюр.

Рассмотрим построение эпюр на следующих примерах

**Задача 5.1.** Консольная балка (рис. 5.12) загружена сосредоточенной силой  $P$  и сосредоточенным моментом  $M$ .

Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

**Решение.** На левом участке  $Q(x) = 0$ ,  $M(x) = M$ ; на правом  $Q(x) = -P$ ,  $M(x) = -P(x - a) + M$ . При  $x = a$  (справа от силы  $P$ )  $Q(x) = -P$ ,  $M(x) = M$ .

При  $x = a + b$ ,  $Q = -P$ ,  $M(x) = -Pb + M$ .

При построении эпюр начало координат не обязательно сохранять в одной точке для всех участков. Часто более удобно переносить отсчет текущей координаты  $x$  в начало участков. Так, в рассматриваемом примере можно было для правого участка выбрать начало координат в точке приложения сосредоточенной силы.

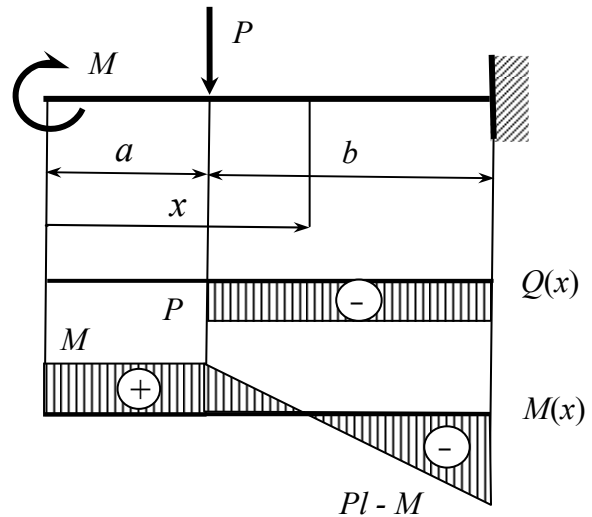


Рис. 5.12

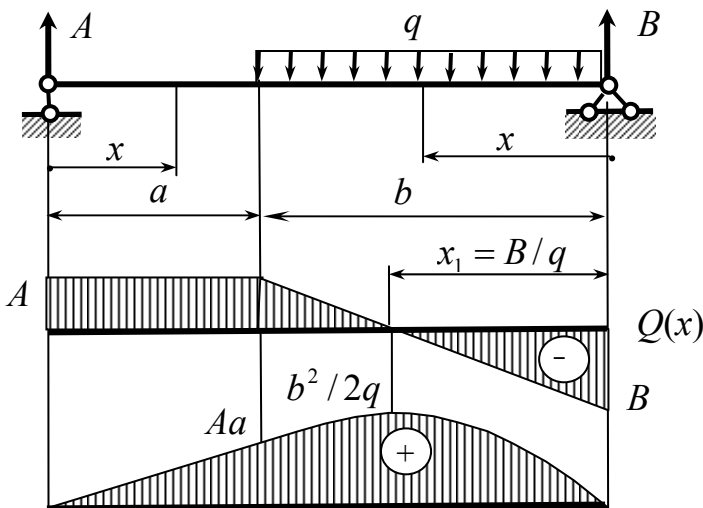


Рис. 5.13

**Задача 5.2.** Двухопорная балка на участке  $b$  загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  рис. (5.13).

Построить эпюры внутренних силовых факторов.

**Решение.** В этой балке в отличие от консоли неизбежно нужно вычислить опорные реакции:



$$A = qb^2 / (2(a + b)), \quad B = qb(a + b/2) / (a + b).$$

На левом участке:  $Q(x) = A$ ,  $M(x) = Ax = qb^2 x / (2(a + b))$ .

$$\begin{aligned} \text{На правом участке: } Q(x) &= -B + qx, \quad M(x) = Bx - \frac{qx^2}{2} = \\ &= \frac{qbx}{a+b} \left( a + \frac{b}{2} \right) - \frac{qx^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{При } x = b: Q = -\frac{qb}{a+b} \left( a + \frac{b}{2} \right) + qb = \frac{qb^2}{2(a+b)} = A,$$

$$M = \frac{qb^2}{a+b} \left( a + \frac{b}{2} \right) - qb^2 / 2 = qb^2 a / (2(a+b)) = Aa.$$

Для вычисления  $M_{\max}$  в соответствии с (5.1) положим  $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = 0$ .

Отсюда находим расстояние до сечения с максимальным моментом  $x = B/q$  и подставляем его в уравнение изгибающих моментов  $M(x)$ :

$$M_{\max} = x(B - qx/2) = \frac{B}{q} \left( B - \frac{B}{2} \right) = \frac{B^2}{2q} = \frac{qb^2(2a+b)^2}{8(a+b)^2}.$$

Если  $a = 0$ , то  $A = B = qb/2$  и посередине балки  $M_{\max} = qb^2/8$ .

**Задача 5.3.** Двухопорная балка загружена нагрузкой, изменяющейся по линейному закону (рис. 5.14).

Построить эпюры  $M(x)$  и  $Q(x)$ /

**Решение.** Прежде всего составим уравнения згибающего момента и поперечной силы:

$$M(x) = Ax - \int_0^x q(u) du \cdot u,$$

$$Q(x) = A - \int_0^x q(u) du.$$

Так как  $q(x) = qx/l$ ,  $q(u) = q(x-u)/l$ , то эти уравнения примут следующий вид

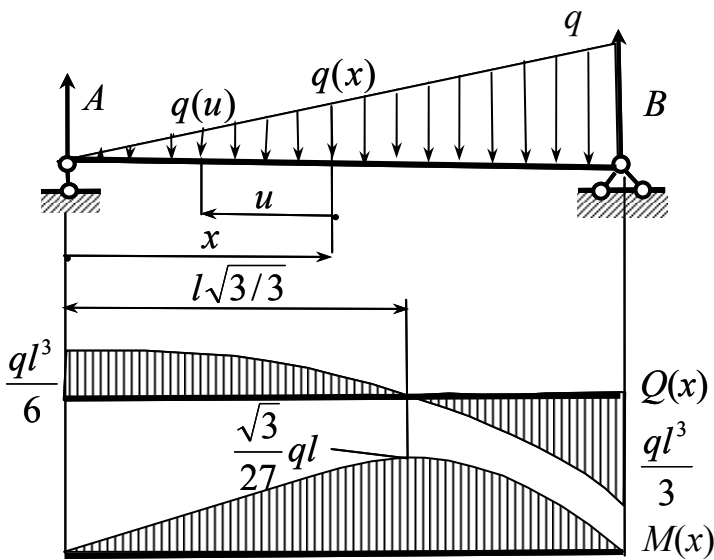


Рис.5.14

$$Q(x) = A - \int_0^x \frac{q}{l}(x-u) du = A - \frac{qx^2}{2l},$$

$$M(x) = Ax - \int_0^x \frac{q}{l}(x-u) du \cdot u = Ax - \frac{q}{l} \left( x \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^x = Ax - \frac{qx^3}{6l}$$

Замечаем, что слагаемое  $\frac{qx^2}{2l} = q(x)x/2$  представляет площадь треугольника

нагрузки, взятой слева от сечения  $x$ , а слагаемое  $\frac{qx^3}{6l} = \frac{q(x)x}{2} \cdot \frac{x}{3}$  - произведение площади треугольника с основанием  $x$  на расстояние до центра тяжести. Если площадь эпюры нагрузки и положение центра тяжести известны, то для составления функций  $M(x)$  и  $Q(x)$  можно обходиться без интегралов.

Учитывая, что при  $x=l$   $M=0$ , из функции  $M(x)$  вычисляем реакцию  $A = ql/6$ . Зная функции  $Q(x) = ql/6 - qx^2/(2l)$  и  $M(x) = \frac{qlx}{6}(1 - x^2/l^2)$  можно построить эпюры. Эпюра  $Q(x)$  ограничена квадратной параболой с экстремальным значением  $Q = A$  при  $x=0$ . Для вычисления  $M_{\max}$  положим  $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0$ . Отсюда находим  $x = l\sqrt{3}/3$  и подставляем в  $M(x)$ ,

$$M_{\max} = \frac{ql}{6} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{3} (1 - 1/3) = \frac{\sqrt{3}ql^2}{27}.$$

**Задача 5.4.** Балка загружена по схеме рис. 5.15.

Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

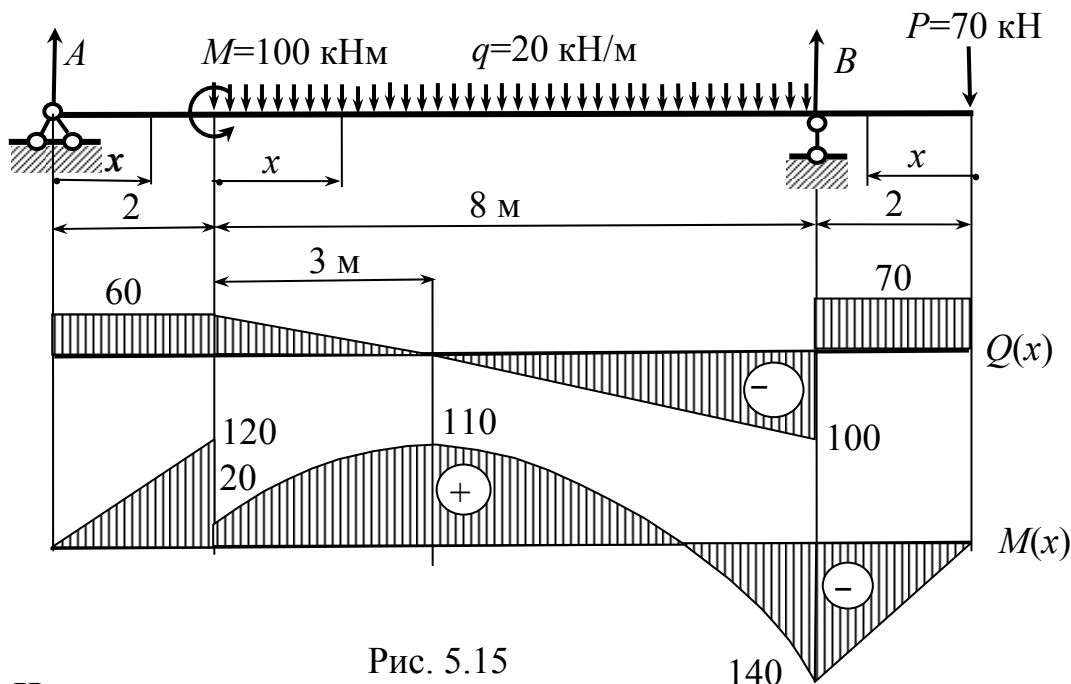


Рис. 5.15

**Н**

**Решение.** Находим опорные реакции:

$$\text{из } \sum M_B = A \cdot 10 - 100 - 20 \cdot 8 \cdot 4 + 70 \cdot 2 = 0, \quad A = 60 \text{ кН},$$

Первый (левый) участок:  $Q(x) = A = 60 \text{ кН}$ ,  $M(x) = Ax = 60x$ ,  $x \leq 0 \leq 2$

Второй (средний) участок:  $Q(x) = A - qx = 60 - 20x$ ,

$$M(x) = A(x+2) - \frac{qx^2}{2} - M = 60(x+2) - 20 \frac{x^2}{2} - 100, \quad 0 \leq x \leq 8$$

При  $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = 0$ , т.е.  $x = 3$  м,  $M_{\max} = 60 \cdot 5 - 10 \cdot 3^2 - 100 = 110$  кНм.

Третий (правый) участок:  $Q(x) = P = 70$  кН,  $M(x) = -Px = -70x$ .

Скачки (разрывы на эпюре) поперечных сил соответствуют сосредоточенным силам  $A$ ,  $B$ ,  $P$ . Скачок газпюре изгибающих моментов соответствует моменту  $M$ .

### 5.5 Контроль правильности построения эпюр

Проверку правильности построения эпюр при отсутствии распределенной моментной нагрузки удобно выполнять по теоремам Журавского.

Согласно первой теореме существует зависимость  $q = \frac{dQ}{dx}$ .

Отсюда следует:

- если  $q = 0$ , то  $Q = \text{const}$ , т.е. на тех участках, где нет распределенной нагрузки, на эпюре  $Q$  должны быть горизонтальные линии;
- если  $q = \text{const}$ , то  $Q = f(x)$ , т.е. на тех участках, где есть равномерно распределенная нагрузка, на эпюре  $Q$  будут наклонные прямые;
- если  $q = f_1(x)$ , то  $Q = f_2(x^2)$ , т.е. на участках с линейно распределенной нагрузкой на эпюре  $Q$  будет квадратная парабола.

Согласно второй теореме  $Q = \frac{dM}{dx}$ , т.е.  $\frac{d^2M}{dx^2} = q$ .

Отсюда следует:

- если  $Q = 0$ , то  $M = \text{const}$ , т.е. на тех участках, где нет поперечной силы, на эпюре  $M$  будут горизонтальные линии (см. рис. 5.12);
- если  $Q = \text{const}$ , то  $M = f_3(x)$ , т.е. на участках с постоянной поперечной силой на эпюре изгибающих моментов будут наклонные линии;
- если  $Q = f_4(x)$ , то  $M = f_5(x^2)$ ,  $q = \text{const}$ , т.е. на участках с нагрузкой постоянной интенсивности, где поперечная сила изменяется по линейному закону, на эпюре изгибающих моментов будет квадратная парабола.

В тех сечениях, где приложена сосредоточенная сила, будет разрыв функции  $Q(x)$ , т.е. на эпюре поперечных сил должен быть скачок, соответствующий величине и направлению сосредоточенной силы (рис. 5.12, 5.15). На всех эпюрах, в сечениях соответствующих опорам, скачки соответствуют реакциям.

В тех сечениях, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M(x)$  скачки соответствуют величине и направлению сосредоточенного момента (рис. 5.12, 5.15). В сечениях, соответствующих заделкам, скачки соответствуют опорным моментам.

### 5.6. Построение эпюр в рамах

Рамой называется система прямых стержней, жестко связанных между собою. Отдельные части рамы могут соединяться между собою шарнирами.

Эпюры в рамах строятся в такой же последовательности, как и в балках. Эпюра изгибающих моментов строится со стороны сжатых волокон стержня. Расположение сжатого волокна легко определяется по принципу независимости и сложения действия сил от каждой внешней нагрузки без учета ограничения перемещений отдельных сечений опорными связями.

Так, в раме, изображенной на рис. 5.16, изгибающий момент на стойке  $M(x) = Ax$  вызывает сжатие слева, в чем легко убедиться, если убрать опору и рассмотреть консоль длиной  $x$ , нагруженную сосредоточенной силой  $A$ . Знак поперечной силы не имеет существенного значения и определяется по правилу знаков для балки, образованной поворотом стержня рамы в горизонтальное положение. Продольное усилие считается положительным в случае растяжения.

Рассмотрим построение эпюр в рамах на конкретных примерах.

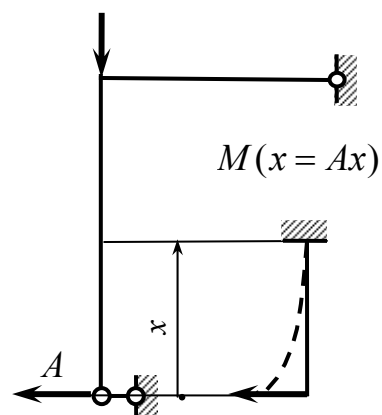


Рис. 5.16

**Задача 5.5.** Рама, представленная на рис. 5.17, нагружена равномерно распределенной нагрузкой на левой стойке.

Построить эпюры внутренних силовых факторов.

**Решение.** Опорные реакции вычисляются из уравнений равновесия:

$$\sum X = -H + qh = 0, \quad H = qh, \quad \sum M_A = qh^2/2 - Bl = 0, \quad B = qh^2/(2l),$$

$$\sum Y = -A + B = 0, \quad A = B.$$

На левой стойке  $M(x) = Hx - qx^2/2 = qhx - qx^2/2$ . Это уравнение квадратной параболы, выпуклость которой направлена навстречу нагрузке  $q$ . При  $x = h$   $M = qh^2/2$ .

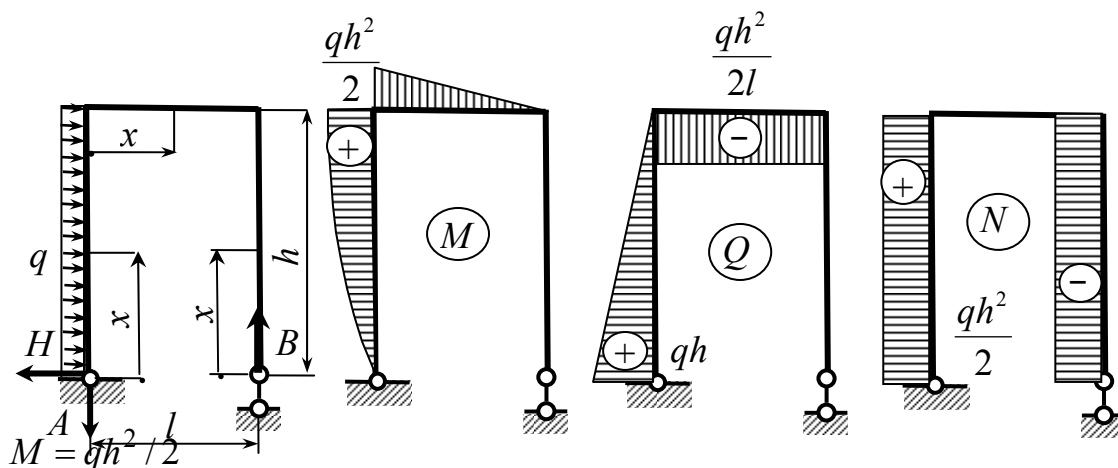


Рис. 5.17

Положительный знак указывает на то, что момент от первого слагаемого, т.е. от реакции  $H$ , больше, чем от распределенной нагрузки  $q$  (второе слагаемое). Следовательно, эпюру нужно строить на сжатом волокне, которое образуется от действия реакции  $H$ , т.е. слева.

Поперечные и продольные силы соответственно равны:

$$Q(x) = H - qx = q(h - x), \quad N(x) = A = qh^2/(2l).$$

На ригеле:  $M(x) = Hh - qh^2 / 2 - Ax$ ,  $Q(x) = -A$ ,  $N(x) = H - qh = 0$ .

На правой стойке:  $M(x) = 0$ ,  $Q(x) = 0$ ,  $N(x) = -B$ .

**Задача 5.6.** Рама загружена сосредоточенной силой в верхнем левом узле, рис. 5.18. Построить эпюры внутренних силовых факторов.

**Решение.** На нижней опоре возникает горизонтальная реакция и момент.

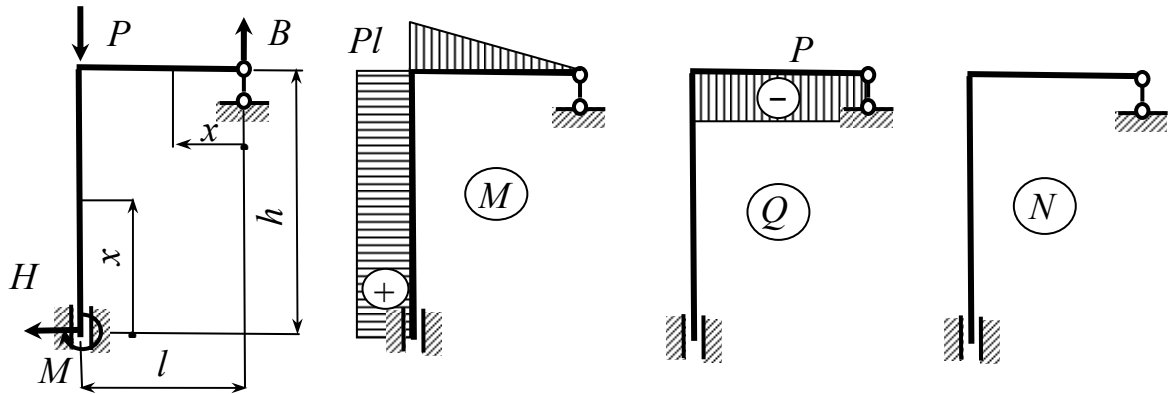


Рис. 5.18

Из уравнений равновесия находим опорные реакции:

$$\sum X = H = 0, \sum Y = -P + B = 0, B = P, \sum M_A = M - Bl = 0, M = Pl.$$

Внутренние силовые факторы:

на стойке:  $M(x) = M$ ,  $Q(x) = N(x) = 0$ .

на ригеле:  $M(x) = Bx$ ,  $Q(x) = -B$ ,  $N(x) = 0$ .

**Задача 5.7.** Рама с шарнирным сопряжением левой стойки с ригелем загружена вертикальной силой (рис. 5.19). Построить эпюры.

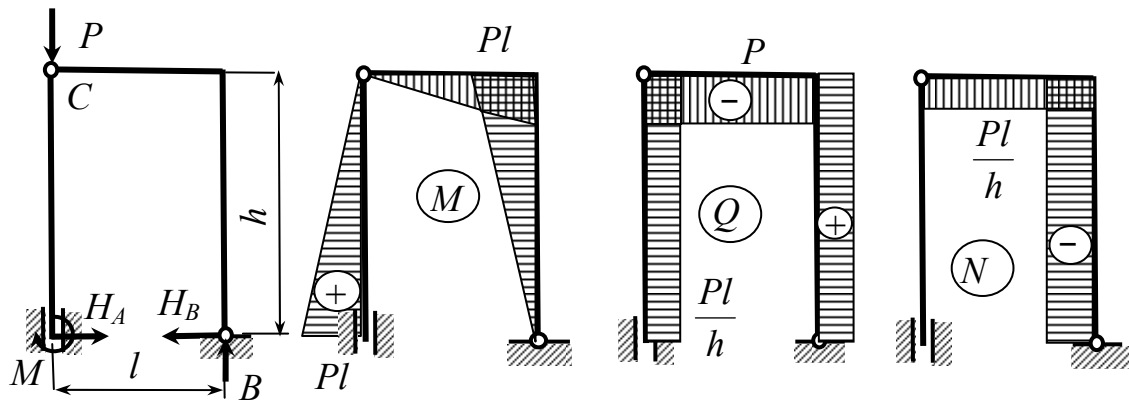


Рис. 5.19

**Решение.** Для вычисления четырех неизвестных реакций нужно составить три независимых уравнения равновесия и изгибающий момент в шарнире С приравнять нулю.

Из уравнения равновесия (суммы проекций всех сил на вертикальную ось  $\sum Y = -P + B = 0$ ) находим вертикальную реакцию  $B = P$ .

Приравнявая изгибающий момент в шарнире нулю, т.е. учитывая сумму моментов всех сил справа от шарнира, из  $M_c = Bl - H_B h = 0$  вычисляем горизонтальную реакцию на правой опоре  $H_B = Pl/h$ .

Остальные уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum X = H_A - H_B = 0, \quad H_A = Pl/h, \quad \sum M_A = M - Bl = 0, \quad M = Bl.$$

Эпюры строятся также, как в предыдущем примере по определению.

**Задача 5.8.** Рама (рис. 5.20), левая часть которой к правой части примыкает посредством шарнирного соединения с правой частью. Внизу левой стойки приложена горизонтальная сила  $P$ . Построить эпюры внутренних усилий.

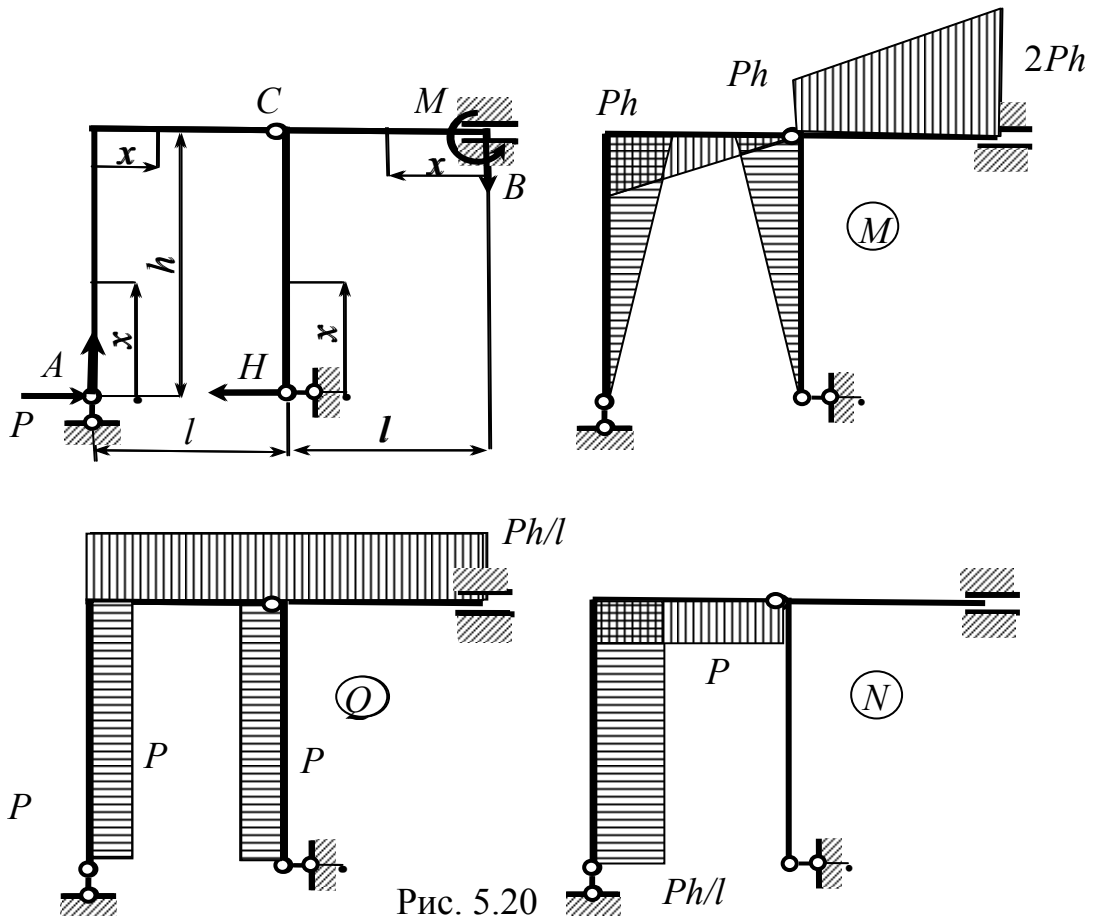


Рис. 5.20

**Решение.** Опорные реакции находим из следующих уравнений.

Изгибающий момент в шарнире равен нулю, при рассмотрении части рамы слева от шарнира  $C$  получим  $M_c = Al - Ph = 0$ ,  $A = Ph/l$ .

Из условий равновесия всей рамы получаем:  $\sum X = P - H = 0$ ,  $H = P$ ;

$$\sum Y = A - B = 0, \quad B = A; \quad \sum M_B = A \cdot 2l - Ph + Hh - M = 0, \quad M = 2Ph.$$

Внутренние силовые факторы:

на левой стойке  $M(x) = -Px$ ,  $Q(x) = -P$ ,  $N(x) = -A$ ;

на левом ригеле  $M(x) = Ax - Ph$ ,  $Q(x) = A$ ,  $N(x) = -P$ ;

на правой стойке  $M(x) = Hx$ ,  $Q(x) = H$ ,  $N(x) = 0$ ;

на правом ригеле  $M(x) = M - Bx$ ,  $Q(x) = B$ ,  $N(x) = 0$ .

**Задача 5.9.** Рама с рассекающим шарниром в узле сопряжения ригелей и стойки загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 5.21).

Построить эпюры внутренних силовых факторов.

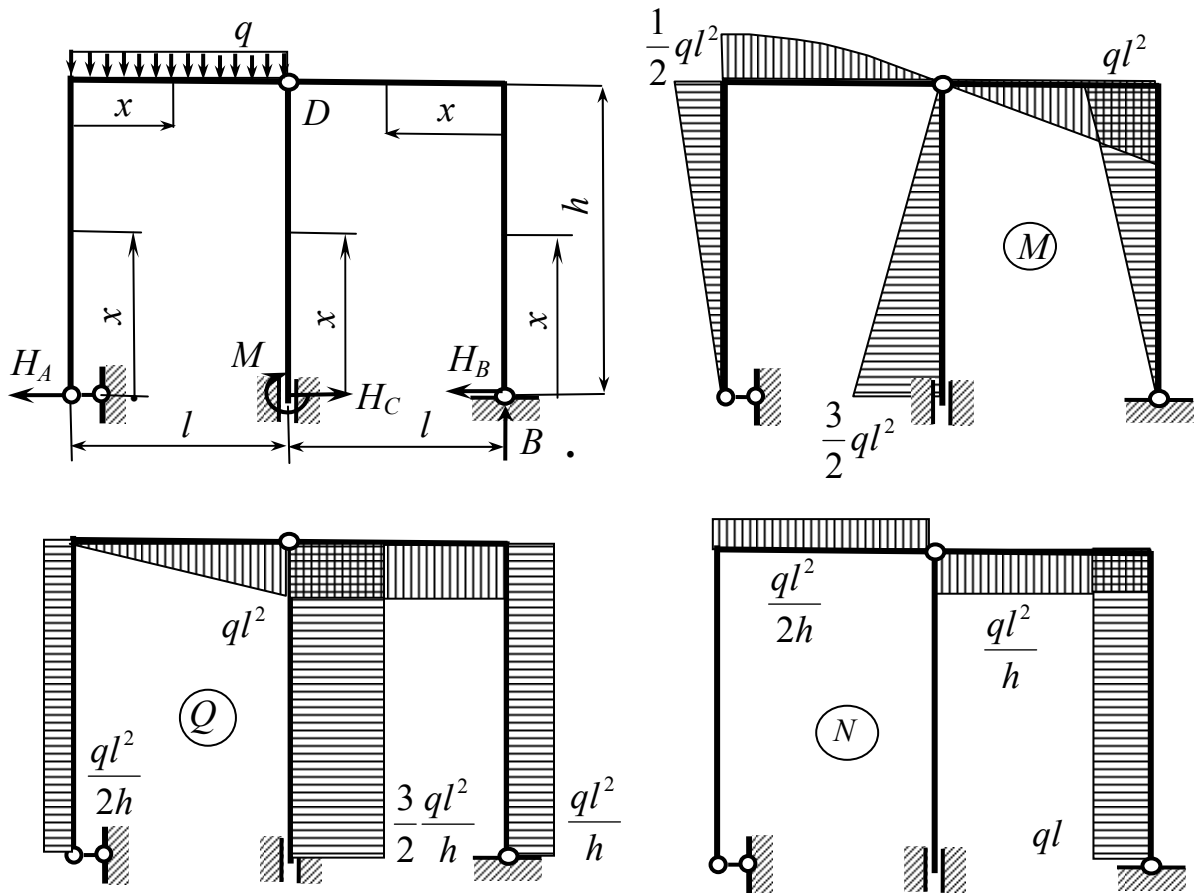


Рис. 5.21

**Решение.** Для вычисления пяти реакций, кроме уравнений равновесия, нужно составить два дополнительных уравнения, приравняв изгибающий момент в шарнире  $D$  нулю. Шарнир в точке  $D$  двойной, так как он соединяет три элемента. Такой шарнир снимает две кинематические связи, поэтому можно составить два дополнительных уравнения. Можно составить три дополнительных уравнения, но тогда лишь два уравнения равновесия будут независимыми.

Реакции находим из уравнений:

$$M_D = 0 \text{ (для нагрузки слева от шарнира), } H_A h - ql^2 / 2 = 0, H_A = ql^2 / (2h);$$

$$\sum Y = 0, B = ql;$$

$$M_D = 0 \text{ (берем нагрузку справа от шарнира), } Bl - H_B h = 0, H_B = ql^2 / h;$$

$$\sum X = 0, H_A - H_C + H_B = 0, H_C = 3ql^2 / (2h);$$

$$M_D = 0 \text{ (с учетом нагрузки снизу от шарнира), } M = H_C h = 3ql^2 / 2.$$

После этого вычисляем внутренние силовые факторы.

$$\text{На левой стойке: } M(x) = H_A x, Q(x) = H_A, N(x) = 0;$$

$$\text{на левом ригеле: } M(x) = H_A h - qx^2 / 2, Q(x) = -qx, N(x) = H_A;$$

на средней стойке:  $M(x) = M - H_C x$ ,  $Q(x) = -H_C$ ,  $N(x) = 0$ ;  
 на правой стойке:  $M(x) = -H_B x$ ,  $Q(x) = H_B$ ,  $N(x) = -B$ ;  
 на правом ригеле:  $M(x) = Bx - H_B h$ ,  $Q(x) = -B$ ,  $N(x) = -H_B$ .

### 5.7. Нормальные напряжения при изгибе

Так как изгибающий момент представляет момент внутренних нормальных усилий, то  $\sigma = f(M)$ . Поэтому для нахождения нормальных напряжений рассмотрим чистый изгиб, когда в сечениях балки возникают только изгибающие моменты. Это может быть балка, нагруженная по торцам моментами рис. 5.22, а).

Ограничимся (временно) рассмотрением балки, в поперечном сечении которой есть ось симметрии. В балке прямоугольного поперечного сечения такой осью является вертикальная ось  $y$  (наличие другой оси симметрии необязательно).

Подобно выводу напряжений при кручении применяем алгоритм познания истины (4.3.2,

Так как со-

противление ма-

риалов основано

на упрощающих

гипотезах, то для

формулировки

этих гипотез рас-

смотрим резуль-

таты эксперимен-

тальных наблю-

дений. С этой це-

лью до загрузки

на боковой по-

верхности бал-

ки проводим про-

дольные и попе-

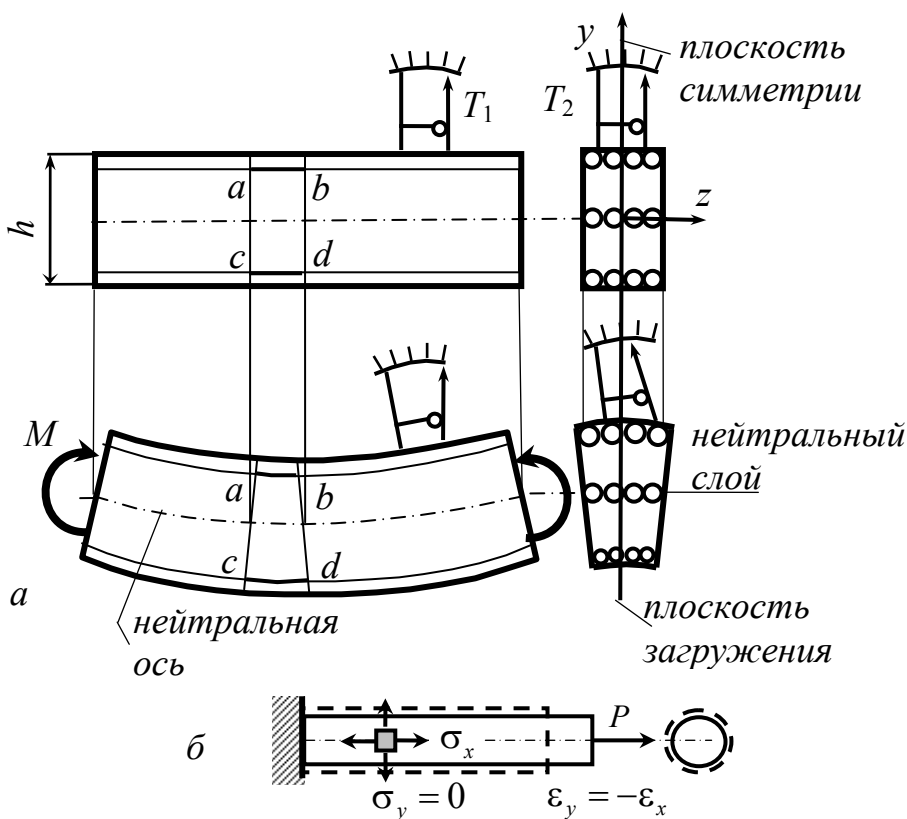


Рис. 5.22

После загрузки - **продольные линии искривляются и изменяются по длине**. Верхние линии ( $ab$ ) становятся короче, нижние ( $cd$ ) удлиняются. Среди них есть линии, не изменяющиеся по длине (рис. 5.22, а). Такие отрезки (не изменяющиеся по длине) вдоль балки образуют **нейтральную линию**.

**Поперечные линии не искривляются, а лишь поворачиваются вокруг некоторых точек**, лежащих на нейтральной линии.



**Торцы балки деформируются, сохраняя ось симметрии.** Вверху балка становится шире, внизу – уже. Если на балке установить два тензометра вдоль и поперек оси, то они покажут деформации разных знаков и величин.

**Деформация продольная в несколько раз больше, чем поперечная, и связь между ними такая же, как при растяжении, а именно  $\varepsilon_{\text{поп}} = -\mu\varepsilon_{\text{прод}}$**  ( $\mu$  – коэффициент Пуассона). Это первый этап алгоритма – **живое созерцание**.

Переходим ко второму этапу – к **абстрактному мышлению**. На основании перечисленных наблюдений вводятся следующие гипотезы.

**Поперечные сечения, плоские до загрузки, остаются плоскими и после загрузки.** Они не искривляются, а лишь поворачиваются вокруг некоторых линий. Эти линии вдоль балки образуют **нейтральный слой**. Эта гипотеза основана на том, что проекции мысленных поперечных сечений (линии  $ac, bd$  и др.) не искривляются, а только поворачиваются.

**Волокна друг на друга не давят, а испытывают простое растяжение или сжатие.** Волокно – это условное понятие. Представим, что балка изготовлена из отдельных, склеенных между собой проволок. После загрузки верхние проволоки, испытывающие сжатие, становятся толще, но они не нажимают друг на друга, просто балка в этом месте становится шире. Нижние проволоки, испытывающие растяжение, становятся тоньше, но они не отрываются друг от друга, просто балка в этом месте становится уже. Есть проволоки прежней толщины – на нейтральном слое. Это напряженное состояние такое же, как при растяжении – сжатии (рис. 5.17, б), когда вдоль оси стержня возникают напряжения  $\sigma_x = P/F$ , а поперек оси, несмотря на наличие деформаций, напряжения равны нулю.

**Деформации балки изменяются по высоте, а по ширине они постоянны.** Об этом свидетельствует сохранение оси симметрии балки при загрузке. Если бы деформации по ширине балки были переменными, то в поперечном сечении была бы неравнобокая трапеция.

Для вывода расчетной формулы напряжений используем **метод сечений**. Поперечным сечением разрежем балку на две части и рассмотрим одну часть в равновесии под действием внешних и внутренних сил (рис. 5.23).

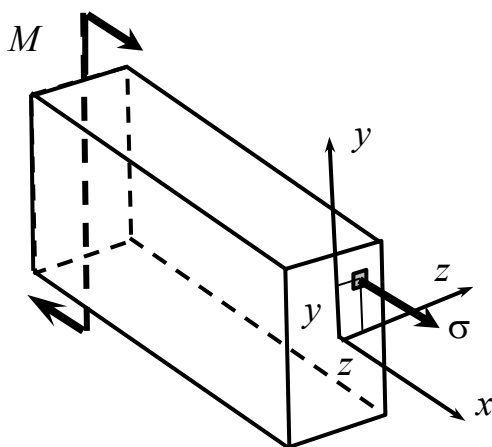


Рис. 5.23

**Выберем систему координат:**  $x$  – продольная ось,  $y$  – ось симметрии, через которую проходит плоскость загрузки, ось  $z$  проведем через нейтральный слой, положение которого пока неизвестно.

Элемент  $dF$  с напряжением  $\sigma$  выбираем в положительном квадранте. Из шести уравнений равновесия лишь три не тождественны нулю:

$$\sum X = 0, \int_F \sigma dF = 0, \quad (5.2)$$

$$\sum M_y = 0, \int_F \sigma dF z = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum M_z = 0, \int_F \sigma dF y = M_z, M_z = M \quad (5.4)$$

Здесь  $M_z = \int_F \sigma dF y$  - изгибающий момент, т.е. момент внутренних нормальных усилий в сечении относительно оси  $z$ .

Так же, как при кручении (4.3.2), уравнений равновесия недостаточно, **требуется составлять уравнения деформаций.**

Для вычисления интегралов (5.2) – (5.4) нужно знать подынтегральные функции, т.е. закон изменения напряжений  $\sigma$  по площади сечения  $F$ . Но так как напряжения пропорциональны деформациям, то **изучим закон изменения деформаций по высоте балки** (по ширине балки согласно третьей гипотезе деформации не изменяются). С этой целью двумя поперечными сечениями на

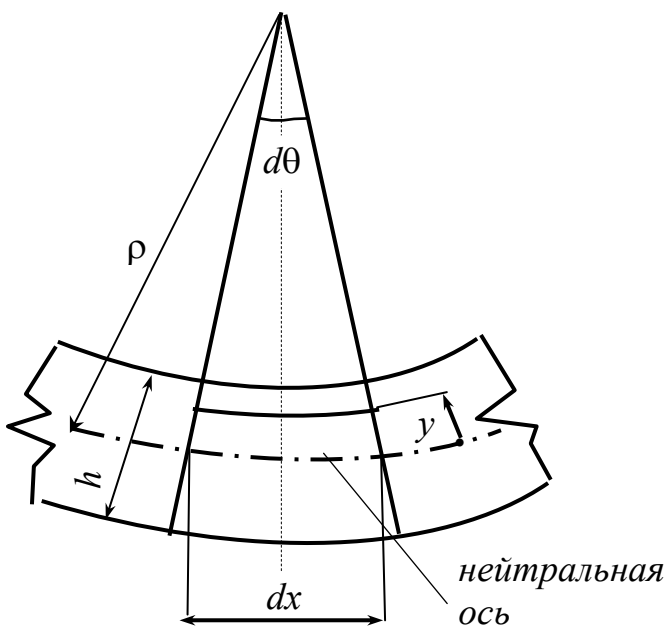


Рис. 5.24

расстоянии  $dx$  друг от друга из балки вырежем элемент и рассмотрим его в деформированном состоянии (рис. 5.24).

Нас интересует деформация волокна, взятого на произвольном расстоянии  $y$  от нейтральной оси  $z$ , где рассматривается напряжение. Первоначальная длина этого волокна, как и всех других волокон, была равна  $dx$ . Теперь такая длина сохранилась лишь на нейтральной оси балки, где  $dx = \rho d\theta$  ( $\rho$  - радиус кривизны изогнутой оси балки). Длина волокна после загрузки равна  $(\rho - y)d\theta$ . Относительная деформация волокна

$$\varepsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}.$$

Здесь использована первая гипотеза.

Согласно второй гипотезе на основании закона Гука представляем напряжение через деформацию

$$\sigma = \varepsilon E = -\frac{E}{\rho} y \quad (5.5)$$

Обращаем внимание на то, что **кривизна балки** при заданных конкретных условиях (при постоянной нагрузке  $M$ , модуле упругости  $E$  и поперечных размерах балки) **является постоянной величиной**, не зависящей от того, на каком расстоянии от нейтральной оси мы рассматриваем волокно.

Итак, закон изменения напряжений по высоте (площади) балки уже известен. Подставляя (5.5) в (5.2), получаем:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0, \text{ т.е. } \int_F y dF = S_z = 0$$

**Статический момент площади  $S_z$  равен нулю** только относительно осей центральных. Значит, **нейтральная ось  $z$  проходит через центр тяжести поперечного сечения балки.**

Подставляя (5.5) в (5.3), получаем:

$$\frac{E}{\rho} \int_F zy dF = 0, \text{ т.е. } \int_F zy dF = J_{zy} = 0.$$

**Центробежный момент инерции  $J_{zy}$  равен нулю** только относительно осей главных. Значит, **координатные оси  $zy$  не только центральные, но и главные.** Это значит, что **плоскость загрузки должна проходить через одну из главных осей**, а другая главная взаимно перпендикулярная ось, при этом будет нейтральной.

Подставляя (5.5) в (5.4), получим

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M_z, \text{ т.е. } \frac{E}{\rho} J_z = M_z$$

Отсюда получаем значение кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} \quad (5.6)$$

Здесь  $EJ_z$  - жесткость балки при изгибе,  $J_z$  - момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси  $z$ .

Подставляя (5.6) в (5.5), получаем расчетную формулу для вычисления нормальных напряжений при чистом изгибе

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y \quad (5.7)$$

Обращаем внимание на то, что в расчетной формуле (5.7)  $M(x)$  - **изгибающий момент, т.е. момент внутренних усилий, который берется из эпюр.**

Эта формула применима не только при чистом изгибе, но и в случае поперечного изгиба, когда в сечении балки возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Методами теории упругости доказано, что эта формула дает достоверные значения напряжений, если длина балки больше пяти высот ( $l \geq 5h$ ). В противном случае будет уже не балка, а балка-стенка, которую методами сопротивления материалов рассчитать нельзя.

Кроме этого стержень большой длины не может работать по балочной схеме, так как при этом балка превращается в гибкую нить, когда в поперечных сечениях возникают в основном лишь нормальные напряжения растяжения, и лишь на небольших участках приложения сосредоточенных сил возникают небольшие нормальные напряжения изгиба изогнуто-растянутого стержня. Границу превращения гибкой нити в балку можно найти из равенства нормальных напряжений изгиба балки и продольно-поперечного изгиба нити (см. (7.17) в [3])

$$\frac{l}{h} > 2,88 \sqrt{\frac{Ei}{\sigma h}},$$

где:  $l, h, I$  – длина, высота и радиус инерции площади поперечного сечения балки.

Из (5.7) видно, что нормальные напряжения по высоте балки изменяются по линейному закону. Наибольшие напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (5.8)$$

Здесь  $W_z = J_z / y_{\max}$  – момент сопротивления площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси  $z$ .

### 5.8. Подбор сечения балки

Размеры поперечного сечения балки определяются из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \text{ т.е. } \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Отсюда вычисляется момент сопротивления  $W_z$ , а по  $W_z$  определяются поперечные размеры балки.

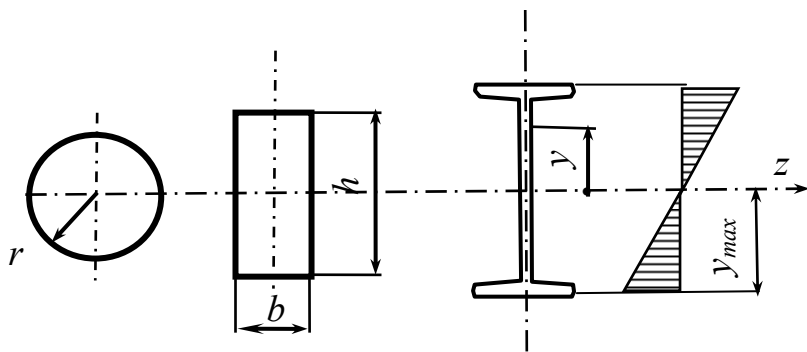


Рис. 5.25

В балке прямоугольного поперечного сечения наибольшие (одинаковые по величине) напряжения возникают лишь на верхней и нижней кромках сечения (рис. 5.25). Из условия прочности требуется найти момент сопротивления

$W_z \geq M / [\sigma]$ . Момент сопротивления для прямоугольника  $W_z = bh^2 / 6$ . Для определения поперечных размеров нужно задаваться отношением  $h/b = k$ . Тогда из условия прочности  $k^2 b^3 / 6 \geq M / [\sigma]$  найдем ширину балки  $b \geq \sqrt[3]{\frac{6M}{k^2 [\sigma]}}$  и

площадь поперечного сечения  $F = bh = kb^2 = \sqrt[3]{\frac{36M^2}{k[\sigma]^2}} = C / \sqrt[3]{k}$ . Отсюда следует,

что с увеличением высоты балки (отношения  $k$ ) площадь поперечного сечения уменьшается (табл. 5.1), т.е. сечение оказывается более экономичным.

Таблица 5.1

$k$	0,1	0,5	1	2	4	8	10
$F, \%$	215,4	125,9	100	79,4	63,0	50,8	46,4

Однако, тонкие высокие балки могут потерять устойчивость, стремясь под нагрузкой принять положение «плашмя». Так, для консоли при сосредоточенной силе  $P \geq \frac{4}{l^2} \sqrt{GJ_k EJ_y}$  происходит потеря устойчивости плоской формы изгиба.

По этой причине рекомендуется принимать  $k \leq 2$ .

Для балки круглого поперечного сечения момент сопротивления равен  $W_z = \pi r^3 / 4$ . Из условия прочности  $\pi r^3 / 4 \geq M / [\sigma]$  находим радиус  $r \geq \sqrt[3]{\frac{4M}{\pi[\sigma]}}$  и

площадь поперечного сечения  $F = \pi r^2 = \sqrt[3]{16\pi M^2 / [\sigma]^2}$ . Круглое сечение на изгиб работает еще хуже прямоугольного, так как в нем лишь в двух крайних точках напряжения будут допускаемыми. В остальных точках балки будет недо-напряжение, а на нейтральной оси, где  $\sigma = 0$ , основная масса материала балки не работает.

Из вышеприведенных формул видно, что площадь поперечного сечения круглой балки больше площади равнопрочной прямоугольной балки в  $\sqrt[3]{4\pi/9} = 1,117$  раза. Об эффективности балки судят по удельному моменту сопротивления  $W/F$ , который для балок круглого и прямоугольного сечения соответственно равен  $r/4 = 0,125h$  и  $h/6 = 0,166h$ .

Чем дальше от нейтральной оси удалена основная площадь сечения, тем эффективнее поперечное сечение балки, работающей на изгиб. Таким эффективным сечением является двутавр (рис. 5.25), в нем основную нагрузку несут полки. Размеры поперечного сечения двутавра определяются по сортаменту ГОСТ после вычисления момента сопротивления  $W$ .

Допустим, наибольший изгибающий момент в балке равен 40 кНм. Из условия прочности вычисляем  $W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 250 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3$ .

Согласно ГОСТ 8239-79 таким моментом сопротивления обладает двутавр 22, а (с массой 25,8 кг/м). Если бы двутавр работал плашмя (при расположении стенки горизонтально), то следовало бы принять 2 50 (с погонной массой 157 кг/м), т.е. с расходом металла в 6.08 раза больше. Следует иметь в виду, что

двутавр должен работать в положении с вертикально расположенной стенкой (при вертикальной нагрузке). Заметим, что для прокатных профилей двутавра  $W/F = (0,3...0,33)h$ .

### 5.9. Касательные напряжения при изгибе

При поперечном изгибе, когда в сечениях балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы, возникают не только нормальные, но и касательные напряжения.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную сосредоточенной силой  $P$  (рис. 5.26).

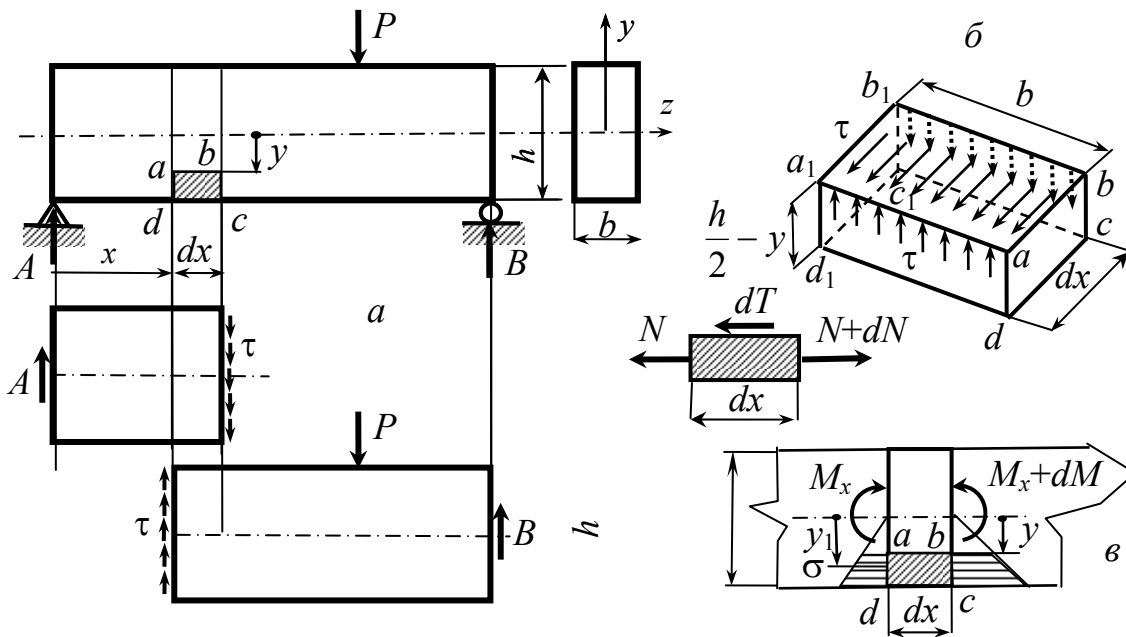


Рис. 5.26

Двумя поперечными сечениями на расстоянии  $dx$  друг от друга вырезаем из балки элемент. По граням этого элемента, как показано на рис. 5.26 действуют одинаковые касательные напряжения, направленные в разные (противоположные) стороны. Из этого элемента горизонтальной плоскостью на произвольном расстоянии  $y$  от нейтральной оси отрезаем параллелепипед и рассматриваем его в равновесии (рис. 5.26, б). Предполагается, что касательные напряжения по ширине балки не изменяются, а по закону парности на горизонтальной грани  $abb_1a_1$  возникают такие же равномерно распределенные касательные напряжения  $\tau$ . Эти напряжения легко находятся из уравнения равновесия параллелепипеда, т.е. суммы проекций всех сил на продольную ось

$$dT = dN \quad (5.09)$$

Здесь  $dT = \tau b dx$  - равнодействующая нормальных усилий на вертикальной грани  $add_1a_1$ .

Равнодействующая нормальных усилий на левой вертикальной грани  $abb_1a_1$  (см. рис. 5.26, в)

$$N = \int_{F_0} \sigma dF = \int_{F_0} \frac{M(x)}{J_z} dF = \frac{M(x)}{J_z} \int_{F_0} y_1 dF = \frac{M(x)}{J_z} S_z^*(y).$$

Здесь  $S_z^*(y)$  - статический момент площади  $F_0$  грани  $add_1a_1$  относительно нейтральной оси  $z$ .

Аналогично можно найти равнодействующую нормальных усилий  $N + dN$  на правой грани параллелепипеда, где в отличие от левой грани действует изгибающий момент  $M(x) + dM(x)$ . Следовательно,

$$dN = \frac{dM(x)}{J_z} S_z^*(y)$$

и на основании (5.09) получаем равенство  $\tau b dx = \frac{dM(x)}{J_z} S_z^*(y)$ , откуда находим

$\tau = \frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{S_z^*(y)}{bJ_z}$ . Но согласно (5.1)  $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$ . Таким путем получаем расчетную формулу касательных напряжений при изгибе

$$\tau = \frac{Q(x) S_z^*(y)}{bJ_z}. \quad (5.10)$$

Здесь:  $\tau$ - касательные напряжения в поперечном (продольном) сечении балки на произвольном расстоянии  $y$  от нейтральной оси;  $Q(x)$ - поперечная сила в том сечении, где вычисляется напряжение;  $b$ - ширина балки в том месте, где вычисляются напряжения  $\tau$ ;  $J_z$ - момент инерции площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси  $z$ ;  $S_z^*(y)$ - статический момент относительно нейтральной оси  $z$  части площади поперечного сечения балки, расположенной выше или ниже того места, где вычисляются напряжения.

Формула (5.10) была получена Д.И. Журавским и носит его имя.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения (рис. 5.27). Размеры поперечного сечения  $b$ ,  $h$  и поперечная сила  $Q(x)$  заданы. Момент инерции площади поперечного сечения  $J_z = bh^3/12$ . Все вышеперечисленные параметры постоянные. Переменной величиной является лишь статический момент части площади (на рис. 5.27 эта площадь заштрихована) относительно нейтральной оси  $z$

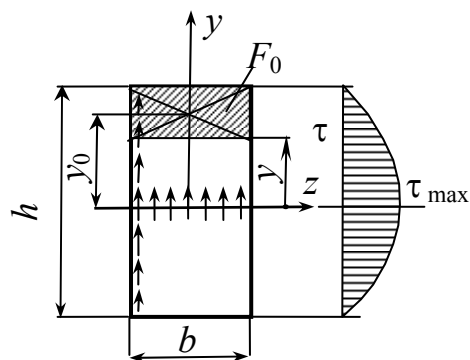


Рис.5.27

$$S_z(y) = F_0 y_0 = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Согласно (5.10) получаем

$$\tau = \frac{Q \cdot 12}{bh^3 b} \cdot \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \quad (5.11)$$

Отсюда видно, что касательные напряжения по высоте балки изменяются по параболическому закону. Наибольшее напряжение на нейтральной оси

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}.$$

Рассмотрим балку круглого поперечного сечения, рис.5.28.

Прежде всего вычисляем статический момент части площади сечения (заштрихованной на рис. 5.28) относительно нейтральной оси  $z$ :  $y = r \cos \psi$ ,

$$dy = -r \sin \psi d\psi, \quad b = 2r \sin \psi,$$

$$S_z^*(y) = 2 \int_0^\psi r^3 \sin^2 \psi \cos \psi d\psi = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \psi.$$

Так как  $J_z = \pi r^4 / 4$ , то по (5.10) получаем

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F} \sin^2 \psi. \quad (5.12)$$

На нейтральной оси при  $\psi = 0$ ,

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}.$$

Не зная направления касательного напряжения в произвольной точке  $A$  (рис. 5.28), разложим его на нормальную  $\tau_n$  и касательную  $\tau$  составляющие. Но составляющая  $\tau_n = 0$ , так как равно нулю соответствующее по закону парности напряжение на поверхности балки. Следовательно, у поверхности балки напряжение  $\tau$  может быть направлено только по касательной к контуру поперечного сечения. Лишь по оси симметрии напряжение  $\tau$  направлено по вертикали. Очевидно, в остальных точках на прямой  $AB$  напряжения также будут наклонны к оси  $y$ , но наклон уменьшается с приближением к оси  $y$ . Можно предположить, что направления напряжений, действующих на одном уровне, пересекаются в общей точке. Раскладывая напряжение  $\tau$  на вертикальную  $\tau_y$  и горизонтальную  $\tau_z$  составляющие, можно считать, что вертикальные составляющие по ширине балки распределяются равномерно. Из вывода формулы Журавского следует, что по (5.10) вычисляются только вертикальные составляющие касательных напряжений, т.е.  $\tau_y$ .

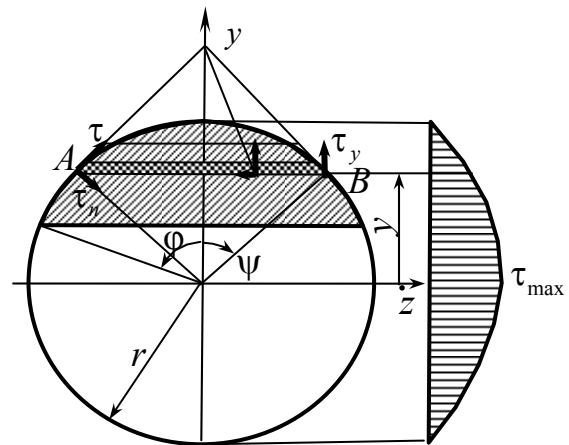


Рис. 5.28



## 5.10. Подбор сечения балки и полная проверка прочности

Поперечные размеры балки определяются из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Отсюда вычисляется момент сопротивления  $W_z$ , определяющий размеры поперечного сечения (см. 5.8). При этом имеется в виду прочность элементов наиболее удаленных от нейтральной оси, по граням которых действуют  $\sigma_{\max}$ , но

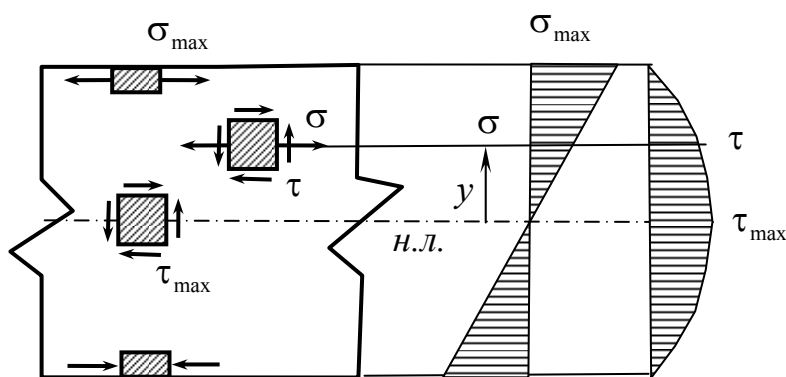


Рис. 5.29

$\tau = 0$  (см. рис. 5.29).

После определения поперечных размеров балка проверяется на касательные напряжения из условия  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ . При этом учитывается прочность элемента, расположенного на нейтральной оси, по граням которого действуют  $\tau_{\max}$ , но

$\sigma = 0$ .

В некоторых случаях может оказаться, что существует элемент балки, расположенный на некотором расстоянии  $y$  от нейтральной оси, который находится в более неблагоприятных условиях, так как по его граням действуют одновременно и  $\sigma$  и  $\tau$  (хоть и не наибольшие, но оба). Прочность такого элемента, находящегося в условиях плоского напряженного состояния, проверяется по главным напряжениям по соответствующей теории.

Главные напряжения при изгибе вычисляются по формуле (2.10)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.12)$$

Согласно второй теории прочности расчетное напряжение вычисляется по (2.16); при  $\mu = 0,3$

$$\sigma_p^{II} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.13)$$

По третьей теории (2.18)

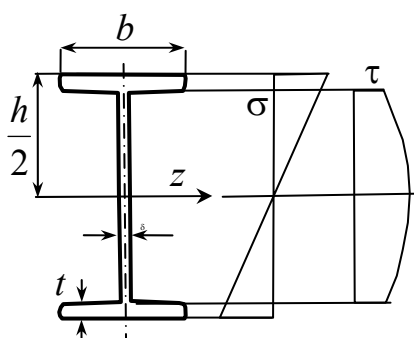
$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.14)$$

По четвертой теории (2.19)

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (5.15)$$

Расчетное напряжение не должны превышать допускаемого  $\sigma_p \leq [\sigma]$ .

Для проверки прочности балки по главным напряжениям нужно по эпюрам найти такое сечение, в котором возникают относительно большие  $M$  и  $Q$ . В этом сечении проверяется элемент, по граням которого действуют относительно большие  $\sigma$  и  $\tau$ . Такой элемент находится в местах резкого изменения поперечного сечения балки. В двутавре такой элемент находится в стенке под полкой (рис. 5.30). Здесь согласно (5.14) получаем условие



$$\sqrt{\left[\frac{M}{J_z} \left(\frac{h}{2} - t\right)\right]^2 + 4 \left[\frac{Q}{\delta J_z} b t \frac{h-t}{2}\right]^2} \leq [\sigma] \quad (5.16)$$

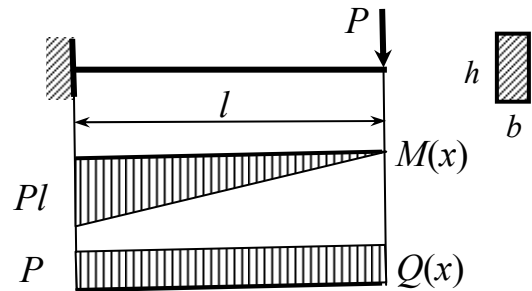
Рис. 5.30

Следует иметь в виду, что на главные напряжения проверяются балки в особых случаях загрузки, когда большие сосредоточенные силы приложены на небольших расстояниях друг от друга. Рядовые (особенно прокатные) балки чаще всего рассчитывают лишь на нормальные напряжения, так как  $\sigma_{\max} \gg \tau_{\max}$ . Например, в консоли

прямоугольного сечения от сосредоточенной силы возникают напряжения (см. рис. 5.31):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl}{bh^2} 6,$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{2bh}$$



Так как  $l \gg 5h$ , то  $\sigma_{\max} / \tau_{\max} \geq 4l/h = 20$ .

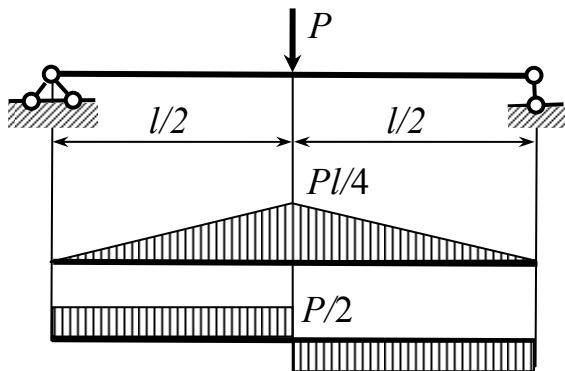


Рис. 5.32

3

Рис. 5.31

**задача 5.10.** Для двухопорной стальной балки, представленной на схеме рис. 5.32, ( $l=4$ ,  $P=40$  кН) подобрать поперечные размеры в предположении круглого, прямоугольного и двутаврового профиля. Проверить балки на касательные напряжения и сравнить их массы.

**Решение.** Наибольший расчетный изгибающий момент посередине пролета  $M_{\max} = Pl/4 = 40$  кНм. Из условия прочности

по нормальным напряжениям требуется балка с моментом сопротивления

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 250 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3$$

По ГОСТ 8239-89 подбираем двутавр № 22,  $a$  с площадью поперечного сечения  $F_1 = 32,8 \text{ см}^2$ , момент сопротивления  $W_z = 254 \text{ см}^3$ , статический момент полуплощади  $S_z^* = S_{\max} = 143 \text{ см}^3$ .

Для балки прямоугольного сечения примем отношение высоты  $h$  к ширине  $b$   $k = h/b = 2$ . Тогда  $W_z = bh^2/6 = 2b^3/3$ . Отсюда находим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_z} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 250} = 7,21 \text{ см.}$$

Площадь поперечного сечения

$$F_n = bh = 2b^2 = 104 \text{ см}^2.$$

Для балки круглой  $W_z = \pi r^3/4$ ,  $r \geq \sqrt[3]{4W/\pi} = \sqrt[3]{4 \cdot 250/\pi} = 6,83 \text{ см}$ .

Площадь поперечного сечения  $F_0 = \pi r^2 = 146,5 \text{ см}^2$ .

Сравнение масс балок:

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{146,5}{32,8} = 4,47, \quad \frac{F_n}{F_1} = \frac{104}{32,8} = 3,17.$$

Наибольшие касательные напряжения в двутавре

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{\delta J_z} = \frac{P S_{\max}}{2 \delta J_z} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 18,98 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,98 \text{ МПа}.$$

В балке прямоугольного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{2bh} = \frac{3}{2} \frac{40 \cdot 10^3}{2 \cdot 104 \cdot 10^{-4}} = 2,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,88 \text{ МПа}.$$

В балке круглого сечения

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3F} = \frac{2P}{3\pi r^2} = \frac{2}{3} \frac{40 \cdot 10^3}{146,5 \cdot 10^{-4}} = 1,82 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,82 \text{ МПа}.$$

**Задача 5.11.** Для балки, представленной на рис. 5.33, подобрать двутавр и проверить его на касательные и главные напряжения.

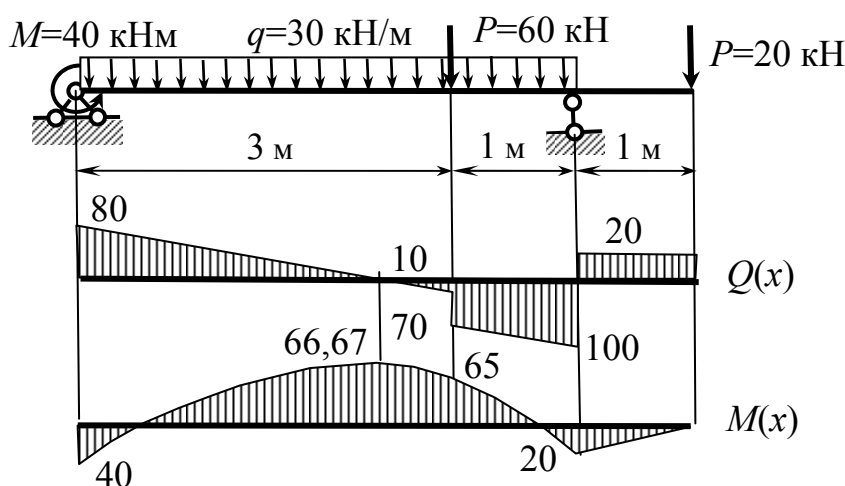


Рис.5.33

**Решение.** Из эпюр следует, что наибольший изгибающий момент в балке  $M_{\max} = 66,67 \text{ кНм}$ . По этому моменту подбирается двутавр

$$W = \frac{66,67 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 418,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 418,7 \text{ см}^3.$$

Такому моменту сопротивления соответствует двутавр 27, а ( $W = 407 \text{ см}^3$ , перенапряжение 2,8 %).

Проверяем двутавр на касательные напряжения в сечении с наибольшей поперечной силой  $Q = 100 \text{ кН}$ .

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{\delta J_z} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 69,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 69,4 \text{ МПа}.$$

Это напряжение меньше допускаемого  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

На главные напряжения проверяется балка в сечении с  $M = 65 \text{ кНм}$  и  $Q = 70 \text{ кН}$ . В стенке под полкой двутавра возникают напряжения:

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y = \frac{65 \cdot 10^3 (13,5 - 1,02) \cdot 10^{-2}}{5500 \cdot 10^{-8}} = 147,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 147,5 \text{ МПа}.$$

$$\tau = \frac{QS}{bJ} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 13,5 \cdot 1,02 (13,5 - 0,51) \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 37,94 \cdot 10^6 \text{ Па} = 37,94 \text{ МПа}.$$

Расчетное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{147,5^2 + 4 \cdot 37,94^2} = 165,8 \text{ МПа} > 160.$$

Если перенапряжение недопустимо, то следует принять очередной двутавр № 30.

## 5.11. Вычисление перемещений при изгибе

При изгибе поперечные сечения балки перемещаются и поворачиваются (см. рис. 5.34). Перемещение центра тяжести поперечного сечения по вертикали называется прогибом. Наклон поперечного сечения называется углом поворота. При заданных конкретных условиях, когда нагрузка, размеры балки и материал

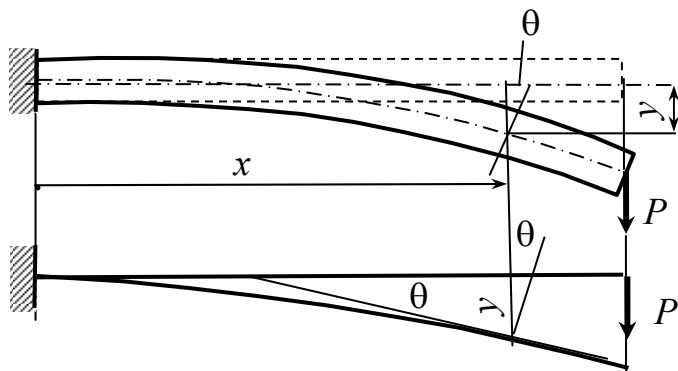


Рис. 5.34

не изменяются, перемещения зависят лишь от положения сечения, т.е.  $y = f_1(x)$ ,  $\theta = f_2(x)$ . Задача по вычислению перемещений заключается в разыскании этих функций.

Существует много методов вычисления перемещений. Ограничимся рассмотрением основных методов.

### 5.11.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Рассмотрим балку, нагруженную сосредоточенной силой  $P$  (рис. 5.35). Задача заключается в разыскании уравнения изогнутой оси балки (уравнения прогибов)  $y(x) = f_1(x)$  и уравнения углов поворота  $\theta = f_2(x)$ .

В сечении на расстоянии  $x$  от опоры возникают прогиб  $y$  и угол поворота  $\theta$ . На расстоянии  $dx$  от прежнего сечения прогиб будет  $y + dy$ , а угол пово-

рота  $\theta - d\theta$ . Эти два сечения образуют между собою угол  $d\theta$ , пересекаясь на расстоянии  $\rho$  ( $1/\rho$  - кривизна изогнутой оси балки в рассматриваемом сечении).

Образованная этими двумя сечениями дуга равна  $ds = \rho d\theta$ , т.е. кривизна  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$ . Из элементарного треугольника следует:

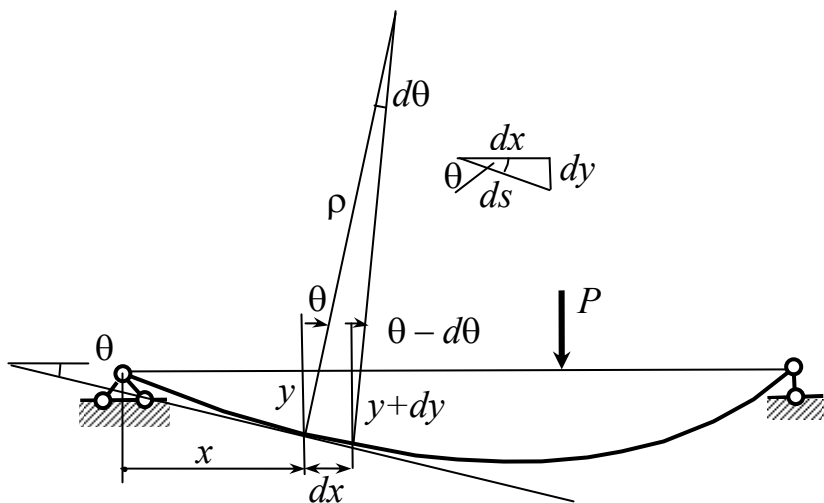


Рис. 5.35

$$ds = \frac{dx}{\cos \theta}, \text{ тогда}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \cos \theta, \text{ а } \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$$

Дифференцированием  $y'$  получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (\operatorname{tg} \theta)' \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dx},$$

$$\text{т.е. } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^2 \theta.$$

По тангенсу находим косинус

$$\cos \theta = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} \text{ и подставляем в кривизну}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \cos \theta = \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^3 \theta = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Но кривизна балки зависит от изгибной жесткости и нагрузки (см. 5.6)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ_z}.$$

Приравнявая два значения кривизны, получаем точное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ_z} \quad (5.17)$$

В инженерных конструкциях углы поворота небольшие  $\theta < 1 \dots 2^\circ$ . При таких углах  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ , т.е.  $\frac{dy}{dx} \approx \theta$ , а  $\cos \theta \approx 1$ . Это значит, что  $ds \approx dx$ , т.е. сечения

опускаются практически по вертикали. Тогда в (5.17) углом поворота  $\frac{dy}{dx}$  мож-

но пренебречь по сравнению с единицей, что приводит к приближенному дифференциальному уравнению изогнутой оси, которым пользуются в инженерной практике.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EJ_z}. \tag{5.18}$$

Однако, как показано в 5.18.5\* [3], уравнением (5.18) можно пользоваться и при больших углах поворота, если наибольший прогиб не превышает одной четверти длины балки.

Знаки в этом уравнении зависят от направления оси  $y$ , как показано на рис. 5.36. В дальнейшем ось  $y$  будем направлять только вверх. Это значит, что уравнение (5.18) будем брать только с положительным знаком.

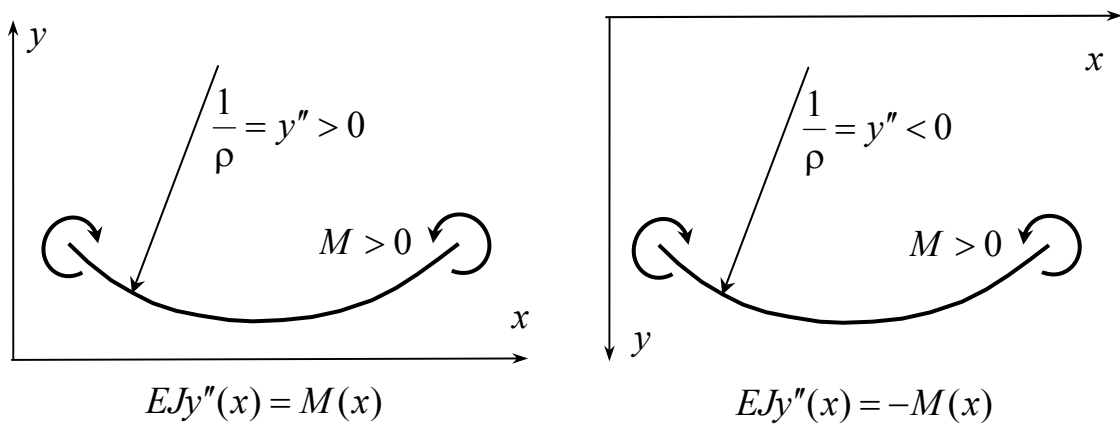


Рис. 5.36

Интегрируя (5.18), получим уравнение углов поворота поперечных сечений

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ_z} dx + C.$$

Интегрируя вторично, получаем уравнение изогнутой оси балки

$$y = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ_z} dx + Cx + D.$$

Знаки углов поворота в соответствии с тангенсом угла наклона касательной к изогнутой оси балки показаны на рис. 5.37. Поворот сечения против хода часовой стрелки положительный (отрицательный), если координатная ось  $x$  направлена вправо (влево).

Обращаем внимание на то, что в исходном уравнении (5.18)  $M(x)$  - функция  $x$ , т.е. изгибающий момент в произвольном сечении, и независимо от того, где вычисляются перемещения, это должна быть переменная величина, а не конкретное значение изгибающего момента.

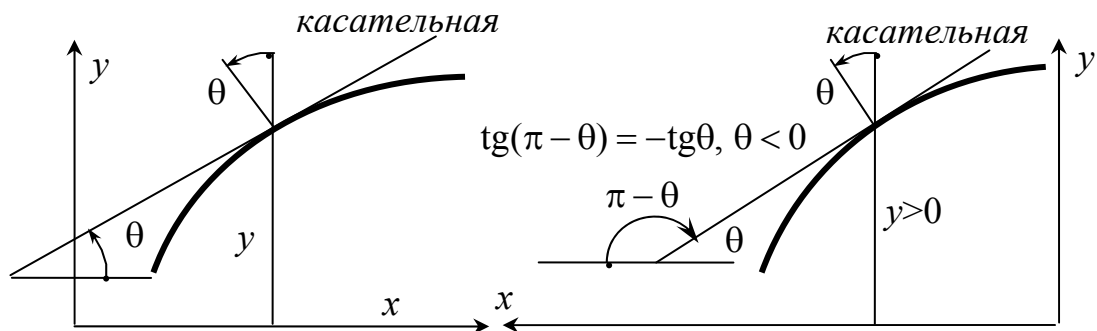


Рис.5.37

Так как функция  $M(x)$  изменяется по участкам балки, то дифференциальных уравнений (5.18) должно быть столько, сколько участков на балке. Значит, постоянных интегрирования  $C$  и  $D$  будет в два раза больше количества участков. Постоянные интегрирования вычисляются из условий сопряжения участков балки (граничные условия) и условий закрепления балки на опорах (опорные условия). На границах участков нужно приравнять прогибы и углы поворота (с учетом их знаков), а на опорах перемещения заведомо известны.

После получения уравнения изогнутой оси балки, т.е. после решения уравнения (5.18) в общем виде, можно вычислить перемещения в конкретных сечениях.

### 5.11.2. Вычисление перемещений неопределенными интегралами

Решение дифференциального уравнения (5.18) с применением неопределенного интегрирования оказывается более удобным, чем решение в определенных интегралах особенно, если на балке есть несколько участков (см. 5.18.2 в [2]). Поэтому именно такое решение всегда излагается во всех учебниках по сопротивлению материалов.

**Задача 5.12.** Вычислить прогиб посередине вылета консоли от сосредоточенной силы  $P$  (рис. 5.38).

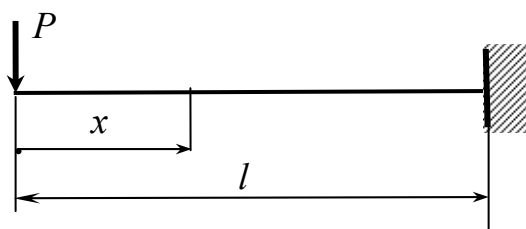


Рис. 5.38

**Решение.** Несмотря на то, что прогиб требуется вычислить в сечении при  $x = l/2$ , в дифференциальное уравнение (5.18) нужно подставлять изгибающий момент в произвольном сечении. Так как  $M(x) = -Px$ , то уравнение (5.18) принимает конкретный вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Px}{EJ}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2EJ} + C, \quad y = -\frac{Px^3}{6EJ} + Cx + D.$$

Из условий отсутствия перемещений в заделке, т.е. из условий при  $x=l$   $y'(l)=0$  и  $y(l)=0$ . находим:  $C = \frac{Pl^2}{2EJ}$ ,  $D = -\frac{Pl^3}{3EJ}$ .

Подстановка  $C$  и  $D$  приводит к уравнениям изогнутой оси и углов поворота:

$$y = -\frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{Pl^2x}{2EJ} - \frac{Px^3}{6EJ}, \quad \theta = \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Px^2}{2EJ}.$$

При  $x=l/2$  получаем искомый прогиб  $y(l/2) = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$ .

Заметим, что постоянные интегрирования представляют перемещения в начале координат:

$$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ}, \quad y_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Положительный знак угла поворота указывает на поворот сечения против хода часовой стрелки, а отрицательный знак прогиба указывает на то, что сечение балки перемещается вниз.

Вычислим конкретные значения перемещений при следующих данных:  $P = 20$  кН,  $l = 2$  м.

Если балка изготовлена из двутавра, то требуемый момент сопротивления

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{Pl}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2}{160 \cdot 10^6} = 250 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3. \text{ Этому моменту сопротив-$$

ления соответствует двутавр 22, а с моментом инерции  $J = 2790 \text{ см}^4$ .

Следовательно,

$$\theta_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 7,17 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,41 \text{ град},$$

$$y_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 9,56 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,96 \text{ см}.$$

**Задача 5.13..** Вычислить наибольшее перемещение в консоли от распределенной нагрузки (рис. 5.39).

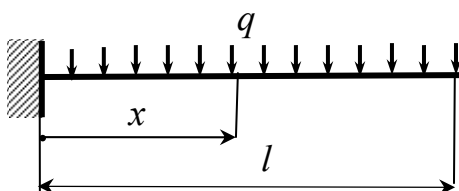


Рис. 5.39

**Решение.** Рассмотрим правую часть балки при начале координат в заделке.

Нужно иметь в виду, что этот прием совершенно не обязательный, можно рассматривать любую часть балки при любом начале координат.

$$\text{Итак, } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q(l-x)^2}{2EJ}. \text{ Дважды интегри-$$

руя, получаем:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{q(l-x)^3}{6EJ} + C, \quad y = -\frac{q(l-x)^4}{24EJ} + Cx + D.$$

При  $x=0$   $\theta = y = 0$ , значит  $C = -ql^3/(6EJ)$ ,  $D = ql^4/24EJ$

Уравнения перемещений принимают следующий вид:

$$\theta = \frac{q(l-x)^3}{6EJ} - \frac{ql^3}{6EJ}, \quad y = -\frac{q(l-x)^4}{24EJ} - \frac{ql^3x}{6EJ} + \frac{ql^4}{24EJ}. \quad \text{При } x=l:$$

$$\theta_{\max} = -ql^3/(6EJ), \quad y_{\max} = -ql^4/(8EJ).$$

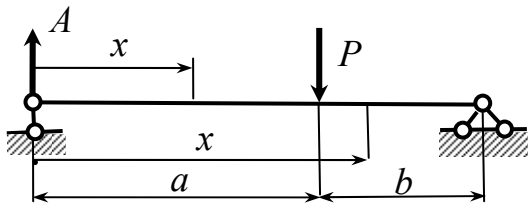


Рис. 5.40

**Задача 5.14.** Двухопорная балка загружена сосредоточенной силой (рис. 5.40).

Найти максимальный прогиб в балке.

**Решение.** Так как балка имеет два участка, то требуется составить два дифференциальных уравнения:

первый участок:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{Ax}{EJ}.$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{Ax^2}{2EJ} + C_1.$$

$$y_1 = \frac{Ax^3}{6EJ} + C_1x + D_1.$$

второй участок:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{Ax}{EJ} - \frac{P(x-a)}{EJ}.$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{Ax^2}{2EJ} - \frac{P(x-a)^2}{2EJ} + C_2.$$

$$y_2 = \frac{Ax^3}{6EJ} - \frac{P(x-a)^3}{6EJ} + C_2x + D_2.$$

Граничные условия: при  $x=a$   $y_1' = y_2'$ , откуда получаем  $C_1 = C_2$ ; здесь же при  $x=a$   $y_1 = y_2$ , отсюда находим  $D_1 = D_2$ .

Опорные условия: при  $x=0$   $y_1 = 0$ , отсюда находим  $D_1 = 0$ ;

при  $x=l$   $y_2 = 0$ , отсюда  $C_2 = -Al^2/(6EJ) + Pb^3/(6EJ)$ .

Так как  $A = Pb/(a+b)$ , то  $C_2 = -Pb(l^2 - b^2)/(6EJ)$ .

Таким образом уравнение изогнутой оси балки принимает вид

$$y = \frac{Pbx^3}{6EJ} - \frac{Pbx}{6EJ}(l^2 - b^2) - \frac{P(x-a)^3}{6EJ}$$

Последнее слагаемое учитывается только на правом участке.

Для вычисления наибольшего прогиба угол поворота на первом участке приравняем нулю, откуда найдем расстояние до сечения с наибольшим прогибом

$x_0 = \sqrt{-2EJC_1/A} = \sqrt{(l^2 - b^2)/3}$ . Поставляя это значение в уравнение изогнутой оси, находим

$$y_{\max} = -\frac{Pbx_0}{6EJ}[-x_0^2 + (l^2 - b^2)] = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{9\sqrt{3} \cdot lEJ} \sqrt{l^2 - b^2}.$$

В частном случае, когда  $a = b = l/2$   $y_{\max} = -Pl^3/(48EJ)$ .

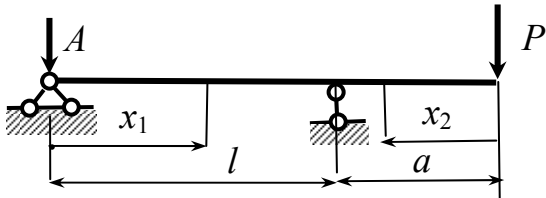


Рис. 5.36

**Пример 5.15.** Вычислить прогиб на конце консоли балки, изображенной на рис. 5.41.

**Решение.** Балка имеет два участка. Для каждого участка составляем дифференциальные уравнения и дважды их интегрируем:

первый участок:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = -\frac{Ax_1}{EJ} = -\frac{Pax_1}{lEJ}.$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{Pax_1^2}{2lEJ} + C_1.$$

$$y_1 = -\frac{Pax_1^3}{6lEJ} + C_1 x + D_1$$

второй участок:

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = -\frac{Px_2}{EJ}.$$

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{Px_2^2}{2EJ} + C_2.$$

$$y_2 = -\frac{Px_2^3}{6EJ} + C_2 x_2 + D_2.$$

Граничные условия: при  $x_1 = l$ ,  $x_2 = a$ ,  $y_1' = -y_2'$ , отсюда находим зависимость

$$C_2 = \frac{Pa}{2EJ}(l - a) - C_1; \quad \text{при } x_1 = l, \quad x_2 = a, \quad y_1 = y_2 \quad \text{отсюда получаем}$$

$$D_2 = D_1 + C_1(a + b) - Pa[2a^2 + l(3a + l)]/(6EJ).$$

Опорные условия: при  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ , отсюда находим  $D_1 = 0$ ; при  $x_1 = l$ ,  $y_1 = 0$ , откуда  $C_1 = Pal/(6EJ)$ .

Следовательно,  $C_2 = Pa^2/(2EJ)$ ,  $D_2 = -Pa^3/(3EJ) - Pa^2l/(3EJ)$ .

На конце консоли при  $x_2 = 0$ ,  $y = D_2 = -Pa^2(l + a)/(3EJ)$ .

Заметим, что более удобно решаются задачи при интегрировании дифференциального уравнения изогнутой оси балки, если начало координат для всех участков находится в одной точке.

### 5.11.3. Метод начальных параметров

Рассмотрим балку, нагруженную любой сосредоточенной и распределенной нагрузкой (рис. 5.37). Все силовые и деформационные факторы в начале координат, обозначенные нулевыми индексами, называются начальными параметрами.

Составляем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на первом участке

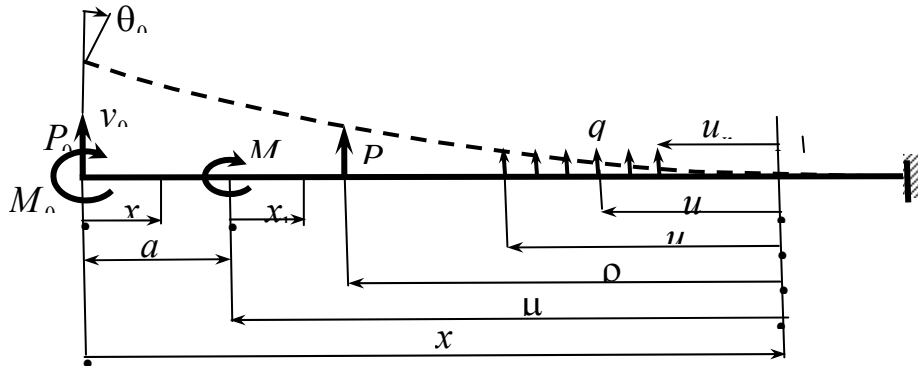


Рис. 5.37

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_0 + P_0 x}{EJ} \quad (5.19)$$

Последовательно интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0 x}{EJ} + \frac{P_0 x^2}{2EJ} + C, \quad y = \frac{M_0 x^2}{2EJ} + \frac{P_0 x^3}{6EJ} + Cx + D.$$

Выразим постоянные интегрирования через начальные параметры из условий при  $x = 0$ ,  $y' = \theta_0$ ,  $y = y_0$ . Отсюда находим:  $C = \theta_0$ ,  $D = y_0$ . Таким образом, получаем уравнения перемещений для первого участка:

$$\theta = \theta_0 + \frac{M_0 x}{EJ} + \frac{P_0 x^2}{2EJ}, \quad (5.20)$$

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ} + \frac{P_0 x^3}{6EJ}. \quad (5.21)$$

Этими уравнениями можно пользоваться при  $x \leq a$ .

Для второго участка временно точку приложения сосредоточенного момента  $M$  примем за новое начало координат с новой текущей координатой  $x_1$  и новыми начальными параметрами:  $y_a$ ,  $\theta_a$ ,  $M_a = Pa + M_0 + M$ ,  $P_a = P$  ( $y_a, \theta_a$  находятся из (5.20) и (5.21) при  $x = a$ ).

Дифференциальное уравнение для второго участка принимает следующий вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_0 + P_0(a + x_1) + M}{EJ} = \frac{M_a + P_a x_1}{EJ} \quad (5.22)$$

Сравнивая это уравнение с (5.19), замечаем, что они различаются лишь начальными параметрами и текущей координатой. Следовательно, решение уравнения

(5.22) можно записать по аналогии с (5.21), заменив в последнем нулевые индексы начальных параметров на индексы  $a$ , а координату  $x$  на  $x_1$ :

$$y = y_a + \theta_a x_1 + \frac{M_a x_1^2}{2EJ} + \frac{P_a x_1^3}{6EJ}.$$

Подставляя сюда значения начальных параметров и возвращаясь к прежней переменной  $x = a + x_1$ , после очевидных преобразований получим

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ} + \frac{P_0 x^3}{6EJ} + \frac{M(x-a)^2}{2EJ}. \quad (5.23)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением первого участка (5.21), замечаем, что от сосредоточенного момента  $M$  в нем добавилось слагаемое  $M(x-a)^2 / (2EJ) = M\mu^2 / (2EJ)$ , аналогичное слагаемому, содержащему  $M_0$ .

Очевидно, на третьем участке от сосредоточенной силы  $P$  добавится слагаемое, аналогичное слагаемому, содержащему  $P_0$ , т.е.  $P\rho^3 / (6EJ)$ .

Распределенную нагрузку можно учесть суммированием влияния элементарных сосредоточенных сил  $qdu$ , т.е. интегралом  $\int_{u_k}^{u_n} qdu \cdot u^3 / (6EJ)$ .

Так получаем универсальное уравнение изогнутой оси балки для любой нагрузки

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ} + \frac{P_0 x^3}{6EJ} + \sum \frac{M\mu^2}{2EJ} + \sum \frac{P\rho^3}{6EJ} + \sum \int \frac{qu^3 du}{6EJ}. \quad (5.24)$$

Отсюда дифференцированием легко получить уравнение углов поворота.

В уравнении (5.24) силовые начальные параметры заданы или вычисляются из условий равновесия балки (если она статически определимая), а деформационные  $y_0$  и  $\theta_0$  вычисляются из условий закрепления балки на опорах. Начало координат выбирается на конце балки (левом или правом). В уравнение (5.24) включается вся нагрузка, действующая с одной стороны от сечения (со стороны начала координат). Знаки слагаемых устанавливаются по правилу знаков изгибающих моментов от соответствующих нагрузок. Знак суммы указывает на то, что с одной стороны от рассматриваемого сечения может быть несколько участков с распределенной нагрузкой и несколько сосредоточенных сил и моментов.

**Задача 5.16.** Вычислить прогиб и угол поворота на конце консоли (рис. 5.38).

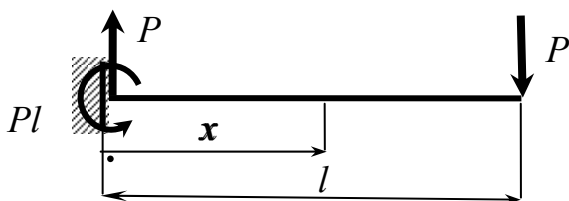


Рис. 5.38

**Решение.** Выберем начало координат на левом конце балки, так как здесь силовые начальные параметры (опорная реакция и опорный момент) легко вычисляются из уравнений равновесия, а деформационные начальные параметры равны нулю

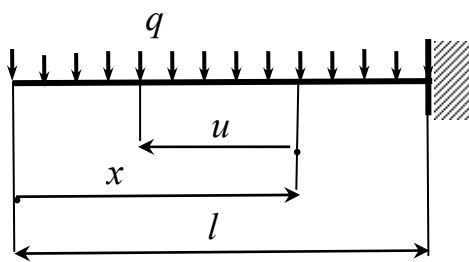
$y_0 = \theta_0 = 0$ . Согласно (5.24) получаем уравнение изогнутой оси

$$y = -\frac{Plx^2}{2EJ} + \frac{Px^3}{6EJ}$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение углов поворота

$$\theta = -\frac{Plx}{EJ} + \frac{Px^2}{2EJ}.$$

При  $x = l$ :  $y_{\max} = -Pl^3 / (3EJ)$ ,  $\theta_{\max} = -Pl^2 / (2EJ)$ .



5.39

**Задача 5.17.** Составить уравнение изогнутой оси консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 5.39).

**Решение.** Примем начало координат на левом конце балки. Тогда согласно (5.24) получим

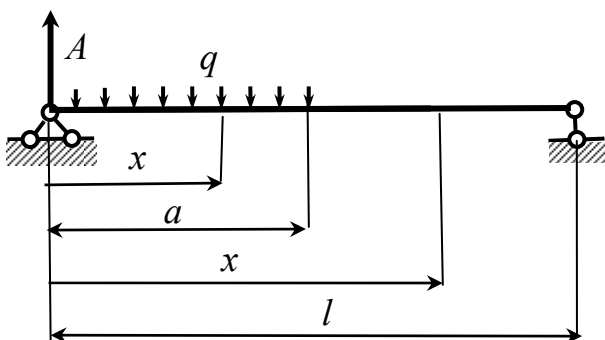
$$y = y_0 + \theta_0 x - \int_0^x \frac{qu^3}{6EJ} du = y_0 + \theta_0 x - \frac{qx^4}{24EJ}.$$

Обратим внимание на то, что в интеграле  $qu$  - элементарная сосредоточенная сила слева от рассматриваемого сечения, а  $u$  - плечо этой силы относительно центра сечения.

Дифференцируя уравнение изогнутой оси, находим  $\theta = \theta_0 - qx^3 / (6EJ)$ .

При  $x = l$   $\theta = y = 0$ , отсюда получаем:  $\theta_0 = \frac{ql^3}{6EJ}$ ,  $y_0 = -\frac{ql^4}{8EJ}$ . Следовательно, уравнение изогнутой оси для заданной балки принимает вид

$$y = -\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{ql^3}{6EJ}x - \frac{qx^4}{24EJ}.$$



5.40

**Задача 5.18** Составить уравнение изогнутой оси балки, изображенной на схеме рис. 5.40.

**Решение.** Опорная реакция  $A$  вычисляется из уравнения равновесия

$$A = \frac{qa}{l} \left( l - \frac{a}{2} \right).$$

На левом участке уравнение изогнутой оси балки принимает вид

$$y = \theta_0 x + \frac{Ax^3}{6EJ} - \int_0^x \frac{qu^3}{6EJ} du = \theta_0 x + \frac{qa(2l - a)}{2l \cdot 6EJ} x^3 - \frac{qx^4}{24EJ}.$$

На правом участке

$$y = \theta_0 x + \frac{Ax^3}{6EJ} - \int_{x-a}^x \frac{qu^3}{6EJ} du = \theta_0 x + \frac{qa(2l-a)}{12EJ} x^3 - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{q(x-a)^4}{24EJ}.$$

Замечаем, что это уравнение можно использовать и для левого участка, отбрасывая последнее слагаемое. Формально, если при каком-либо слагаемом плечо, определяемое скобкой  $(x-a)$ , окажется отрицательным, то такое слагаемое следует отбросить.

Угол поворота  $\theta$  находим из условия, что при  $x=l$   $y=0$

$$\theta_0 = -\frac{qa(2l-a)l}{12EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{q(l-a)^4}{24EJ}.$$

Следовательно, уравнение изогнутой оси балки принимает вид

$$y = -\frac{qa(2l-a)}{12EJ} (l^2 - x^2)x + \frac{q(l^3 - x^3)}{24EJ} x - \frac{q(l-a)^4}{24EJ} x + \frac{q(x-a)^4}{24EJ}.$$

**Задача 5.19.** Получить уравнение изогнутой оси для балки, представленной на рис. 5.41.

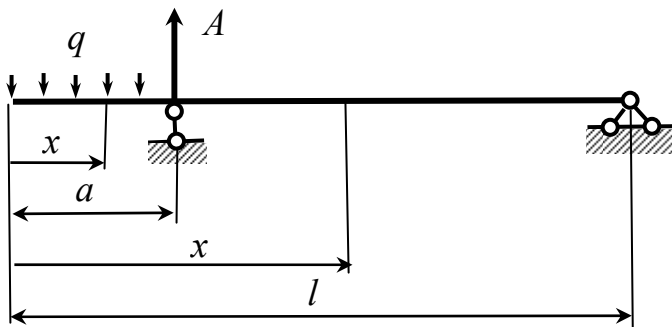


Рис 5.41

**Решение.** В этой задаче лучше выбрать начало координат на правой опоре. Но (для учебных целей) возьмем начало координат на левом конце балки. Опорная реакция  $A = \frac{qa}{l} \left( l + \frac{a}{2} \right)$ . Уравнение (5.24) для второго участка

$$y = y_0 + \theta_0 x - \int_{x-a}^x \frac{qu^3}{6EJ} du + \frac{A(x-a)^3}{6EJ} = y_0 + \theta_0 x - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{q(x-a)^4}{24EJ} + \frac{qa(2l+a)}{2l \cdot 6EJ} (x-a)^3.$$

Начальные параметры находим из условий, что при  $x=a$  и при  $x=a+l$  прогиб равен нулю. Из этих условий получаем систему уравнений

$$y_0 + \theta_0 a = \frac{qa^4}{24EJ}, \quad y_0 + \theta_0 (a+l)^4 = \frac{q(a+l)^4}{24EJ} - \frac{ql^4}{24EJ} - \frac{qa(2l+a)l^2}{12EJ},$$

откуда находим:

$$\theta = \frac{qa^2(a+l)}{6EJ}, \quad y = -\frac{qa^3(4l+3a)}{24EJ}.$$

Так получаем уравнение изогнутой оси балки

$$y = -\frac{qa^3(4l+3a)}{24EJ} + \frac{qa^2(a+l)x}{6EJ} - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{q(x-a)^4}{24EJ} + \frac{qa(2l-a)(x-a)^3}{12EJ}.$$

### 5.11.4. Энергетические методы вычисления перемещений при изгибе

Энергетическими методами можно определять не только прочность, но и жесткость, т.е. вычислять перемещения.

#### 5.11.4.1. Работа внешних сил и потенциальная энергия при изгибе

Перемещения при изгибе пропорциональны нагрузке. Так, прогиб на конце консоли от силы  $P$  (рис. 5.42)  $y = \frac{l^3}{3EJ} P = kP$ . При статическом нагружении

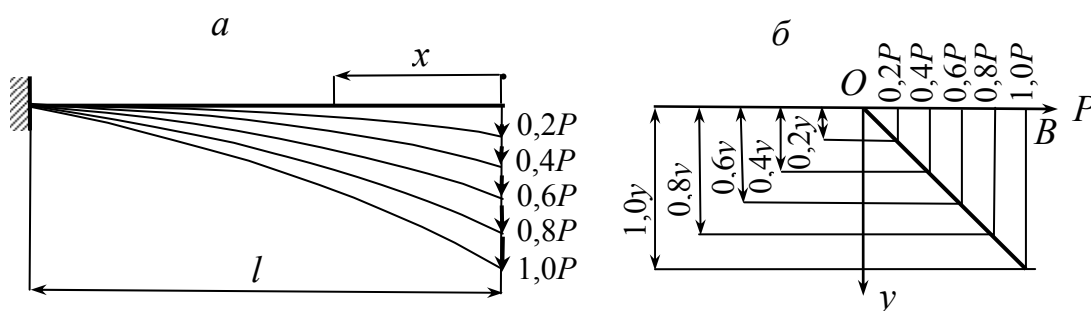


Рис. 5.42

нагрузка от нулевого до окончательного значения изменяется линейно. Также линейно изменяются и прогибы. Поэтому работа внешней силы  $P$  (окончательного значения) на соответствующем перемещении  $y$  равна  $A = Py/2$ .

Теперь рассмотрим работу группы сил (рис. 5.43). Прежде всего обратим внимание на то, что при вычислении работы  $A$  (и энергии) принцип суперпо-

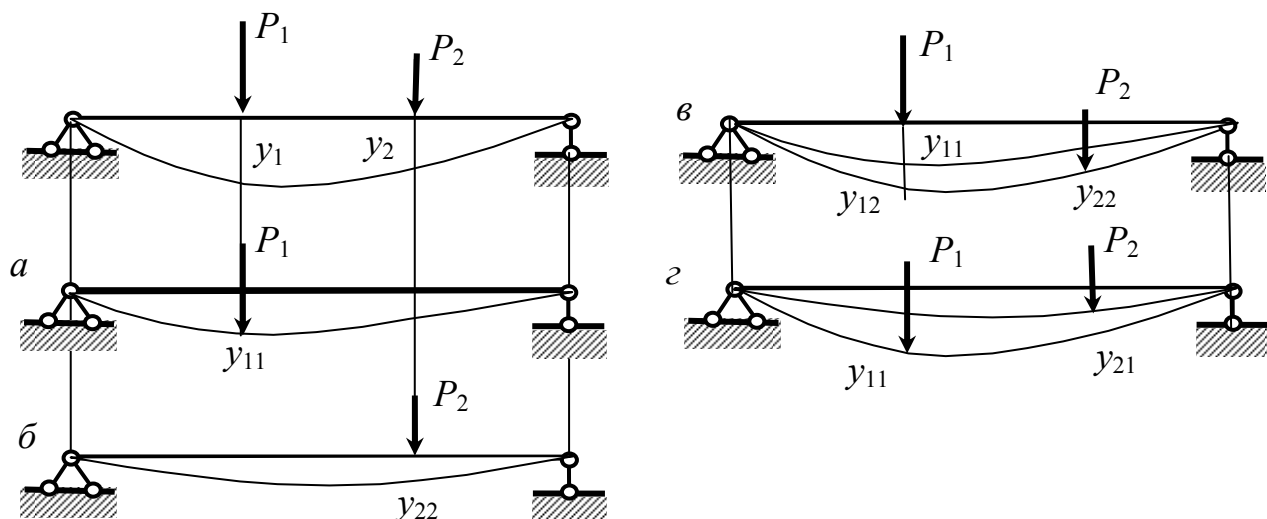


Рис. 5.43

зиции не применим, т.е. (рис. 5.43, а, б)

$$A \neq \frac{P_1 y_{11}}{2} + \frac{P_2 y_{22}}{2}.$$

Работа не зависит от последовательности нагружения, а зависит от начального и окончательного нагружения. Загрузим балку сначала силой  $P_1$ , а затем  $P_2$  и вычислим работу (рис. 5.43, в)

$$A = \frac{P_1 y_{11}}{2} + \frac{P_2 y_{22}}{2} + P_1 y_{12}. \quad (5.25)$$

Последнее слагаемое учитывает то, что при нагружении балки силой  $P_2$  сила  $P_1$  своим полным значением прошла путь  $y_{12}$ . Поэтому ее работа равна произведению (а не полупроизведению) силы на пройденный путь.

Теперь приложим сначала силу  $P_2$ , а затем  $P_1$  и снова вычислим работу (рис. 5.43, г):

$$A = \frac{P_2 y_{22}}{2} + \frac{P_1 y_{11}}{2} + P_2 y_{21}. \quad (5.26)$$

Из равенств (5.25) и (5.26) замечаем зависимость

$$P_1 y_{12} = P_2 y_{21}, \quad (5.27)$$

которая называется принципом взаимности работ (теорема Бетти).

В частности, если  $P_1 = P_2$ , то получим зависимость между коэффициентами с переставленными индексами, которая называется принципом взаимности перемещений (теорема Максвелла):  $y_{12} = y_{21}$ .

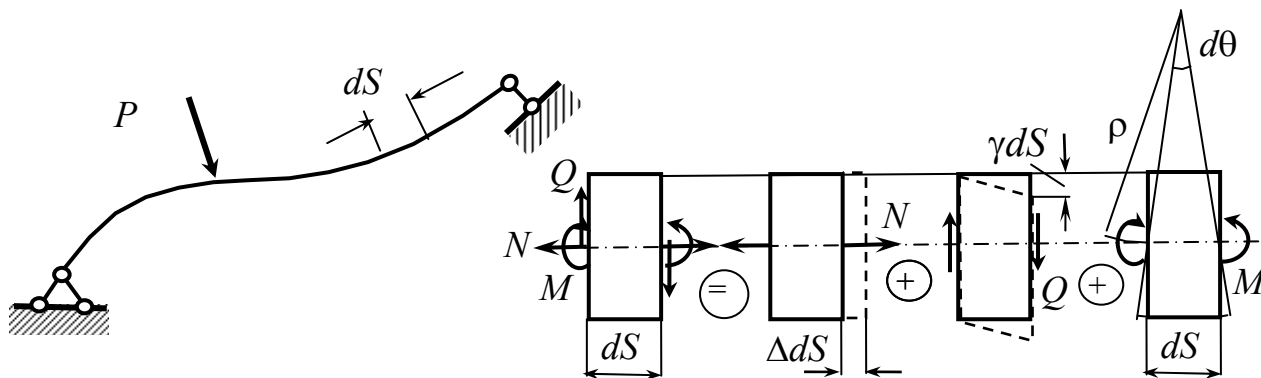
С учетом (5.27) преобразуем выражение (5.26)

$$A = \frac{P_1 y_{11}}{2} + \frac{P_2 y_{22}}{2} + \frac{P_1 y_{12}}{2} + \frac{P_2 y_{21}}{2} = \frac{P_1}{2} (y_{11} + y_{12}) + \frac{P_2}{2} (y_{22} + y_{21}).$$

В скобках представлены полные перемещения в точках приложения сил  $P_2$  и  $P_1$ , т.е.  $y_{11} + y_{12} = y_1$ ,  $y_{22} + y_{21} = y_2$ . Следовательно,  $A = P_1 y_1 / 2 + P_2 y_2 / 2$ , т.е.

$$A = \sum \frac{P_i y_i}{2}. \quad (5.28)$$

Теперь вычислим потенциальную энергию при изгибе. Из стержня, испытывающего изгиб, вырежем элемент  $ds$  (рис. 5.44). По его граням действуют





внутренние силовые факторы  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ . Потенциальная энергия элемента численно равна работе этих силовых факторов на соответствующих перемещениях  $\Delta ds$ ,  $\gamma ds$ ,  $d\theta$ .

Нормальное усилие  $N$  совершает работу только на перемещении  $\Delta ds = Nds/(EF)$ , т.е.  $dA(N) = \frac{N}{2} \frac{Nds}{EF}$ . При этом не учитывается приращение усилия на правой грани  $dN$ , так как работа этого усилия на элементарном перемещении  $\Delta ds$  представляет величину высшего порядка малости.

Поперечная сила  $Q$  совершает работу лишь на перемещении сдвига  $\gamma ds = \frac{\tau}{G} ds = k \frac{Q}{GF} ds$ , т.е.  $dA(Q) = \frac{Q}{2} k \frac{Q}{GF} ds$  (коэффициент  $k$  учитывает неравномерность распределения касательных напряжений  $\tau$  по площади поперечного сечения  $F$  при изгибе).

Изгибающий момент  $M$  создает работу лишь на угловом перемещении  $d\theta = ds/\rho = \frac{M}{EJ} ds$ , т.е.  $dA(M) = \frac{M}{2} \frac{M}{EJ} ds$ .

Суммарная работе, а следовательно, и потенциальная энергия для элемента  $ds$  равна

$$du = dA = \frac{N^2 ds}{2EF} + k \frac{Q^2 ds}{2GF} + \frac{M^2 ds}{2EJ}.$$

Полная энергия для всей системы  $U = \int du$ , т.е.

$$U = \sum \int \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum \int k \frac{Q^2 ds}{2GF} + \sum \int \frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (5.29)$$

Знак суммы указывает на то, что интегрировать нужно по участкам стержня.

Так как работа внешних сил (5.28) и потенциальная энергия деформации (5.29) численно одинаковы, то из равенства  $A = U$  можно вычислить перемещения.

Так, для консоли, нагруженной сосредоточенной силой  $P$  (см. рис. 5.38), работа  $A = Py/2$ , а потенциальная энергия

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + k \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} = \int_0^l \frac{(Px)^2}{2EJ} dx + k \int_0^l \frac{P^2 dx}{2GF} = \frac{P^2 l^3}{3EJ \cdot 2} \left( 1 + \frac{3k}{l^2} \frac{EJ}{GF} \right).$$

Из равенства  $A = U$  находим

$$y = \frac{Pl^3}{3EJ} \left( 1 + \frac{3k}{l^2} \cdot \frac{EJ}{GF} \right) \approx \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Однако, так просто можно вычислить перемещения лишь в некоторых частных случаях. В общем случае перемещения энергетическим методом вычис-

ляются по формуле Мора.

### 5.11.4.2. Формула Мора

Пусть в некоторой упругой системе (рис. 5.45, *a*) от нагрузки  $P$  нужно вычислить проекцию перемещения точки  $k$  по направлению  $mn$ , т.е.  $\delta$ .

С этой целью снимем заданную нагрузку  $P$  и в точке  $k$  по направлению  $mn$  приложим единичную силу. Для этих двух систем, заданной (рис. 5.45, *a*) и фиктивной (рис. 5.45, *б*), применим теорему Бетти (5.27)

$$P\Delta = 1 \cdot \delta \quad (5.30)$$

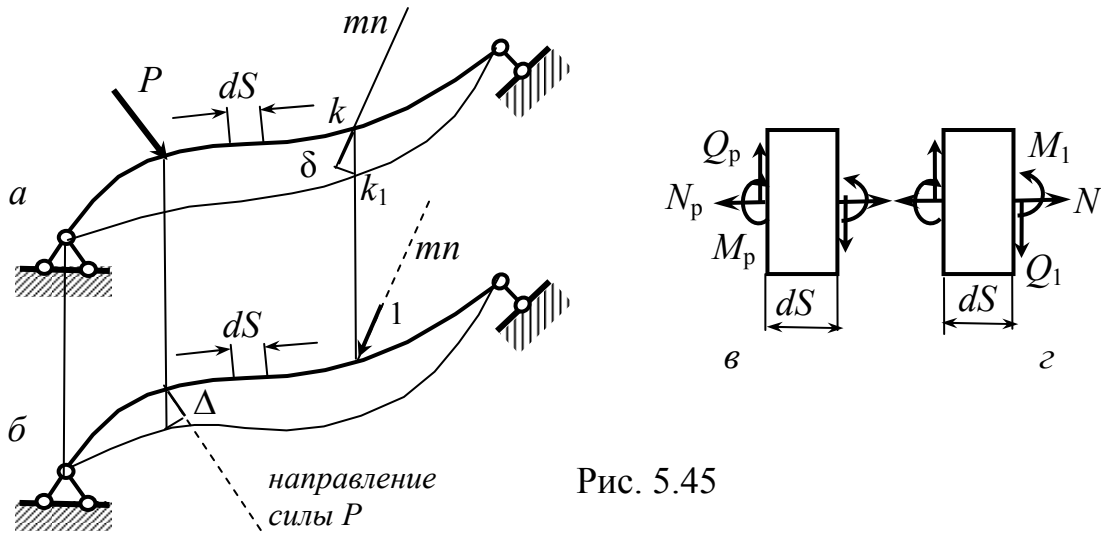


Рис. 5.45

Так как работа внешних сил  $P\Delta$  численно равна работе внутренних усилий  $A$ , то вместо  $P\Delta$  вычислим работу внутренних сил  $A$ , взятых из заданного состояния, на соответствующих перемещениях, вызванных фиктивным единичным состоянием. Тогда вместо (5.30) получим

$$\delta = A \quad (5.31)$$

Итак, вычисляем работу внутренних усилий  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$  (рис. 5.45, *в*), действующих по граням элемента  $ds$ , вырезанного из заданного состояния (рис. 5.45, *a*), на перемещениях, вызванных усилиями  $M_1$ ,  $Q_1$ ,  $N_1$  (рис. 5.45, *г*), действующими по граням такого же элемента  $ds$ , но вырезанного из фиктивного состояния (рис. 5.45, *б*). При этом нужно учитывать лишь приращения перемещений, так как работа силовых факторов на перемещениях элемента  $ds$  как жесткого тела равна нулю. Эти перемещения и работу можно взять из рис. 5.45, но без двойки, т.к. вычисляются виртуальные (возможные) перемещения от фиктивной (единичной) нагрузки:

$$\Delta ds = \frac{N_1 ds}{EF}, \quad \gamma ds = k \frac{Q_1 ds}{GF}, \quad d\theta = \frac{M_1 ds}{EJ},$$

Так находим работу

$$A = \int N_p \cdot \Delta ds + \int Q_p \cdot \gamma ds + \int M_p \cdot d\theta.$$

Следовательно, из энергетического равенства (5.31) получаем универсальную формулу для вычисления перемещений при изгибе

$$\delta = \sum \int \frac{M_p M_1}{EJ} ds + \sum \int k \frac{Q_p Q_1}{GF} ds + \sum \int \frac{N_p N_1}{EF} ds. \quad (5.32)$$

В формуле Мора (5.32)  $\delta$  - перемещение, линейное или угловое. Для вычисления линейного перемещения по направлению искомого перемещения прикладывается единичная сила, а для вычисления угла поворота – единичный момент.

Знак суммы указывает на то, что интегрировать нужно по участкам, границы которых определяются заданной и единичной нагрузками. Если перемещение, вычисленное по (5.32) окажется положительным, то это означает, что оно направлено в сторону единичной нагрузки.

По формуле Мора можно вычислять перемещения в конкретных (закрепленных) сечениях и находить уравнения изогнутой оси или углов поворота. В последнем случае единичная нагрузка прикладывается в произвольном сечении с текущей координатой  $x$ , и тогда по формуле Мора найдем перемещения во всех текущих точках, т.е. найдем уравнение изогнутой оси.

Заметим, что коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе определяется формой поперечного сечения и вычисляется по формуле [5]

$$k = \frac{F}{J^2} \int \frac{S_z^2(y)}{b_y} dy. \quad (5.33)$$

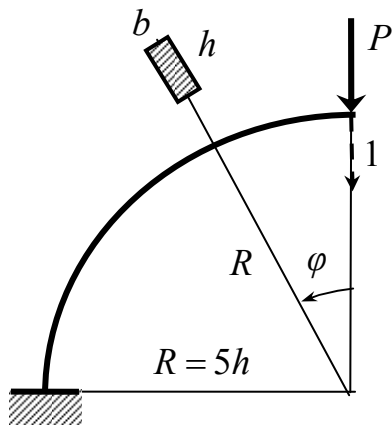


Рис. 5.46

**Задача 5.20.** Вычислить вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$  стержня в виде четверти кольца (рис. 5.46).

**Решение.** От заданной нагрузки возникают силовые факторы:

$$M_p = PR \sin \varphi, \quad Q_p = P \cos \varphi, \quad N_p = -P \sin \varphi.$$

От единичной силы, которая прикладывается после снятия силы  $P$ :

$$M_1 = R \sin \varphi, \quad Q_1 = \cos \varphi, \quad N_1 = -\sin \varphi.$$

Согласно (5.33) вертикальная проекция перемещения

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{\pi/2} \frac{PR \sin \varphi}{EJ} R \sin \varphi \cdot R d\varphi + \int_0^{\pi/2} k \frac{P \cos \varphi}{GF} \cos \varphi \cdot R d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{P \sin \varphi}{EF} \sin \varphi \cdot R d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{PR^3}{EJ} \left( 1 + \frac{k}{R^2} \cdot \frac{EJ}{GF} + \frac{J}{R^2 F} \right). \end{aligned}$$

Для оценки влияния поперечной и продольной силы (второе и третье слагаемые в скобках) примем для конкретности коэффициент Пуассона  $\mu = 0,25$  и  $k = 1,2$  (для прямоугольника). Тогда

$$\frac{k}{R^2} \cdot \frac{EJ}{GF} = \frac{kEb^3 2(1+\mu)}{12 \cdot 25h^2 Ebh} = \frac{1}{100}, \quad \frac{J}{R^2 F} = \frac{bh^3}{12 \cdot 25h^2 bh} = \frac{1}{300}.$$

Из этого примера видно, что влиянием поперечной и продольной силы при вычислении перемещений в стержнях, испытывающих изгиб, можно пренебречь.

Следовательно, для стержней, испытывающих изгиб, можно пользоваться одночленной формулой Мора

$$\delta = \sum \int \frac{M_p M_1}{EJ} ds \tag{5.34}$$

Для стержней, испытывающих лишь растяжение или сжатие, в формуле (5.32) остается лишь последнее слагаемое. Причем, растяжение или сжатие могут испытывать лишь прямые стержни. Поэтому длину элемента  $ds$  нужно заменить на  $dx$ . А так как по длине стержня или на его участках усилия чаще всего не изменяются, то интегрирование по длине участков приведет к суммированию, т.е.,

$$\delta = \sum \frac{N_{ip} N_{i1}}{E_i F_i} l_i. \tag{5.35}$$

Здесь  $i$  - номер стержня или его участка.

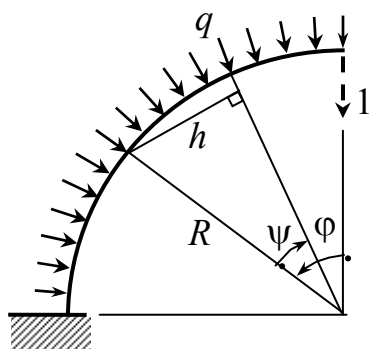


Рис. 5.47

**Задача 5.21.** Вычислить вертикальное перемещение торца стержня, представленного на рис. 5.47.

**Решение.** Изгибающий момент в произвольном сечении от заданной нагрузки

$$M(\varphi) = \int_0^\varphi q ds \cdot R \sin \psi = \int_0^\varphi q R^2 \sin \psi \cdot d\psi = q R^2 (1 - \cos \varphi).$$

А от единичной силы изгибающий момент  $M_1 = R \sin \varphi$ .

Следовательно, перемещение равно

$$\delta = \int_0^{\pi/2} \frac{q R^2 (1 - \cos \varphi)}{EJ} R \sin \varphi \cdot R d\varphi = \frac{q R^4}{2EJ}.$$

**Задача 5.22.** Вычислить углы поворота на опорах и прогиб посередине пролета балки (рис. 5.48).

**Решение.** Для вычисления угла поворота на левой опоре прикладываем на этой опоре единичный момент (рис. 5.48, а). Изгибающий момент от едини-

чной нагрузки  $M_1 = 1 - x/l$ . От заданной нагрузки  $M_p = Mx/l$ . Следовательно, получаем

$$\theta_A = \int_0^l \frac{Mx}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EJ} = \frac{Ml}{6EJ}.$$

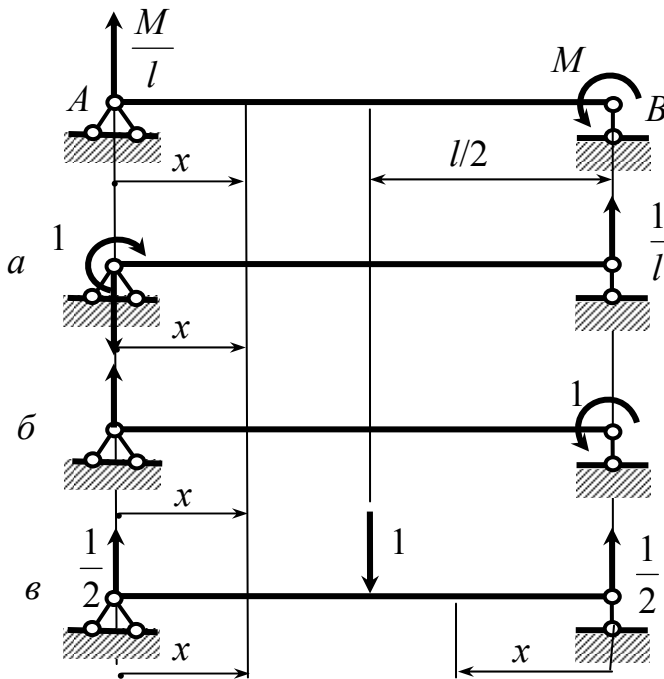


Рис. 5.48

Для вычисления угла поворота на правой опоре в точке  $B$  прикладываем единичный момент (рис. 5.48, б) и согласно (5.34) получим

$$\theta_B = \int_0^l \frac{Mx}{l} \cdot \frac{x}{l} \frac{dx}{EJ} = \frac{Ml}{3EJ}.$$

Для вычисления прогиба посередине пролета балки прикладываем единичную силу (рис. 5.48, в). При этом в единичном состоянии будет два участка, значит с учетом знака суммы в (5.34) получим

$$y = \int_0^{l/2} \frac{Mx}{l} \cdot \frac{x}{2} \frac{dx}{EJ} + \int_0^{l/2} \left(M - \frac{Mx}{l}\right) \frac{x}{2} \frac{dx}{EJ} = \frac{Ml^2}{16EJ}.$$

**Задача 5.23.** Найти уравнение изогнутой оси консоли от сосредоточенной силы, рис. 5.49.

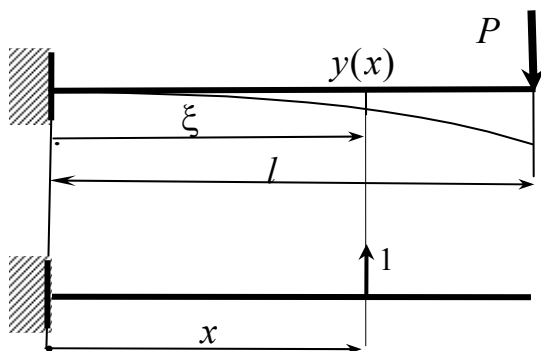


Рис. 5.49

**Решение.** Подынтегральные функции формулы Мора для произвольного сечения с текущей координатой  $\xi$ :  $M_p(\xi) = P(\xi - l)$ ,  $M_1(\xi) = x - \xi$ . По формуле (5.34) находим уравнение изогнутой оси

$$y(x) = \int_0^x \frac{P}{EJ} (\xi - l)(x - \xi) d\xi = \frac{P}{EJ} \int_0^x (x\xi - l\xi - \xi^2 + l\xi) d\xi = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Plx^2}{2EJ}.$$

**Задача 5.24.** Найти уравнение изогнутой оси консоли от равномерно распределенной нагрузки  $q$ , рис. 5.50.

**Решение.** Подынтегральные функции для произвольного сечения с временной переменной  $\xi$ :

$$M_p(\xi) = ql\xi - \frac{ql^2}{2} - \frac{q\xi^2}{2}, \quad M_1(\xi) = x - \xi.$$

По формуле Мора (5.34) получаем

$$y(x) = \frac{q}{EJ} \int_0^x \left( l\xi - \frac{l^2}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) (x - \xi) d\xi = \frac{qlx^3}{6EJ} - \frac{ql^2x^2}{4EJ} - \frac{qx^3}{24EJ}$$

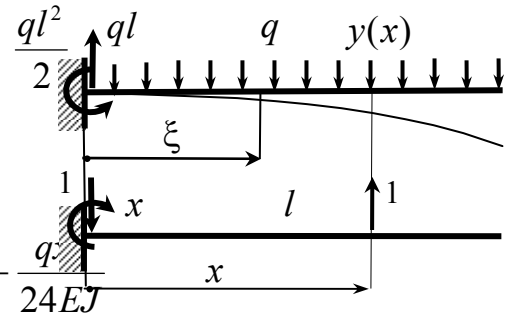


Рис. 5.50

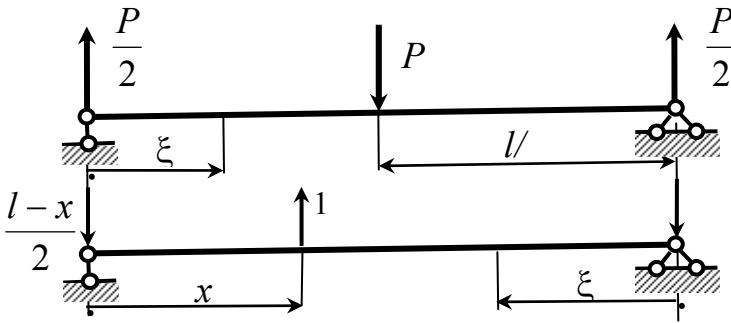


Рис. 5.51

**Задача 5.25.** Найти уравнение изогнутой оси двухопорной балки от симметричного нагружения силой  $P$ , рис. 5.51.

**Решение.** Здесь интегрировать нужно по трем совместным участкам балки, как указано в пределах этих интегралов:

$$\begin{aligned} EJy(x) &= -\int_0^x \frac{P}{2} \xi \frac{l-x}{l} \xi d\xi + \int_x^{l/2} \frac{P}{2} \xi \left( (\xi-x) - \frac{l-x}{l} \xi \right) d\xi - \int_0^{l/2} \frac{P}{2} \xi \frac{x}{l} d\xi = \\ &= -\int_0^{l/2} \frac{P}{2} \frac{l-x}{l} \xi^2 d\xi + x \int_0^{l/2} \frac{P}{2} (\xi-x) d\xi - \int_0^{l/2} \frac{P}{2} \frac{x}{l} \xi^2 d\xi = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2x}{16} \end{aligned}$$

Это уравнение применимо на левом и правом участках при отсчете текущей координаты  $x$  от опор.

**Задача 5.26.** Вычислить полное перемещение точки приложения силы в стержневой системе, представленной на рис. 5.52 (жесткости стержней одинаковы).

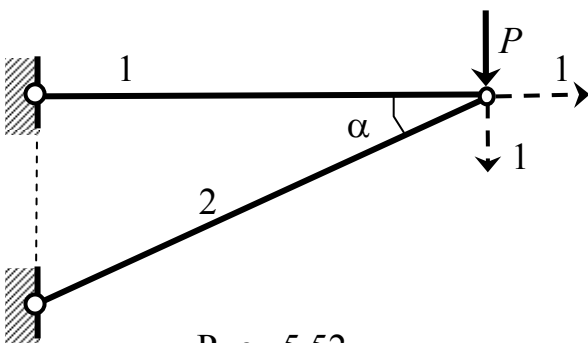


Рис. 5.52

**Решение.** Усилия и длины стержней приведены в табл. 5.2.

В третьей колонке показаны усилия от силы  $P$ , в четвертой – от вертикальной единичной силы, в пятой – усилия от единичной горизонтальной силы.

Вертикальная проекция перемещения согласно (5.35)

$$\delta_B = \frac{Plctg^2\alpha}{EF} + \frac{Pl}{\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot EF}.$$

Таблица 5.2

№ стержня	$l_i$	$N_{ip}$	$N_{il}$	$N_{i1}$
1		$P \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}$	1
2	$l / \cos \alpha$	$-P / \sin \alpha$	$-1 / \operatorname{ctg} \alpha$	0

Горизонтальная проекция перемещения

$$\delta_r = \frac{Pl \operatorname{ctg} \alpha}{EF}.$$

Полное перемещение равно геометрической сумме проекций перемещения  $\delta = \sqrt{\delta_B^2 + \delta_r^2}$ .

### 5.11.4.3. Правило Верещагина

По этому правилу вычисляется интеграл Мора, т.е. интеграл формулы Мора без учета жесткости  $\int_l M_p M_1 dx$ , путем перемножения соответствующих эпюр.

Допустим, эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки (грузовая эпюра) представлена верхним рисунком  $P$ , а эпюра от единичной нагрузки (единичная эпюра) – нижним  $1$  (рис. 5.53). Элементарная площадь грузовой эпюры  $d\omega = M_p dx$ , а изгибающий момент от единичной нагрузки можно представить уравнением прямой  $M_1 = a + bx$  ( $b = \operatorname{tg} \alpha$ ). Тогда интеграл Мора будет определяться следующим образом

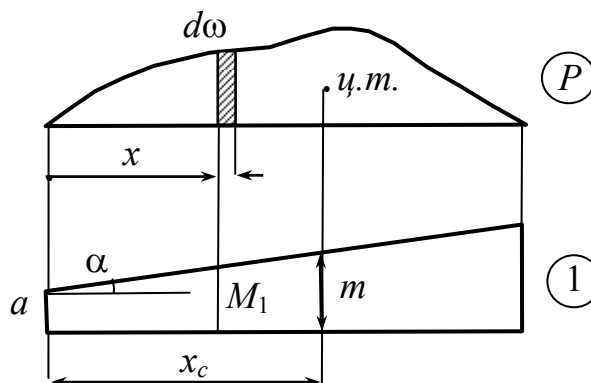


Рис. 5.53

$$\int_l M_p M_1 dx = \int_l (a + bx) d\omega = a \int_l d\omega + b \int_l x d\omega = a\omega + bS.$$

Здесь  $S = \int_l x d\omega = \omega x_c$  - статический момент площади грузовой эпюры относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат.

Таким образом получаем

$$\int_l M_p M_1 dx = a\omega + b\omega x_c = \omega(a + bx_c) = \omega \cdot m.$$

Следовательно, согласно (5.34) получим

$$\delta = \sum \frac{\omega_i m_i}{EJ} \quad (5.36)$$

Здесь  $\delta$  - перемещение (прогиб или угол поворота),  $\omega$  - площадь грузовой эпюры,  $m$  - изгибающий момент от единичной нагрузки, вычисленный в сечении, соответствующем положению центра тяжести грузовой эпюры.

Знак суммы указывает на то, что эпюры по правилу Верещагина нужно перемножать по участкам, границы которых определяются изломами на единичной эпюре.

По правилу Верещагина так же, как и по формуле Мора, вычисляются перемещения в конкретных точках и находятся уравнения перемещений в стержнях не только при изгибе, но и при кручении, растяжении или сжатии.

Однако, правило Верещагина, в отличие от формулы Мора, применимо лишь для прямых стержней.

**Задача 5.27.** Вычислить прогиб посередине длины консоли (рис. 5.54).

**Решение.** Здесь нужно перемножать эпюры по двум участкам (два участка на единичной эпюре)

Напоминаем, что по правилу Верещагина площадь эпюры нужно брать из грузового состояния, а ординаты – из единичного, т.е. в этом примере нужно учитывать площадь трапеции (или ее составляющие), а изгибающий момент от единичной нагрузки брать в сечении соответствующем центру тяжести трапеции (или ее составляющих). Так получаем прогиб

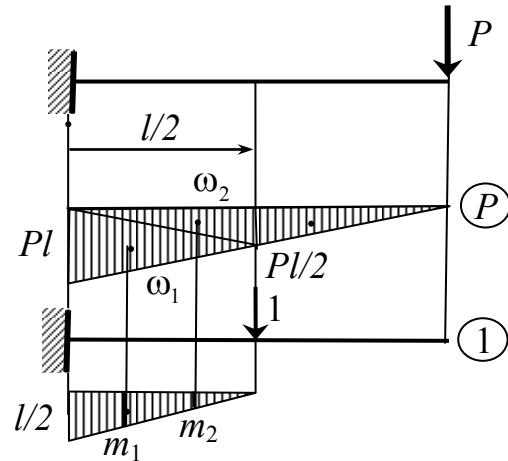


Рис. 5.54

$$y = \frac{1}{EJ} (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Если бы перемножили единичную эпюру на грузовую, взяв площадь из эпюры единичной, а момент из эпюры грузовой, то получили бы такой же результат. Это следует из теоремы Бетти  $y = P\Delta$ . Здесь  $\Delta$  - прогиб на конце консоли от единичной нагрузки. Но для вычисления  $\Delta$  нужно приложить единичную силу на конце консоли. Эта эпюра, умноженная на  $P$ , будет такой же, как эпюра грузовая.

Однако такой обратный порядок перемножения эпюр можно применять только при сосредоточенных нагрузках, когда грузовая эпюра ограничена прямыми линиями.

В случае эпюр, ограниченных квадратной параболой, площадь  $\omega = \frac{2}{3}lh$ , а так как высота эпюры, ограниченной квадратной параболой, в двухопорной балке  $h = ql^2/8$ , то  $\omega = ql^3/12$  ( $q$  - интенсивность равномерно распределенной



нагрузки,  $l$  - проекция длины (основание) эпюры на направление, перпендикулярное направлению нагрузки).

**Задача 5.28.** Вычислить прогиб на границе участков балки, рис. 5.55.

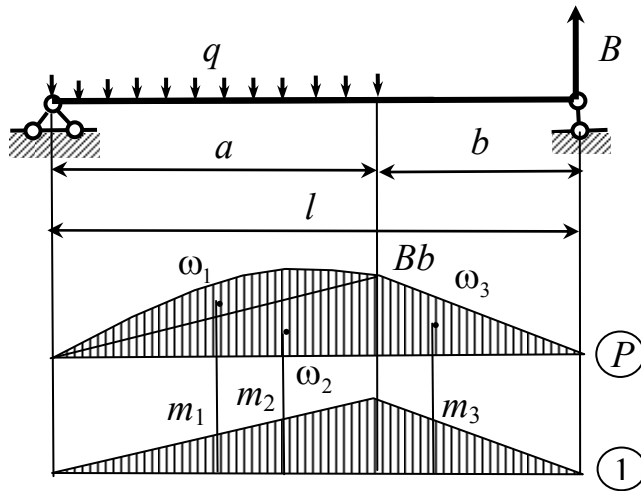


Рис. 5.55

Прогиб равен:  $y = (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3) / EJ =$

$$= \frac{1}{EJ} \left( \frac{qa^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{l} + \frac{qa^2 b}{2l} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{l} + \frac{qa^2 b}{2l} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{l} \right) = \frac{qa^3 b}{24EJ}.$$

**Решение.** В этой задаче достаточно вычислить лишь одну правую реакцию, чтобы найти изгибающий момент на границе участков. На левом участке изгибающие моменты можно не вычислять, так как площадь, ограниченная квадратной параболой, заранее известна и равна  $\omega_1 = qa^3 / 12$ . Изгибающий момент на границе участков  $M = Bb = \frac{qa^2}{2l} b$ . Высота треугольника единичной эпюры  $h = ab / l$ .

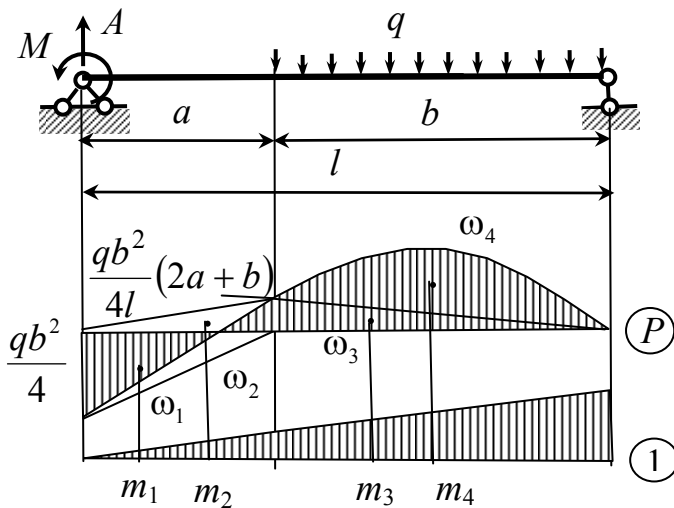


Рис. 5.56

**Задача 5.29.** Вычислить угол поворота на правой опоре балки от равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  и момента на опоре  $M = qb^2 / 4$ , рис. 5.56.

**Решение.** Для построения эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки достаточно вычислить опорную реакцию  $A = \frac{qb^2}{2l} + \frac{qb^2}{4l} = \frac{3qb^2}{4l}$  и изгибающий момент на границе участков

$$M_a = Aa - M = \frac{3qb^2}{4l} a - \frac{qb^2}{4} = \frac{qb^2}{4l} (2a - b).$$

Избегая вычисления составляющих площадей эпюры, следует соединить ординаты изгибающих моментов на границах левого участка, образовав таким путем два треугольника выше и ниже оси эпюры, площади которых и положения центров тяжести известны. После этого легко перемножить эпюры и вычислить угол поворота:

$$EJ\theta = -\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 + \omega_4 m_4 =$$

$$= -\frac{qb^2 a}{8} \cdot \frac{1}{3l} + \frac{qb^2(2a-b)a}{4l \cdot 2} \cdot \frac{2}{3l} + \frac{qb^2(2a-b)b}{4l \cdot 2} \left( \frac{2a}{3l} + \frac{1}{3} \right) + \frac{qb^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{a}{l} + 1 \right).$$

**Пример 5.30.** Вычислить угол поворота на правой опоре рамы, рис. 5.57.

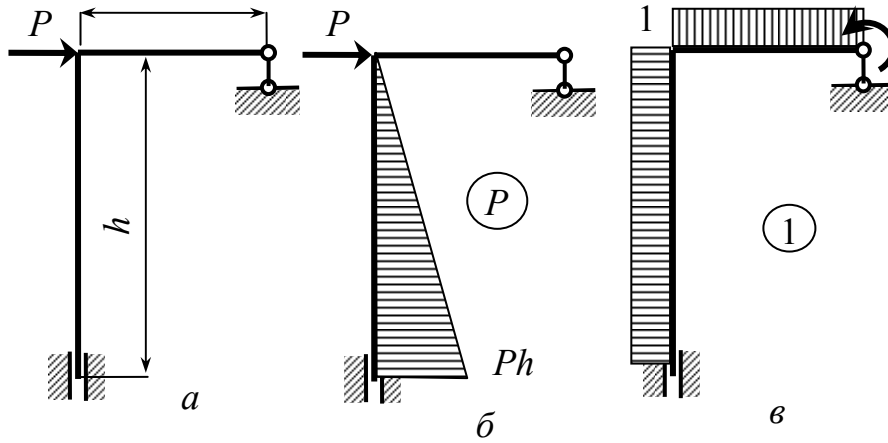


Рис. 5.57

**Решение.** Перемножая эпюры, представленные на рис. 5.57, б, в, получим

$$\theta = -\frac{Ph^2}{2EJ}$$

**Задача 5.31.**

Вычислить взаимный угол поворота в шарнире ригеля рамы, рис. 5.58.

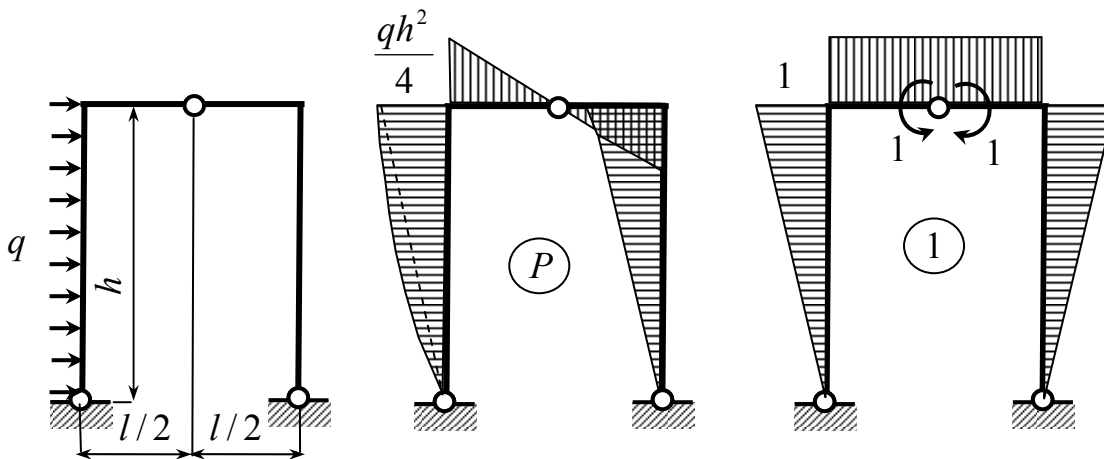


Рис. 5.58

**Решение.** Для вычисления взаимного угла поворота прикладываем два взаимно противоположно направленных единичных момента. С учетом косо-симметричных составляющих эпюр перемножается лишь площадь параболы, откуда получаем

$$\theta_{11} = qh^3 / (24EJ).$$

## 6. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

### 6.1. Общие понятия о продольно-поперечном изгибе

Из самого названия напряженно-деформированного состояния следует, что стержень загружен не только поперечной, но и продольной нагрузкой, рис. 6.1. Поперечная нагрузка  $P$  вызывает изгиб стержня, а продольная – в основ-

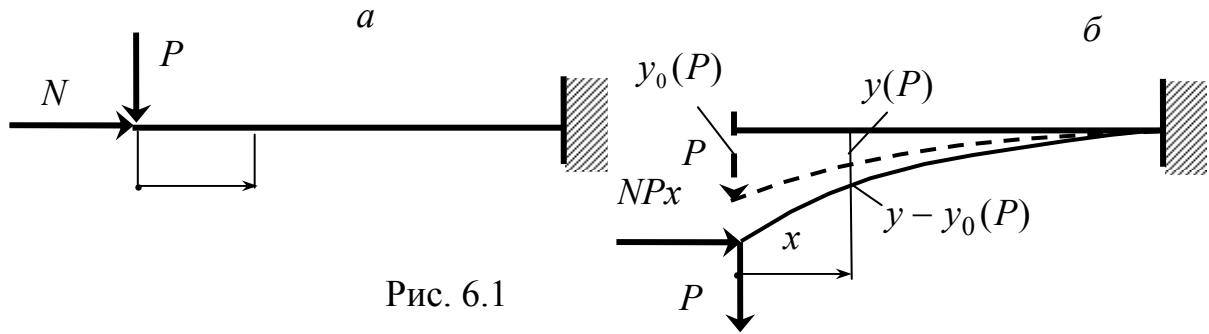


Рис. 6.1

ном сжатие. Можно ли в этом случае вычислять напряжения по принципу суперпозиции

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M(P)}{J} y \quad (6.1)$$

В случае весьма жестких стержней напряжения, вычисленные по формуле (6.1), будут достаточно достоверными, но в случае гибких стержней (с небольшой изгибной жесткостью) применение формулы (6.1) приведет к большой погрешности. Принцип суперпозиции при продольно-поперечном изгибе не применим, так как продольная сила  $N$  в изогнутом стержне вызывает дополнительный изгиб  $y - y(P)$ , (рис. 6.1, б). Если от поперечной нагрузки вычислить прогибы  $y(P)$ , а затем – дополнительный изгибающий момент  $\Delta M = N(y_0 - y(P))$ , то напряжение

$$\delta = \pm \frac{M + \Delta M}{J} y + \frac{N}{F}. \quad (6.2)$$

будет с меньшей погрешностью отражать действительное состояние.

Для вычисления действительных напряжений дополнительный изгибающий момент нужно вычислять с учетом действительных прогибов, вызванных одновременным воздействием как поперечной, так и продольной нагрузок. Задача сводится к вычислению этих перемещений, т.е. к определению уравнения изогнутой оси стержня, откуда дифференцированием легко найти изгибающий момент. Наиболее эффективно при этом использовать метод начальных параметров.

## 6.2. Метод начальных параметров при продольно-поперечном изгибе

Рассмотрим балку под действием продольной силы  $N$  и любой поперечной нагрузки, рис. 6.2.

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси для первого (левого) участка

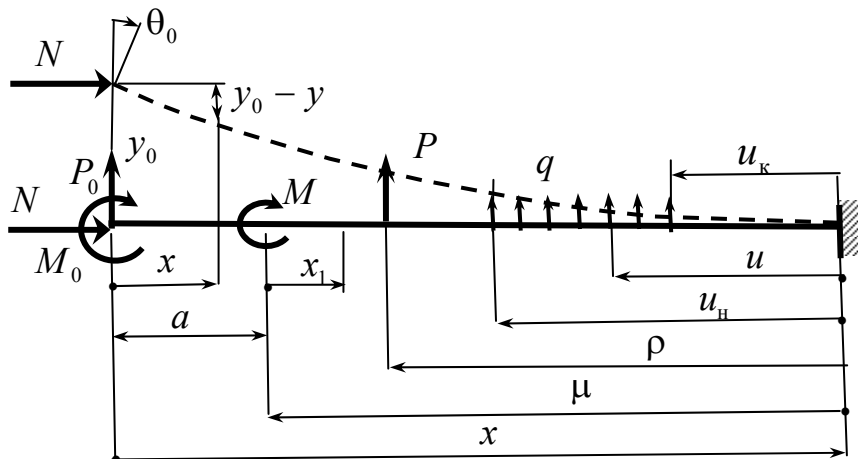


Рис. 6.2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_0 + P_0 x}{EJ} + \frac{N(y_0 - y)}{EJ} = \frac{M_0 + Ny_0}{EJ} + \frac{P_0 x}{EJ} - \frac{Ny}{EJ}.$$

Обозначив через

$$k^2 = \frac{N}{EJ}, \quad (6.3)$$

получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{M_0 + Ny_0}{EJ} + \frac{P_0 x}{EJ}. \quad (6.4)$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$y = A \cos kx + B \sin kx + y^*$$

Разыскивая частное решение  $y^*$  в виде полинома  $y^* = a + bx$  и подставляя его в исходное уравнение (6.4), способом неопределенных коэффициентов находим

$$a = \frac{M_0 + Ny_0}{k^2 EJ} = \frac{M_0}{N} + y_0, \quad b = \frac{P_0}{N}.$$

С учетом этих постоянных уравнение (6.4) примет следующий вид

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \frac{M_0}{N} + y_0 + \frac{P_0}{N} x. \quad (6.5)$$

Отсюда дифференцированием можно получить все остальные расчетные уравнения:

$$y'(x) = k(-A \sin kx + B \cos kx) + \frac{P_0}{N}, \quad (6.6)$$

$$M(x) = EJy'' = \frac{N}{k^2} y'' = -(A \cos kx + B \sin kx)N, \quad (6.7)$$

$$Q(x) = M'(x) = kN(A \sin kx - B \cos kx). \quad (6.8)$$

Выразим постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  через начальные параметры из условий, что при  $x = 0, y = y_0, y' = \theta_0, M = M_0, Q = Q_0 = P_0$ . Из этих условий находим  $A = -\frac{M_0}{N}, B = \frac{\theta_0}{k} - \frac{P_0}{kN}$  или  $B = -\frac{Q_0}{kN}$ . Подставляя в уравнение (6.5) постоянные  $A$  и первое значение  $B$ , получим

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{M_0}{N} (1 - \cos kx) + \frac{P_0}{kN} (kx - \sin kx). \quad (6.9)$$

Для второго участка точку приложения сосредоточенного момента  $M$  временно примем за новое начало координат с новыми начальными параметрами  $y_a, \theta_a, M_a = M_0 + P_0 a + M + N(y_0 - y_a), P_a = P_0$  и новой переменной  $x_1$ . Дифференциальное уравнение изогнутой оси при этом примет следующий вид

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} = \frac{M_0 + P_0(a - x_1) + M}{EJ} + \frac{N(y_0 - y)}{EJ}$$

т.е.

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} + k^2 y = \frac{M_a + Ny_a}{EJ} + \frac{P_a x_1}{EJ}. \quad (6.10)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (6.9), замечаем, что они различаются лишь начальными параметрами и текущей координатой. Следовательно, решение уравнения (6.10) можно записать по аналогии с уравнением (6.9), заменяя в последнем нулевые индексы на индекс  $a$ , а текущую координату  $x$  на  $x_1$

$$y(x) = y_a + \frac{\theta_a}{k} \sin kx_1 + \frac{M_a}{N} (1 - \cos kx_1) + \frac{P_a}{kN} (kx_1 - \sin kx_1).$$

Если сюда подставить начальные параметры  $M_a, P_a, y_a, \theta_a$ , вычисленные на основании (6.9) при  $x = a$ , и вернуться к прежней переменной  $x = a + x_1$ , то после несложных преобразований получим:

$$y = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{M_0}{N} (1 - \cos kx) + \frac{P_0}{kN} (kx - \sin kx) + \frac{M}{N} (1 - \cos(x - a)). \quad (6.11)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением первого участка (6.9), замечаем, что на втором участке от сосредоточенного момента  $M$  добавилось слагаемое

$$\frac{M}{N}(1 - \cos(x - a)) = \frac{M}{N}(1 - \cos k\mu), \text{ аналогичное слагаемому, содержащему } M_0.$$

Очевидно, на третьем участке от сосредоточенной силы  $P$  добавится слагаемое, аналогичное слагаемому, содержащему  $P_0$ , т.е. добавится

$$\frac{P}{kN}(k\rho - \sin k\rho).$$

Распределенную нагрузку  $q$  можно учесть суммированием влияния элементарных сосредоточенных сил  $qdu$ , т.е. интегралом

$$\int_{u_k}^{u_H} \frac{qdu}{kN}(ku - \sin ku).$$

Так получаем универсальное уравнение изогнутой оси балки при продольно-поперечном изгибе:

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{M_0}{N}(1 - \cos kx) + \frac{P_0}{kN}(kx - \sin kx) + \sum \frac{M}{N}(1 - \cos k\mu) + \\ + \sum \frac{P}{kN}(k\rho - \sin k\rho) + \sum \int_{\xi_k}^{\xi_H} \frac{md\xi}{N}(1 - \cos k\xi) + \sum \int_{u_k}^{u_H} \frac{qdu}{kN}(ku - \sin ku). \quad (6.12)$$

Отсюда дифференцированием можно получить остальные расчетные уравнения.

Если бы к балке была приложена растягивающая сила  $N$ , то в исходном дифференциальном уравнении (6.4) изменился бы знак при  $N$  (и  $k$ ):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = \frac{M_0 - Ny_0}{EJ} + \frac{P_0 x}{EJ}.$$

При этом вместо (6.9) получили бы:

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \operatorname{sh} kx - \frac{M_0}{N}(1 - \operatorname{ch} kx) - \frac{P_0}{kN}(kx - \operatorname{sh} kx). \quad (6.13)$$

Таким образом, при использовании уравнения (6.12) при растягивающей продольной силе в нем следуем заменить тригонометрические функции гиперболическими и изменить знаки слагаемых, учитывающих поперечную нагрузку.

**Задача 6.1.** Балка загружена поперечной силой  $P$ , приложенной посередине пролета, и продольной силой  $N$ , рис. 6.3.

Получить уравнение изогнутой оси балки и расчетный изгибающий момент.

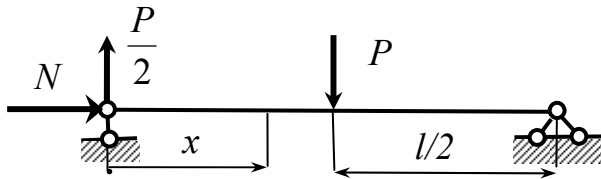


Рис. 6.3

**Решение.** Уравнение изогнутой оси (6.12) для первого участка принимает вид

$$y(x) = \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{P}{2kN} (kx - \sin kx).$$

Для второго участка согласно (6.12) нужно добавить слагаемое

$$-\frac{P}{kN} \left[ k \left( x - \frac{l}{2} \right) - \sin k \left( x - \frac{l}{2} \right) \right].$$

Имеем одно неизвестное  $\theta_0$ , которое можно найти из условия, что при  $x = \frac{l}{2}$   $y' = 0$ . Из этого условия находим

$$\theta_0 = -\frac{P}{2N} \cdot \frac{1 - \cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}}.$$

Подставляя  $\theta_0$  в уравнение изогнутой оси первого участка, получаем

$$y(x) = -\frac{P}{2kN} \left( \frac{\sin kx}{\cos \frac{kl}{2}} - kx \right).$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение углов поворота и уравнение изгибающих моментов

$$\theta(x) = -\frac{P}{2N} \left( \frac{\cos kx}{\cos kl/2} - 1 \right), \quad M(x) = \frac{N}{k^2} \theta' = \frac{P}{2k} \frac{\sin kx}{\cos kl/2}.$$

При  $x = l/2$

$$M_{\max} = \frac{P}{2k} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{Pl}{4} \beta_m.$$

Здесь  $\beta_m = \frac{2}{kl} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$  - коэффициент, учитывающий влияние продольной си-

лы  $N$  посредством аргумента  $\alpha = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{N}{EJ}}$ .

Если  $N=0$ , то представляя в виде ряда  $\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \dots$ , получим

$$\beta_M = \frac{1}{\alpha} \left( \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \dots \right) = 1.$$

Если  $N = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ , то  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta_M = \infty$ .

Наибольший прогиб

$$y_{\max} = \frac{P}{2kN} \left( \operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ} \cdot \frac{3}{\alpha^3} (\operatorname{tg}\alpha - \alpha).$$

Отсюда видно, что продольная сила  $N = \pi^2 EJ/l^2 = N_y$  (эйлерова сила) при любом значении поперечной нагрузки (независимо от значения  $P$ , даже при  $P=0$ ) является разрушающей.

**Задача 6.2.** Двухопорная балка загружена в пролете поперечной и продольной силами, рис. 6.4. Вычислить прогиб в точке приложения силы.

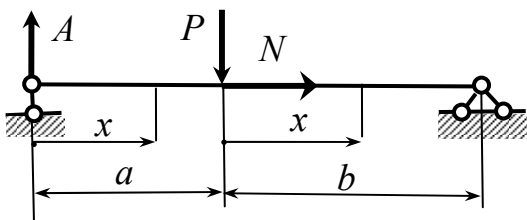


Рис. 6.4

**Решение.** На левом участке возникает поперечный изгиб. Согласно (5.24) на этом участке:

$$y = \theta_0 x + \frac{Ax^3}{6EJ} = \theta_0 x + \frac{Ak^2 x^3}{6N},$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{Ak^2 x^2}{2N}, \quad M = Ax. \quad P_a = A \quad (6.14)$$

На правом участке возникает продольно-поперечный изгиб. Согласно (6.12) здесь

$$y = y_a + \frac{\theta_a}{k} \sin kx + \frac{M_a}{N} (1 - \cos kx) - \frac{P_a}{kN} (kx - \sin kx).$$

Если подставить сюда значения начальных параметров, вычисленных из (6.14) при  $x=a$  ( $P_a = Q_a = A - P$ ), то после преобразования получим

$$y = \frac{\theta_0}{k} (ka + \sin kx) + \frac{Aa}{N} \left( \frac{k^2 a^2}{6} + \frac{ka}{2} \sin kx + 1 - \cos kx \right) - \frac{P}{kN} (kx - \sin kx).$$

Взяв отсюда вторую производную и положив при этом  $x=b$  в условия  $y(b) = y''(b) = 0$ , найдем начальные параметры



$$\theta_0 = -\frac{P}{N} \cdot \frac{(k^2 a(a+3b)/6+1)\sin kb - kb \cos kb}{ka \cos kb + \left(1 - \frac{k^2 a^2}{3} \sin kb\right)},$$

$$A = P \frac{a+b}{a} \cdot \frac{\sin kb}{ka \cos kb + \left(1 - \frac{k^2 a^2}{3} \sin kb\right)}.$$

Подставляя начальные параметры в уравнение изогнутой оси первого участка, при  $x = a$  получим:

$$y = -\frac{Pa}{k^2 EJ} \cdot \frac{\left(\frac{k^2 ab}{3} + 1\right) \sin kb - kb \cos kb}{ka \cos kb + \left(1 - \frac{k^2 a^2}{3} \sin kb\right)}.$$

Если  $N \rightarrow 0$ , то  $\cos kb \rightarrow 1$ , а  $\sin kb \approx kb$ . При этом получим

$$y = -\frac{Pa^2 b^2}{3lEJ}.$$

**Задача 6.3.** Консоль загружена поперечной силой  $P$  и сжимающей силой  $N$ , рис. 6.5. Вычислить наибольший прогиб.

**Решение.** Приняв начало координат на левом конце балки, согласно (6.12) получаем:

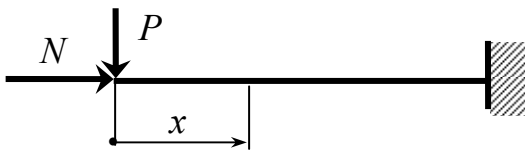


Рис. 6.5

$$y = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx - \frac{P}{kN} (kx - \sin kx),$$

$$y' = \theta_0 \cos kx - \frac{P}{N} (1 - \cos kx).$$

Из условий, при  $x = l$   $y = y' = 0$ , находим:

$$\theta_0 = \frac{P}{N} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl},$$

$$y_0 = -\frac{P}{kN} (\operatorname{tg} kl - kl) = -\frac{Pl^3}{3EJ} \beta,$$

где  $\beta = \frac{3}{\alpha^3} (\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$ ,  $\alpha = kl$ .

Так как  $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$ , то  $\beta > 1$ . В этом легко убедиться, взяв первые три члена ряда

Маклорена  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15} \alpha^5$ . Следовательно  $\beta = 1 + \frac{2}{5} \alpha^2$ .

**Задача 6.4.** Консоль загружена поперечной силой  $P$  и растягивающей силой  $N$ , рис. 6.6. Вычислить наибольший прогиб.

**Решение.** Согласно (6.13):

$$y = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{P}{kN} (kx - \operatorname{sh} kx), \quad \theta = \theta_0 \operatorname{ch} kx + \frac{P}{N} (1 - \operatorname{ch} kx).$$

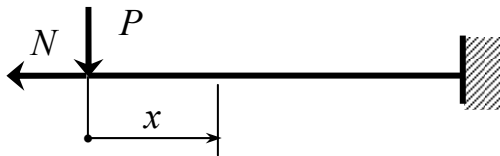


Рис. 6.6

Из условий при  $x = l$   $y = y' = 0$  находим:

$$\theta_0 = \frac{P \operatorname{ch} kl - 1}{N \operatorname{ch} kl}, \quad y_0 = -\frac{Pl^3}{3EJ} \beta.$$

где  $\beta = \frac{3}{\alpha^3} (\alpha - \operatorname{th} \alpha)$ ,  $\alpha = kl$ .

Так как  $\operatorname{th} \alpha < \alpha$  то  $\beta < 1$ . Используя разложение  $\operatorname{th} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15} \alpha^5$ , получим

$$\beta = 1 - \frac{2}{5} \alpha^2.$$

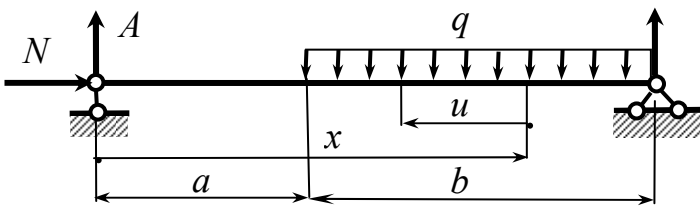


Рис. 6.7

**Задача 6.5.** Двухопорная балка загружена по схеме рис. 6.7. Составить уравнение изогнутой оси балки в общем виде.

**Решение.** На втором участке согласно (6.12) уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$y = \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{A}{kN} (kx - \sin kx) - \int_0^{x-a} \frac{q du}{kN} (ku - \sin ku) =$$

$$= \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{qb^2}{2kN} (kx - \sin kx) - \frac{q}{kN} \left[ \frac{k}{2} (x-a)^2 + \frac{\cos k(x-a) - 1}{k} \right].$$

Угол поворота  $\theta_0$  вычисляется из условия при  $x = a + b = l$   $y = 0$ . Для первого участка последнее слагаемое не учитывается.

## 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Выше были рассмотрены отдельные виды простого нагружения – растяжения или сжатия, кручения, изгиба. На практике часто встречаются различные сочетания выше указанных нагружений: неплоского изгиба, изгиба с растяжением-сжатием, изгиба с кручением и другие сочетания. Такое напряженное состояние в общем называется сложным сопротивлением.

### 7.1. Неплоский и косой изгиб

Если внешняя нагрузка действует в различных плоскостях, не проходящих через главные центральные оси поперечного сечения стержня (балки), то изогнутая ось его не будет плоской кривой. Такой изгиб называется неплоским (левый участок балки на рис. 7.1, а). В частном случае, когда вся

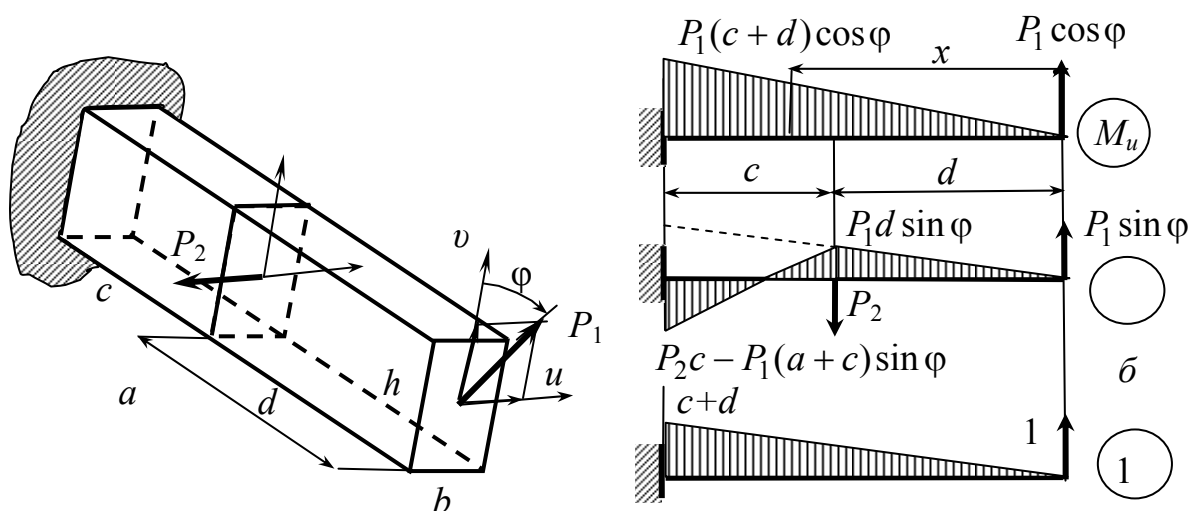


Рис.7.1

нагрузка действует в одной плоскости, не проходящей через главные центральные оси сечения, возникает косой изгиб (правый участок на рис. 7.1, а). В этом случае (в отличие от плоского изгиба) балка изгибается в одной плоскости, не совпадающей с плоскостью нагружения.

Как в общем так и в частном случае заданная нагрузка представляется в проекциях на направление главных центральных осей и по принципу суперпозиции рассматривается два плоских изгиба, рис. 7.1.

От вертикальной проекции силы  $P_1$   $P_v = P_1 \cos \varphi$  возникает изгиб балки относительно горизонтальной оси  $u$  моментом  $M_u = P_v x = P_1 x \cos \varphi = M(x) \cos \varphi$  с напряжением

$$\sigma(M_u) = -\frac{M_u}{J_u} v. \quad (7.1)$$

Горизонтальная проекция силы  $P_1$   $P_u = P_1 \sin \varphi$  на правом участке вызывает изгиб балки относительно вертикальной оси  $v$  моментом  $M_v = P_u x \sin \varphi = M(x) \sin \varphi$ . От этого момента возникают напряжения

$$\sigma(M_v) = -\frac{M_v}{J_v} u. \quad (7.2)$$

Суммарное напряжение в первом квадранте, где текущие координаты точек  $u$  и  $v$  положительные

$$\sigma = -\frac{M_u}{J_u} v - \frac{M_v}{J_v} u. \quad (7.3)$$

В частном случае косоугольного изгиба (на правом участке балки)

$$\sigma = -P_1 x \left( \frac{\cos \varphi}{J_u} v + \frac{\sin \varphi}{J_v} u \right).$$

Наибольшее напряжение при  $x = d$ , где изгибающий момент от силы  $P_1$   $M = P_1 d$ , в точках с наибольшими координатами  $v = \pm h/2$ ,  $u = \pm b/2$ , составляет

$$\sigma_{\max} = \mp \frac{M}{W_u} \left( \cos \varphi + \frac{W_u}{W_v} \sin \varphi \right). \quad (7.4)$$

В общем случае неплоского изгиба при произвольном поперечном сечении балки для вычисления наибольших напряжений нужно знать положение точек, наиболее удаленных от нейтральной линии, уравнение которой получим из (7.3), положив  $\sigma = 0$ :

$$v = -\frac{M_v}{M_u} \frac{J_u}{J_v} u = ku, \quad (7.5)$$

Это прямая, проходящая через начало координат под углом  $\alpha$ , угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_v}{M_u} \frac{J_u}{J_v}$  определяет наклон нейтральной линии к оси  $u$ .

Поскольку наклон вектора суммарного момента  $M = \sqrt{M_u^2 + M_v^2}$  к оси  $u$  определяется углом  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{M_v}{M_u}$ , а  $\frac{J_u}{J_v} \neq 1$ , то угол наклона нейтральной линии не равен углу наклона плоскости нагружения, т.е. при неплоском изгибе  $\varphi \neq \alpha$ , рис. 6.2, а.

В частном случае косоугольного изгиба  $M_v / M_u = P_v / P_u = \operatorname{tg} \varphi$ , а

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_u}{J_v} \operatorname{tg} \varphi. \quad (7.5^*)$$

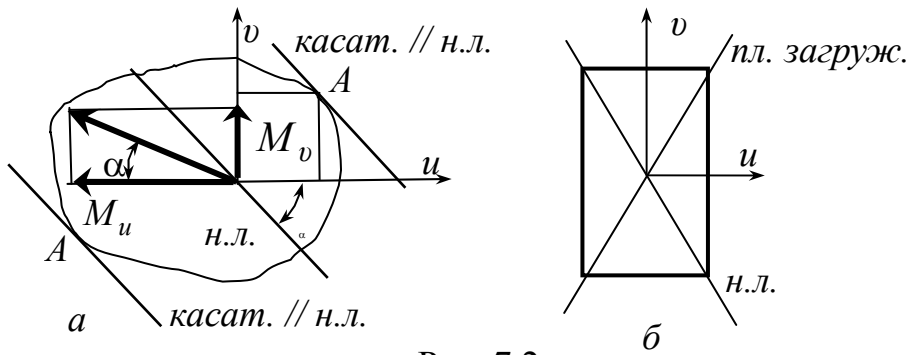


Рис. 7.2

Для прямоугольного сечения

$$\frac{J_u}{J_v} = \frac{h^2}{b^2}.$$

Если сила (плоскость загрузки) проходит через угловые точки первой и третьей четверти, то нейтральная

линия пройдет через угловые точки второй и четвертой четверти (рис. 7.2, б). Очевидно, что здесь наиболее удаленными от нейтральной оси точками, т.е. точками с наибольшими напряжениями являются угловые точки  $A$  и  $B$  (рис. 7.2, а). В этих точках согласно (7.4):

$$\sigma_{\max} = \mp \frac{M_{\max}}{W_u} \left( \cos \varphi + \frac{h}{b} \sin \varphi \right).$$

В балках с большим отношением моментов сопротивления  $W_u/W_v$  даже при малых наклонах плоскости загрузки  $\varphi$  возникают большие напряжения. Например, двутавровая балка № 60, предназначенная для работы в вертикальной плоскости (когда нагрузка направлена вдоль оси стенки двутавра), получила наклон  $\varphi = 1^\circ$ . При этом напряжения в балке возрастут в  $\cos \varphi + \frac{W_u}{W_v} \sin \varphi = 1 + \frac{2560}{182} \frac{\pi}{180} = 1,245$  раза.

В случае произвольной конфигурации поперечного сечения балки (рис. 7.2, а) для разыскания точек с наибольшими напряжениями к контуру сечения нужно провести касательные, параллельные нейтральной линии. В точках  $A$  и  $B$ , координаты которых теперь будут известны, согласно (6.3) можно найти соответственно наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения.

Перемещения при неплоском изгибе вычисляются также по принципу суперпозиции от нагрузок, действующих в главных центральных плоскостях. Например, вертикальное перемещение центра тяжести торца консоли, представленной на рис. 7.1, а, легко вычислить по правилу Верещагина по эпюрам, представленным на рис. 7.1, б.

$$\delta_B = \frac{P_1(c+d)^3}{3EJ_u} \cos \varphi,$$

горизонтальное перемещение (перемножение эпюр  $M_v$  и единичной)

$$\delta_{\Gamma} = \frac{P_1(c+d)^3}{3EJ_v} \sin \varphi - \frac{P_2 c^2}{2EJ_v} \left( d + \frac{2}{3}c \right).$$

В частном случае косоуго изгиба (при  $P_2 = 0$ )  $l = c + d$  получим:

$$\delta_B = \frac{P_1 l^3}{3EJ_u} \cos \varphi, \quad \delta_{\Gamma} = \frac{P_1 b^3}{3EJ_v} \sin \varphi, \quad \delta = \sqrt{\delta_B^2 + \delta_{\Gamma}^2}.$$

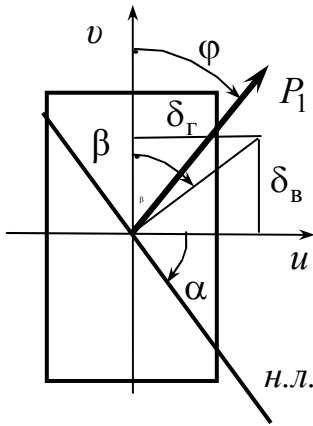


Рис. 7.3

Угол отклонения направления полного перемещения  $\delta$  от вертикальной оси  $v$  (рис. 7.3)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_{\Gamma}}{\delta_B} = \frac{J_u}{J_v} \operatorname{tg} \varphi. \quad (7.6)$$

Сравнивая эту формулу с (7.5\*), видим, что при косом изгибе  $\beta = \alpha$ , т.е. направление перемещения перпендикулярно к нейтральной линии и не совпадает с направлением силы. Но при неплоском изгибе такой зависимости не будет.

**Задача 7.1.** Консоль из двутавра №20 ( $J_u = 1840 \text{ см}^4$ ,  $J_v = 115 \text{ см}^4$ ,  $W_u = 184 \text{ см}^3$ ,  $W_v = 23,1 \text{ см}^3$ ,  $h = 20 \text{ см}$ ,  $b = 10 \text{ см}$ ) загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , направленной через угловые точки полков, рис. 7,4. Вычислить допускаемую нагрузку и перемещение торца консоли.

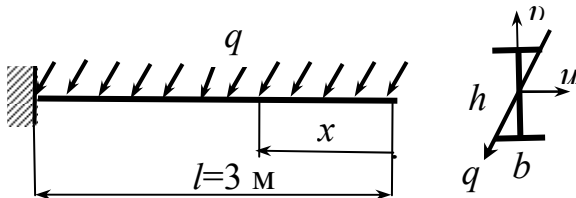


Рис. 7.4

**Решение.** Угол наклона плоскости загрузки

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{h} = 26,56^\circ,$$

$$\cos \varphi = 0,894, \quad \sin \varphi = 0,447.$$

Изгибающий момент в заземлении от вертикальной составляющей нагрузки  $q_v = q \cos \varphi$

равен  $M_u = -\frac{q_u l^2}{2} \cos \varphi$ , а от горизонтальной составляющей  $M_v = -\frac{q_v l^2}{2} \sin \varphi$ .

Из условия прочности  $\sigma_{\max} = \frac{q l^2}{2W_u} \left( \cos \varphi + \frac{W_u}{W_v} \sin \varphi \right) \leq [\sigma]$  определяем

допускаемую нагрузку

$$q = \frac{2W_u [\sigma]}{l^2 \left( \cos \varphi + \frac{W_u}{W_v} \sin \varphi \right)} = \frac{2 \cdot 184 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6}{3^2 \left( 0,894 + \frac{184}{23,1} 0,497 \right)} = 1468,7 \text{ Н/м}.$$

Принимаем  $q = 1450 \text{ Н/м}$ .

Вертикальная и горизонтальная составляющие перемещения торца консоли равны:

$$\delta_v = -\frac{ql^4}{8EJ_u} \cos \varphi = -\frac{1450 \cdot 3^4 \cdot 0,894}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -3,566 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\delta_u = -\frac{ql^4}{8EJ_v} \sin \varphi = -\frac{1450 \cdot 3^4 \cdot 0,447}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 115 \cdot 10^{-8}} = -28,533 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

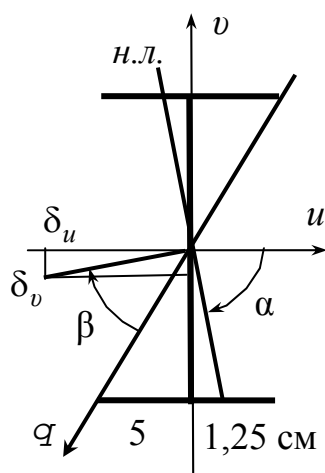


Рис. 7.5

Полное перемещение  $\delta = \sqrt{\delta_v^2 + \delta_u^2} = 28,755 \text{ мм}$ , см. рис. 7.5.

Направление перемещения определяется углом

$$\beta = \arctg \frac{\delta_u}{\delta_v} = \arctg 8 = 262,87 - 180 = 82,87^\circ.$$

Положение нейтральной линии определяется углом

$$\alpha = \arctg \left( -\frac{J_u}{J_v} \operatorname{tg} \varphi \right) = -\arctg 8 = -82,87^\circ.$$

При косом изгибе (в отличие от неплоского) наклон нейтральной линии совпадает с направлением перемещения, т.е.  $\alpha = \beta$ .

**Задача 7.2.** Двухопорная одноконсольная деревянная балка прямоугольного поперечного сечения загружена вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 5 \text{ кН/м}$  и горизонтальной силой  $P = 2 \text{ кН}$  на консоли, рис. 7.6.

Определить поперечные размеры балки при допуске напряжении  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ , приняв отношение высоты балки  $h$  к ширине  $b$  равным двум ( $b/h = 2$ ) и построить эпюры напряжений в наиболее напряженном сечении. Вычислить перемещения центра тяжести поперечных сечений и построить эпюру полного перемещения.

**Решение.** От вертикальной нагрузки возникает плоский изгиб балки в вертикальной плоскости (относительно оси  $u$ ) с изгибающим моментом, рис. 7.6, б

$$M_u(x) = A_v x - \frac{qx^2}{2} + B_v(x-l)e(x-l) = 10x - \frac{5x^2}{2} + 10(x-4)e(x-4),$$

где единичная функция  $e(x-l)$  указывает на наличие третьего слагаемого только при  $x > l$ .

Наибольшие напряжения в волокнах балки с координатами  $v = h/2$

$$\sigma(M_u) = \frac{M_u(x)}{W_u} = \frac{6}{bh^2} M_u(x) = \frac{3}{2b^3} \left( 10x - \frac{5}{2}x^2 \right).$$

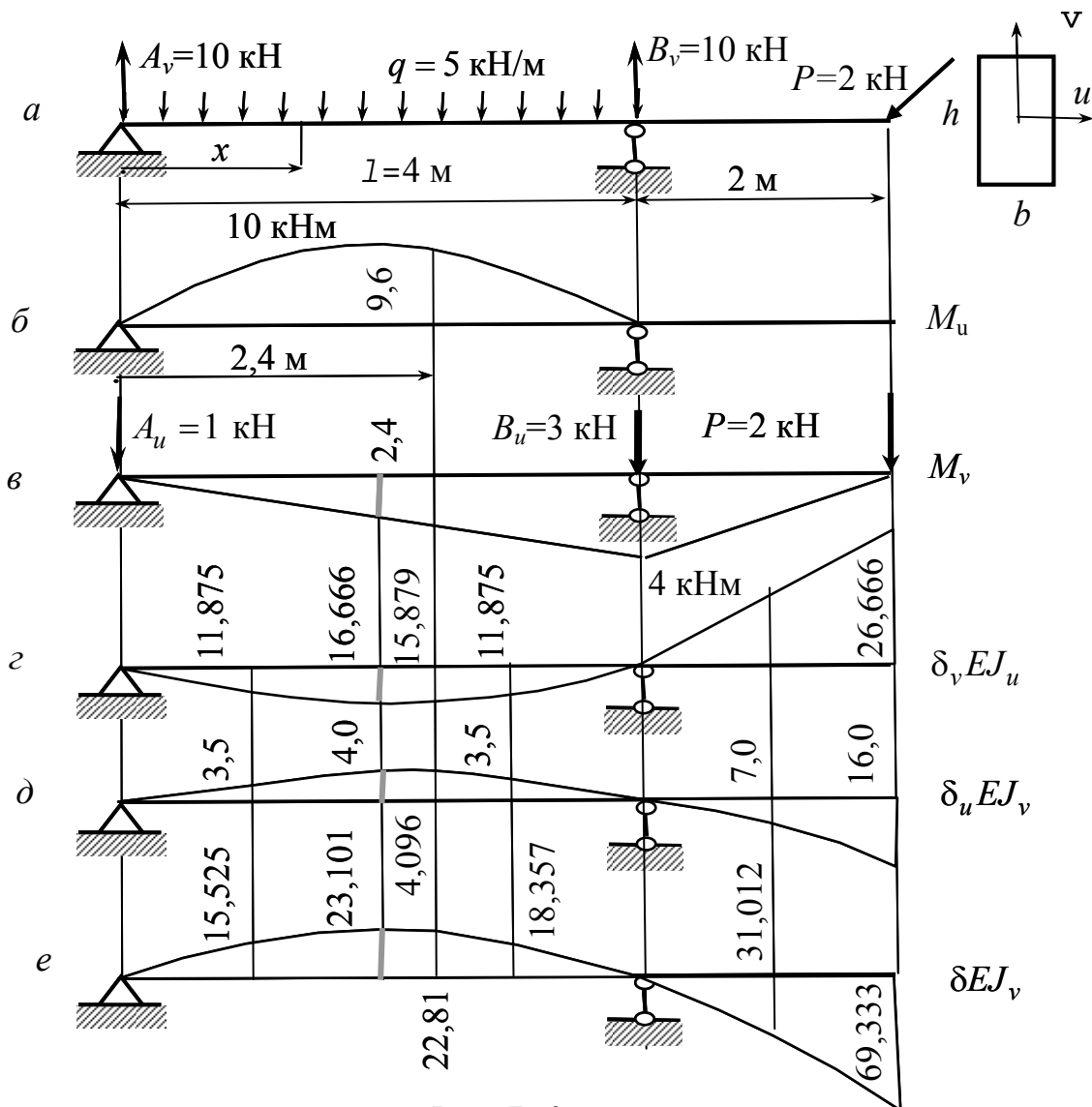


Рис. 7. 6

От горизонтальной силы  $P = 2$  кН возникает изгиб балки относительно вертикальной оси  $v$  в горизонтальной плоскости моментом

$$M_v(x) = -A_v x + B_v(x - l)$$

с напряжением в волокнах с координатами  $u = b/2$

$$\sigma(M_v) = \frac{M_v(x)}{W_v} = \frac{6}{hb^2} M_v(x) = \frac{3}{b^3} x.$$

Суммарное напряжение в угловой точке четвертого квадранта при  $u = b/2, v = -h/2$



$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M_u(x)}{W_u} + \frac{M_v(x)}{W_v} = \frac{3}{b^3} \left( 6x - \frac{5}{4}x^2 \right).$$

Из условия  $\frac{d\sigma(x)}{dx} = 0$  находим при  $x = 2,4$  м сечение с наибольшими напряжениями

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{b^3} \left( 6 \cdot 2,4 - \frac{5}{4} 2,4^2 \right) = \frac{21,6}{b^3}.$$

Из условия прочности  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  находим ширину балки

$$b = \sqrt[3]{\frac{21,6 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6}} = 0,129 \text{ м} \approx 13 \text{ см} \text{ и высоту } h = 26 \text{ см}.$$

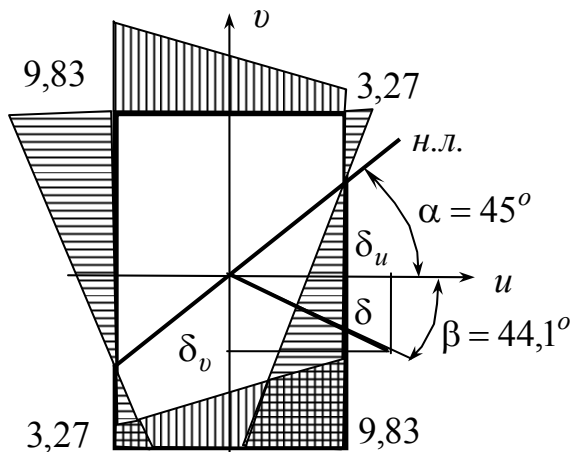
В сечении с максимальным напряжением (при  $x = 2,4$  м) возникают моменты:  $M_u = 10 \cdot 2,4 - 2,5 \cdot 2,4^2 = 9,6$  кНм,  $M_v = -2,4$  кНм.

Моменты сопротивления сечения:  $W_u = \frac{bh^2}{6} = \frac{13 \cdot 26^2}{6} = 1464,66 \text{ см}^3,$

$$W_v = \frac{hb^2}{6} = \frac{26 \cdot 13^2}{6} = 732,33 \text{ см}^3.$$

Напряжения в угловых точках наиболее напряженного сечения, рис. 7,7:

$$\sigma\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = -\frac{9,6 \cdot 10^3}{1464,66} 10^6 + \frac{2,4 \cdot 10^3}{732,33} 10^6 = (-6,55 + 3,28) 10^6 \text{ Па} = -3,27 \text{ МПа},$$



$$\sigma\left(-\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = -6,55 - 3,28 = -9,83 \text{ МПа},$$

$$\sigma\left(-\frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right) = 6,55 - 3,28 = 3,27 \text{ МПа},$$

$$\sigma\left(\frac{b}{2}, -\frac{h}{2}\right) = 6,55 + 3,28 = 9,83 \text{ МПа}.$$

Положение нейтральной линии определяется углом  $\alpha$

Рис. 7.7

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_u M_v}{J_v M_u} = 4 \frac{2,4}{9,6} = 1, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Уравнение изогнутой оси балки от вертикальной нагрузки находим методом начальных параметров

$$\delta_v(x) = \theta_0 x + \frac{10x^3}{6EJ_u} - \frac{5x^4}{24EJ_u}.$$

Из условия шарнирного опирания балки на правой опоре ( $\delta_v(l) = 0$ ) находим начальный параметр  $\theta_0 = -\frac{13,3}{EJ_u}$ . По уравнению изогнутой оси

$$\delta_v(x) = -\frac{13,3}{EJ_u}x + \frac{10x^3}{6EJ_u} - \frac{5x^4}{24EJ_u} + \left[ \frac{10(x-4)^3}{6EJ_u} + \frac{5(x-4)^4}{24EJ_u} \right] \cdot e(x-4)$$

построена эпюра прогибов балки в вертикальной плоскости (рис. 7.6, з).

От горизонтальной силы  $P$  уравнение изогнутой оси балки в горизонтальной плоскости:

$$\delta_u(x) = \theta_0 x - \frac{x^3}{6EJ_v}.$$

Из условия  $\delta_u(l) = 0$  находим угол поворота  $\theta_0 = \frac{2,6}{EJ_v}$ , а затем по уравнению изогнутой оси

$$\delta_u(x) = \frac{2,6}{EJ_v}x - \frac{x^3}{6EJ_v} + \frac{3x^3}{6EJ_v}e(x-4)$$

построена эпюра линейных перемещений центров тяжести сечений в горизонтальной плоскости, рис. 7.6, д.

Уравнение суммарный перемещений  $\delta = \sqrt{\delta_u^2 + \delta_v^2}$ , т.е.

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_v^2(x)}{(EJ_u)^2} + \frac{\delta_u^2(x)}{(EJ_v)^2}} = \frac{1}{EJ_u} \sqrt{\delta_v^2(x) + (4\delta_u(x))^2}$$

определяет эпюру рис. 7.6, е.

В наиболее напряженном сечении при  $x=2,4$  м:

$$M_u = 9,6 \text{ кНм}, \delta_v = -15,872/EJ_u, M_v = -2,4 \text{ кНм}, \delta_u = 4,096/EJ_v,$$

$$\delta = 17,861/EJ_u. \text{ С учетом жесткости балки}$$

$$EJ_u = E \frac{bh^3}{12} = 10^{10} \frac{13 \cdot 26^3}{12} 10^{-8} = 1904 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2,$$

$$EJ_v = E \frac{hb^3}{12} = 10^{10} \frac{26 \cdot 13^3}{12} 10^{-8} = 476 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$$

находим перемещения:  $\delta_v = -8,336$  мм,  $\delta_u = 8,605$  мм,  $\delta = 11,96$  мм.

На конце консоли  $\delta = \frac{69,333 \cdot 10^6}{1904 \cdot 10^3} = 36,4 \cdot 10^{-3}$  м = 36,4 мм.

Направление перемещения в наиболее напряженном сечении

$\beta = \text{arctg} \frac{\delta_v}{\delta_u} = \frac{8,336}{8,605} = 0,9687$ ,  $\beta = 44,1^\circ$ , угол  $\beta$  не равен углу  $\alpha$ , так как изгиб

неплоский, а не косой.

## 7.2. Внецентренное растяжение или сжатие

Если короткий стержень загружен продольной силой, приложенной в центре тяжести поперечного сечения, то он испытывает растяжение или сжатие. Если, кроме того, действует еще поперечная нагрузка, то стержень испытывает изгиб с растяжением или сжатием. При этом по принципу суперпозиции вычисляется напряжение или перемещение отдельно от изгиба и растяжения (сжатия) и результаты суммируются для напряжений и геометрически складываются для перемещений.

Аналогичное напряженно-деформированное состояние будет и в случае внецентренного растяжения или сжатия, рис. 7.8.

Приведем заданную силу  $P$  к центру тяжести поперечного сечения последовательным приложением двух равных и противоположно направленных сил на главных центральных осях  $u$  и  $v$ .

От приведения силы на ось  $v$  образуется пара сил с моментом  $M_v = P u_p$ , вызывающая чистый изгиб стержня относительно оси  $v$  с напряжением в произвольном сечении в точке с положительными координатами (в первой четверти)

$$\sigma(M_v) = \frac{M_v}{J_v} u = P \frac{u_p u}{J_v}.$$

От приведения силы на ось  $u$  образуется пара сил с моментом  $M_u = P v_p$ , вызывающая чистый изгиб стержня относительно оси  $u$  с напряжением в произвольном сечении в точке с положительными координатами (в первой четверти)

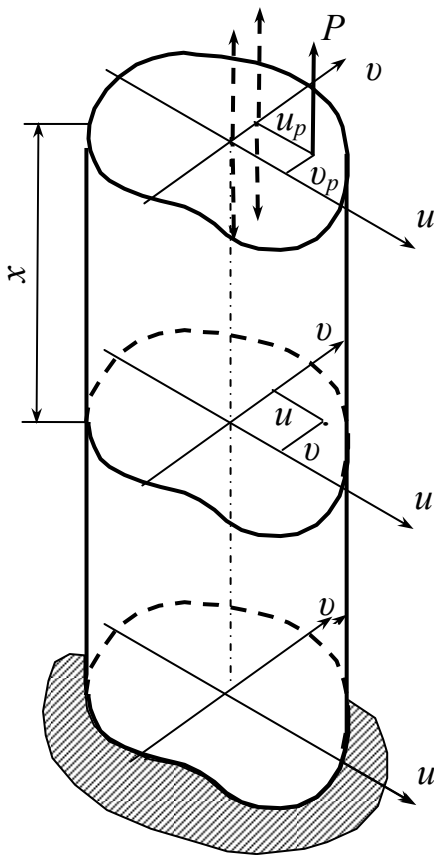


Рис. 7.8

$$\sigma(M_u) = \frac{M_u}{J_u} v = P \frac{v_p v}{J_u}.$$

Полученная таким путем центральная сила  $P$  вызывает растяжение с напряжением  $\sigma(P) = P/F$ .

Суммарное напряжение  $\sigma = \sigma(P) + \sigma(M_v) + \sigma(M_u)$  можно представить формулой

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{u_p}{i_v^2} u + \frac{v_p}{i_u^2} v \right). \quad (6.7)$$

Здесь:  $i_v^2 = J_v/F$ ,  $i_u^2 = J_u/F$  - квадраты радиусов инерции площади поперечного сечения стержня относительно главных центральных осей  $v$  и  $u$  соответственно.

Для вычисления наибольших напряжений нужно знать положение точек, наиболее удаленных от нейтральной линии, уравнение которой получим из (7.7), положив  $\sigma = 0$ :

$$\frac{u_p}{i_v^2} u + \frac{v_p}{i_u^2} v + 1 = 0. \quad (7.8)$$

Это уравнение прямой, отсекающей на координатных осях отрезки  $a_v$  и  $a_u$ , для нахождения которых подставим в (7.8) поочередно координаты точек  $A(a_u, 0)$  и  $B(0, a_v)$ . Так получим:

$$a_u = -\frac{i_v^2}{u_p}, \quad a_v = -\frac{i_u^2}{v_p}. \quad (7.9)$$

Касательные к контуру поперечного сечения, параллельные нейтральной линии, определяют положения точек  $C$  и  $D$  с наибольшими напряжениями. Подставляя координаты этих точек в (7.7) получим  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , рис. 7.9.

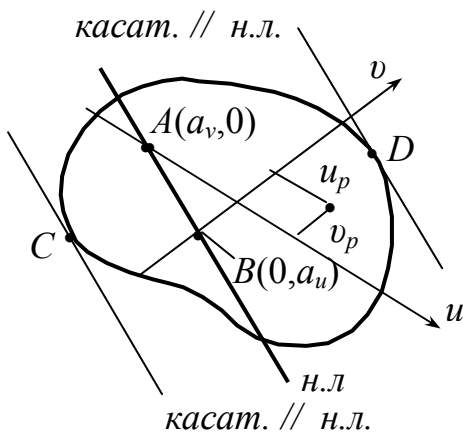


Рис. 7.9

Из (7.9) видно, что с увеличением координат внецентренной силы  $u_p$ ,  $v_p$ , т.е. при удалении силы от центра тяжести сечения стержня, отрезки, определяющие положение нейтральной линии, уменьшаются, т.е. нейтральная линия приближается к центру тяжести сечения. В предельном случае, когда  $u_p = \infty$ ,  $v_p = \infty$ , то  $a_u = a_v = 0$ , т.е. возникает кривой изгиб с моментами  $M_u = P v_p$  и  $M_v = P u_p$  и согласно (7.7), когда единицей можно пренебречь, получим (7.3). Наоборот,

когда внецентренная сила приближается к центру, нейтральная ось от центра удаляется. В предельном случае, когда  $u_p = v_p = 0$  (сила в центре), нейтральная линия уходит в бесконечность, т.е. возникает центральное растяжение.

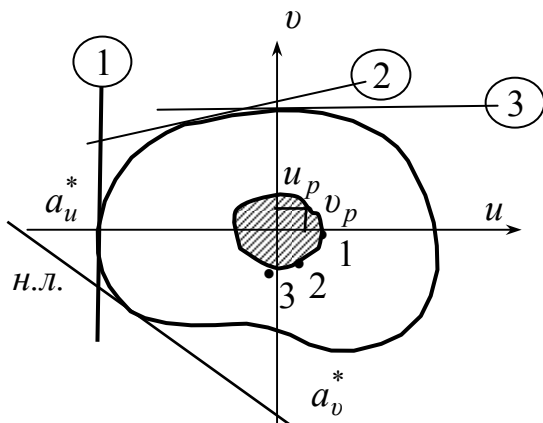


Рис. 7.10

При некотором удалении внецентренной силы от центра нейтральная линия касается контура поперечного сечения, отсекая на координатных осях отрезки  $a_u^*$  и  $a_v^*$ , рис. 6.10.

Подставляя эти отрезки в (7.9), получим координаты внецентренной силы

$$u_{я} = -\frac{i_v^2}{a_u^*}, \quad v_{я} = -\frac{i_u^2}{a_v^2}, \quad (7.10)$$

которые соответствуют касательной, параллельной нейтральной линии.

Обкатывая контур поперечного сечения касательными, получим ряд точек внецентренной силы, ограничивающей ядро сечения. Если нейтральная линия пересекает контур поперечного сечения (см. рис. 7.9), то по разные стороны от нее возникают напряжения разных знаков. Если нейтральная линия касается контура, то все поперечное сечения будет испытывать однозначные напряжения.

Ядром сечения называется часть площади поперечного сечения вокруг центра тяжести, внутри которой можно прикладывать внецентренную силу, не вызывая напряжений разных знаков. Для построения ядра сечения используют

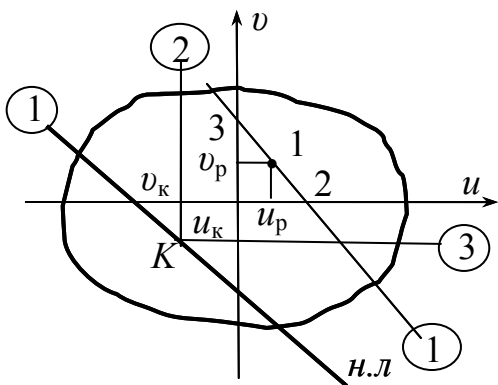


Рис. 7.11

теорему о вращении нейтральной линии., которая заключается в том, что при вращении нейтральной линии вокруг некоторой точки внецентренная сила перемещается по прямой.

Убедимся в этом. Пусть внецентренной силе (рис.7.11) соответствует некоторая нейтральная линия, уравнение которой (7.8), в котором фиксированными являются координаты силы  $u_p$  и  $v_p$ , а текущие координаты  $u$  и  $v$  – переменные, соответствующие всем точкам, лежащим на

нейтральной линии. Зафиксируем на нейтральной линии некоторую точку  $K$ , и подставим координаты этой точки в уравнение (7.8), изменяя координаты внецентренной силы  $u_p, v_p$ :

$$\frac{u_k}{i_v^2} u_p + \frac{v_k}{i_u^2} v_p + 1 = 0.$$

Так как зависимость между переменными  $u_p$  и  $v_p$  линейная, то это значит, что сила перемещается по прямой.

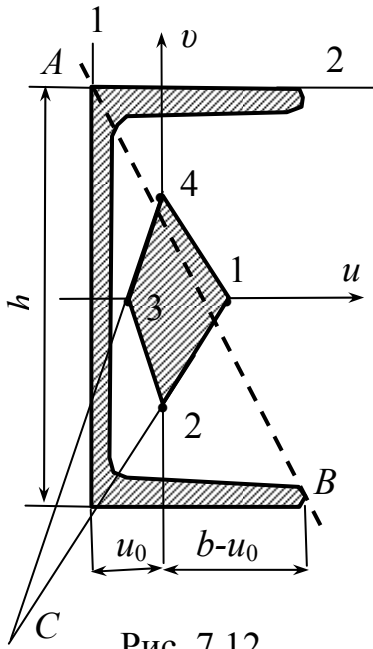


Рис. 7.12

**Задача 7.3.** Построить ядро сечения для швеллера, считая, что размеры швеллера и радиусы инерции известны, рис. 7.12.

**Решение.** Пусть нейтральная линия коснулась контура швеллера в положении 1, отсекая отрезки на координатных осях  $a_u = -u_0$  и  $a_v = \infty$ . Согласно (7.10) ей соответствует точка ядра 1 с координатами  $u_{я} = i_v^2 / u_0$  и  $v_{я} = 0$ .

Нейтральная линия 2 отсекает отрезки  $a_u = \infty$  и  $a_v = h/2$ . Ей соответствует точка на контуре ядра  $u_{я} = 0$  и  $v_{я} = -2i_u^2 / h$ .

В соответствии с теоремой о вращении нейтральной линии из положения 1 в положение 2 вокруг угловой точки швеллера внецентренная сила переходит из точки 1 ядра в точку 2 по прямой. Аналогично получаем точку 3 с координатами  $-i_v^2 / (b - u_0)$  и точку 4  $(0, 2i_u^2 / h)$ .

Вращая нейтральную линию вокруг точки A, сообщаем внецентренной силе перемещение по прямой 1-2 по направлению к точке C. При вращении нейтральной линии вокруг точки B сила перемещается по прямой 4-3 по направлению к точке C. Следовательно, приложив силу в точке C, получим нейтральную линию AB.

Таким же путем строится ядро сечения для прямоугольника. Поскольку для прямоугольника  $i_v^2 = J_v / F = b^2 / 12$ , а  $a_u = -b/2$ , то по (7.10) получим координаты точки ядра 1  $(b/6, 0)$ . Аналогично для точки 2 с учетом  $i_u^2 = J_u / F = h^2 / 12$ ,  $a_v = -h/2$  находим 2  $(0, -h/6)$ . Так получаем ядро сечения в виде ромба.

**Задача 7.4.** Короткая деревянная стойка круглого поперечного сечения распилена на две равные части продольной плоскостью. Какую нагрузку выдержит стойка из двух распилов при загрузке ее в центре круга, рис. 7.13.

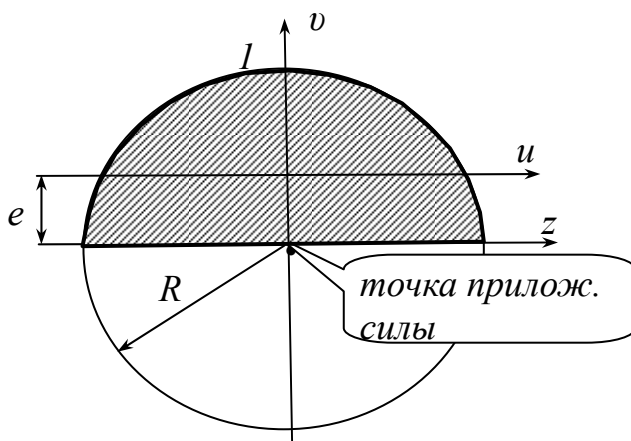


Рис. 7.13

**Решение.** Статический момент площади полукруга относительно оси u (3.13)

$$S_u = \frac{2}{3} R^3.$$

Координата центра тяжести

полукруга и эксцентриситет внецентральной силы (3.13)

$$e = \frac{S_z}{F} = \frac{4R}{3\pi} = 0,4244R.$$

Момент инерции относительно главной центральной оси  $u$

$$J_u = J_z - e^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = 0,10975R^4.$$

Квадрат радиуса инерции

$$i_u^2 = \frac{J_u}{F} = 0,10975R^2 \frac{2}{\pi} = 0,06986R^2.$$

Напряжения вычисляются в системе главных центральных осей по (7.7)

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 - \frac{e}{i_u^2} v \right) = -\frac{P}{F} \left( 1 - \frac{0,4244}{0,06986} \frac{u}{R} \right) = -\frac{P}{F} \left( 1 - 6,074 \frac{u}{R} \right).$$

Напряжения у кромки плоскости распила с координатой  $v = -e = -0,4244R$

$$\sigma_0 = -\frac{P}{F} (1 + 6,074 \cdot 0,4244) = -3,578 \frac{P}{F}.$$

Напряжение в точке 1 с координатой  $v = 0,5756R$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{F} (1 - 6,074 \cdot 0,5756) = 2,496 \frac{P}{F}.$$

Допускаемая нагрузка на два распила

$$P = 2 \frac{[\sigma]F}{3,578} = 0,559[\sigma]F,$$

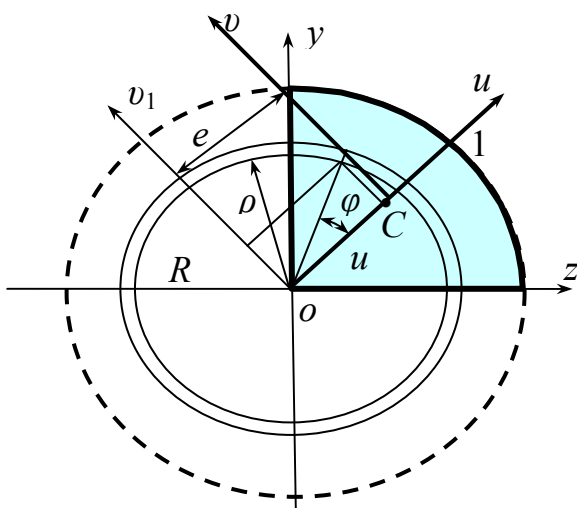


Рис. 7.14

что составляет 55,9% от нагрузки на сплошную круглую стойку.

**Задача 7.5.** Короткая деревянная круглая стойка распилена вдоль оси на четыре равные части, рис. 7.14. Какую нагрузку выдержит такая распилённая стойка, если на каждую четвертую часть

сила  $P/4$  попережнему остается в центре круга?

**Решение.** Стойка с площадью  $F_1 = \frac{\pi R^2}{4}$

испытывает внецентренное сжатие силой  $P_1 = \frac{P}{4}$  с эксцентриситетом  $e = u_c$ .

В системе главных центральных осей напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma = -\frac{P_1}{F_1} \left( 1 + \frac{e}{i_v^2} u \right) = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{e}{i_v^2} u \right).$$

Статический момент площади поперечного сечения четверти круга относительно оси  $v_1$ , проходящей через центр круга  $S_{v_1} = \iint u dF =$

$$= \iint \rho \cos \varphi \cdot \rho d\varphi \cdot d\rho = 2 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^3}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} R^3.$$

Координаты центра тяжести поперечного сечения четверти круга, т.е. эксцентриситет силы

$$u_c = e = \frac{S_{v_1}}{F_1} = \frac{2}{3} \frac{4}{\pi} R = 0,6002R.$$

Момент инерции четверти круга относительно оси  $v_1$   $J_{v_1} = \iint u^2 du =$

$$= \iint \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho d\varphi \cdot d\rho = 2 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi = 2 \frac{R^4}{4} \left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = 0,32135R^4.$$

Момент инерции площади четверти круга относительно главной центральной оси  $v$

$$J_v = J_{v_1} - e^2 F_1 = \frac{R^4}{2} \left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \right)^2 \frac{\pi R^4}{4} = 0,038407R^4.$$

Квадрат радиуса инерции относительно главной центральной оси  $v$

$$i_v^2 = \frac{J_v}{F_1} = 0,038407 \frac{4}{\pi} R^2 = 0,0489R^2.$$

Напряжение

$$\sigma = -\frac{P}{4 F} \left( 1 - \frac{0,6002 u}{0,0489 R} \right) = -\frac{P}{F} \left( 1 - 12,274 \frac{u}{R} \right):$$

в точке приложения силы (при  $u = -0,6002R$ )



$$\sigma = -\frac{P}{F}(1 + 12,274 \cdot 0,6003) = -8,364 \frac{P}{F},$$

в точке 1 с координатой  $u_1 = 0,3998R$

$$\sigma = -\frac{P}{F}(1 -) = -\frac{P}{F}\left(1 - 12,274 \frac{u}{R}\right):$$

в точке приложения силы (при  $u = -0,6002R$ )

$$\sigma = \frac{P}{F}(1 + 12,274 \cdot 0,6002) = -8,364 \frac{P}{F},$$

в точке 1 с координатой  $u_1 = 0,3998R$

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}(1 - 12,274 \cdot 0,3998) = 3,907 \frac{P}{F}.$$

Допускаемая нагрузка на четыре стойки с площадью в четверть круга

$$P_0 = 4 \frac{[\sigma]F}{8,364} = 4,478[\sigma]F,$$

что составляет 47,8 % от нагрузки на сплошную круглую стойку.

### 7.3. Изгиб с кручением

Простейшим примером такого напряженно-деформированного состояния может быть консольный вал с рычагом, на конце которого приложена сосредоточенная сила, рис.

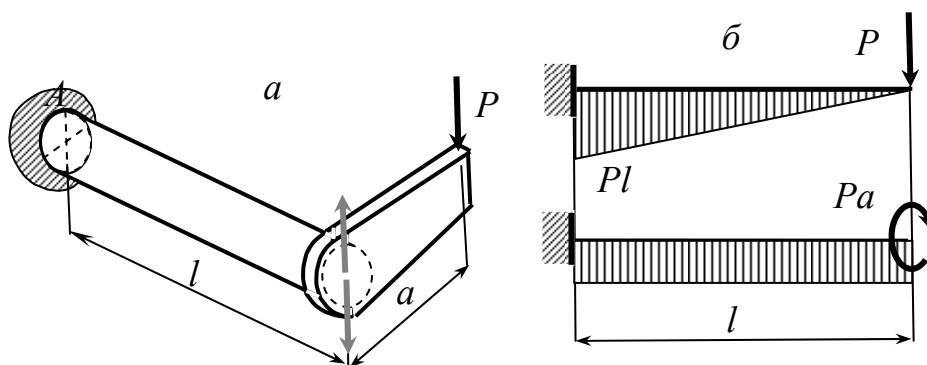


Рис. 7.15

7.15. Если привести эту силу к центру тяжести торца вала, приложив там две равные противоположно направленные силы  $P$ , получим силу, приложенную на конце консоли и вызывающую изгиб, и пару

сил с моментом  $M_k = Pa$ , вызывающую кручение вала.

Из эпюр (рис. 7.15, б) видно, что в рассматриваемом случае наиболее напряженное сечение находится в защемлении вала, где возникает наибольший изгибающий момент  $M_{из} = Pl$  и крутящий момент  $M_{кр} = Pa$ . В этом сечении

наиболее напряженные элементы находятся у поверхности вала на вертикальном диаметре, рис. 7.16. По граням этих элементов действуют нормальные напряжения изгиба  $\sigma = \frac{M_u}{W} = \frac{Pl}{\pi r^3} 4$  и касательные напряжения от кручения

$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{Pa}{\pi r^3} 2$ . Прочность такого элемента, испытывающего плоское напряженное состояние, проверяется по соответствующей теории гипотезе прочности по главным напряжениям. Согласно (2.10) главные напряжения

$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ . Теперь можно найти расчетные напряжения. Для хрупких материалов согласно (2.17)

$\sigma_{расч}^{II} = \sigma_1 - \mu\sigma_2$ . Принимая  $\mu = 0,3$ , с учетом  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получим

$$\sigma_{расч}^{II} = 0,35 \frac{M_u}{W} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{M_u}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2} = \frac{M_{расч}^{II}}{W}, \quad (7.11)$$

где  $M_{расч}^{II} = 0,35M_u^2 + 0,65\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}$  - расчетный момент по второй теории прочности.

По третьей теории прочности согласно (2.18)  $\sigma_{расч}^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ , т.е.  $\sigma_{расч}^{III} = M_{расч}^{III} / W$ , где расчетный момент определяется формулой

$$M_{расч}^{III} = \sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}. \quad (7.12)$$

Аналогично по четвертой теории прочности (2.18) получим

$\sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ , чему соответствует расчетный момент

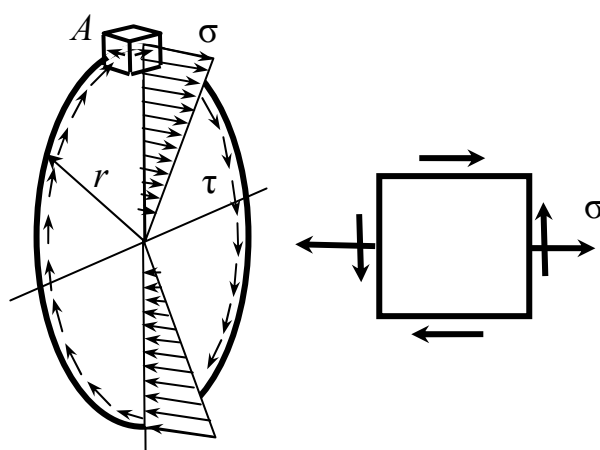
$$M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}. \quad (7.13)$$

Из условия прочности  $\sigma_{расч} \leq [\sigma]$  можно найти момент сопротивления  $W \geq M_{расч} / [\sigma]$ , а затем вычислить диаметр вала.

В случае изгиба вала нагрузками, расположенными в различных плоскостях, удобно рассматривать проекции этих нагрузок в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и использовать принцип суперпозиции.

Рассмотрим неразрезной вал с двумя дисками (шкивами или зубчатыми колесами), к которым приложены силы  $P_1$  и  $P_2$  под углами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 7.17).

После приведения этих сил к оси вала, получим крутящие моменты  $M_{кр} = P_1 D_1 / 2 = P_2 D_2 / 2$  и силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях. От вертикальных проекций сил  $P_1 \sin \alpha$  и  $P_2 \sin \beta$



вал изгибается в вертикальной плоскости. Для построения эпюры изгибающих моментов  $M_B$  нужно раскрыть статическую неопределенность вала методом сил (см. Раздел 8), вычислив момент на промежуточной опоре  $B$

$$X_1 = \left[ \frac{P_1 a b \sin \alpha}{a+b} \left( \frac{a}{3a+b} + \frac{b}{2} \left( \frac{2a}{3a+b} + \frac{1}{3} \right) \right) - \frac{P_2 c l \sin \beta}{6} \right] \frac{3}{a+b+l}.$$

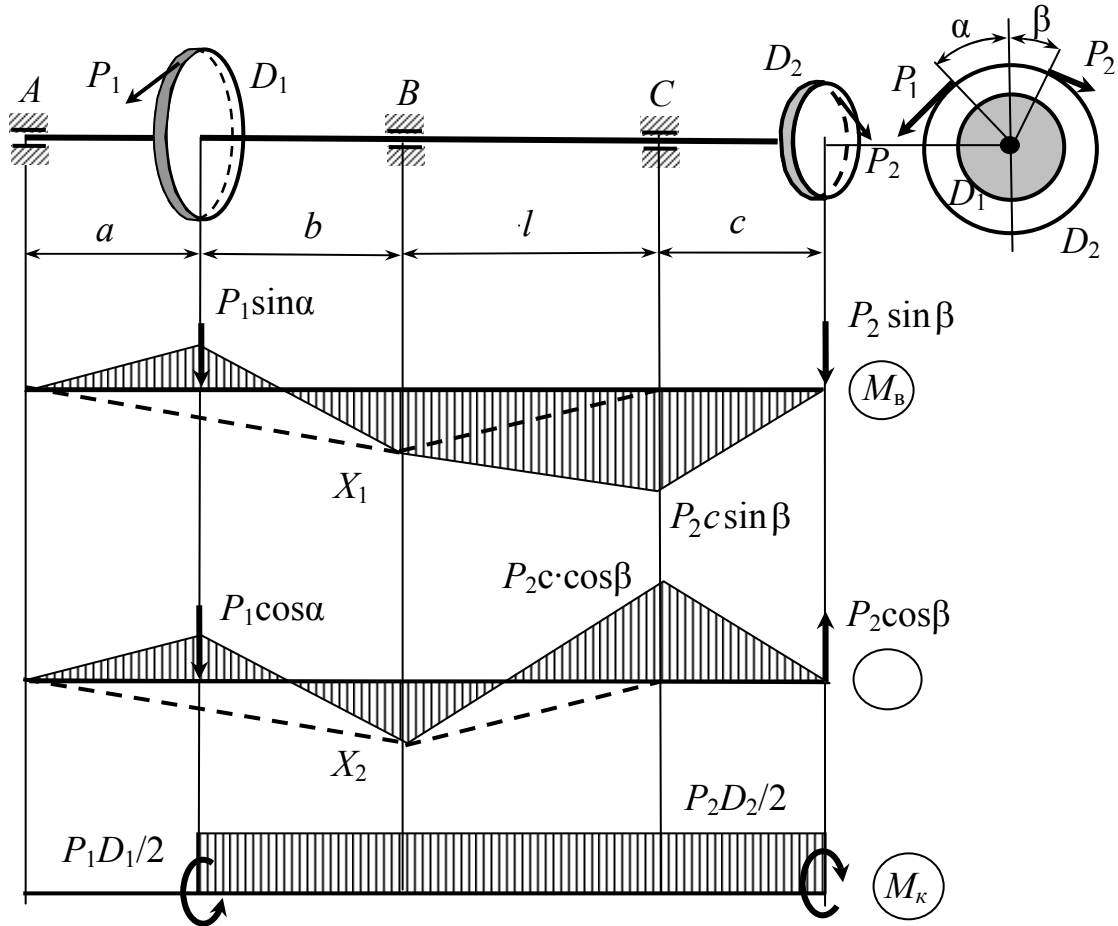


Рис. 7.17

Далее находим изгибающий момент в месте приложения силы  $P_1$

$$M(a) = \frac{P_1 a b \sin \alpha}{a+b} - X_1 \frac{a}{a+b}.$$

Так же строится эпюра изгибающих моментов от горизонтальных проекций нагрузки. Суммарный изгибающий момент равен геометрической сумме составляющих проекций  $M_{\text{и}} = \sqrt{M_B^2 + M_{\Gamma}^2}$ .

После этого можно вычислить расчетный момент по соответствующей теории прочности в точках излома эпюр:  $M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_B^2 + M_{\Gamma}^2 + M_K^2}$ . По наибольшему расчетному моменту вычисляется диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}}. \quad (7.13)$$

## 8. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Статически неопределимыми называются системы с лишними кинематическими связями, т.е. системы, у которых количество степеней свободы меньше необходимого для обеспечения геометрической неизменяемости системы.

В пространственной статически определимой системе должно быть шесть кинематических связей. Для плоской системы, когда все стержни системы и внешние нагрузки располагаются в одной плоскости, в самом общем случае достаточно трех связей для обеспечения геометрической неизменяемости. Усилия

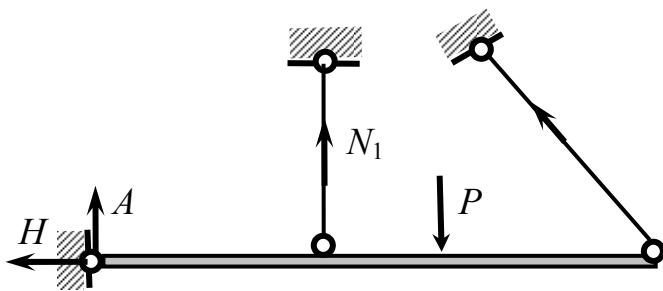


Рис. 8.1

в этих связях можно определить из трех независимых уравнений равновесия. Если таких связей больше трех, то уравнений равновесия становится недостаточно для вычисления усилий в связях, задача оказывается статически неопределимой. Например, на рис. 8.1 показана балка с одной шарнирной опорой и двумя

стержневыми подвесками. В этой системе четыре кинематические связи – две опорные, препятствующие опорной точке балки перемещаться в плоскости, т.е. по горизонтали (одна связь) и по вертикали (вторая связь) и две связи стержневые. Этим связям соответствуют неизвестные опорные реакции  $H$  и  $A$  и усилия в подвесках  $N_1$  и  $N_2$ . Их нельзя найти из трех уравнений равновесия. Одной лишней связью соответствует одно лишнее неизвестное. Для обеспечения геометрической неизменяемости этой системы достаточно трех связей, например, двух опорных и одной стержневой. Можно предложить и другие варианты необходимых кинематических связей, обеспечивающих геометрическую неизменяемость балки. Заданная балка имеет одну лишнюю связь, задача один раз статически неопределима.

Количество лишних связей равно количеству неизвестных величин (реакций и усилий) за вычетом количества независимых уравнений равновесия. Так, в раме, изображенной на рис. 8.2, а, пять реакций, а уравнений равновесия три. Эта рама дважды статически неопределима. На рис. 8.2, б – рама трижды статически неопределима. На рис. 8.2, в показана рама в виде замкнутого контура. Внешне, по отношению к опорным связям, эта рама может быть статически определимой, но внутренне она статически неопределимая, здесь три неизвестные величины – внутренние силовые факторы  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  (изгибающий момент, продольное усилие и поперечная сила). Замкнутый контур (рис. 8.2, в) и рама с двумя заделками (рис. 8.2, б) по степени статической неопределимости равнозначны. Раму с заделками можно считать замкнутым контуром (замкнутым неподвижным основанием). Таким образом, по количеству замкнутых контуров легко вычислить степень статической неопределимости, т.е. количество лишних связей

$$L=3K. \quad (8.1)$$

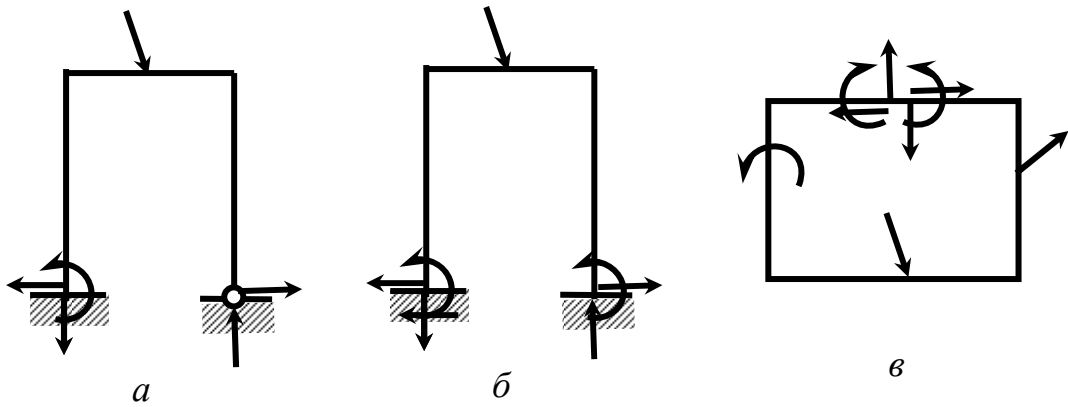


Рис. 8.2

Например, в рамах на рис. 8.3 по два замкнутых контура. Значит, они шесть раз статически неопределимы.

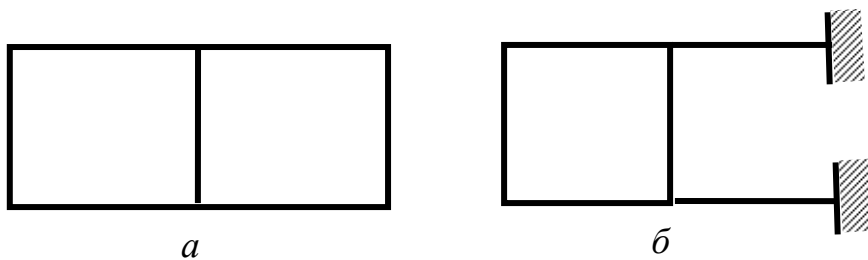


Рис. 8.3

Обратим внимание на рамы с промежуточными шарнирами, рис. 8.4.

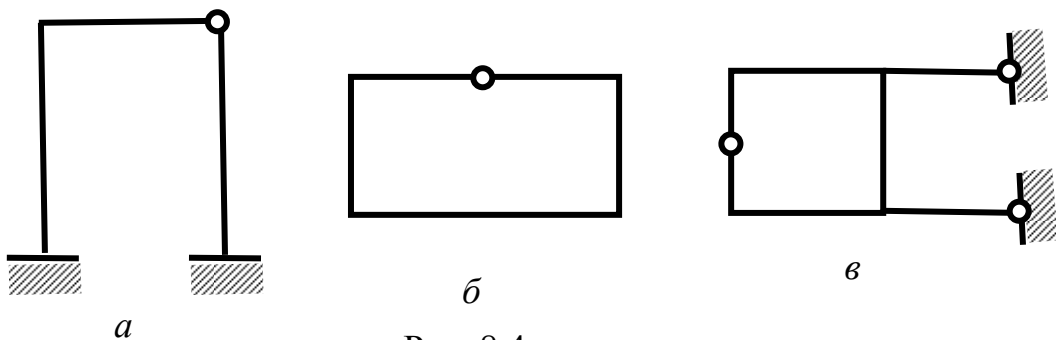


Рис. 8.4

В раме, изображенной на рис. 8.4, *а*, шесть неизвестных реакций. Для их вычисления можно использовать три уравнения равновесия и одно дополнительное уравнение – изгибающий момент в шарнире приравнять нулю. Получается только два лишних неизвестных, вместо трех в замкнутом контуре. Значит, простой шарнир, соединяющий два элемента рамы, в замкнутом контуре снимает одну кинематическую связь. Тогда вместо (8.1), обозначая через *Ш* количество простых шарниров, получим

$$L=3K-Ш. \quad (8.2)$$

Согласно (8.2) рамы, изображенные на рис. 8.4, *б*, *в*, два и четыре раза статически неопределимы, соответственно.

Существует два классических метода расчета статически неопределимых систем – метод сил и метод перемещений.

## 8.1. Метод сил

Для расчета статически неопределимой системы методом сил выбирается **основная система**, которая образуется из системы заданной путем отбрасывания лишних связей. За лишние можно принимать любые связи сверх необходимого количества, но так, чтобы основная система была **геометрически неизменяемой и статически определимой**. Вместо отброшенных связей прикладываются реакции или усилия, возникающие в этих связях. Значения и направления неизвестных (реакций или усилий) находятся из уравнений, требующих, чтобы основная система работала так, как заданная, т.е. чтобы перемещения в местах отброшенных связей соответствовали заданным.

На рис.8.5 показана трижды статически неопределимая рама и различные

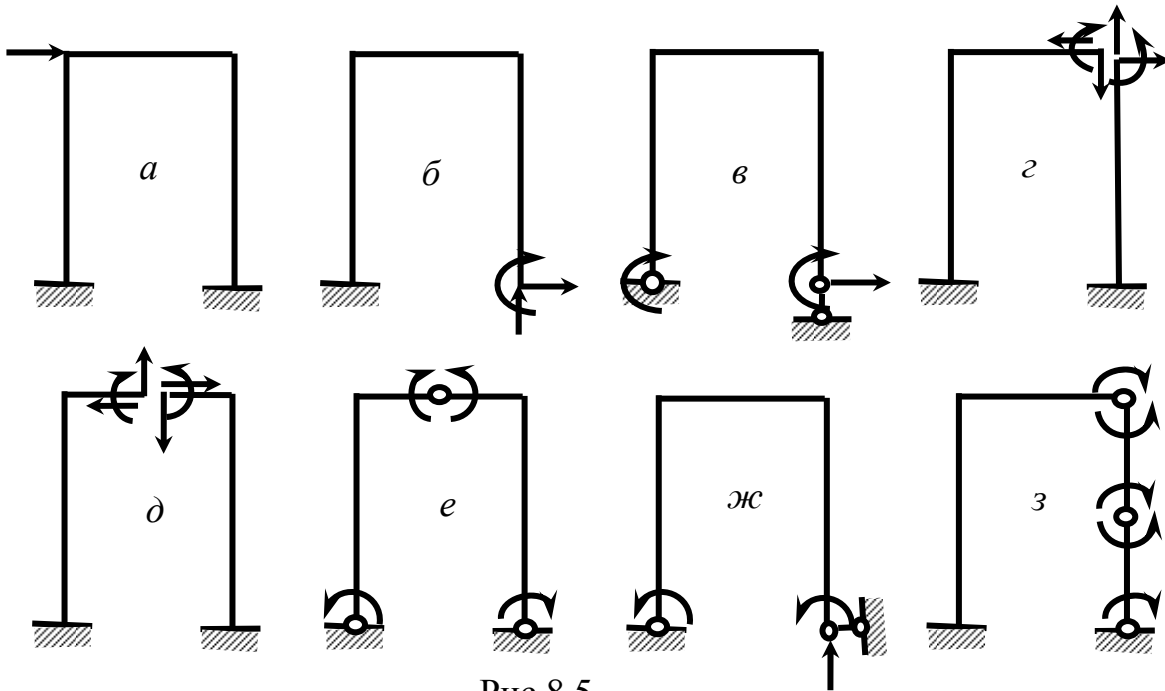


Рис.8.5

варианты основной системы. Во всех вариантах отброшено по три связи. Значит, формально эти рамы можно принять в качестве основной системы. Однако, две последние (рис. 8.5, ж, з) не отвечают требованиям, предъявляемым к основным системам.

Рама, показанная на рис. 8.5, ж, мгновенно изменяемая, ее опорные связи не могут обеспечить геометрическую неизменяемость системы, так как правая опорная точка при загрузении сместится по вертикали.

Попробуем вычислить опорные реакции в такой раме от силы  $P$ , рис. 8.6. Из уравнения  $\sum Y = 0$  находим  $R_2 = 0$ ; а из уравнения  $\sum M_B = 0$   $R_2 = Ph/l$ , а из  $\sum M_A = 0$  получаем  $Ph = 0$ . Получается абсурдное решение.

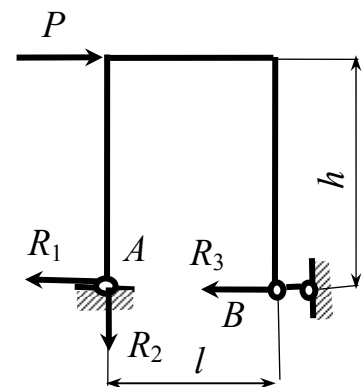


Рис. 8.6

В раме рис. 8.5, з также невозможно вычислить реакции, поскольку ее левая часть (слева от верхнего шарнира) осталась один раз статически неопределимой, а в правой части (стойке) одной связи не хватает. Замечаем явный при-

знак непригодности основных систем – наличие **трех шарниров на одной прямой**. Не рассматривая известных в строительной механике признаков мгновенно изменяемых систем, можно рекомендовать следующий универсальный признак: если в основной системе невозможно вычислить опорные реакции, то такая формально (по формулам) статическая определимая система является мгновенно изменяемой системой.

Рассмотрим суть метода сил на примере статически неопределимой балки, рис. 8.7. Балка один раз статически неопределима.

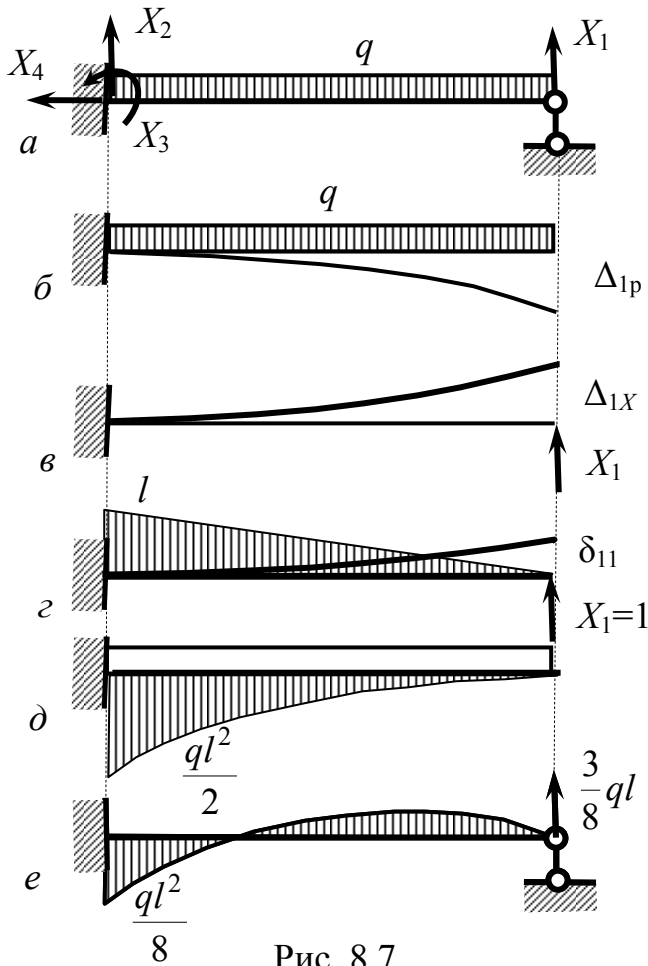


Рис. 8.7

В качестве основной системы возьмем консоль, т.е. балку с отброшенной правой опорной связью. Вместо отброшенной опорной связи прикладываем неизвестную реакцию  $X_1$ , такую по величине и направлению, чтобы перемещение на правом конце балки оказалось равным нулю (так же, как в заданной балке), т.е. потребуем выполнение равенства

$$\Delta_{1p} + \Delta_{1X} = 0$$

(алгебраическая сумма перемещений равна нулю, рис. 7.7, б, в).

Разделив слагаемое  $\Delta_{1X}$  на  $X_1$ , получим уравнение вида

$$\frac{\Delta_{1X}}{X_1} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \text{ или}$$

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0. \quad (8.3)$$

Это каноническое уравнение метода сил, в котором  $\delta_{11} = \Delta_{1X} / X_1$

представляет перемещение правой опорной точки балки по направлению реакции  $X_1$  от  $X_1=1$  (рис. 8.7, в), а  $\Delta_{1p}$  - перемещение по направлению отброшенной связи от нагрузки.

Перемещения вычисляются по формуле Мора или по правилу Верещагина.

Так, в рассматриваемой балке с использованием единичной эпюры (рис. 8.7, в) находим

$$\delta_{11} = \frac{l^2}{2} \frac{2l}{3EJ} = \frac{l}{3EJ},$$

а перемножая грузовую эпюру (рис. 8.7, д) на единичную (рис. 8.7, в), получим

$$\Delta_{1p} = \frac{ql^3}{12} \frac{l}{2EJ} - \frac{ql^2}{2} \frac{l}{2} \frac{2l}{3EJ} = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Из канонического уравнения метода сил находим реакцию на правой опоре  $X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql$ .

После вычисления реакции  $X_1$ , из уравнений равновесия легко вычислить остальные реакции и построить окончательные эпюры изгибающих моментов (рис. 8.7, e) и других силовых и деформационных факторов.

Теперь рассмотрим более сложную стержневую систему, например, трижды статически неопределимую раму, рис. 8, a). В качестве основной системы возьмем раму с отброшенной верхней опорой и последовательно приложим единичные опорные реакции и заданную нагрузку, рис. 8.8, б, в, г, д).

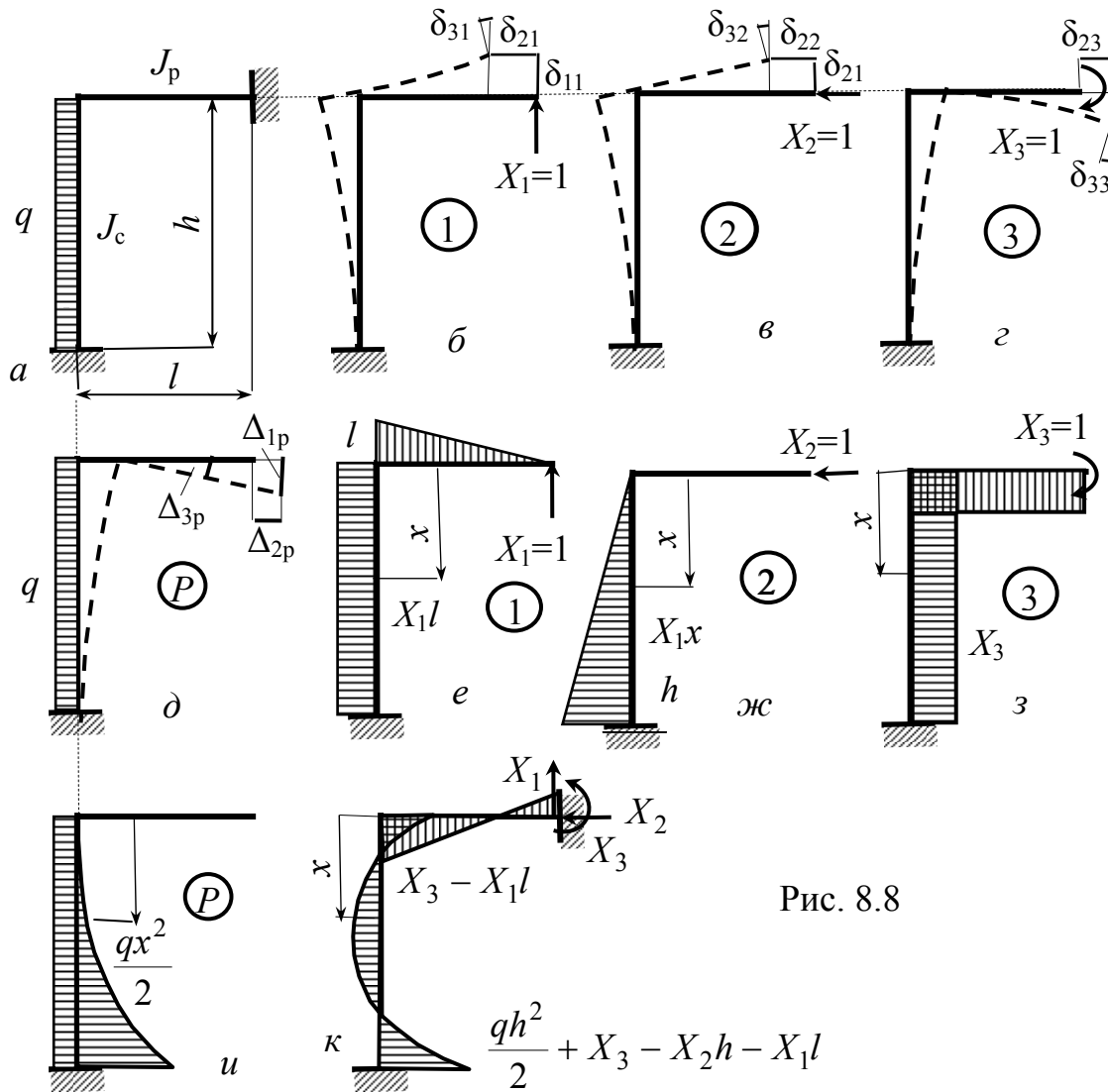


Рис. 8.8

Система канонических уравнений метода сил будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Смысл первого уравнения заключается в том, что суммарное перемещение верхней опорной точки по направлению реакции  $X_1$  (по вертикали) от реак-



ций  $X_1, X_2, X_3$  и от заданной нагрузки равно нулю. Второе уравнение требует, чтобы суммарное перемещение по направлению реакции  $X_2$  было равно нулю. Третье уравнение указывает на то, что перемещение по направлению момента  $X_3$ , т.е. угол поворота, приравнивается нулю.

В общем случае для системы с  $n$  лишними связями система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in} + \Delta_{ip} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned}$$

Смысл каждого уравнения заключается в том, чтобы суммарное перемещение по направлению связи, обозначенной первым индексом коэффициентов, было равно нулю.

Коэффициенты  $\Delta_{ip}$  называются **грузовыми**, а все остальные **единичными**. Единичные коэффициенты с одинаковыми индексами называются **главными**, а с разными индексами – **побочными**. Коэффициент  $\delta_{ik}$  представляет перемещение по направлению силы  $X_i$  от силы  $X_k=1$ . Все коэффициенты в системах, испытывающих изгиб, вычисляются по формуле Мора или по правилу Верещагина, т.е.

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds, \quad \delta_{ik} = \sum \frac{\omega_k m_i}{EJ}. \quad (8.5)$$

Здесь  $M_i, M_k$  - изгибающие моменты от сил  $X_i=1$  и  $X_k=1$ ,  $\omega_k$  - площадь эпюры изгибающих моментов от  $X_k=1$ ,  $m_i$  - изгибающий момент от  $X_i=1$  в сечении, соответствующем положению центра тяжести эпюры от  $X_k=1$ .

Для примера рамы, представленной на рис. 8.8, коэффициенты канонических уравнений метода сил будут следующими:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \sum \frac{\omega_1 m_1}{EJ} &= \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{EJ_p} + \frac{hl \cdot l}{EJ_c}, & \delta_{12} = \sum \frac{\omega_2 m_1}{EJ} &= \frac{h^2}{2} \frac{l}{EJ_c}, \\ \delta_{13} = \sum \frac{\omega_3 m_1}{EJ} &= -\frac{l}{2} \frac{l}{EJ_p} - \frac{h \cdot l}{EJ_c}, & \Delta_{1p} = \sum \frac{\omega_p m_1}{EJ} &= -\frac{qh^2}{2} \frac{h}{3} \frac{l}{EJ_c}, \\ \delta_{22} = \sum \frac{\omega_2 m_2}{EJ} &= \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} \frac{h}{EJ_c}, & \delta_{23} = \sum \frac{\omega_3 m_2}{EJ} &= -\frac{h}{2} \frac{h}{EJ_c}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{2p} = \sum \frac{\omega_p m_2}{EJ} = -\frac{qh^2}{2} \frac{h}{3} \frac{h}{4} \frac{1}{EJ_c}, \quad \delta_{33} = \sum \frac{\omega_3 m_3}{EJ} = \frac{l}{EJ_p} + \frac{h}{EJ_z},$$

$$\Delta_{3p} = \sum \frac{\omega_p m_3}{EJ} = \frac{qh^2}{2} \frac{h}{3} \frac{1}{EJ_c}.$$

Решив систему канонических уравнений и вычислив реакции  $X_1, X_2, X_3$ , можно составить уравнения изгибающих моментов по участкам рамы и построить эпюру. Например, на стойке

$$M(x) = X_1 l + X_2 x - X_3 - \frac{qx^2}{2}$$

Каждое слагаемое этого уравнения можно взять из единичных эпюр и эпюры грузовой. Значит, для построения окончательной эпюры изгибающих моментов достаточно единичные эпюры умножить на соответствующие реакции и сложить вместе с эпюрой грузовой, рис. 8.8, к.

## 8.2. Вычисление перемещений в статически неопределимых системах

Перемещения в статически неопределимых системах вычисляются по формуле Мора или для прямых стержней по правилу Верещагина. Но для этого предварительно нужно раскрыть статическую неопределимость задачи.

Единичное состояние системы можно брать из статически определимой системы, полученной из системы заданной, путем отбрасывания любых лишних связей.

Рассмотрим, как это выполняется на примере балки рис. 8.9, предполагая, что нам нужно найти прогиб в сечении на расстоянии  $a$  от заделки.

Балка уже решена и построена эпюра изгибающих моментов, рис. 8.9, б.

Теперь для вычисления прогиба нужно нагрузку снять, в сечении на расстоянии  $a$  приложить единичную силу и также построить эпюру изгибающих моментов. Для этого нужно решать каноническое уравнение, найти реакцию от единичной силы  $R_1$  и только после этого можно построить единичную эпюру, рис. 8.9, в.

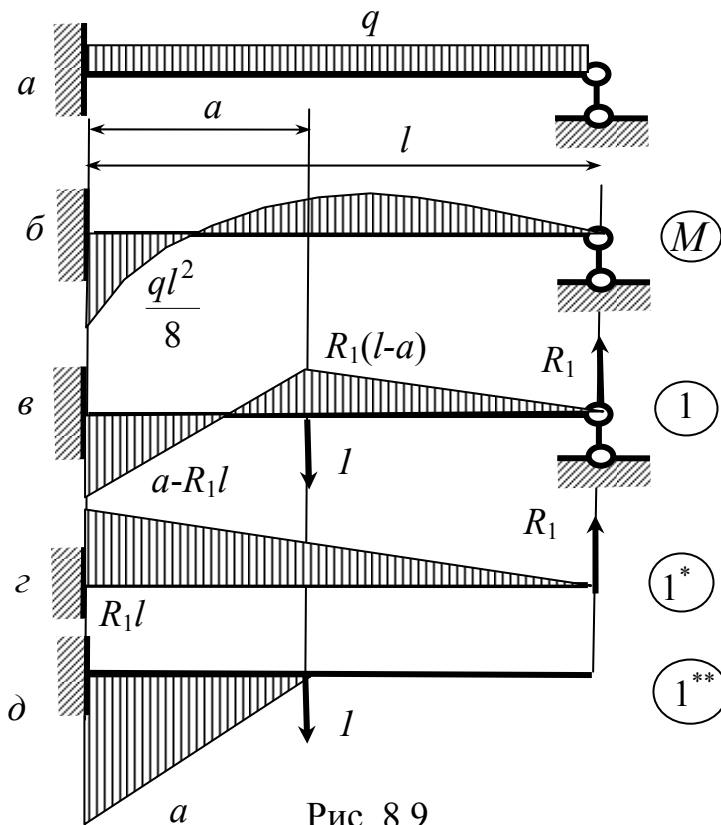


Рис. 8.9

Теперь для вычисления прогиба нужно нагрузку снять, в сечении на расстоянии  $a$  приложить единичную силу и также построить эпюру изгибающих моментов. Для этого нужно решать каноническое уравнение, найти реакцию от единичной силы  $R_1$  и только после этого можно построить единичную эпюру, рис. 8.9, в.

Вычисляя перемещение по правилу Верещагина, площади грузовой эпюры (рис. 8.9, б) нужно перемножать на моменты от единичной нагрузки, взятые из эпюры рис. 8.9, в в сечениях, соответствующих положению центров тяжести составляющих эпюр из рис. 8.9, б. Но единичную эпюру представим, состоящей из двух эпюр: эпюры от реакции  $R_1$  (рис. 8.9, з) и эпюры от единичной силы, рис. 8.9, д. При таком расчленении единичной эпюры перемещение в рассматриваемом сечении будет состоять из двух слагаемых:

$$\Delta(a) = \frac{\omega_p m_1^*}{EJ} + \frac{\omega_p^{**}}{EJ}.$$

Но первое слагаемое представляет прогиб от нагрузки в точке приложения реакции, т.е. на опоре. Но так как на опоре прогиб равен нулю, то остается лишь одно второе слагаемое. А это значит, что мы вычисляем перемещение в консоли от заданной распределенной нагрузки и силы на конце консоли, но равной реакции в статически неопределимой заданной балке.

Отсюда следует, что при вычислении перемещений в статически неопределимых системах достаточно перемножить по правилу Верещагина окончательную эпюру изгибающих моментов на единичную, **построенную в любой основной системе.**

### 8.3. Статически неопределимые балки

В статически неопределимых балках для образования основной системы **рекомендуется вводить рассекающие шарниры на промежуточных опорах.** Вместо отброшенных связей прикладываются усилия, возникающие в этих связях, т.е. прикладываются изгибающие моменты.

**Задача 8.1.** Двухпролетная балка с консолью загружена равномерно распределенной нагрузкой на консоли и левом пролете, рис. 8.10, а.

Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

**Решение.** Эта балка один раз статически неопределима. Основную систему получаем путем введения рассекающего шарнира на промежуточной опоре, рис. 8.10, б, где вместо отброшенных связей прикладываются единичные моменты  $X_1=1$  и строится единичная эпюра. В этой же основной системе строится эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки, рис. 8.10, в.

Для вычисления изгибающего момента на промежуточной опоре  $X_1$  следует решить каноническое уравнение метода сил  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$ , которое требует, чтобы взаимный угол поворота на промежуточной опоре был равен нулю, т.е., чтобы углы поворота на этой опоре справа и слева от опоры были одинаковыми по величине и по знаку.

Коэффициенты канонического уравнения вычисляем по правилу Верещагина.

Перемножая площади единичной эпюры (рис. 8.10, б) на моменты, взятые из этой же эпюры в местах расположения центров тяжести площадей, получим единичный коэффициент

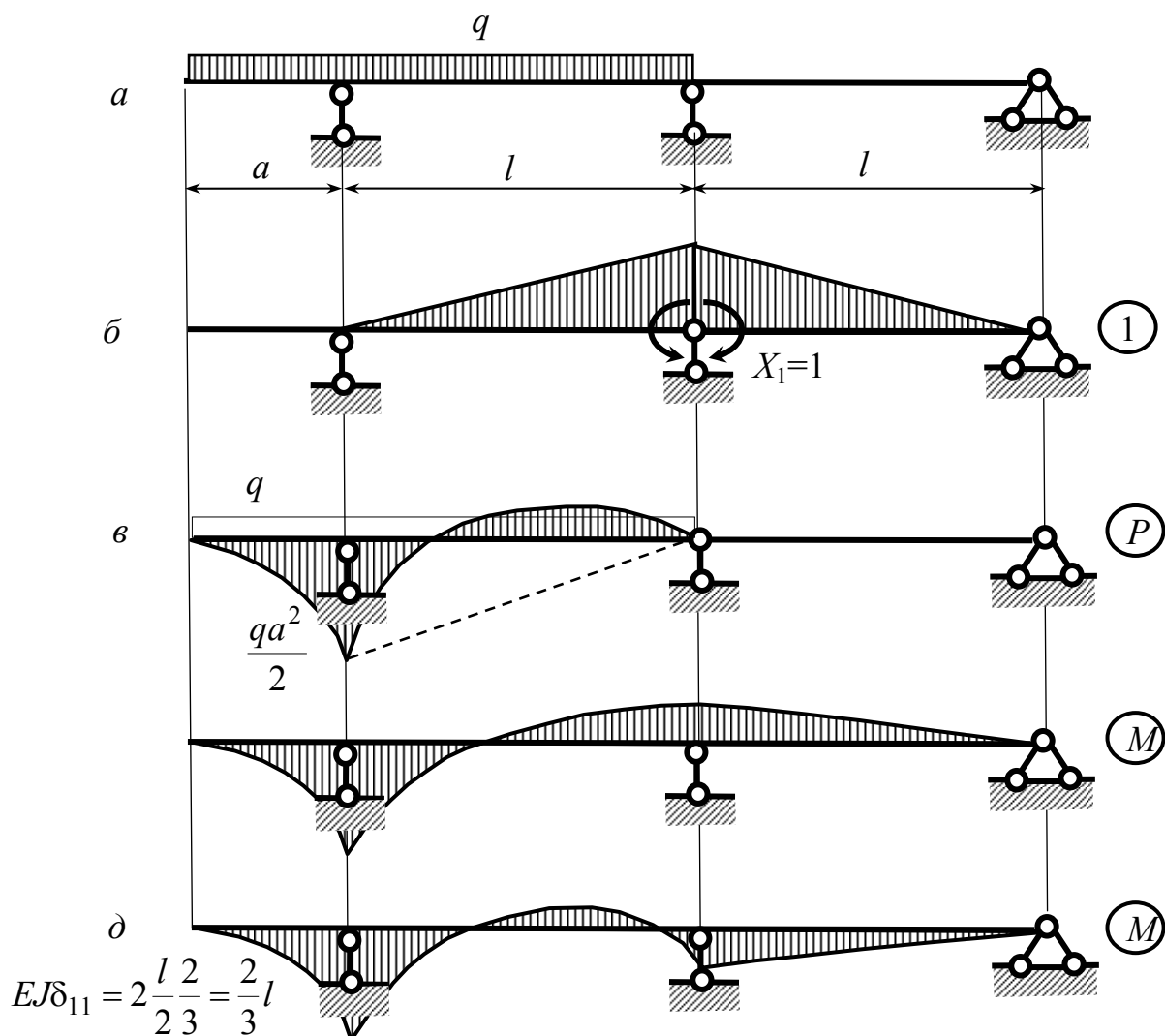


Рис.8.10

Перемножая площади эпюры изгибающих моментов от нагрузки (рис. 8.10, в) на моменты, взятые из единичной эпюры (рис. 10, б) против мест расположения центров тяжести эпюры (рис. 8,10, в), получаем грузовой коэффициент

$$EJ\Delta_{1p} = -\frac{qa^2}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{3} + \frac{ql^3}{12} \frac{1}{2}.$$

При вычислении грузового коэффициента эпюру изгибающих моментов от нагрузки представили в виде двух эпюр: треугольной от опорного момента  $qa^2/2$  и параболической от нагрузки  $q$ , площадь которой равна  $ql^3/12$ .

Из канонического уравнения находим момент на промежуточной опоре

$$X_1 = \frac{qa^2}{8} - \frac{ql^2}{16}.$$

Если длина консоли  $a = l\sqrt{2}/2$ , то  $X_1 = 0$  и окончательная эпюра изгибающих моментов будет в виде эпюры от нагрузки в основной системе (рис. 8.9, в), т.е. балка в правом пролете не деформируется.

При  $a > l\sqrt{2}/2$  момент  $X_1 > 0$  и окончательная эпюра изгибающих моментов будет вида рис. 8.9, з.

Если  $a < l\sqrt{2}/2$ , то момент  $X_1 < 0$  и окончательная эпюра изгибающих моментов будет вида рис. 8.10, д.

**Задача 8.2.** Двухопорная балка с консолью загружена по схеме рис 8.11 а. Построить эпюры  $M$  и  $Q$ .

**Решение.** Балка один раз статически неопределима. Для образования основной системы вводим рассекающий шарнир на промежуточной опоре (рис. 8.11, б) и строим единичную и грузовую эпюры, рис. 8.11, в.

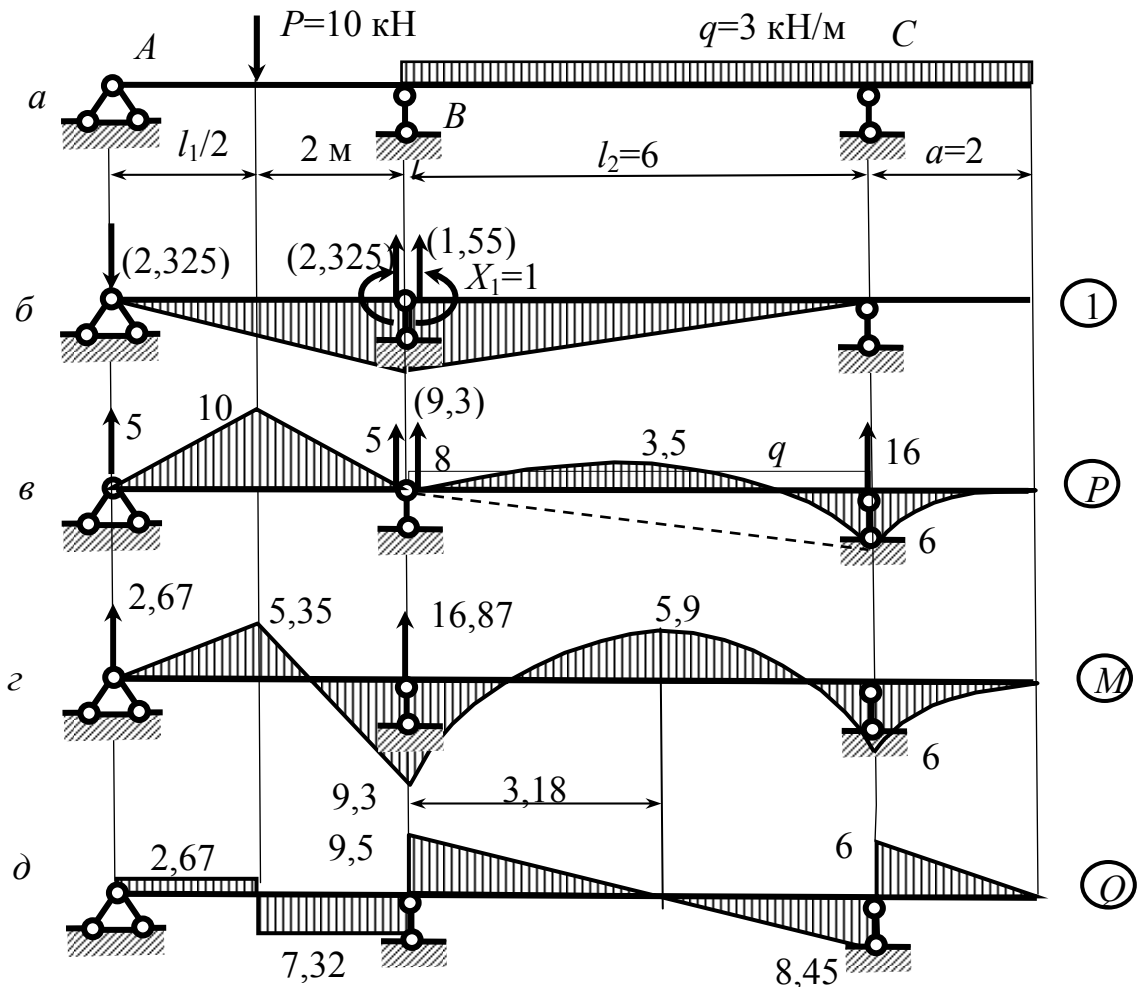


Рис. 8.11

По этим эпюрам вычисляем единичный и грузовой коэффициенты канонического уравнения метода сил  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$ :

$$EJ\delta_{11} = \frac{10}{3} \text{ м}, \quad EJ\Delta_{1p} = -\frac{10 \cdot 4}{2 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 6^3}{12 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 6}{2 \cdot 3} = -31 \text{ кНм}^2.$$

Из канонического уравнения находим  $X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = 9,3 \text{ кНм}$ .

После этого, для построения окончательной эпюры изгибающих моментов (рис. 8.11, з) единичную эпюру умножаем на момент  $X_1$  и складываем с эпюрой изгибающих моментов от заданной нагрузки, построенную в основной системе, т.е. с эпюрой рис. 8.11, в

Первая производная от этой эпюры определяет эпюру поперечных сил, рис. 8.11, е. Производная на тех участках, где изгибающий момент изменяется по линейному закону, будет постоянной величиной, т.е. на эпюре поперечных сил будут горизонтальные прямые; а там, где изгибающий момент изменяется по параболическому закону на эпюре поперечных сил будут наклонные линии. Тангенс угла наклона касательной в начале участка и на правой опоре можно найти по величине опорных реакций, которые легко найти суммированием соответствующих реакций на грузовой эпюре и единичной, умноженной на величину момента на опоре.

Так, реакция на левой опоре правой балки равна сумме реакций от распределенной нагрузки (8 кН) и реакции от момента  $X_1=9,3 \text{ кНм}$ , ( $9,3/6=1,55 \text{ кН}$ ), т.е.  $R_c = 9,55 \text{ кН}$ .

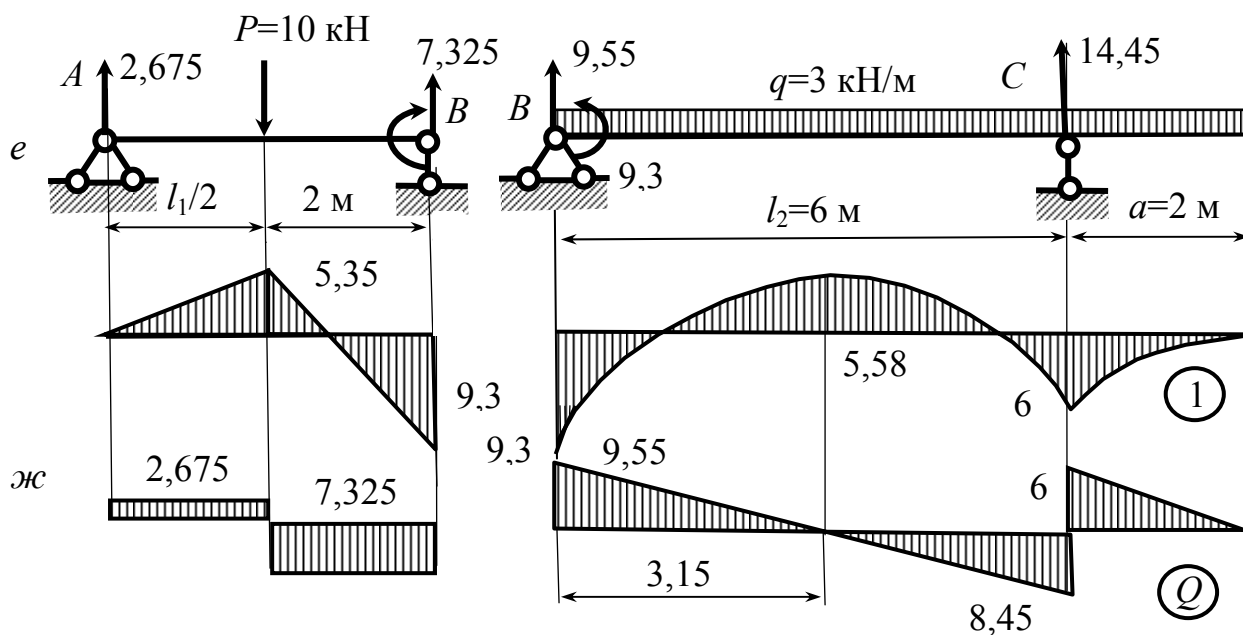


Рис.8.11

На правой опоре суммарная реакция равна  $16-1,55=14,45 \text{ кН}$ . Этой реакции соответствует разрыв на эпюре поперечных сил, но так как справа от опоры поперечная сила равна сумме внешних сил справа от опоры, то слева от опоры поперечная сила равна разности реакции и поперечной силы справа от опоры, т.е.  $Q = 6 - 14,45 = -8,45 \text{ кН}$ .

Эту поперечную силу также можно найти как сумму нагрузок слева от правой опоры, т.е.  $Q = 9,55 - 3 \cdot 6 = -8,45 \text{ кН}$ .

При отсутствии опыта решения статически неопределимых задач выше предложенным способом наложения эпюр, можно решить две задачи по пост-

роению эпюр в независимых балках от заданной нагрузки и момента на промежуточной опоре  $X_1=9,3$  кН, рис. 8.11, е, ж.

**Задача 8.3.** Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки рис. 8.12.

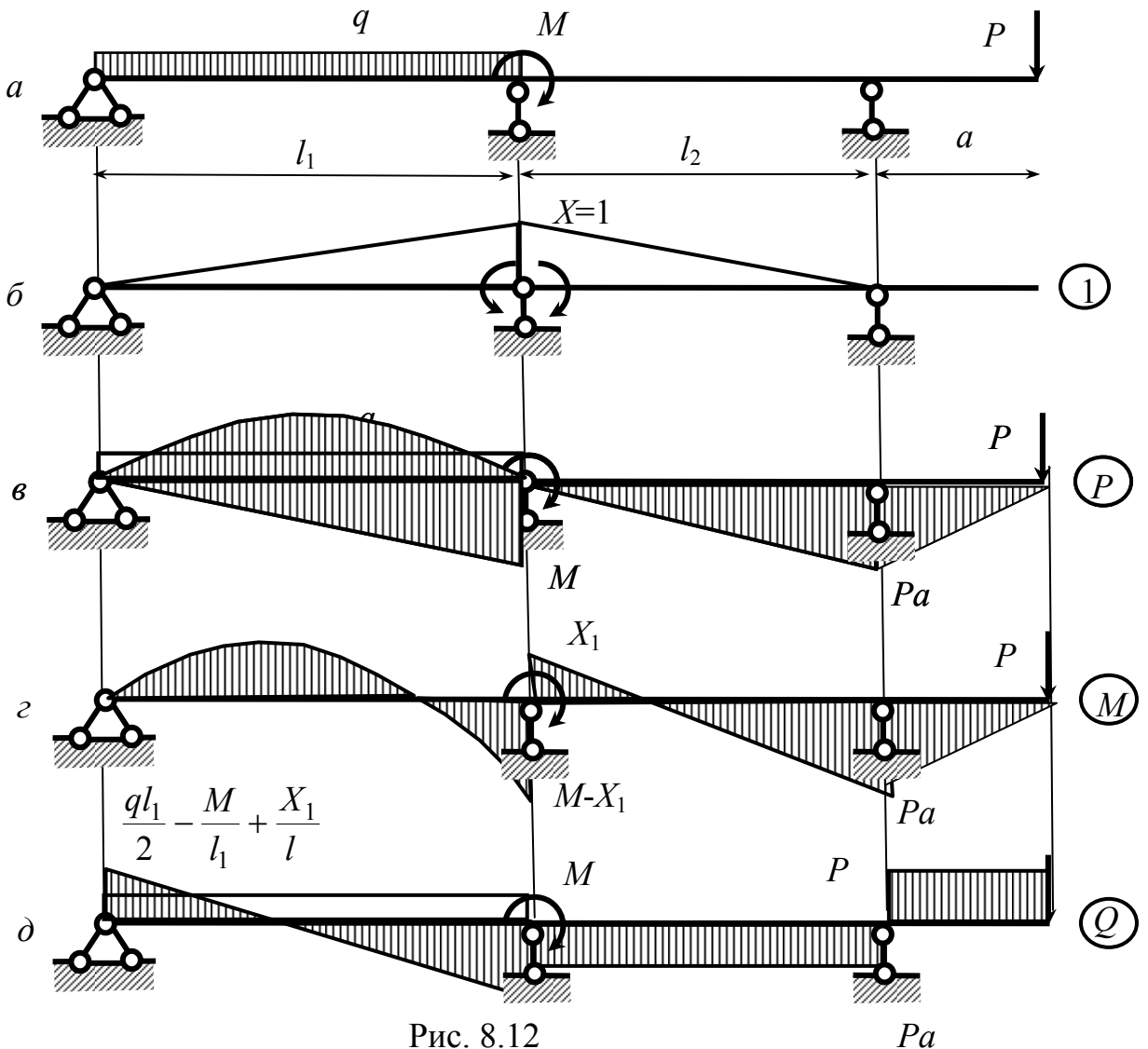
**Решение.** Единичная и грузовая эпюры показаны на рис. 8.12, б, в. Грузовая эпюра построена по принципу суперпозиции.

Из эпюр находим коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$EJ\delta_{11} = \frac{l_1 + l_2}{3}, \quad EJ\Delta_{1p} = \frac{ql_1^3}{12 \cdot 2} - \frac{Ml_1}{2} \frac{2}{3} - \frac{Pa \cdot l_2}{2 \cdot 3}.$$

Заметим, что внешний момент  $M$  можно прикладывать к любому пролету или к обоим пролетам в произвольном соотношении.

Из канонического уравнения находим внутренний момент на промежуточной опоре



$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{ql_1^3}{8(l_1+l_2)} + \frac{Ml_1}{l_1+l_2} - \frac{Pa \cdot l_2}{2(l_1+l_2)}.$$

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил показаны на рис. 8.12, г, д. Эпюра изгибающих моментов построена сложением единичной эпюры, умноженной на  $X_1$ , и грузовой.

Эпюра поперечных сил может быть построена по эпюре изгибающих моментов с использованием теоремы Журавского, т.е. эпюра  $Q$  представляет собою значения тангенсов углов наклона касательных к эпюре  $M$ . На участке с распределенной нагрузкой эпюру  $Q$  можно строить по реакциям балки от нагрузки и момента  $X_1$  (см. реакции на левой опоре рис. 8.12, б, в).

**Задача 8.4.** Построить эпюру изгибающих моментов в балке рис. 8.13.

**Решение.** В балках с защемлением для образования основной системы рекомендуется вводить шарнир в заделке, рис. 8.13, б.

При этом получаем коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$EJ\delta_{11} = \frac{l}{3}, \quad \Delta_{1p} = \frac{ql^2}{12 \cdot 2} - \frac{qa^2 l}{2 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Из канонического уравнения находим момент на левой опоре

$$X_1 = -\frac{ql^2}{8} + \frac{qa^2}{4}.$$

Отсюда следует: если

$a = l\sqrt{2}/2$ , то  $X_1 = 0$  (рис. 8.13, в).

Если на консоли нет нагрузки ( $a=0$ ), то момент в защемлении будет (рис. 8.13, г)

$$X_1 = \frac{ql^2}{8}.$$

Если в пролете нет нагрузки, то момент в заделке будет в два раза меньше, чем на правой опоре, рис. 8.13, д.

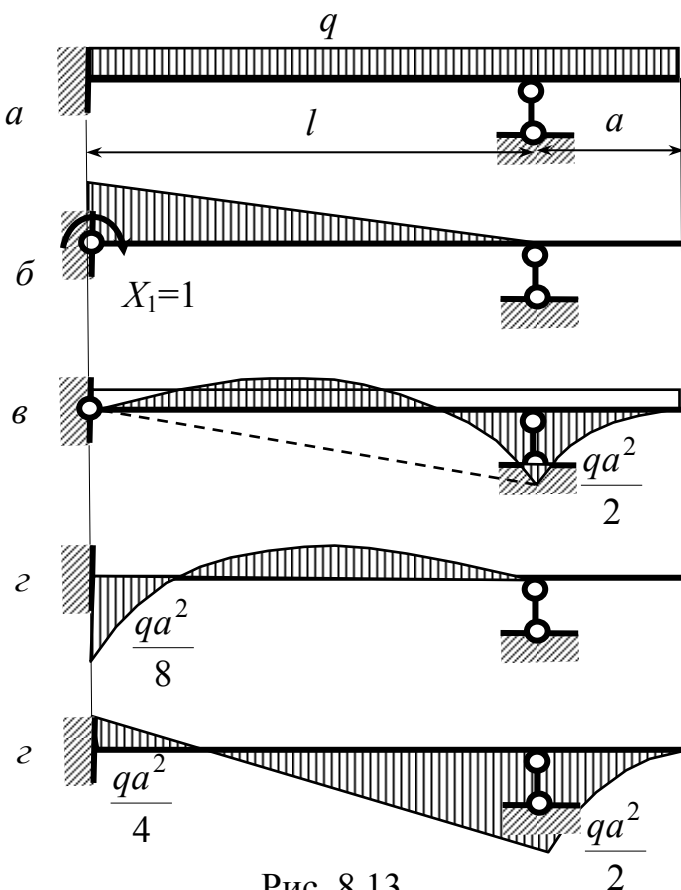


Рис. 8.13

#### 8.4. Расчет простейших статически неопределимых рам

В поперечном сечении рамы возникает три внутренних силовых факторов: изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольное усилие  $N$ . Продольное усилие равно сумме проекций всех внешних нагрузок, расположенных с одной стороны от сечения на продольное направление стержня.



Эпюры внутренних силовых факторов строятся так же, как в балках путем рассмотрения всех нагрузок с одной стороны от сечения. Если смотреть на рассматриваемую часть рамы так, чтобы стержень был горизонтальным по отношению к наблюдателю, то правило знаков  $M$  и  $Q$  остается таким же, как в балках. Продольное усилие считается положительным в случае растяжения.

**Задача 8.5.** Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, изображенной на рис. 8.14, а.

**Решение.** Основная система с единичной и грузовой эпюрами показана на рис. 8.14, б, в. Для построения эпюр вычисляются опорные реакции и записываются (при необходимости) уравнения изгибающих моментов по участкам рамы. С использованием этих эпюр вычисляются коэффициенты канонического уравнения метода сил  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$ :

$$EJ\delta_{11} = \sum \omega_1 m_1 = \frac{a^2}{2} \frac{2}{3} a + \frac{2a^2}{2} \left( \frac{2}{3} 2a + \frac{a}{3} \right) + \frac{a^2}{2} \left( \frac{2a}{3} + \frac{2}{3} a \right) + \frac{2a \cdot 2a}{2} \frac{2}{3} 2a = \frac{16}{3} a^3,$$

$$EJ\Delta_{1p} = \sum \omega_p m_1 = -\frac{Pa^2}{2} \frac{2}{3} a - Pa^2 \frac{2a+a}{2} - \frac{Pa^2}{2} \left( \frac{2}{3} 2a + \frac{a}{3} \right) = -\frac{16}{3} a^3,$$

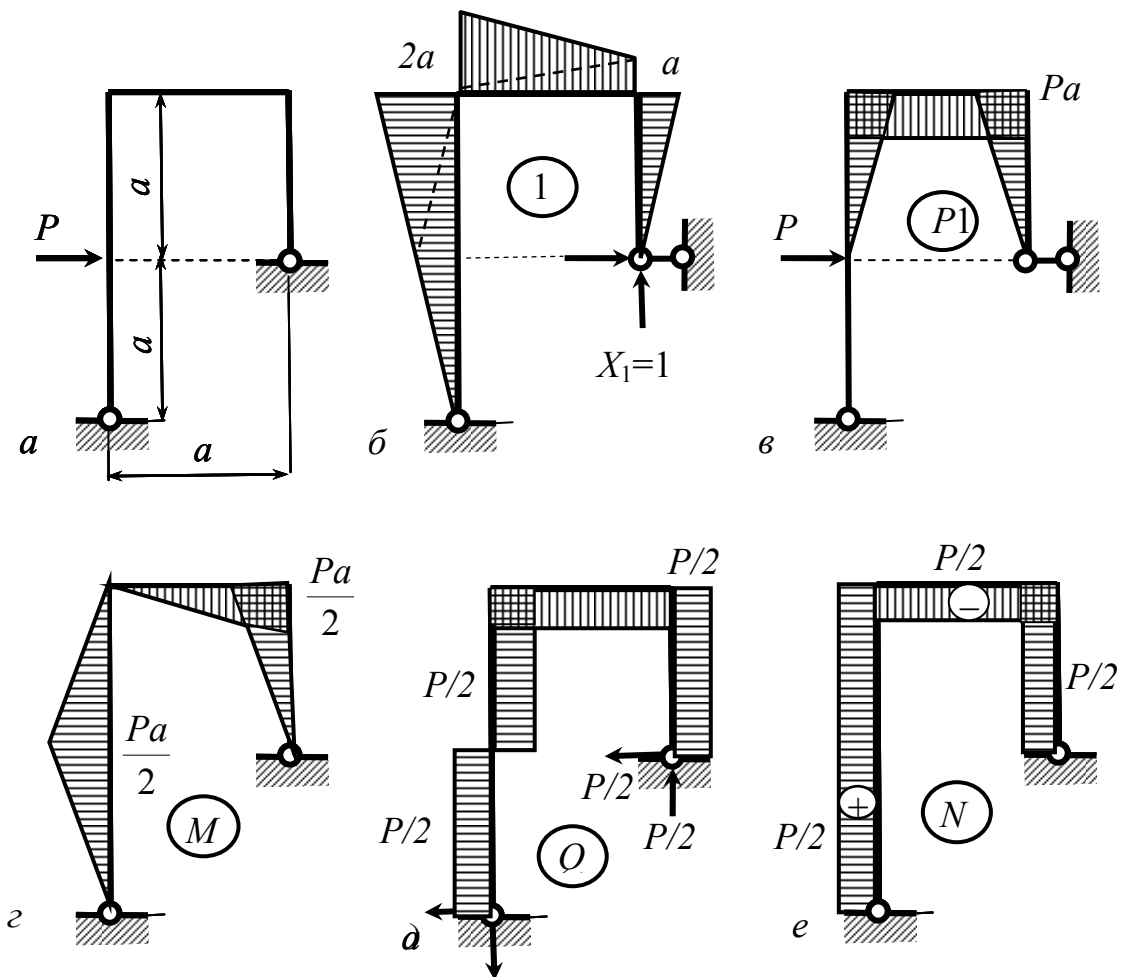


Рис. 8.14

По этим коэффициентам из канонического уравнения находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}.$$

Умножая единичную эпюру на  $X_1$  и складывая ее с грузовой эпюрой, получаем окончательную эпюру изгибающих моментов, рис. 8.14, з.

Эпюры поперечных  $Q$  и поперечных  $N$  сил строим по определению с учетом всех нагрузок (активных и реакций) действующих с одной стороны от сечения, рис. 8.14, д, е).

Если выбрать основную систему с шарниром в верхнем левом узле, то получим  $X_1=0$ .

**Задача 8.6.** Построить эпюры  $M, Q, N$  для рамы рис.8.15.

$$EJ\Delta_{1p} = \sum \omega_p m_1 = -\frac{Pa^2}{2} \frac{2}{3} a - Pa^2 \frac{2a+a}{2} - \frac{Pa^2}{2} \left( \frac{2}{3} 2a + \frac{a}{3} \right) = -\frac{16}{3} a^3,$$

**Решение.** Основную систему образуем отбрасыванием горизонтальной связи на правой опоре. К полученной шарнирно подвижной опоре прикладываем реакцию в отброшенной связи  $X_1=1$ , которая вызывает такую же реакцию на левой опоре, (что следует из суммы проекций сил на горизонтальную ось). Из суммы проекций всех сил на вертикаль и суммы моментов относительно любой точки, следует, что остальные реакции равны нулю. После вычисления реакций легко построить единичную эпюру, рис. 8.15, б).

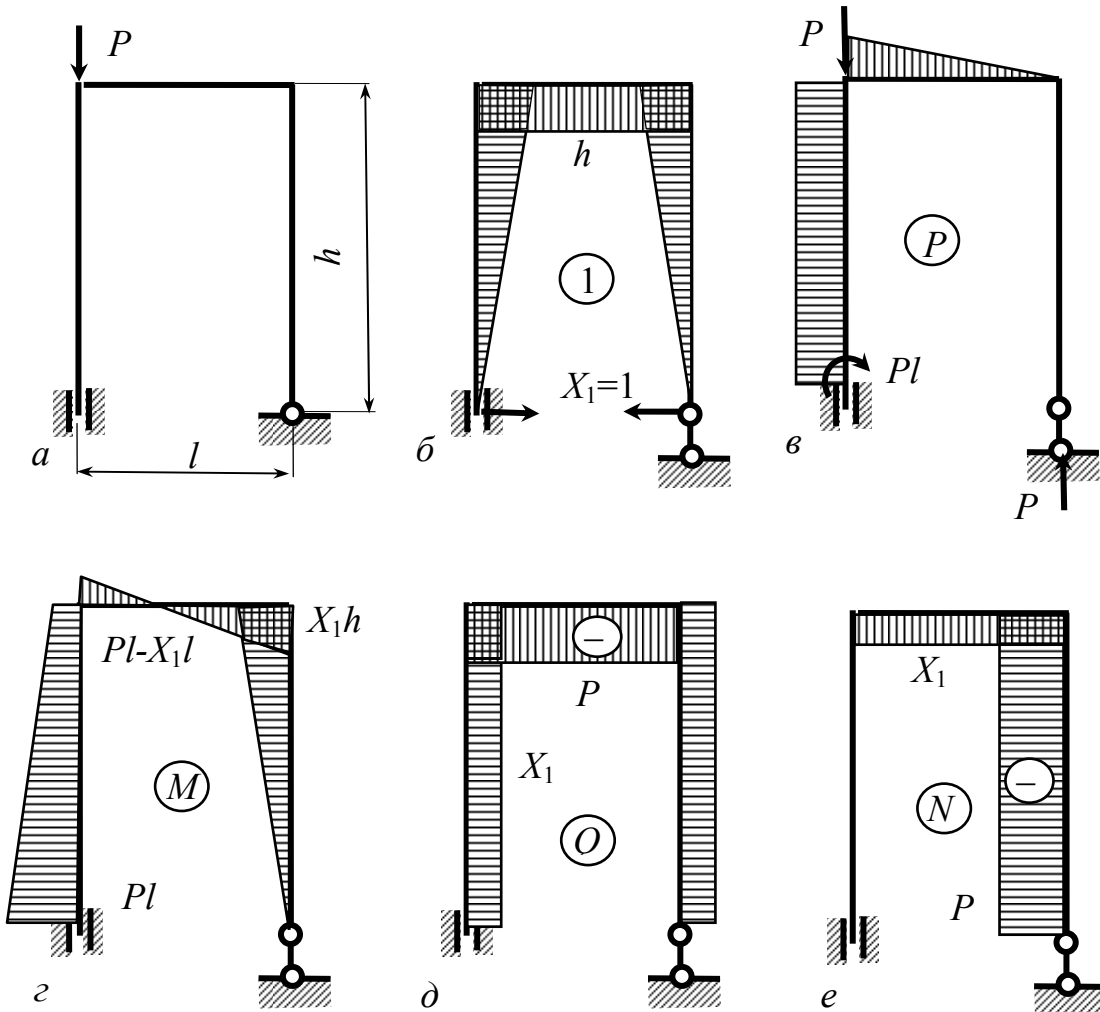


Рис. 8.15

Для грузового состояния (рис. 8.15, в) из суммы проекций всех сил на вертикаль находим реакцию на правой опоре, а из суммы проекций на горизонталь получаем, что левая реакция равна нулю. Из суммы моментов относительно любой точки находим опорный момент и строим грузовую эпюру, рис. 8.15, в.

Используя эти эпюры, по правилу Верещагина находим коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$EJ\delta_{11} = \sum \omega_1 m_1 = 2 \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} h + hl \cdot h = h^2 l \left( \frac{2}{3} \frac{h}{l} + 1 \right),$$

$$EJ\Delta_{1p} = \sum \omega_p m_1 = -\frac{h^2}{2} Pl - hl \frac{Pl}{2} = -\frac{Ph^2 l}{2} \left( 1 + \frac{l}{h} \right).$$

Из канонического уравнения находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{3}{2} \frac{Pl}{h} \frac{h+l}{2h+3l}.$$

В частном случае при  $h=l$   $X_1 = 3P/5$ .

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил показаны на рис. 8.15, з, д, е.

**Задача 8.7.** Построить эпюру изгибающих моментов в раме рис. 8.16, проверить правильность решения задачи и найти положение сечения, которое при загрузении рамы не смещается.

**Решение.** Основную систему образуем отбрасыванием на верхней опоре связь, препятствующую повороту сечения, т.е. оставляем лишь горизонтальную связь.

Приравняв изгибающий момент в шарнире нулю, находим опорную реакцию в верхней опоре  $R = 1/l$ .

Из суммы моментов всех сил относительно нижней опоры, находим момент в заделке  $M=0$ . Из суммы проекций всех сил на горизонталь находим реакцию на нижней опоре  $R = 1/l$ . Это значит, что усилие в ригеле равно нулю. Следовательно, эпюры на стойках можно строить как в консолях, приняв начало координат в верхних сечениях стоек, рис. 8.16. б.

Приравняв изгибающий момент в шарнире от заданной нагрузки нулю (рис. 8.15, в), замечаем, что реакция на верхней опоре равна нулю. Значит, эпюру на ригеле и стойке можно строить как в консоли.

Вычисляем коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$\delta_{11} = \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} + \frac{2 \cdot 2l}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{EJ} = \frac{3l}{EJ}, \quad \Delta_{1p} = -\frac{ql^2}{2} 2l \frac{1}{EJ} = -\frac{ql^3}{EJ}$$

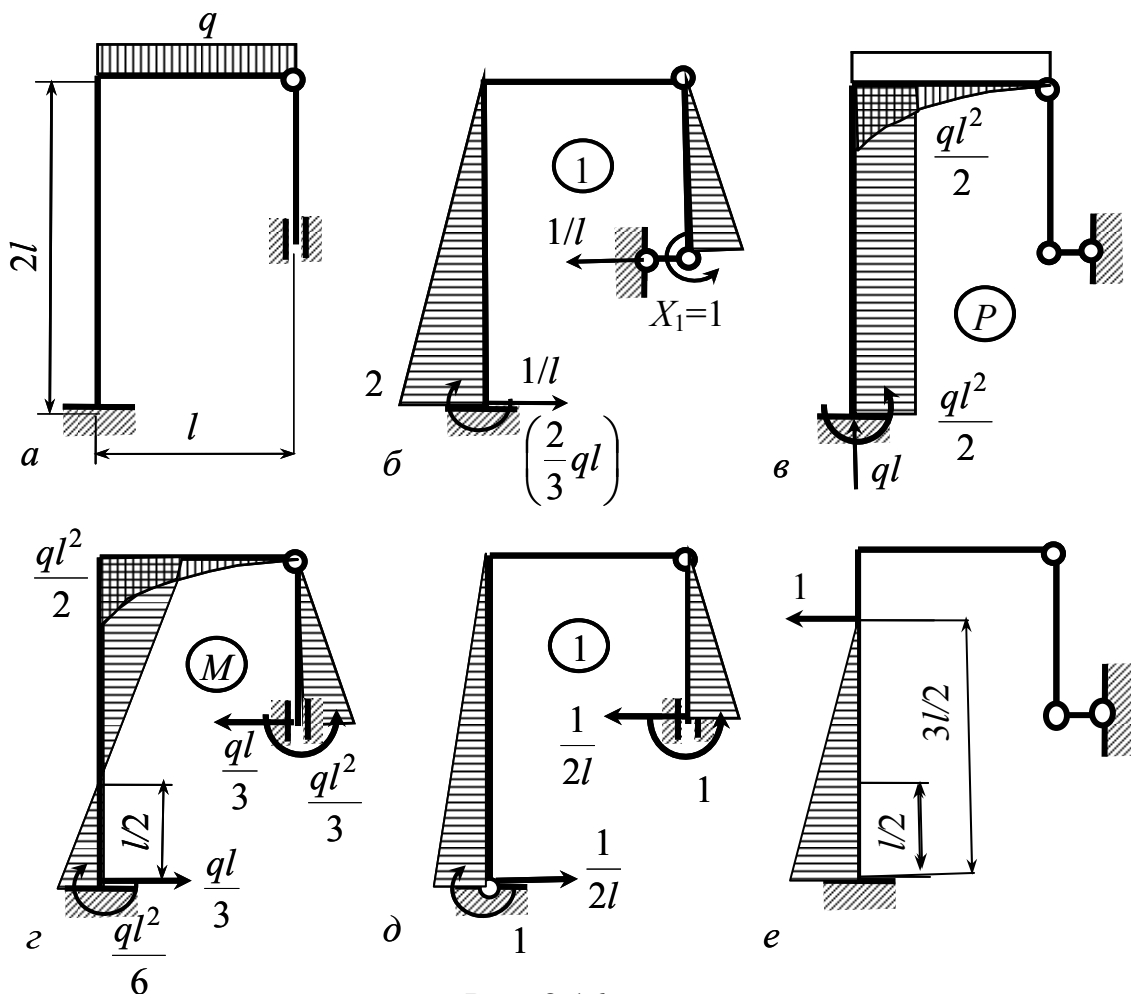


Рис. 8.16

Из канонического уравнения метода сил находим момент на верхней опор

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{ql^2}{3}$$

Изгибающий момент на левой стойке  $M(x) = \frac{ql^2}{6} - \frac{ql}{3}x$ , этот момент равен нулю при  $x=l/2$ , рис. 8.16, з.

Для вычисления перемещения произвольного сечения рамы, нужно перемножить по правилу Верещагина окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 8.16, з) на единичную, построенную в любой основной системе.

Чтобы найти неподвижную точку на раме, приложим к основной системе единичную силу и построим эпюру изгибающих моментов, рис. 5.16, е.

Перемножая окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 5.16, з), на единичную (рис. 5.16, е), получим нуль в том случае, когда центр тяжести единичной эпюры совпадет с нулевой точкой на грузовой эпюре (рис. 8.16, з).

Значит, неподвижное сечение находится на расстоянии  $3l/2$  от основания рамы.

**Задача 8.8.** Построить эпюру изгибающих моментов в раме рис. 8.17.

**Решение.** Для основной системы отбрасываем вертикальную связь на средней опоре и строим единичную (рис. 8.17, б) и грузовую (рис. 8.17, в) эпюры. По этим эпюрам вычисляем коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$EJ\delta_{11} = \frac{lh}{2} \frac{2}{3} l + 2 \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3} \left( \frac{h}{l} + 2 \right),$$

$$EJ\Delta_{1p} = -\frac{lh}{2} \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \right) Pl - \frac{Pl^2}{2} \frac{2}{3} l - \frac{Plh}{2} \frac{2}{3} l = -\frac{Pl^3}{6} \left( 7 \frac{h}{l} + 2 \right) /$$

Из канонического уравнения находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2} \frac{7h + 2l}{h + 2l}$$

Теперь единичную эпюру нужно умножить на реакцию  $X_1$  и сложить с эпюрой грузовой. В частном случае, при  $h=l$  реакция  $X_1=3P/2$  и окончательная

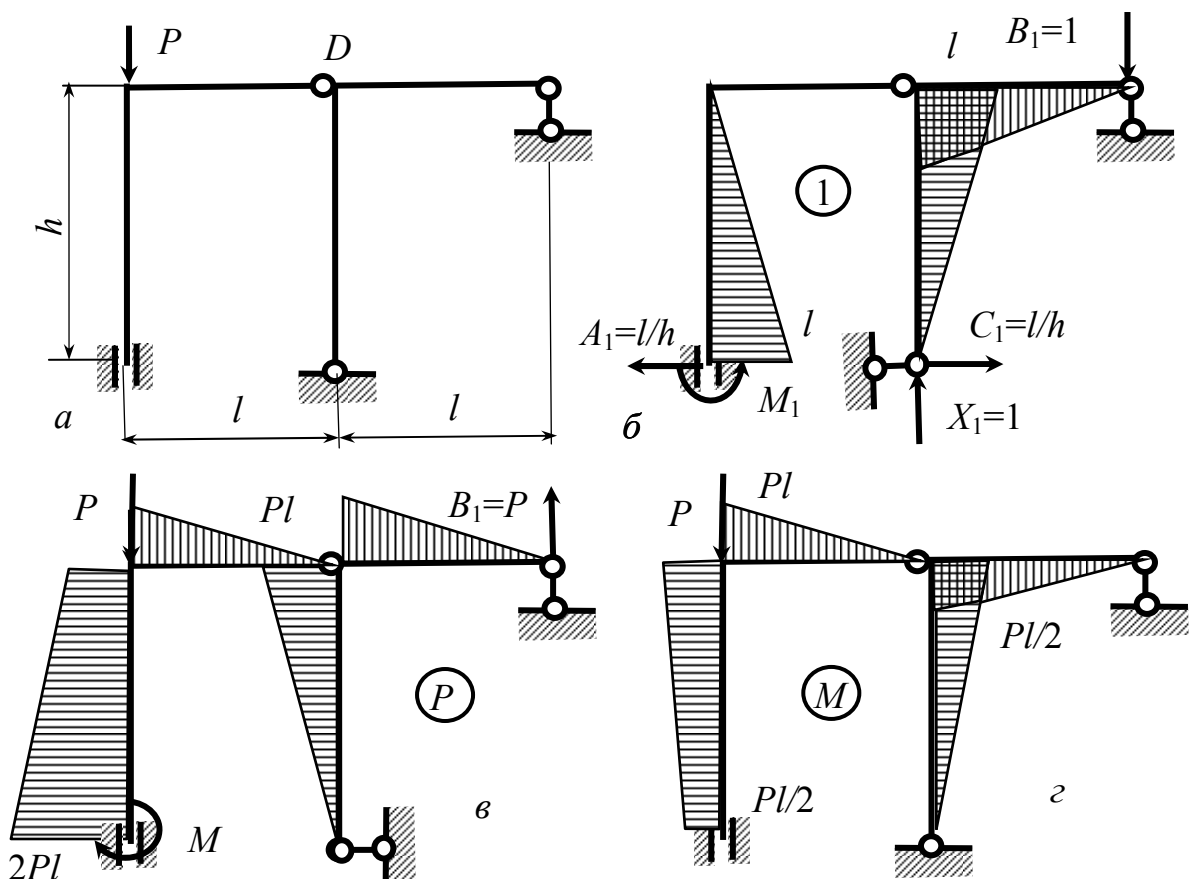


Рис. 8.17

эпюра изгибающих моментов будет иметь вид рис. 8.17, г.

## 8.5. Проверка правильности решения статически неопределимой системы

Если статически неопределимая система (рама) решена правильно, то должны выполняться следующие требования:

- вся система (рама) под действием внешних нагрузок (активных и реакций) должна быть в равновесии, т.е. должны выполняться условия равновесия;

часть системы (рамы) должна находиться в равновесии, т.е. под действием внешних и внутренних усилий, приложенных к рассматриваемой части, должны выполняться условия равновесия;

узлы системы (рамы) должны находиться в равновесии, т.е. вырезанные узлы рамы, под действием внешних сил и внутренних усилий, должны находиться в равновесии;

произведение по правилу Верещагина окончательной эпюры изгибающих моментов на любую единичную (или суммарную единичную) должно быть равно нулю.

Заметим, что все вышеперечисленные требования необходимы, но недостаточны.

Наиболее радикальной является проверка путем перемножения окончательной эпюры изгибающих моментов на единичную, которая не использовалась в решении задачи.

**Задача 8.9.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме рис. 8.18 и проверить правильность раскрытия статической неопределимости задачи. Вычислить угол поворота узла рамы.

**Решение.** Рама дважды статически неопределима. Для образования основной системы отбросим обе связи на верхней неподвижной опоре. Вместо отброшенных связей прикладываем поочередно единичные реакции и строим эпюры изгибающих моментов от  $X_1=1$ ,  $X_2=1$  и от заданной нагрузки, рис. 8.18, б, в, г.

По этим эпюрам вычисляем коэффициенты канонических уравнений метода сил:

$$EJ\delta_{11} = 2 \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l + l^3 + \frac{2l \cdot 2l}{2} \frac{2}{3} 2l = \frac{13}{3} l^3, \quad EJ\delta_{12} = \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l - \frac{l^2}{2} l = -\frac{l^3}{6},$$

$$EJ\delta_{22} = 2 \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} l^3, \quad EJ\Delta_{2p} = -\frac{2Pl^2}{2} \frac{2}{3} l = -\frac{2}{3} Pl^3,$$

$$EJ\Delta_{1p} = -\frac{2Pl^2}{2} \frac{2}{3} l - \frac{2Pl \cdot 2l}{2} \frac{2}{3} 2l = -\frac{10}{3} Pl^3.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{aligned} 26X_1 - X_2 &= 20P, \\ -X_1 + 4X_2 &= 4P \end{aligned}$$

находим:  $X_1 = \frac{84}{103}P$ ,  $X_2 = \frac{124}{103}P$ .

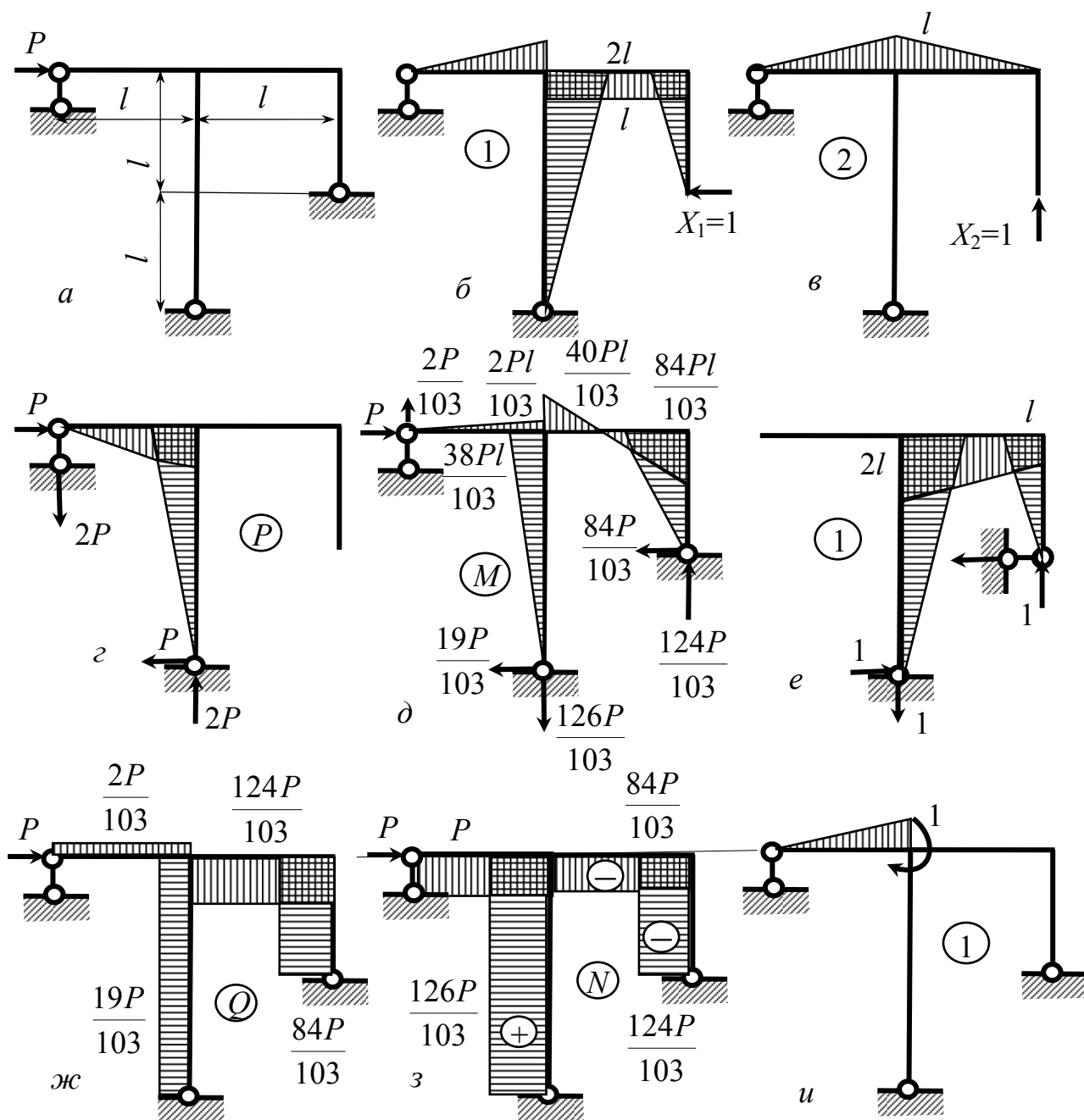


Рис. 8.18

Умножая единичные эпюры соответственно на реакции  $X_1$  и  $X_2$  и складывая полученные эпюры с грузовой эпюрой, получаем окончательную эпюру изгибающих моментов, рис. 8.18, д. На рис. 8.18, д также показаны опорные реакции рамы.

Зная опорные реакции, по определению, как сумму проекций всех сил взятых с одной стороны от сечения на поперечное направление и на продоль-

ную ось стержней, легко построить эпюру поперечных сил (рис. 8.18, ж) и продольных усилий (рис. 8.18, з).

Проверим правильность решения задачи в соответствии с указаниями, приведенными в 8.5.

Уравнения равновесия всей рамы:

$$\sum X = 0, P - \frac{19}{103}P - \frac{84}{103}P = 0;$$

$$\sum Y = 0, \frac{2}{103}P - \frac{126}{103}P + \frac{124}{103}P = 0;$$

$$\sum M_A = 0, P \cdot l + \frac{2P}{103} \cdot 2l + \frac{19P}{103} \cdot l - \frac{126P}{103} \cdot l = 0.$$

Разрежем раму справа от узла ригеля и рассмотрим правую часть в равновесии. В сечении возникает изгибающий момент, направленный по часовой стрелке  $M_z = \frac{40Pl}{103}$  (рис. 8.18, д), поперечная сила  $Q = \frac{124P}{103}$ , направленная вниз (рис. 8.18, ж) и продольное сжимающее усилие  $N = \frac{84P}{103}$  (рис. 8.18, з).

Рассмотрим сумму моментов относительно центра сечения:  $\frac{40Pl}{103} + \frac{84P}{103}l - \frac{124P}{103}l = 0$ . Равновесие соблюдается.

Вырежем узел ригеля, рис. 8.18, д. В сечениях вырезанного узла возникают изгибающие моменты  $\frac{40Pl}{103}$  по ходу часовой стрелки и уравновешивающие моменты против хода часовой стрелки  $\frac{38Pl}{103}$  и  $\frac{2Pl}{103}$ .

Для более радикальной проверки правильности решения рамы выберем другую основную систему (рис. 8.18, е), которая не использовалась в решении задачи, и перемножим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 8.18, д) на единичную эпюру (рис. 8.18, е):

$$\frac{Pl^3}{103EJ} \left[ -38 \frac{2}{3} \frac{2}{3} - \frac{40}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{84}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) + \frac{84}{2} \frac{2}{3} \right] = 0.$$

Перемножение эпюр по правилу Верещагина определяет перемещение той точки рамы, где приложена единичная сила. Полученное нулевое значение перемножения эпюр означает, что перемещение правой опорной точки рамы по вертикали равно нулю, что соответствует наличию опоры в заданной раме. Значит, задача решена правильно.



Для вычисления угла поворота узла рамы в основной системе (рис. 8.18,  $u$ ), прикладываем единичный момент и перемножаем эпюру рис. 8.18,  $\delta$  на эпюру рис. 8.18,  $u$ , в результате чего получаем

$$\theta = \frac{23Pl}{103} \frac{l}{2} \frac{l}{3} \frac{1}{EJ} = \frac{2}{309} \frac{Pl^2}{EJ}.$$

## 8.6. Расчет статически неопределимых ферм

Фермой называется система шарнирно соединенных между собою прямых стержней. При узловой нагрузке в стержнях фермы возникают только растягивающие или сжимающие усилия.

Так как количество неизвестных усилий в ферме равно количеству стержней с учетом опорных связей, а количество уравнений равновесия равно удвоенному количеству узлов фермы (для каждого узла можно составить два уравнения равновесия), то степень статической неопределимости фермы  $L$  можно определить по формуле

$$L = C - 2U, \quad (8.6)$$

где  $U$  – количество узлов фермы,  $C$  – количество стержней фермы включая опорные.

Фермы бывают внутренне, внешне и смешано статически неопределимые. На рис. 8.19 показана ферма один раз внутренне статически неопределимая. Опорных связей в ней необходимое количество, а в решетке имеется один лишний стержень; на рис. 8.20,  $a$  – ферма внешне статически неопределимая, в ней один лишний опорный стержень; на рис. 8.20,  $b$  ферма один раз внешне и два раза внутренне статически неопределимая.

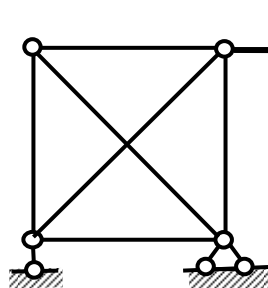


Рис. 8.19

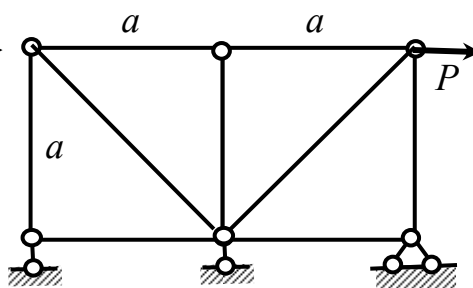


Рис. 8.20,  $a$

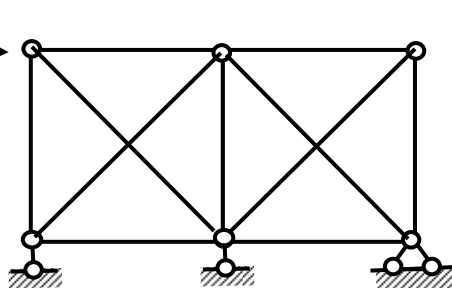


Рис. 8.20,  $b$

Статически неопределимые фермы рассчитываются также методом сил. Основная система образуется из системы заданной путем разрезания лишних стержней. Смысл канонических уравнений заключается в том, что взаимные перемещения торцов разрезанных стержней должны быть равны нулю. Коэффициенты канонических уравнений вычисляются по формуле Мора (5.35). Окончательные усилия в стержнях вычисляются путем суммирования усилий от единичных сил с усилиями от нагрузки в основной системе, т.е.

$$N_i = \sum N_{in} X_n + N_{ip}. \quad (8.7)$$

**Задача 8.10.** Вычислить усилия в стержнях стержневого узла, изображенного на рис. 8.21, при  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $EF = \text{const}$ .

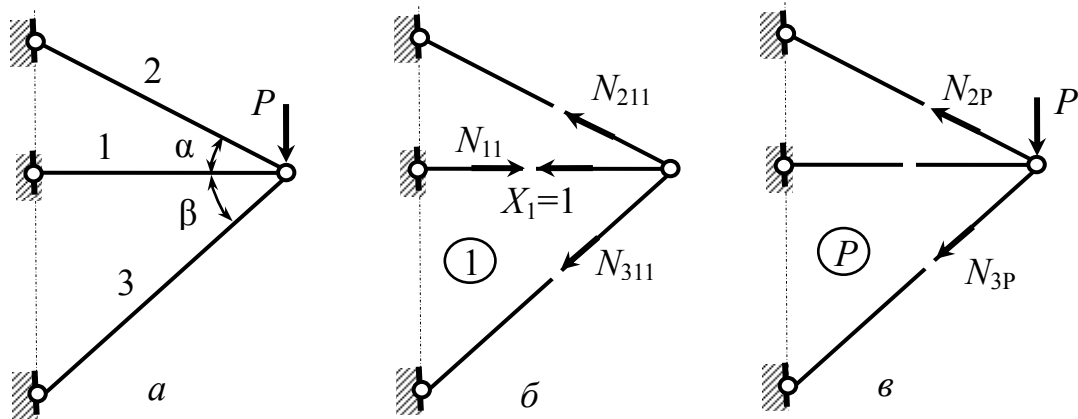


Рис. 8.21

**Решение.** Заданная система один раз статически неопределима. Основную систему образуем, разрезая средний стержень, рис. 8.21, б. К торцам разрезанного стержня прикладываем неизвестное усилие  $X_1 = 1$  и, рассматривая вырезанный узел в равновесии, находим:

$$N_{11} = 1, \quad N_{21} = -\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = -0,732, \quad N_{31} = -\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = -0,517.$$

В грузовом состоянии (рис. 8.21, в) усилие  $X_1$  снимается, прикладывается внешняя сила  $P$  и от нее вычисляются усилия:

$$N_{1P} = 0, \quad N_{2P} = P \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 0,732P, \quad N_{3P} = -P \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = -0,895P.$$

Усилие в разрезанном стержне вычисляется из канонического уравнения метода сил  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$ , которое требует, чтобы взаимное перемещение концов разрезанного стержня от усилия  $X_1$  и от заданной нагрузки было равно нулю.

Коэффициенты уравнения вычисляются по формуле Мора:

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_{i1}^2 l_i}{EF_i} = \frac{l}{EF} + \frac{l}{EF \cos \alpha} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{l}{EF \cos \beta} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} = 1,997 \frac{l}{EF},$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_{i1} N_{iP} l_i}{EF_i} = -\frac{Pl}{EF \cos \alpha} \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{Pl}{EF \cos \beta} \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} = 0,037 \frac{l}{EF}.$$

Из канонического уравнения находим  $X_1 = -\Delta_{1p} / \delta_{11} = -0,0188P$ .

В остальных стержнях усилия находим по формуле (8.7):

$$N_2 = N_{21}X_1 + N_{2p} = 0,732 \cdot 0,0188P + 0,732P = 0,746P,$$

$$N_3 = N_{31}X_1 + N_{3p} = 0,517 \cdot 0,0188P - 0,896P = -0,887P.$$

**Задача 8.11.** Вычислить усилия в стержнях фермы рис. 8.22.

**Решение.** Разрежем диагональный стержень и в месте разреза приложим усилие  $X_1 = 1$ , рис. 5.22, а. Усилия в остальных стержнях  $N_{i1}$  находим из условий равновесия последовательно вырезанных узлов  $A, B, C$  (см. табл. 8.1, графа 4).

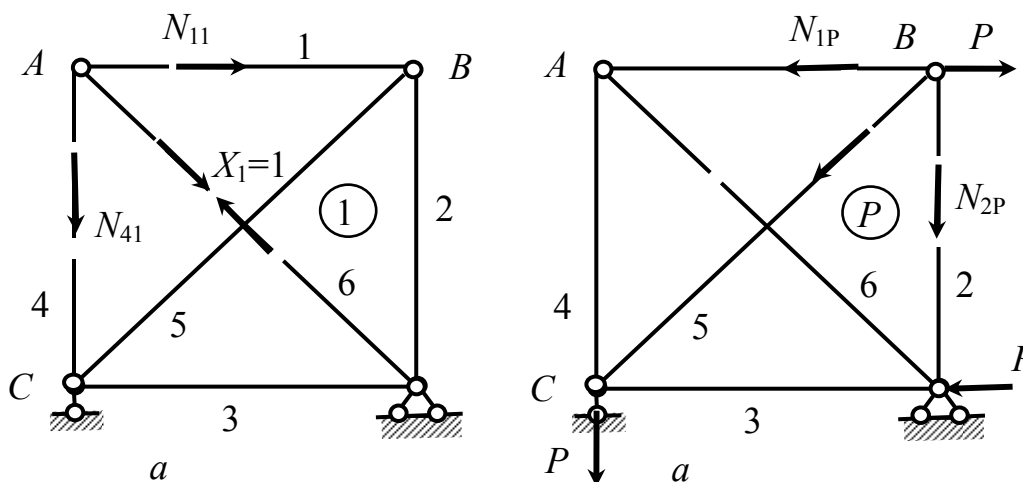


Рис. 8.22

Убираем усилие  $X_1$  и прикладываем силу  $P$ , рис. 8.22, б. От этой силы вычисляем опорные реакции, а затем усилия в стержнях  $N_{ip}$  находим из условий равновесия узлов фермы (см. табл. 5.1, гр. 5).

По формуле Мора находим коэффициенты канонического уравнения метода сил  $\delta_{11}$  (см. табл. 8.1, гр. 6) и  $\Delta_{1p}$  (табл. 8.1, гр. 7).

Сумма составляющих коэффициентов колонок 6 и 7 определяет значения коэффициентов канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^6 \frac{N_{i1}^2 l_i}{EF_i} = 2(\sqrt{2} + 1) \frac{a}{EF}, \quad \Delta_{1p} = \sum_{i=1}^6 \frac{N_{i1} N_{ip} l_i}{EF_i} = (\sqrt{2} + 1) \frac{Pa}{EF}.$$

Усилие в разрезанном стержне  $X_1 = -\Delta_{1p} / \delta_{11} = P\sqrt{2}/2$ . Усилия в остальных стержнях, вычисленные по (8.7), приведены в графе 8 табл.8.1.

Таблица 8.1

№ ст.	$\frac{EF_i}{EF}$	$\frac{l_i}{a}$	$N_{i1}$	$\frac{N_{ip}}{P}$	$N_{i1}^2 EF \frac{l_i}{a}$	$N_{u1} N_{ip} EF \frac{l_i}{a}$	$\frac{N_i}{P}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	$-\sqrt{2}/2$	0	1/2	0	0,500
2	1	1	$-\sqrt{2}/2$	-1	1/2	$\sqrt{2}/2$	-0,500
3	1	1	$-\sqrt{2}/2$	-1	1/2	$\sqrt{2}/2$	-0,500
4	1	1	$-\sqrt{2}/2$	0	1/2	0	0,500
5	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	0,707
5	1	$\sqrt{2}$	1	0	$\sqrt{2}$	0	-0,707
-	-	-	-	-	$\Sigma=2(\sqrt{2}+1)$	$\Sigma=-\sqrt{2}+2$	-

## 9. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Упругие сжатые стержни в зависимости от величины сжимающих напряжений могут оказаться в устойчивом и неустойчивом состоянии равновесия.

Если сжатый стержень после снятия дополнительного внешнего воздействия, вызвавшего отклонение прямолинейного стержня от исходного положения, возвращается в первоначальное положение, то такое состояние стержня называется устойчивым.

Если после снятия дополнительного воздействия стержень остается в деформированном слегка изогнутом состоянии, т.е. не возвращается в исходное положение, то его состояние было неустойчивым. В неустойчивом состоянии стержень не сможет находиться длительное время, и наступит новое устойчивое состояние или стержень разрушится.

Прямолинейная форма равновесия сжатого стержня устойчива только в том случае, когда сжимающая нагрузка меньше некоторого определенного значения, которое называется критическим. Теоретически критических сил может быть бесконечное множество, если прочность материала стержня неограничена. Однако, практическое значение имеет, главным образом, первая наименьшая критическая сила, под действием которой стержень может находиться в равновесии как в прямолинейном, так и в слегка изогнутом состоянии, т.е. при критической нагрузке появляется две формы равновесия. Прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, т.е. происходит потеря устойчивости стержня. Критическое состояние и критическую нагрузку следует считать разрушающими, так как в этом состоянии к напряжениям сжатия добавляются изгибные напряжения, которые могут оказаться большими даже при небольших искривлениях стержня и стержень может разрушиться.

Для вычисления перемещений в стержне при потере устойчивости прямолинейной формы нужно исходить из точного дифференциального уравнения изогнутой оси (5.17), но для вычисления значения критической силы достаточно использовать приближенное дифференциальное уравнение (5.18).

### 9.1. Формула Эйлера

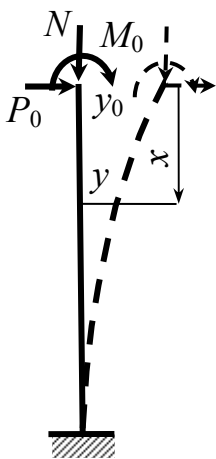


Рис. 9.1

В основе вывода формулы критической силы положено приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня при продольно-поперечном изгибе, рис. 9.1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} = \frac{M_0 + P_0 x}{EJ} + \frac{P(y_0 - y)}{EJ}, \quad (9.1)$$

решение которого можно представить в начальных параметрах (6.9)

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{M_0}{N} (1 - \cos kx) + \frac{P_0}{kN} (kx - \sin kx), \quad (9.2)$$

где  $k = \sqrt{N/EJ}$ .

На основании этого уравнения из условий закрепления стержня на опорах составляются однородные уравнения (относительно неизвестных начальных параметров). Приравнявая определитель системы однородных уравнений нулю, получаем трансцендентное уравнение, позволяющее найти параметр  $k$ , а затем критическую силу  $N_{кр} = k^2 EJ$ .

Впервые формула критической силы была получена Л. Эйлером в 1744 г.

Рассмотрим простейшие случаи закрепления стержня на опорах. Для использования уравнения (9.2) будем считать, что под действием критической силы сжатый стержень находится в равновесии в слегка изогнутом состоянии, вызванном какой-либо неопределенной поперечной нагрузкой, которая после изгиба стержня снимается.

При наличии **шарнирных опор** в стержне (основной случай) все начальные параметры (при  $x=0$ ), кроме угла поворота, равны нулю, т.е.  $y_0 = M_0 = P_0 = 0$ , рис. 9.2.

Согласно (9.2) уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$y(x) = \frac{\theta_0}{k} \sin kx.$$

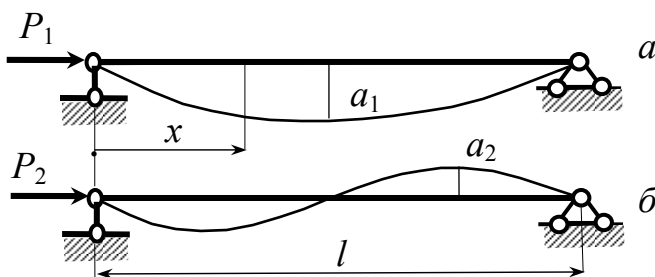


Рис. 9.2

В этом уравнении один неизвестный параметр  $\theta_0$ , соответственно чему есть одно (кроме уже использованных) граничное условие - при  $x=l$  прогиб равен нулю ( $y=0$ ). Обратим внимание на то, что здесь **нельзя брать условие симметрии изгиба** (как при поперечном изгибе), так как при этом окажутся неучтенными кососимметричные формы изгиба (хотя они и не представляют интереса в инженерной практике).

Таким образом, из условия шарнирного закрепления стержня на опорах получаем уравнение  $\sin kl = 0$ . Это означает, что  $kl=0$ . Но согласно обозначению  $k^2 = N/EJ$ . На расчетной схеме (рис. 9.2) продольная сила  $N=P$ . Отсюда получаем критическую силу

$$P_{кр} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ, \quad n=1, 2, 3 \dots$$

и уравнение изогнутой оси стержня

$$y(x) = \frac{\theta_0 l}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{k} = a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (9.3)$$

При  $n=1$  получаем первую (наименьшую) критическую силу

$$P_1 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (9.4)$$

которой соответствует симметричный изгиб стержня по синусоиде с одной полуволной  $y(x) = \frac{\theta_0 l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{k} = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ , рис. 9.2, а.

При  $n=2$  критическая сила в четыре раза больше первой:  $P_2 = 4 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ , а стержень изгибается по синусоиде с двумя полуволнами  $y(x) = \frac{\theta_0 l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{k} = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$ , рис. 9.2, б.

Заметим, что с повышением порядка критической силы, амплитуда изогнутой оси уменьшается, но ее значение остается неопределенным, так как в критерии потери устойчивости по Эйлеру требуется лишь небольшое отклонение от первоначального недеформированного состояния и невозвращение стержня в первоначальное положение, но величина отклонения не имеет значения, т.е. отклонение неопределенное.

Так можно получить бесконечное множество критических состояний, но изгиб стержня с произвольной формой потери устойчивости, минуя предшествующие формы, может возникать при особых условиях загрузки (например, при воздействии взрывной волны), а при статическом нагружении каждой последовательно возрастающей критической силе соответствует  $n$ -я и  $(n-1)$ -я форма деформирования. Так, при первой критической силе возможны прямолинейная форма равновесия и форма изгиба по одной полуволне.

Поскольку при незначительном превышении критической силы происходит стремительное возрастание прогибов (что следует из точного решения уравнения (5.17), когда возникают большие изгибные напряжения, то в инженерной практике для сжатых стержней критическую силу (даже первую) допускать нельзя. Поэтому за критическую принимают первую наименьшую силу, которую считают разрушающей. По этой силе устанавливают запас устойчивости стержня. Можно показать, что критическая сила не зависит от поперечной нагрузки на стержне.

Если стержень **жестко зашкреплен** с одной стороны, а с другой свободен, рис. 9.3, а, то при выборе начала координат на свободном конце  $M_0=P_0=0$ . Следовательно, согласно (9.2) получим уравнение

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx. \quad (9.5)$$

Поскольку в этом уравнении два неизвестных параметра  $y_0$  и  $\theta_0$ , то для их определения нужно рассмотреть два условия (хотя их вычислить нельзя из-за неопределенности условий вызывающих отклонение стержня из начального прямолинейного состояния). На нижнем конце стержня прогиб и угол поворота равны нулю.

Уравнение углов поворота легко получить дифференцированием (9.5):  $\theta(x) = \theta_0 \cos kx$ .

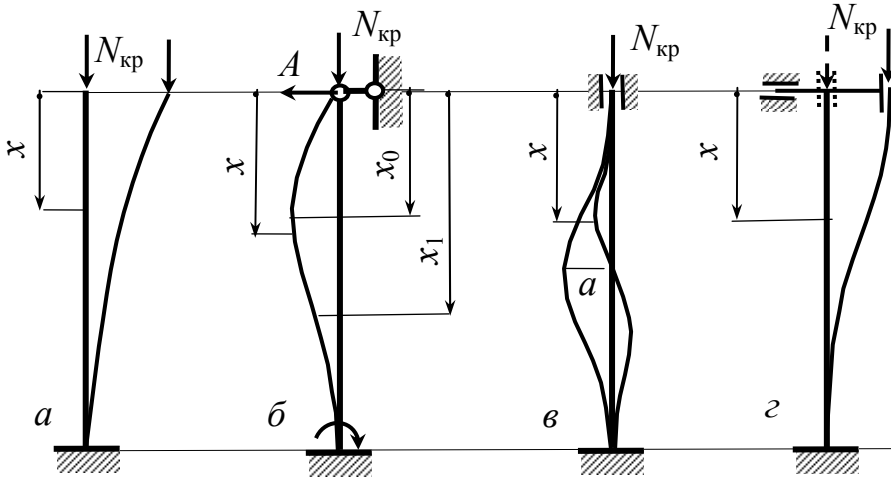


Рис. 9.3

Из условий, что при  $x=l$   $y=\theta=0$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kl &= 0, \\ \theta_0 \cos kl &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить ненулевые значения начальных параметров  $y_0$  и  $\theta_0$  нужно определитель этой системы приравнять нулю. От-

сюда получим трансцендентное уравнение  $\cos kl = 0$ , корни которого  $kl = n\pi/2$ ,  $n=1, 3, 5 \dots$

Следовательно, первая критическая сила и уравнение изогнутой оси стержня принимают следующий вид:

$$P_{кр} = k^2 EJ = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}, \quad (9.6)$$

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad (9.7)$$

Здесь и дальше будем ограничиваться только первой критической силой и первой формой потери устойчивости, полагая  $n=1$ .

Из уравнения изогнутой оси (9.7) по условию  $y(l) = 0$  выразим угол поворота через прогиб,  $\frac{\theta_0}{k} = -y_0$ . Следовательно, получим уравнение

$$y(x) = y_0 \left( 1 - \sin \frac{\pi x}{2l} \right), \text{ соответствующее форме изгиба, показанной на рис. 9.3, а.}$$

Если на верхнем конце стержня установить **шарнирную опору** (рис. 9.3, б), то  $y_0 = M_0 = 0$  и согласно (9.2) получим:

$$y(x) = \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{A}{kN} (kx - \sin kx), \quad (9.8)$$

$$\theta(x) = \theta_0 \cos kx + \frac{A}{N} (1 - \cos kx).$$

Здесь наличие реакции  $A$  очевидно из суммы моментов всех сил относительно заделки, где возникает опорный момент, а направление ее может быть какое угодно (как вправо, так и влево).



Из условий защемления, при  $x=l$   $y=\theta=0$ , получаем систему уравнений

$$\frac{\theta_0}{k} \sin kl + \frac{A}{kN} (kl - \sin kl) = 0,$$

$$\theta_0 \cos kl + \frac{A}{N} (1 - \cos kl) = 0,$$

определитель которой приравниваем нулю:

$$(1 - \cos kl) \sin kl - (kl - \sin kl) \cos kl = 0.$$

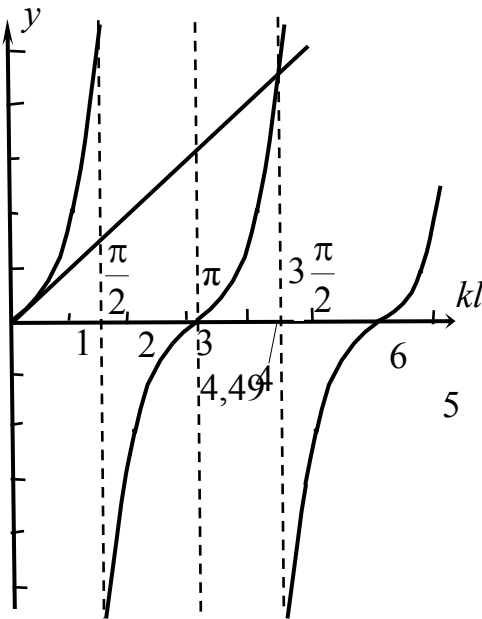


Рис. 9.4

Отсюда находим трансцендентное уравнение  $\operatorname{tg} kl = kl$  для вычисления параметра  $kl$ . Ориентировочное значение первого корня этого уравнения можно получить графически, построением кривой  $y(kl) = \operatorname{tg} kl$  и прямой  $y(kl) = kl$  (рис. 9.4), а затем координату пересечения графиков следует уточнить. Первый корень  $kl = 4,4934 \approx \pi/0,7$ . Значит

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}. \quad (9.9)$$

Используя (89.8), из условия  $y(l) = 0$  выразим угол поворота  $\theta$  через реакцию  $A$  и уравнение изогнутой оси примет следующий вид:

$$y(x) = \frac{A}{N \sin kl} (x \sin kl - l \sin kx).$$

Положение сечения с наибольшим прогибом найдем, приравняв угол поворота  $\theta(x) = \frac{A}{N \sin kl} (\sin kl - kl \cos kx)$  к нулю. Отсюда находим  $kx_0 = \arccos(\sin kl / kl) = 1,7897$ , т.е.  $x_0 = 0,3983l$ . В этом сечении возникает прогиб

$$y_{\max} = \frac{Al}{N} \left( \frac{x_0}{l} - \frac{\sin kx_0}{\sin kl} \right) = 1,398 \frac{Al}{N}.$$

Точка перегиба изогнутой оси будет там, где кривизна  $y'' = 0$ , т.е. при  $\sin kx_1 = 0$ , откуда находим длину участка стержня до точки перегиба  $x_1 = 0,7l$ .

Рассмотрим стержень **жестко заземленный** с двух сторон, рис. 9.3, в, при чем верхняя заделка является вертикально подвижной.

На основании (9.2) с учетом начальных параметров получаем уравнения перемещений и углов поворота:

$$y(x) = \frac{M_0}{N}(1 - \cos kx) + \frac{A}{N}(kx - \sin kx),$$

$$\theta(x) = \frac{M_0 k}{N} \sin kx + \frac{A}{N}(1 - \cos kx).$$
(9.10)

Из условий заземления стержня  $y(l) = \theta(l) = 0$  получаем систему однородных уравнений, определитель которой приравниваем нулю:

$$(1 - \cos kl)^2 - (kl - \sin kl) \sin kl = 0.$$
(9.11)

Отсюда получаем трансцендентное уравнение  $2(1 - \cos kl) - kl \sin kl = 0$  или

$$\sin \frac{kl}{2} \left( \sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} \right) = 0.$$
(9.12)

Все формулы для критической силы при различных условиях закрепления можно представить в виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2},$$
(9.13)

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины, учитывающий, какая часть действительной длины стержня изгибается по синусоиде с одной полуволной, аналогично основному случаю, рис. 9.2, а.

Так как  $P_{кр} = k^2 EJ = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$ , то коэффициент приведения длины

$$\mu = \frac{\pi}{kl}.$$
(9.14)

Если трансцендентное уравнение дает несколько значений первых корней, то для определения наименьшей критической силы нужно брать наименьший корень  $kl$ , при котором коэффициент приведения длины  $\mu$  будет наибольшим.

Один из корней уравнения (9.12) получим, положив  $\sin \frac{kl}{2} = 0$ , откуда  $\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{0,7}$ ; второй корень найдем положив  $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2}$ , откуда  $\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{0,7}$ . По меньшему корню определяем коэффициент приведения длины  $\mu=0,5$ . Значит,

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}. \quad (9.15)$$

Из уравнений (9.10) с учетом условия  $y(l) = 0$  можно выразить момент  $M_0$  через реакцию  $A$ , и уравнение изогнутой оси примет вид

$$y(x) = \frac{A}{kN} \left[ kx - \sin kx - \frac{kl - \sin kl}{1 - \cos kl} (1 - \cos kx) \right]. \quad (9.16)$$

Критическая сила (9.15) соответствует симметричной форме изгиба стержня. В этом легко убедиться на основании уравнения (9.16), подставив значение  $kl = 2\pi$ :

$$y(x) = \frac{Akl}{kN(1 - \cos kl)} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) = \frac{a}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Вторая критическая сила соответствует кососимметричной форме изгиба стержня. В этом случае уравнение (9.16) можно преобразовать следующим образом. Убедимся в том, что  $(kl - \sin kl)/(1 - \cos kl) = kl/2$  или

$$\frac{kl - \sin kl}{1 - \cos kl} - \frac{kl}{2} = 0, \text{ т.е. } 2 \left( \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) \cos \frac{kl}{2} = 0, \text{ что следует из равенства}$$

(9.12). При этом уравнения прогибов и углов поворота принимают вид:

$$y(x) = \frac{A}{kN} \left[ -k(l-x) + 2 \left( \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) \cos \frac{kx}{2} \right],$$

$$\theta(x) = \frac{A}{N} \left( 1 - \cos kx - \frac{kl}{2} \sin kx \right).$$

Из этих уравнений следует, что каждая половина стержня изгибается по форме изгиба стержня, изображенного на рис. 9.3, б, с экстремальным прогибом на расстоянии  $0,3008l$  от заделок.

В случае **скользящей заделки** (свободно смещающейся по горизонтали, но не поворачивающейся) (рис. 9.3, в) уравнения деформированного стержня имеют вид:

$$y(x) = y_0 + \frac{M_0}{N} (1 - \cos kx), \quad \theta(x) = \frac{M_0 k}{N} \sin kx.$$

Из условий защемления  $y(l) = \theta(l) = 0$  получаем значение  $kl = \pi$ , т.е.  $\mu=1$ . Критическая сила здесь такая же, как в основном случае, рис. 9.2, а.

## 9.2. Границы применимости формулы Эйлера

Выше показано, что формулу критической силы для любой стержневой системы можно привести к виду формулы Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (9.17)$$

где  $\mu l$  - приведенная длина стержня,  $J_{\min}$  - меньший момент инерции площади поперечного сечения стержня относительно главных центральных осей, если стержень имеет одинаковые условия закрепления в направлении главных осей.

Формула критической силы (9.17) получена на основании приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси сжатого стержня (5.18), которое применимо лишь при упругих деформациях, когда напряжения не превышают предела пропорциональности. Следовательно, критическое напряжение  $\sigma_{кр} = P_{кр} / F$  также не должно превышать предела пропорциональности. Из это-

го ограничения  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{п}$  получаем  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{F(\mu l)^2}$ . Учитывая, что  $J_{\min} / F = i_{\min}^2$

представляет квадрат радиуса инерции, обозначим геометрическую характеристику стержня через  $\lambda$ , т.е.

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (9.18)$$

Тогда формула критического напряжения примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2}. \quad (9.19)$$

Отсюда видно, что с уменьшением гибкости  $\lambda$  критическое напряжение стремительно возрастает. Предельное значение гибкости, при котором справед-

лива формула Эйлера, ограничивается условием  $\frac{\pi^2 E}{\lambda_{кр}^2} \leq \sigma_{п}$ . Отсюда находим

предельную гибкость, ниже которой формула Эйлера неприменима

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{п}}} \quad (9.20)$$

Например, для мягкой стали с пределом пропорциональности  $\sigma_{п}=200$  МПа предельная гибкость  $\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100$ , т.е. при гибкости меньше 100 формула Эйлера неприменима.

Для наглядности построим график критических напряжений для мягкой стали, рис. 9.5.

Экспериментально установлено, что стержни малой гибкости (при  $\lambda \leq 30 - 40$ ) не теряют устойчивости, а разрушаются от потери прочности. Для таких стержней за предельное напряжение нужно принимать предел текучести ( $\sigma_{т}=240$  МПа), что соответствует левому участку на графике рис. 8.5.

Критическое напряжение для средних гибкостей (на графике средний участок) можно вычислить по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского

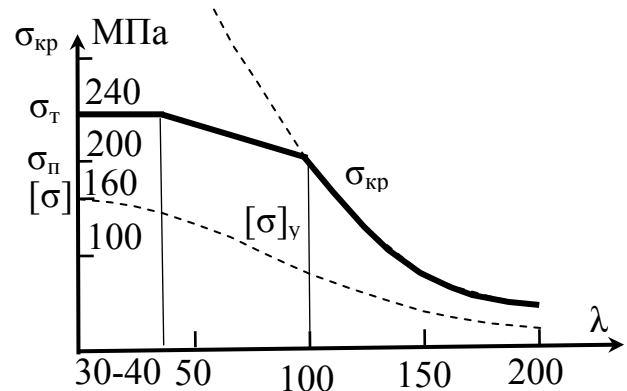


Рис. 9.5

$$\sigma_{кр} = a + b\lambda + c\lambda^2 \quad (9.21)$$

Эмпирические коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  приводятся в учебниках по сопротивлению материалов [5]. Для мягкой стали  $c=0$  и прямая  $\sigma_{кр} = a + b\lambda$  соединяет участки графика критических напряжений на среднем участке. Из линейной зависимости можно найти коэффициенты  $a=268,4$  МПа,  $b=-0,71$  МПа или, подчиняя уравнение прямой крайним значениям  $\sigma(30) = 240$  и  $\sigma(100) = 200$ , находим уравнение

$$\sigma_{кр} = \sigma_{т} - \frac{\lambda - 30}{70} \left( \sigma_{т} - \frac{\pi^2 E}{\lambda_{пр}^2} \right) \quad (9.22)$$

Для высокопрочных сталей зависимость критического напряжения от гибкости можно принять в виде параболы

$$\sigma_{кр} = a + c\lambda^2,$$

что приводит к формуле

$$\sigma_{кр} = \sigma_{т} - \frac{\lambda^2}{\lambda_{пр}^2} \left( \sigma_{т} - \frac{\pi^2 E}{\lambda_{пр}^2} \right) \quad (9.23)$$

Имея график критических напряжений, можно получить допускаемые напряжения при расчете на устойчивость  $[\sigma]_у = \sigma_{к} / k_y$ . Здесь  $k_y$  - коэффициент

запаса устойчивости (для стали  $k_y = 1,5 - 2,1$ ).

### 9.3. Практический расчет сжатых стержней

Расчет на прочность требует, чтобы наибольшие напряжения в стержне не превышали допустимого, т.е.  $\sigma \leq [\sigma]$ ,  $\sigma = \frac{P}{F}$ ,  $[\sigma] = \frac{\sigma_{оп}}{k}$ .

Расчет на устойчивость требует, чтобы напряжения в сжатом стержне не превышали допустимого на устойчивость,  $\sigma \leq [\sigma]_y$ ,  $\sigma = \frac{P}{F_{бр}}$ ,  $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{k_y}$ .

При этом учитывается вся площадь поперечного сечения  $F_{бр}$  без местных ослаблений за счет выточек, отверстий и пр. Такие ослабления влияют на действительные напряжения и учитываются в расчетах на прочность, но на устойчивость они не влияют.

Рассмотрим отношение напряжений (допускаемого в расчете на устойчивость к допускаемому нормативному)  $\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр}}{k_e} \frac{k}{\sigma_{оп}} = \varphi$ . Очевидно, что

это отношение меньше единицы, так как  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{оп}$  (для стали  $\sigma_{оп} = \sigma_T$ ), а  $k \leq k_y$ .

Поэтому  $\varphi$  называется коэффициентом снижения нормативного допускаемого напряжения  $[\sigma]$ . Таким образом,  $[\sigma]_y = [\sigma]\varphi$  и условие, обеспечивающее устойчивость сжатого стержня, принимает вид  $P/F_{бр} \leq [\sigma]\varphi$  или

$$\frac{P}{F_{бр} \cdot \varphi} \leq [\sigma], \quad (9.24)$$

где  $\sigma_{расч} = P/(F_{бр} \cdot \varphi)$  - расчетное (условное) напряжение, которое сравнивается с допускаемым нормативным.

Из (9.24) следует два вида расчета – вычисление допускаемой нагрузки на сжатый стержень или определение необходимых поперечных размеров. В первом случае согласно (9.24) допускаемая нагрузка равна

$$P \leq F_{бр} \cdot [\sigma]\varphi. \quad (9.25)$$

Значения коэффициента  $\varphi$  (для соответствующего материала) в зависимости от гибкости  $\lambda$  выбираются из таблицы 9.1 или графика, рис. 9.6.

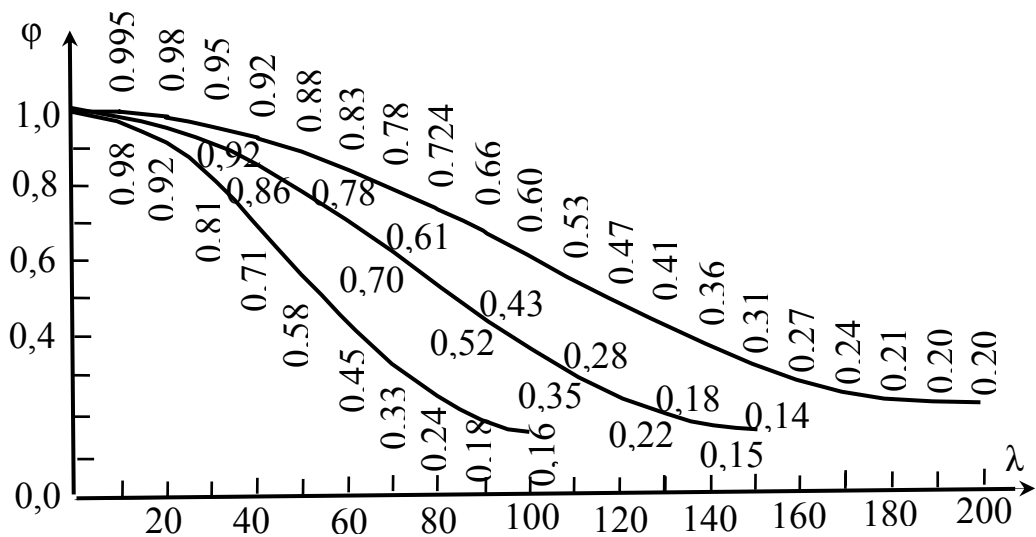


Рис. 9.6

В таблице 9.1 приведены коэффициенты  $\phi$ , а также критические напряжения и коэффициенты запаса устойчивости, для наиболее часто используемых материалов.

Таблица 9.1

$\lambda$	Малоуглеродистые стали				Дерево		Чугун	
	$\sigma_{кр}$	$\phi$	$k_y$	$\lambda/\sqrt{\phi}$	$\phi$	$\lambda/\sqrt{\phi}$	$\phi$	$\lambda/\sqrt{\phi}$
0	240	1,00	1,50	0	1,00	0	1,00	0
10	239,6	0,99	1,51	10,05	0,99	10,05	0,97	10,15
20	238,4	0,96	1,55	20,41	0,97	20,31	0,91	20,96
30	236,4	0,94	1,57	30,94	0,93	31,11	0,81	33,33
40	233,6	0,92	1,58	41,70	0,87	42,88	0,69	48,15
50	230,6	0,89	1,61	52,99	0,80	55,90	0,57	66,23
60	225,6	0,86	1,64	64,70	0,71	71,21	0,44	90,45
70	220,4	0,81	1,70	77,78	0,60	90,37	0,34	120,04
80	214,4	0,75	1,78	92,37	0,48	115,47	0,26	156,89
90	207,6	0,69	1,88	108,35	0,38	145,99	0,20	201,25
100	200,0	0,60	2,08	129,10	0,31	179,60	0,16	250,00
110	165,8	0,52	1,98	152,54	0,25	220,00		
120	138,9	0,45	1,93	178,88	0,22	255,84		
130	118,3	0,40	1,85	205,55	0,18	306,41		
140	102,0	0,36	1,77	233,33	0,16	350,00		
150	88,9	0,32	1,74	265,16	0,14	400,89		
160	78,1	0,29	1,68	297,11				
170	69,2	0,26	1,67	333,39				
180	61,7	0,23	1,66	375,32				
190	55,4	0,21	1,65	414,14				
200	50,0	0,19	1,64	458,83				

Для мягкой стали приближенное значение коэффициентов понижения допускаемого напряжения можно вычислять по формуле

$$\varphi(\lambda) = 0,593 + 0,405 \cos \frac{\pi\lambda}{200}, \quad 0 \leq \lambda \leq 200, \quad (9.26)$$

которая дает отклонение от табличных значений не более 3,5%.

Для дерева

$$\varphi(\lambda) = 0,57 + 0,43 \cos \frac{\pi\lambda}{150}, \quad 0 \leq \lambda \leq 150. \quad (9.27)$$

Для чугуна

$$\varphi(\lambda) = 0,58 + 0,42 \cos \frac{\pi\lambda}{100}, \quad 0 \leq \lambda \leq 100. \quad (9.28)$$

Для стали 5 коэффициенты 0,6 и 0,4 в формуле (9.25) заменяются на 0,51 и 0,49 соответственно.

Обратим внимание на то, что расчет по коэффициентам  $\varphi$  можно выполнять при любой гибкости, но в табл. 9.1 для каждого материала имеются свои ограничения. Это означает, что стержни, гибкость которых выше ограниченной в таблице, на практике применять не рекомендуется в виду малых допускаемых напряжений при расчете на устойчивость.

Коэффициент запаса устойчивости  $k_y$ , больше коэффициента запаса прочности  $k$ . Для мягкой стали  $k=1,5$ , а  $k_y=1,5 \quad 2,1$  (см. табл. 9.1)

Второй вид расчета, т.е. подбор размеров поперечного сечения, выполняется по формуле

$$F_{бр} \geq \frac{P}{[\sigma]\varphi}. \quad (9.29)$$

Поскольку  $\varphi$  выбирается по гибкости  $\lambda$ , зависящей от радиуса инерции  $i = \sqrt{J/F}$ , а следовательно, и от площади  $F$ , то расчет по формуле (9.29) производится подбором. В первой попытке задают любое значение  $\varphi$  (например,  $\varphi_1=0,5$ ). По коэффициенту  $\varphi_1$  вычисляют площадь поперечного сечения  $F_1$ , радиус инерции  $i_1$  и гибкость  $\lambda_1$ . По гибкости  $\lambda_1$  из таблицы находят коэффициент  $\varphi_{1,т}$ , который соответствует принятому сечению  $F_1$ . Если окажется, что  $\varphi_{1,т} \neq \varphi_1$ , то производится вторая попытка, в которой принимается среднее значение  $\varphi_2 \approx (\varphi_1 + \varphi_{1,т})/2$ . Так расчет продолжается до совпадения заданного и табличного значения коэффициента  $\varphi$ . В заключение рекомендуется проверить расчетное напряжение и сравнить его с допускаемым:

$$\frac{P}{F\varphi} \leq [\sigma]. \quad (9.30)$$

**Задача 9.1.** Стальная трубчатая консоль диаметром  $d=100$  мм и толщиной стенки трубы  $\delta=3$  мм сжата силой  $P$  (рис. 9.7).



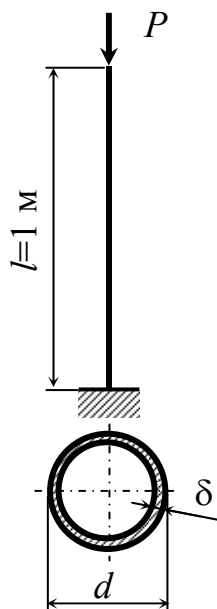


Рис. 9.7

Найти допускаемую силу  $P$  и коэффициенты запаса прочности и устойчивости, если  $\sigma_m = 240$  МПа,  $\sigma_n = 200$  МПа (Ст. 3).

**Решение.** Площадь поперечного сечения трубы:

$$F = \pi d \delta = \pi \cdot 10 \cdot 0,3 = 9,425 \text{ см}^2,$$

осевой момент инерции

$$J_z = J_y = \frac{\pi d^3}{8} \delta = \frac{\pi \cdot 10^3}{8} 0,3 = 117,8 \text{ см}^4,$$

радиус инерции  $i_z = i_y = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \frac{d}{2\sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = 3,536 \text{ см}.$

Гибкость стойки  $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{3,536 \cdot 10^{-2}} = 56,56.$

Из таблицы 9.1 находим  $\varphi = 0,8703$  (по формуле 8.25  $\varphi = 0,8504$ ).

Допускаемая нагрузка

$$[P] = [\sigma] \cdot \varphi \cdot F = 160 \cdot 10^6 \cdot 0,8703 \cdot 9,425 \cdot 10^{-4} = 131,24 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Действительное напряжение

$$\sigma = \frac{[P]}{F} = [\sigma] \cdot \varphi = 160 \cdot 0,8703 = 139,25 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса прочности  $k = \frac{\sigma_m}{\sigma} = \frac{240}{139,25} = 1,72.$

Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \sigma_m - \frac{\lambda - 30}{70} (\sigma_m - \sigma_n) = 240 - \frac{56,56 - 30}{70} (240 - 200) = 224,9 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса устойчивости  $k_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} = \frac{224,9}{139,25} = 1,61.$

**Задача 9.2.** Определить размеры поперечного сечения квадратной деревянной стойки (рис. 9.8), если  $[\sigma] = 10$  МПа,  $P = 100$  кН.

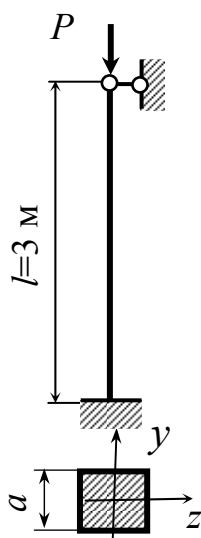


Рис. 9.8

**Решение.** Приняв в первой попытке  $\varphi_1 = 0,5$  (любое значение  $0 < \varphi < 1$ ), находим

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10 \cdot 10^6} = 200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 200 \text{ см}^2 = a_1^2$$

, т.е.

$$a_1 = \sqrt{F_1} = \sqrt{200} = 14,14 \text{ см, радиус инерции}$$

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \frac{a_1}{\sqrt{12}} = \frac{14,14}{\sqrt{12}} = 4,08 \text{ см,}$$

гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{4,08} = 51,6.$$

Из таблицы 8.1 по линейной интерполяции находим

$$\varphi = 0,8 - \frac{0,09}{10} 1,6 = 0,786 > 0,5.$$

Во второй попытке получаем

$$\varphi_2 \approx \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \frac{0,5 + 0,786}{2} = 0,643.$$

Рекомендуется в последующих попытках коэффициент  $\varphi$  принимать больше (меньше) среднего значения, если он стремится к увеличению (к уменьшению). Примем  $\varphi_2 \approx 0,7$ . Площадь поперечного сечения

$$F_2 = \frac{100 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 10 \cdot 10^6} = 142,86 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Размер  $a_2 = 11,95$  см, радиус инерции  $i_z = 3,45$  см, гибкость  $\lambda = 60,86$ ,  $\varphi = 0,71$ . Так как  $\varphi \approx \varphi_2$ , то дальнейшее уточнение поперечных размеров нецелесообразно. Окончательно принимаем  $a = 12$  см.

**Задача 9.3.** Стойка из двутавра № 20 ( $F = 26,8 \text{ см}^2$ ,  $J_z = 1840 \text{ см}^4$ ,  $i_z = 8,28 \text{ см}$ ,  $J_y = 115 \text{ см}^4$ ,  $i_y = 2,07 \text{ см}$ ) длиной  $l = 3$  м жёстко закреплена на нижней опоре. Вверху по нормали к оси  $y$  имеется шарнирная опора, а по нормали к оси  $z$  стойка свободна, рис. 9.9.

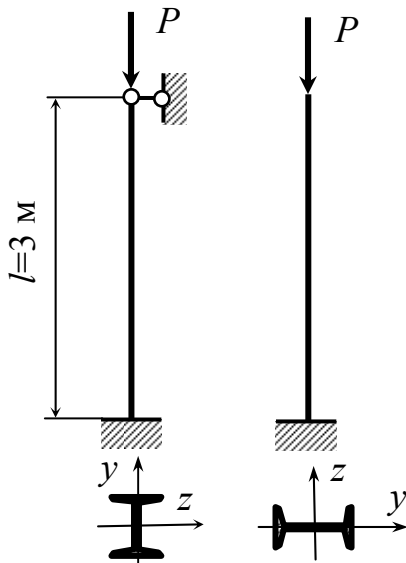


Рис. 9.9

Определить допускаемую сжимающую нагрузку  $P$ .

**Решение.** По изгибу относительно оси  $y$  стойка имеет гибкость

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,07} = 101,4,$$

по отношению к оси  $z$  гибкость

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{2 \cdot 300}{8,28} = 72,5.$$

Расчёт производится по большей гибкости, т.к. потеря устойчивости произойдёт относительно оси  $y$ . Так как  $\lambda_y > \lambda_{np}$  ( $\lambda_{np} = 100$ ), то расчёт можно производить по формуле Эйлера, приняв  $k_y = 2$ ,

$$[P] = \frac{P_{кр}}{k_y} = \frac{\pi^2 EJ_y}{k_y (\mu_y l)^2} = \frac{\pi^2 E i_y^2 F}{k_y (\mu_y l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,07^2 \cdot 26,8 \cdot 10^{-8}}{2(0,7 \cdot 3)^2} = 257 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

или по коэффициенту  $\varphi$ , который при  $\lambda_y = 101$  можно взять из таблицы или вычислить по (9.26),  $\varphi \approx 0,6$

$$[P] = [\sigma] \cdot \varphi \cdot F = 160 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 26,8 \cdot 10^{-4} = 257,3 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

**Задача 9.4.** Для стойки (рис. 9.10) под нагрузку  $P=500$  кН подобрать двутавр.

**Решение.** Находим площадь поперечного сечения, приняв  $\varphi=0,5$

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 62,5 \text{ см}^2.$$

По этой площади из сортамента выбираем двутавр №36:  $F = 61,9 \text{ см}^2$ ,  $i_z = 14,7 \text{ см}$ ,  $i_y = 2,89 \text{ см}$ .

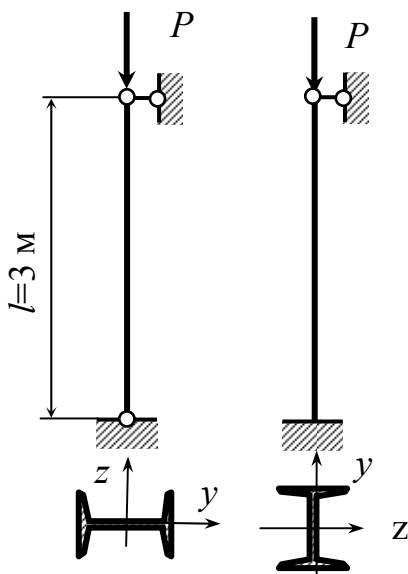


Рис. 9.10

$$\text{Находим гибкости: } \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{300}{14,7} = 20,4,$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,89} = 72,7.$$

Расчёт нужно вести по большей гибкости. Для гибкости  $\lambda_y = 72,7$  из таблиц находим  $\varphi = 0,793$ .

Так как этот коэффициент не равен, принятому в первой попытке  $\varphi = 0,5$ , то во второй попытке принимаем  $\varphi \approx (0,5 + 0,793)/2$ , приближаясь к новому значению, т.е. принимаем  $\varphi = 0,7$ . Повторяем расчёт

$$F = \frac{500 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 160 \cdot 10^6} = 44,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \text{ чему соответствует}$$

двутавр №27, а ( $F = 43,2 \text{ см}^2$ ,  $i_y = 2,8 \text{ см}$ ). По гиб-

кости  $\lambda = 0,7 \cdot 300/2,8 = 75$  находим  $\varphi = 0,78$ . Проверяем расчётное напряжение в этом двутавре

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,78 \cdot 43,2 \cdot 10^{-4}} = 148,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Ввиду небольшого напряжения можно принять предыдущий по сортаменту двутавр №27 ( $F = 40,2 \text{ см}^2$ ,  $i_y = 2,54 \text{ см}$ ),  $\lambda = 82,7$ ,  $\varphi = 0,734$ , но в нём

$$\text{расчетное напряжение } \sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{0,734 \cdot 40,2 \cdot 10^{-4}} = 169,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

**Задача 9.5.** Шарнирно закрепленный стержень (пилона отвалообразователя) имеет разные жесткости по участкам, рис. 9.11. Найти критическую силу и допускаемую нагрузку.

**Решение.** На верхнем участке все начальные параметры, кроме угла поворота  $\theta$ , равны нулю. Уравнения изогнутой оси, углов поворота и изгибающих моментов принимают следующий вид:

$$y(x) = \frac{\theta_0}{k_1} \sin k_1 x, \quad \theta(x) = \theta_0 \cos k_1 x,$$

$$M(x) = EJ_1 \theta'(x) = \frac{P}{k_1^2} \theta'(x) = -\frac{P}{k_1} \theta_0 \sin k_1 x.$$

На нижнем участке с учетом начальных параметров, полученных из уравнений верхнего участка при  $x=a$ , составляем уравнение

$$y(x) = \frac{\theta_0}{k} \sin k_1 a + \theta_0 \cos kx \cdot \frac{\sin k_2 x}{k_2} - \frac{P}{k_1} \theta_0 \sin k_1 a \cdot \frac{1 - \cos k_2 x}{P}.$$

Из условия при  $x=b$   $y=0$  получаем трансцендентное уравнение

$$\sin k_1 a \cdot \cos k_2 b + \frac{k_1}{k_2} \cos k_1 a \cdot \sin k_2 b = 0$$

или

$$\operatorname{tg} k_1 a = -\frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} k_2 b = -\sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \frac{b}{a} k_1 a \right).$$

Отсюда определяется первый корень  $k_1 a = \xi$ , на основании которого находим коэффициент приведения длины стержня  $\mu = \pi a / (\xi l)$ .

Для пилонa отвалообразователя ОШ-1900  $J_2 = 2J_1$ ,  $a = l/3,5$ ,  $b = 2,5l/3,5$ .

В этом случае трансцендентное уравнение принимает вид  $\operatorname{tg} \xi = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{2,5}{\sqrt{2}} \xi$ , от-

куда  $\xi = 1,618412$ . Следовательно, коэффициент приведения длины будет  $\mu = \pi / 3,5 \cdot 1,61841 = 0,758$ , а гибкость  $\lambda = \mu l / i$ . После этого из таблицы находится коэффициент снижения допускаемого напряжения  $\varphi$ . Затем можно вычислить допускаемую нагрузку  $[P] = F[\sigma] \varphi$  и найти необходимый коэффициент запаса ус-

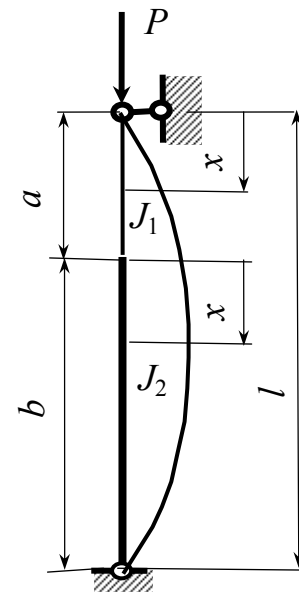


Рис. 9.11

тойчивости  $k_y \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} \frac{k}{k_y}$ .

Здесь с учетом легированной стали 35 критическое напряжение при средних гибкостях вычисляется по формуле

$$\sigma_{кр} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda_{пр}}\right)^2 \left(\sigma_T - \frac{\pi^2 E}{\lambda_{пр}^2}\right) = 320 - \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \left(320 - \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{100^2}\right) = 320 - \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 122,6.$$

В конкретном случае расчета пилона отвалообразователя ОШ-1900, изготовленного из стали 35 в виде тонкостенной трубы с геометрическими параметрами  $J=1,78 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$ ,  $i=0,29 \text{ м}$ ,  $l=35 \text{ м}$ , получаем  $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,758}{0,29} 35 = 91,5$ . Этой гибкости соответствует  $\varphi=0,62$ .

Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = 320 - \left(\frac{91,5}{100}\right)^2 122,6 = 217,3 \text{ МПа.}$$

При коэффициенте запаса прочности  $k=1,5$  необходимый коэффициент запаса устойчивости  $k_y = \frac{1,5 \cdot 217,3}{320 \cdot 0,62} = 1,64$ .

Допускаемая нагрузка

$$[P] = F[\sigma]\varphi = \frac{J}{i^2} \frac{\sigma_T}{k} \varphi = \frac{1,78 \cdot 10^{-3} \cdot 320}{0,29^2 \cdot 0,62} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Н} = 2,8 \text{ МН.}$$

Критическая сила  $P_{кр} = [P]k_y = 2,8 \cdot 1,64 = 4,49 \text{ МН.}$

## 10. ДИНАМИКА УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Колебания упругих стержневых систем представляют периодически изменяющиеся перемещения сечений стержней, вызванные внешним воздействием.

Если внешнее воздействие вызвало отклонение системы из положения статического равновесия или сообщило некоторым сечениям определенную скорость движения, то это вызовет свободные или собственные колебания за счет потенциальной энергии, полученной от внешнего воздействия.

Если внешнее воздействие представляет внезапную нагрузку или нагрузку, изменяющуюся по определенному закону, то оно вызовет вынужденные колебания упругой системы.

При этом напряженно-деформированное состояние стержневой системы обуславливается кинематической характеристикой системы, т.е. зависит от количества степеней свободы - количества геометрических параметров, определяющих положение системы в плоскости.

Простейшим методом решения динамических задач является составление и решение дифференциальных уравнений движения масс упругой системы с учетом произведения сосредоточенных масс на их ускорения или произведения моментов инерции масс на угловые ускорения при линейном или угловом перемещении соответственно. По правилу Даламбера это означает, что, составляя уравнения равновесия в динамике, наряду с нагрузками статическими нужно учитывать силы инерции или моменты сил инерции.

### 10.1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В качестве демонстрационного примера упругой системы с одной степенью свободы рассмотрим невесомую консоль с одним сосредоточенным грузом  $Q = Mg$ , рис. 10.1

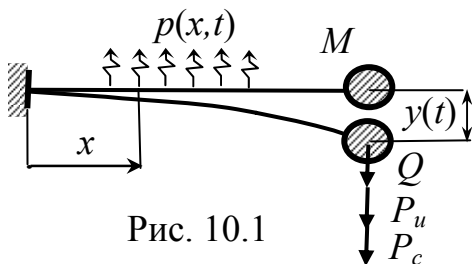


Рис. 10.1

Перемещение груза при колебаниях

$$y(t) = \delta_{11}(Q + P_u + P_c) + \int_0^t \delta_{1x} p(x,t) dx, \quad (10.1)$$

где:  $Q = Mg$  - вес массы;  $P_u = -M\ddot{y}$  - сила инерции колеблющейся массы;  $P_c = -k\dot{y}$  - сил сопротивления движению, пропорциональная скорости движения с коэффициентом сопротивления  $k$ ;  $(x, t)$  - интенсивность возмущающей нагрузки,  $\delta_{1x}$  - перемещение в точке приложения массы  $M$  от единичной нагрузки, приложенной в произвольном сечении  $x$ .

Если  $p(x,t) = 0$ , то возникают собственные затухающие колебания. Если  $k=0$ , то будут собственные незатухающие колебания.

Если  $p(x,t) = 0$ , то возникают собственные затухающие колебания. Если  $k=0$ , то будут собственные незатухающие колебания.

### 10.1.1. Собственные незатухающие колебания

Уравнение линейных перемещений груза (10.1) принимает вид

$$y(t) = \delta_{11}M(g - \ddot{y}(t)),$$

или

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = g, \quad (10.2)$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}M}.$$

Решение однородного уравнения при  $g=0$  в (10.2) имеет вид

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (10.3)$$

или

$$y(t) = C \sin(\omega t + \mu). \quad (10.4)$$

Приравнявая (10.3) и (10.4), получим зависимость

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos \mu \cdot \sin \omega t + C \sin \mu \cdot \cos \omega t$$

откуда находим:  $A = C \sin \mu$ ,  $B = C \cos \mu$ .

Так получаем формулы замены решения (10.3) на (10.4) и наоборот

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \mu = A/B$$

Частное решение уравнения (10.2) ищем в виде его правой части  $\bar{y} = D$ , подставляя которое в (10.2), получим

$$D = B/\omega^2 = Mg\delta_{11} = Q\delta_{11} = f,$$

$f$  – статический прогиб балки в месте приложения груза.

Следовательно, полное перемещение в точке приложения груза состоит из двух слагаемых, вызванных статикой и динамикой загрузки

$$y(t) = f + C \sin(\omega t + \mu). \quad (10.5)$$

Отсюда следует, что колебания происходят относительно положения статического равновесия. Значит, при изучении колебаний статическую нагрузку можно учитывать отдельно от динамической.

Выразим амплитуду колебаний  $C$  и начальную фазу  $\mu$  через начальные параметры из условий  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$ :

$$y(t) = C \sin(\omega t + \mu), \quad v(t) = C\omega \cos(\omega t + \mu).$$

Отсюда из начальных условий получаем:

$$y_0 = C \sin \omega t, \quad v_0 = C\omega \cos \omega t.$$

Следовательно:

$$C = \sqrt{y_0^2 + v_0^2 / \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \mu = y_0 \omega / v_0. \quad (10.6), (10.7)$$

Частота и период собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M}} = \sqrt{\frac{g}{f}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.8)$$

Из (9.8) виден физический смысл собственной частоты, которая называется циклической или круговой

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- это количество колебаний за  $2\pi$  секунд, а количество колебаний за одну минуту  $n = 60/T$  называется технической частотой колебаний (применяется для вынужденных колебаний). Зависимость между этими частотами:

$$n = 30 \frac{\omega}{\pi} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\pi n}{30}.$$

После вычисления перемещения  $y(x)$  можно найти силу инерции колеблющейся массы  $P_u = -M\ddot{y} = M\omega^2 y(t)$ , на которую следует рассчитывать заданную упругую систему.

Аналогичные расчетные формулы будут при продольных колебаниях стержня с площадью поперечного сечения  $F$  и массой  $M$ . Обозначив продольное перемещение груза  $Q = Mg$  через  $u(t)$  получим:

$$C = \sqrt{u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{u_0}{v_0} \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M}} = \sqrt{\frac{EF}{MI}}. \quad (10.9)$$

При крутильных колебаниях невесомого вала с диском, момент инерции его массы относительно оси вращения

$$J = \int \rho^2 dm = \int \rho^2 dF \Delta \gamma = \Delta \gamma \int \rho^2 dF = \Delta \gamma J_0 \quad (10.10)$$

(здесь  $\Delta$  - толщина диска,  $\gamma$  - плотность материала диска,  $J_0 = \frac{\pi D^4}{32}$  - полярный момент инерции площади поперечного сечения диска) расчетные формулы колебаний невесомого вала (10.9) принимают вид:

$$C = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\theta_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\varphi_0}{\theta_0} \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\varphi_{11} J}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{Jl}}. \quad (10.11)$$

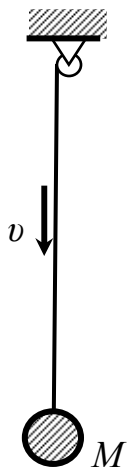


Здесь:  $\varphi_0$  – начальный угол закручивания вала в месте закрепления диска,  $\theta_0$  – начальная угловая скорость вращения вала,  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярный момент инерции площади поперечного сечения вала диаметра  $d$ .

**Алгоритм 6** решения динамических задач упругих стержневых систем с одной степенью свободы:

- по известной формуле или по правилу Верещагина (или другим методом) вычислить единичное перемещение нагруженного массой  $M$  сечения;
- с учетом начальных условий по (10.6) – (10.8) найти начальную фазу  $\mu$ , частоту колебаний  $\omega$  и амплитуду собственных поперечных колебаний  $C$  (при продольных и крутильных колебаниях формулы аналогичные);
- составить уравнение движения массы;
- дифференцированием уравнения движения найти ускорение движения массы и силу инерции массы;
- методом сечений найти внутреннее усилие и напряжение.

**Задача 10.1.** На невесомом канате с жесткостью на растяжение  $EF$  со скоростью  $v$  опускается груз  $Q = Mg$ , рис. 10.2. Определить расчетное напряжение в канате при внезапном защемлении каната в верхнем сечении, его длина была  $l$ .



**Решение.** Так как начальное перемещение  $u_0 = 0$ , то согласно (10.9) находим:

$$C = \frac{v}{\omega}, \quad \mu = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}} = \sqrt{\frac{EF}{Ml}}.$$

Уравнение продольных динамических перемещений сечения каната в месте загрузки при колебаниях

Рис. 10.2

$$u(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t = v \sqrt{\frac{f}{g}} \sin \omega t.$$

С учетом статического нагружения каната силой  $Q = Mg$ , вызывающей перемещение  $f = Mg / \delta_{11}$ . Суммарное перемещение

$$u(t) = f + v \sqrt{\frac{f}{g}} \sin \omega t = f \left( 1 + \frac{v}{\sqrt{gf}} \sin \omega t \right).$$

Сила инерции колеблющегося груза

$$P_{ин} = -M\ddot{u}(t) = M\omega^2 u(t) = M \frac{1}{\delta_{11}M} v \sqrt{\frac{f}{g}} = \frac{v}{\delta_{11}} \sqrt{\frac{f}{g}} \sin \omega t.$$

С учетом статического нагружения усилие в стержне будет равно

$$N = Q + P_{и} = Q \left( 1 + \frac{v}{\delta_{11} Q} \sqrt{\frac{f}{g}} \sin \omega t \right) = Q \left( 1 + \frac{v}{\sqrt{gf}} \sin \omega t \right) = Q k_{д}.$$

Заметим, что динамический коэффициент по нагрузке и перемещению  $k_{д}$  одинаковый.

$$\text{Напряжение } \sigma_{д} = \sigma_{с} k_{д} = \frac{N}{F} k_{д}.$$

**Задача 10.2.** На платформе жестко защемлен упругий невесомый стержень с сосредоточенной массой  $M$ , рис.10.3. Платформа движется с постоянной скоростью  $v$  и внезапно останавливается. Какие напряжения возникают в консольной балке при ее внезапной остановке?

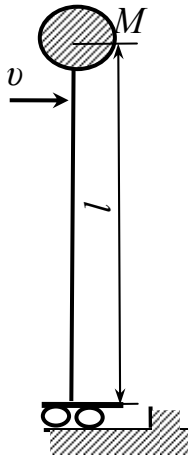


Рис. 10.3

**Решение.** Так как начального смещения массы нет, колебания возникли от внезапного сообщения массе начальной скорости, то в расчетные формулы (10.7) и (10.8) нужно положить  $y_0 = 0$  и  $v_0 = v$ . При этом получим: начальную фазу  $\mu = 0$ , амплитуду колебаний  $C = v / \omega$ , циклическую частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}} M} = \sqrt{\frac{3EJ}{Ml^3}}. \quad \text{Следовательно, уравнение}$$

движения массы при собственных колебаниях принимает вид  $y(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$ , а

сила инерции колеблющейся массы

$$P_u = -M\ddot{y}(t) = M\omega^2 y(t) = \frac{y(t)}{\delta_{11}} = \frac{v}{\omega \delta_{11}} \sin \omega t = v \sqrt{3EJ} \frac{M}{l^3} \sin \omega t v.$$

Изгибающий момент в защемлении консоли при  $t = T/4$

$$M_u(l) = P_u l = v \sqrt{3EJ} \frac{M}{l}, \text{ а напряжение } \sigma = M_u(l) / W.$$

**Задача 10.3.** На невесомую двухопорную балку со скоростью  $v$  налетает сосредоточенная неупругая масса  $M$  и удерживается на ней при колебаниях, рис. 10.4. Определить расчетный изгибающий момент в балке.

**Решение.** При ударе в начале колебаний  $y_0 = 0$ , а скорость движения  $v_0 = v$  задана. Согласно (10.6) - (10.8) получаем:

$$C = \frac{v}{\omega}, \quad \mu = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}} M} = \sqrt{\frac{48EJ}{Ml^3}}.$$

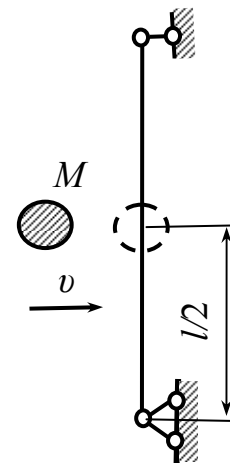


Рис. 10.4

Уравнение движения массы  $y(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$ , а сила инерции

$$P_u = -M\ddot{y}(t) = M\omega^2 y(t) = Mv\omega \sin \omega t = v\sqrt{48EJ \frac{M}{l^3}} \sin \omega$$

Расчетный изгибающий момент

$$M_u(l/2) = \frac{P_u l}{4} = v\sqrt{3EJ \frac{M}{l}}.$$

**Задача 10.4.** На невесомую раму с сосредоточенной массой  $M_0$  со скоростью  $v$  налетает неупругая масса  $M$ , вызывая собственные колебания рамы с суммарной массой  $M+M_0$ , рис.10.5. Из условия прочности рамы определить допускаемую скорость удара.

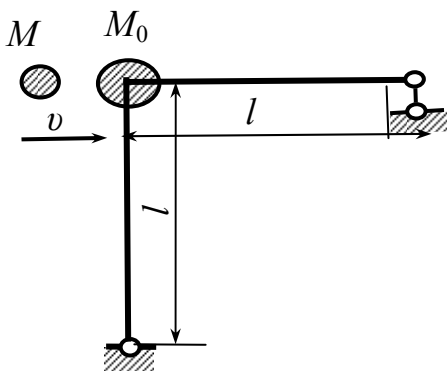


Рис. 10.5

**Решение.** Так как колебания вызваны скоростью удара  $v$ , а начальное отклонение массы  $M_0$   $y_0 = 0$ , то с учетом начальной скорости движения масс при колебаниях  $v_0$  находим амплитуду колебаний, начальную фазу и частоту колебаний:

$$C = v_0 / \omega, \quad \mu = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + M_0)}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Начальная скорость движения масс при колебаниях находится из закона сохранения количества движения  $v_0 = vM / (M + M_0)$ .

Для вычисления единичного коэффициента  $\delta_{11}$  нужно перемножить единичную эпюру изгибающих моментов от единичной силы, приложенной в сечении загрузки по направлению движения, на такую же эпюру -  $\delta_{11} = 2 \frac{l^3}{3EJ}$ .

Сила инерции совместно движущихся масс

$$P_{in} = -(M + M_0)\ddot{y}(t) = (M + M_0)\omega^2 C \sin \omega t = (M + M_0)\omega^2 \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \\ = (M + M_0) \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + M_0)}} \frac{vM}{M + M_0} \sin \omega t = Mg \sqrt{\frac{v^2}{\delta_{11}(M + M_0)g^2} \frac{M}{M}} \sin \omega t.$$

Обозначим:  $\eta = \frac{M}{M + M_0}$  - коэффициент передачи энергии,  $f = \delta_{11}gM = \delta_{11}Q$  -

квазистатическое перемещение узла рамы от груза  $Q$ , это перемещение в направлении колебаний от силы инерции ударяющей массы.

Так получаем силу инерции колеблющихся масс

$$P_{in} = Q \sqrt{\frac{v^2 \eta}{fg}} \sin \omega t.$$

Динамический изгибающий момент в узле рамы

$$M_{\max} = P_n l = Ql \sqrt{\frac{v^2 \eta}{fg}}$$

Расчетное напряжение в узле стойки рамы

$$\sigma = \frac{M + M_0}{F} g + \frac{Mg}{W} l \sqrt{\frac{v^2 \eta}{fg}}.$$

Из условия прочности  $\sigma \leq [\sigma]$  можно найти допускаемую скорость удара

$$[v] = \sqrt{\left( [\sigma] - \frac{M + M_0}{F} g \right) \frac{W}{l} \frac{\delta_{11} g}{\eta}}$$

**Задача 10.5.** Невесомый вал с диском массой  $M$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\theta$  и внезапно защемляется на левом торце, рис. 10.6. Определить напряжения в поперечном сечении вала.

**Решение.** Так как начального угла закручивания вала нет  $\varphi_0=0$ , а есть начальная угловая скорость  $\theta$ , то согласно (9.11) получаем: амплитудный угол за-

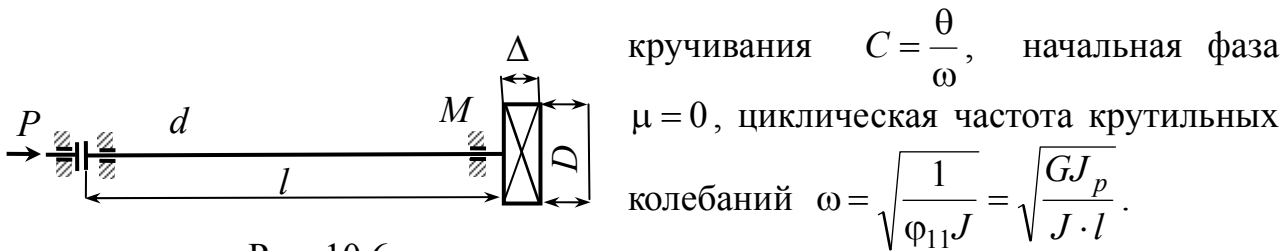


Рис. 10.6

Здесь момент инерции массы диска относительно оси вращения величина известная (10.10)

$$J = \gamma \Delta \frac{\pi D^4}{32} = \gamma \Delta \frac{\pi D^2}{4} \frac{D^2}{8} = \frac{MD^2}{8}.$$

Уравнение углов закручивания вала в месте закрепления диска

$$\varphi(l, t) = \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t, \text{ а в произвольном сечении, } \varphi(x, t) = \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t.$$

Крутящий момент внутренних усилий

$$M_x = GJ_p \varphi'(x, t) = GJ_p \frac{\theta}{\omega l} \sin \omega t = GJ_p \frac{\theta}{l} \sqrt{\frac{Jl}{GJ_p}} \sin \omega t = \theta \sqrt{\frac{JGJ_p}{l}} \sin \omega t.$$

Крутящий момент также можно получить как момент сил инерции массы диска

$$M_x = -J\ddot{\varphi}(t) = J\omega^2 \varphi(t) = J\omega^2 \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t = \theta \sqrt{\frac{J}{\varphi_{11}}} \sin \omega t = \theta \sqrt{\frac{JGJ_p}{l}} \sin \omega t.$$

Теперь можно найти напряжение

$$\tau = \frac{M_x}{W_p} = \theta \sqrt{\frac{J_p}{W_p^2} \frac{GJ}{l}} = \theta \sqrt{\frac{d}{2} \frac{16}{\pi d^3} \frac{\pi D^4}{32} \gamma G \frac{\Delta}{k}} = \theta \frac{D^2}{2d} \sqrt{\gamma G \frac{\Delta}{l}}.$$

**Задача 10.6.** Двухопорная невесомая балка с сосредоточенной массой внезапно разгружается от момента  $M_B$ , который был приложен на правой опоре, рис. 10.7. Определить расчетное напряжение в балке.

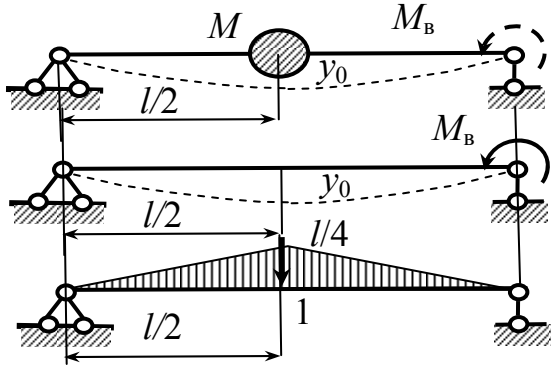


Рис. 10.7

**Решение.** Так как начальной скорости движения нет ( $v_0 = 0$ ), а есть начальное отклонения массы  $y_0$ , то по формулам (10.6 - 10.8) находим амплитуду колебаний, начальную фазу и циклическую частоту собственных поперечных колебаний балки:

$$C = y_0, \quad \mu = \pi/2, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}}$$

Следовательно, уравнение движения поперечных сечений балки при собственных колебаниях принимает вид

$$y(x, t) = y_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = y_0 \cos \omega t.$$

Начальный прогиб найдем по формуле Верещагина, перемножением эпюр, рис. 10.7

$$y_0 = \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{M_B}{2EJ} = \frac{M_B l^2}{16EJ}.$$

Единичный коэффициент вычисляется из единичной эпюры

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4EJ} = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Следовательно, уравнение перемещений груза и циклическая частота собственных колебаний принимают вид

$$y(t) = y_0 \cos \omega t = \frac{M_B l^2}{16EJ} \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{48EJ}{Ml^3}}.$$

Сила инерции колеблющейся массы

$$P_{\text{и}} = -M\ddot{y}(t) = M\omega^2 y(t) = 3 \frac{M_B}{l} \cos \omega t.$$

С учетом статического нагружения изгибающий момент в месте расположения массы будет равен

$$M_z\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{l}{4} \left( Mg + 3 \frac{M_B}{l} \cos \omega t \right) = \frac{Mgl}{4} \left( 1 + 3 \frac{M_B}{Mgl} \cos \omega t \right),$$

а напряжение  $\sigma = \frac{Mgl}{4W} \left( 1 + 3 \frac{M_B}{Mgl} \cos \omega t \right)$ .

### 10.1.2. Собственные затухающие колебания

В зависимости от формы и размеров колеблющейся массы, от скорости движения и физических свойств окружающей среды может возникать линейное или квадратичное сопротивление движению. Критерием оценки качества сопротивления движению является число Рейнольдса

$$Re = \frac{v}{\nu} l, \quad (10.12)$$

где  $v$  - скорость движения,  $l$  – габаритный размер груза,  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  - коэффициент

кинематической вязкости окружающей среды ( $\eta$  - коэффициент внутреннего трения,  $\rho$  – плотность окружающей среды).

Если  $Re \leq 1000$ , то проявляется линейное сопротивление движению, а при  $1000 \leq Re \leq 10^5$  проявляется квадратичный закон с коэффициентом скоростного напора  $C\rho v^2/2$  ( $C$  – постоянный коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы движущегося груза).

В случае сопротивления, пропорционального квадрату скорости, можно использовать квазилинейный коэффициент сопротивления движению  $k^*$ , который определяется энергетическим методом, когда работу силы квадратичного сопротивления  $kv^2$  и квазилинейного  $k^*v$  приравнивают за период колебания в установившемся режиме движения  $y(t) = C \sin \theta t$ .

С учетом скорости движения  $v(t) = C\theta \cos \theta t = C\theta \cos \frac{2\pi t}{T}$  находим работу  $A^*$  силы квазилинейного сопротивления

$$\begin{aligned} A^* &= \int_0^T k^* v \cdot v dt = 4 \int_0^{T/4} k^* C^2 \theta^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} dt = \\ &= 4k^* C^2 \theta^2 \frac{1}{2} \int_0^{T/4} \left( 1 + \cos \frac{4\pi}{T} \right) dt = k^* C^2 \theta^2 \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

здесь под интегралом  $k^* v$  – сила сопротивления, а  $v dt$  элементарный путь движения.

Аналогично находим работу силы квадратичного сопротивления движению

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T kv^2 \cdot |v| dt = 4 \int_0^{T/4} kC^3 \theta^3 \cos^3 \frac{2\pi}{T} dt = 4kC^3 \theta^3 \int_0^{T/4} \left( 1 - \sin^2 \frac{2\pi}{T} t \right) \cos \frac{2\pi}{T} t dt, \text{ т.е.} \\ A &= 4kC^3 \theta^3 \frac{T}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{T} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{2\pi t}{T} \right) \Big|_0^{T/4} = \frac{4}{3} kC^3 \theta^3 \frac{T}{\pi}. \end{aligned}$$

Из равенства работ  $A=A^*$  находим коэффициент квазилинейного сопротивления движению

$$k^* = \frac{8}{3\pi} C\theta k. \quad (10.13)$$

Таким образом, задача сводится к учету линейного сопротивления движению (10.1)

$$y(t) = \delta_{11}(P_u + P_c) = -\delta_{11}(M\ddot{y}(t) + ky(t)), \text{ т.е.}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}}$  – циклическая частота собственных незатухающих колебаний,

$\varepsilon = \frac{k}{2M}$  – коэффициент затухания колебаний.

Решение этого дифференциального уравнения ищем в виде  $y(t) = Ce^{int}$ , что приводит к характеристическому уравнению

$$n^2 - 2\varepsilon in - \omega^2 = 0,$$

корни которого  $n = \varepsilon i \pm \varphi$ , где

$$\varphi = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \omega\sqrt{1 - \varepsilon^2/\omega^2} \quad (10.14)$$

частота собственных затухающих колебаний.

Так находим уравнение движения груза

$$y(t) = (C_1 e^{\varphi it} + C_2 e^{-\varphi it}) e^{-\varepsilon t}$$

или

$$y(t) = C e^{-\varepsilon t} \sin(\varphi t + \mu). \quad (10.15)$$

Здесь  $C e^{-\varepsilon t}$  – амплитуда затухающих колебаний.

Дифференцируя (10.15), получим скорость движения колеблющегося груза при затухающих колебаниях  $v$

$$v(t) = -\varepsilon C e^{-\varepsilon t} \sin(\varphi t + \mu) + \varphi C e^{-\varepsilon t} \cos(\varphi t + \mu).$$

Из начальных условий  $y(0) = y_0$  и  $v(0) = v_0$  получаем систему однородных уравнений

$$y_0 = C \sin \mu,$$

$$v_0 = -\varepsilon C \sin \mu + \varphi C \cos \mu,$$

позволяющую определить начальную амплитуду  $C$  и начальную фазу  $\mu$ :

$$\frac{v_0}{y_0} = -\varepsilon + \varphi \operatorname{ctg} \mu, \quad \operatorname{ctg} \mu = \frac{v_0}{y_0 \omega} + \frac{\varepsilon}{\varphi}, \quad \sin \mu = \frac{y_0 \varphi}{\sqrt{y_0^2 \varphi^2 + (v_0 + \varepsilon y_0)^2}},$$

$$C = \frac{y_0}{\sin \mu} = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\varphi^2} \left(1 + \frac{\varepsilon y_0}{v_0}\right)^2}, \quad C \approx \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\varphi^2}}. \quad (9.16)$$

Так как  $\varepsilon \ll \omega$ , то согласно (9.14)  $\varphi \approx \omega$ , т.е. частота собственных затухающих колебаний практически такая же, как частота собственных незатухающих колебаний. По этой же причине значения  $C$  и  $\mu$  из (10.16) совпадают с (10.6), (10.7).

### 10.1.3. Вынужденные колебания без учета сопротивления движению

На невесомую упругую систему (балку) действует возмущающая нагрузка  $p(x, t)$ , рис 10.1. Уравнение движения груза (10.1) принимает вид:

$$y(t) = -\delta_{11} M \ddot{y}(t) + \int_0^t \delta_{1x} p(x, t) dx .$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение движения груза при вынужденных колебаниях от возмущающей нагрузки интенсивности  $p(x, t)$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = f(x, t), \quad (10.17)$$

где правая часть дифференциального уравнения  $f(x, t) = \omega^2 \int_0^t \delta_{1x} p(x, t) dx$  представляет некоторую функцию возмущающей нагрузки.

В случае отсутствия возмущающей нагрузки однородное уравнение собственных колебаний рассмотрено в (10.1).

Частное решение уравнения (10.13) ищем в форме собственных функций, т.е. по аналогии с (10.3)

$$w(t) = w_1(t) \cos \omega t + w_2(t) \sin \omega t \quad (10.18)$$

Дифференцируем (10.18)

$$\dot{w}(t) = \dot{w}_1(t) \cos \omega t - \omega w_1(t) \sin \omega t + \dot{w}_2(t) \sin \omega t + \omega w_2(t) \cos \omega t$$

и положим

$$\dot{w}_1(t) \cos \omega t + \dot{w}_2(t) \sin \omega t = 0. \quad (10.19)$$

Дифференцируя вторично, с учетом (10.19) получим

$$\ddot{w}(t) = -\omega \dot{w}_1(t) \sin \omega t - \omega^2 w_1(t) \cos \omega t + \omega \dot{w}_2(t) \cos \omega t - \omega^2 w_2(t) \sin \omega t$$

и подставляем  $\dot{w}(t)$  и  $w(t)$  в (10.17);

$$-\omega \dot{w}_1(t) \sin \omega t - \left[ \omega^2 w_1(t) \cos \omega t \right] + \omega \dot{w}_2(t) \cos \omega t - \left[ \omega^2 w_2(t) \sin \omega t \right] + \left[ \omega^2 w_1(t) \cos \omega t \right] + \left[ \omega^2 w_2(t) \sin \omega t \right] = f(x, t).$$

С учетом взаимно уничтожающихся слагаемых в квадратных скобках получаем

$$-\dot{w}_1(t) \sin \omega t + \dot{w}_2(t) \cos \omega t = f / \omega. \quad (10.20)$$

Решая систему уравнений (10.19) и (10.20), получим:

$$\dot{w}_1(t) = -\frac{f(x, t)}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{w}_2(t) = \frac{f(x, t)}{\omega} \cos \omega t.$$

Отсюда, интегрированием по временной переменной  $\tau$ , получаем:



$$w_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(x, \tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad w_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(x, \tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Теперь в соответствии с (10.18) находим частное решение дифференциального уравнения

$$w(t) = -\frac{\cos \omega t}{\omega} \int_0^t f(x, \tau) \sin \omega \tau d\tau + \frac{\sin \omega t}{\omega} \int_0^t f(x, \tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(x, \tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Следовательно, с учетом функции  $f(x, t)$  находим частное решение уравнения неоднородного уравнения

$$w(t) = \omega \int_0^l \delta_{1x} dx \int_0^t p(x, \tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (10.21)$$

В частном случае нагрузки неизменяющейся во времени, т.е.  $p(x)$  из (10.21) находим

$$w(t) = (1 - \cos \omega t) \int_0^l \delta_{1x} p(x) dx. \quad (10.22)$$

Но так как  $\delta_{1x}$  представляет перемещение точки приложения массы  $M$  от единичной силы, то интеграл  $\int_0^l \delta_{1x} p(x) dx = \Delta_{1p}$  определяет перемещение массы  $M$  от статического воздействия заданной нагрузки  $p(x)$ . Таким образом, уравнение движения груза представляет гармоническую функцию с амплитудным перемещением  $\Delta_{1p}$

$$w(t) = \Delta_{1p} (1 - \cos \omega t). \quad (10.23)$$

С учетом статического загрузения балки грузом  $Q$ , вызывающем перемещение  $f_c = \delta_{11} Q$ , получим полное перемещение

$$y = f + \Delta_{1p} (1 - \cos \omega t) = f \left[ 1 + \frac{\Delta_{1p}}{f} (1 - \cos \omega t) \right] = f k_d. \quad (9.24)$$

Здесь  $k_d$  - динамический коэффициент перемещения груза.

В случае приложения сосредоточенной силы  $P$ , когда статическое перемещение массы  $\Delta_{1p} = \delta_{1p} P$  известно,

$$k_d = 1 + \frac{\delta_{1p} P}{\delta_{11} Q} (1 - \cos \omega t). \quad (9.25)$$

При  $t = \pi / \omega$  получим наибольшее значение динамического коэффициента

$$k_d = 1 + \frac{\delta_{1p} P}{\delta_{11} Q}. \quad (10.26)$$

**Задача 10.7.** Невесомая консоль с сосредоточенной массой  $M$  внезапно загружается равномерно распределенным давлением интенсивностью  $p$  (допустим газа, но не нагрузкой), рис. 10.8. Вычислить расчетный изгибающий момент.

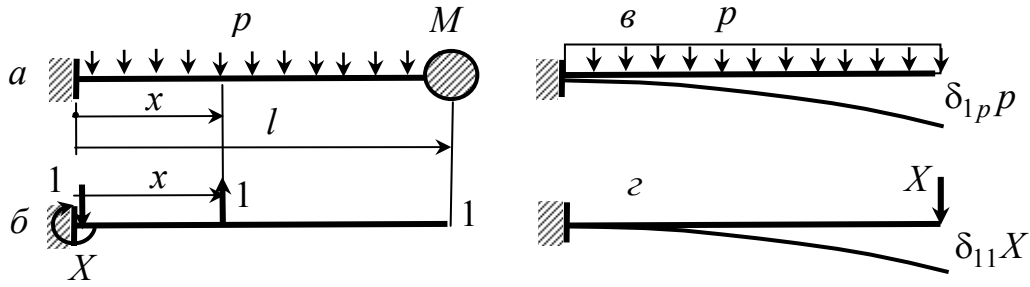


Рис. 10.8

**Решение.** Чтобы воспользоваться формулами (10.22), (10.23) нужно найти перемещение массы от давления  $p$ . Для этого по методу начальных параметров находим перемещение точки 1 от единичной силы, приложенной в произвольном сечении  $\delta_{1x}$ , рис.9.8, б

$$\delta_{1x} = \frac{xl^2}{2EJ} - \frac{l^3}{6EJ} + \frac{(l-x)^2}{6EJ} e(l-x). \quad (10.27)$$

Здесь  $e(l-x)$  - функция Хевисайда.

Теперь интегрированием по длине консоли находим прогиб от нагрузки  $p$  на конце консоли, т.е. в месте приложения сосредоточенной массы, рис. 10.8, в

$$\Delta_{1p} = -p \int_0^l \delta_{1x} dx = -p \left( \frac{xl^2}{2EJ} - \frac{l^3}{6EJ} + \frac{(l-x)^2 l}{6EJ} e(l-x) \right) \Bigg|_0^l = -\frac{pl^4}{8EJ}.$$

Динамическое перемещение массы  $M$  от воздействия давления  $p$  по (10.23)

$$w(t) = \Delta_{1p} (1 - \cos \omega t) = -\frac{pl^4}{8EJ} (1 - \cos \omega t).$$

Сила инерции колеблющейся массы

$$P_{и} = -M\ddot{w}(t) = -M\omega^2 \Delta_{1p} (1 - \cos \omega t).$$

Так как частота собственных колебаний  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}}$ , а единичное перемещение  $\delta_{11}$  согласно (10.27) для балки с единичной силой на свободном конце (рис.10.8, з)

при  $x = l$ ,  $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$ , то

$$P_{и} = -M \frac{1}{\delta_{11}M} \Delta_{1p} \cos \omega t = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \cos \omega t = \frac{3}{8} pl \cos \omega t.$$

С учетом статического нагружения консоли грузом  $Q=Mg$  получим уравнение движения массы

$$y(t) = -\delta_{11}Q + \Delta_{1p}(1 - \cos \omega t) = f \left( 1 - \frac{\Delta_{1p}}{f}(1 - \cos \omega t) \right) = -\frac{Ql^3}{3EJ} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{pl}{Q}(1 - \cos \omega t) \right)$$

и сосредоточенную силу на конце консоли

$$P(t) = Q + P_{\text{и}}(t) = Q \left( 1 - \frac{\delta_{1p}P}{\delta_{11}Q} \cos \omega t \right) = Q \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{pl}{Q} \cos \omega t \right).$$

По перемещению  $w(t) = \Delta_{1p}(1 - \cos \omega t)$  можно найти соответствующую динамическую силу

$$P_{\text{д}} = \frac{w(t)}{\delta_{11}} = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}(1 - \cos \omega t),$$

которая состоит из силы воздействия давления  $p$  на массу  $M$  (она находится из условия равенства прогибов  $\delta_{11}X = \delta_{1p}$ ), см. рис. 10.8, з, т.е. от силы  $X = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8pl}$  и силы инерции. Заметим, что динамическая сила состоит из двух слагаемых: от воздействия давления  $p$  и силы инерции массы  $M$

$$P_{\text{д}} = X + P_{\text{и}} = \frac{3}{8}pl - \frac{3}{8}pl \cos \omega t = \frac{3}{8}pl(1 - \cos \omega t).$$

Балку нужно рассчитывать на воздействие груза  $Q$ , давления  $p$  и силы инерции  $P_{\text{и}}$ . Расчетный изгибающий момент в заделке

$$M_z(l) = -Ql - \frac{pl^2}{2} + \frac{3}{8}pl^2 \cos \omega t = -Ql \left( 1 + \frac{pl}{2Q} - \frac{3pl}{8Q} \cos \omega t \right).$$

При  $t = \pi/\omega$  возникает наибольший момент

$$M_{\text{max}} = -Ql \left( 1 + \frac{pl}{2Q} + \frac{3pl}{8Q} \right) = -Ql \left( 1 + \frac{7pl}{8Q} \right).$$

**Задача 10.8.** К невесомой консоли с массой  $M$  внезапно прикладывается сила  $P$ , рис. 10.9. Найти расчетный изгибающий момент при  $a = l/2$ .

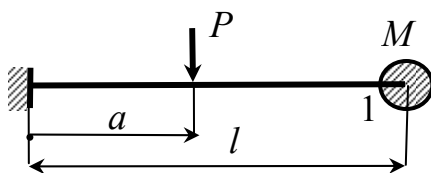


Рис. 10.9

**Решение.** Согласно (10.23) динамическое перемещение массы  $M$

$$w(t) = \Delta_{1p}(1 - \cos \omega t) = \delta_{1p}P(1 - \cos \omega t).$$

Единичное перемещение  $\delta_{1p}$  находится по

(10.27), положив  $x = a$

$$\delta_{1p} = -\frac{al^2}{2EJ} + \frac{l^3}{6EJ} - \frac{(l-a)^2}{6EJ}e(l-a).$$

При  $a = l/2$  получим  $\delta_{1p} = -\frac{5l^3}{48EJ}$ ,  $w(t) = -\frac{5l^3}{48EJ}(1 - \cos \omega t)$ .

При  $a = l$   $\delta_{11} = -\frac{l^3}{3EJ}$  и сила инерции колеблющейся массы

$$P_{\text{и}} = -M\omega^2 \Delta_{1p} \cos \omega t = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \cos \omega t = \frac{5}{16} Pl \cos \omega t.$$

Суммарный изгибающий момент от груза  $Q$ , силы  $P$  и силы инерции  $P_{\text{и}}$

$$M(l) = -Ql - Pa + \frac{5}{16} Pl \cos \omega t = -Ql \left( 1 + \frac{Pa}{Ql} - \frac{5}{16} \frac{P}{Q} \cos \omega t \right).$$

В частном случае, когда сила приложена к грузу,  $a = l$ , перемещение

$$w(t) = \delta_{11} P (1 - \cos \omega t), \text{ а сила инерции } P_{\text{и}} = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \cos \omega t = P \cos \omega t.$$

Динамическая нагрузка  $P_{\text{д}} = -P + P_{\text{и}} = -P + P \cos \omega t = P(1 - \cos \omega t)$ , при

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \text{ (полпериода) } P_{\text{д}} = 2P.$$

$$\text{Изгибающий момент в защемлении } M_z(l) = -Ql \left( 1 + \frac{P}{Q} (1 - \cos \omega t) \right).$$

$$\text{При } t = \frac{\pi}{\omega} \quad M_{\text{max}} = -Ql \left( 1 + 2 \frac{P}{Q} \right).$$

**Задача 10.9.** К двухопорной балке с массой  $M$  внезапно прикладывается сосредоточенный момент на правой опоре, рис. 10.10. Найти расчетный изгибающий момент.

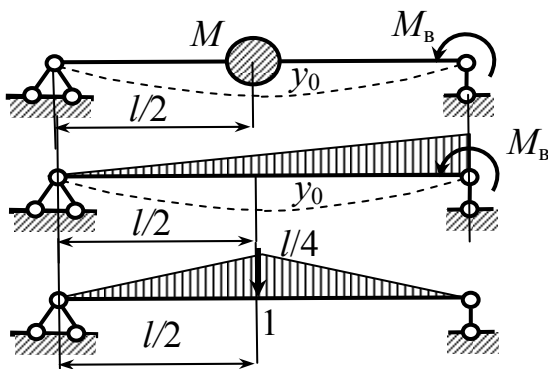


Рис. 10.10.

**Решение.** По правилу Верещагина находим перемещения

$$\delta_{1p} = -\frac{l}{4} \frac{l}{2} \frac{1}{2EJ} = -\frac{l^2}{16EJ}, \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Уравнение перемещений груза

$$w(t) = \delta_{1p} M_{\text{в}} (1 - \cos \omega t) = -\frac{M_{\text{в}} l^2}{16EJ} (1 - \cos \omega t).$$

Сила инерции массы

$$P_{\text{и}} = -M\omega^2 \delta_{1p} M_{\text{в}} \cos \omega t = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} M_{\text{в}} \cos \omega t = 3 \frac{M_{\text{в}}}{l} \cos \omega t.$$

Изгибающий момент посередине пролета

$$M_z(l/2) = \frac{Ql}{4} + \frac{M_{\text{в}} l}{2} - \frac{P_{\text{и}} l}{4} = \frac{Ql}{4} + \frac{M_{\text{в}} l}{2} - \frac{3}{4} M_{\text{в}} \cos \omega t.$$

#### 10.1.4. Ударное воздействие нагрузки

На невесомую упругую систему с сосредоточенной массой  $M_0$  падает неупругая масса  $M$ , ударяющая по упругой системе со скоростью  $v = \sqrt{2gh}$ ,

рис. 10.11. Найти динамический коэффициент.

**Решение.** Неупругая масса  $M$ , падая с высоты  $h$ , со скоростью  $v$  ударяет

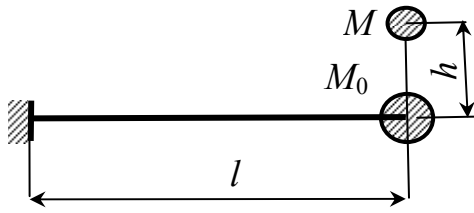


Рис. 10.11

по массе  $M_0$  и вместе с упругой системой совершает колебания. Так как падающая масса при ударе соединилась с упругой системой без отскоков, то в начале движения упругой системы нужно учитывать два фактора, вызывающих колебания:

- собственные колебания от внезапного сообщения упругой системе начальной скорости движения  $v_0$  и

- вынужденные колебания от внезапного приложения груза  $Q = Mg$ .

От внезапного сообщения скорости движения согласно формулам (10.6) - (10.8) с учетом  $y_0 = 0$  получаем уравнение движения конца консоли и силу инерции

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad P_{\text{и}} = \frac{v_0}{\omega \delta_{11}} \sin \omega t.$$

Здесь начальная скорость совместного движения масс найдена из закона сохранения количества движения  $v_0 = v \frac{M}{M + M_0}$ , а частота собственных колебаний

$$\text{масс (10.8)} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + M_0)}}.$$

Следовательно, сила инерции колеблющихся масс от внезапного сообщения системе начальной скорости движения

$$P_{\text{и}} = \frac{Mgv \sin \omega t}{(M + M_0)\delta_{11}} \sqrt{\frac{M + M_0}{g^2} \delta_{11}} = Q \sqrt{\frac{v^2}{\delta_{11}g^2(M + M_0)} \frac{M}{M}} \sin \omega t = Q \sqrt{\frac{v^2}{gf}} \eta \cdot \sin \omega t,$$

где:  $\eta = M/(M + M_0)$  – коэффициент передачи энергии,  $f = \delta_{11}Q$  – квазистатический прогиб от груза  $Q = Mg$ .

От внезапного приложения силы  $Q = Mg$  (см. задачу 10.7) находим:

$$w(t) = \delta_{11}Q(1 - \cos \omega t), \quad P(t) = \frac{w(t)}{\delta_{11}} = Q(1 - \cos \omega t).$$

Суммарная динамическая нагрузка от удара массы  $M$

$$P(t) = Q \left( 1 - \cos \omega t + \sqrt{\frac{v^2}{gf}} \eta \cdot \sin \omega t \right).$$

Для упрощения записи обозначим  $\sqrt{\frac{v^2}{gf}} \eta = \xi$ , тогда

$$P(t) = Q(1 - \cos \omega t + \xi \cdot \sin \omega t) = Qk_{\text{д}}.$$

Для вычисления наибольшего значения этой силы положим  $\frac{dP(t)}{dt} = 0$ , т.е.

$\sin \omega t + \xi \cos \omega t = 0$ , откуда находим:

$$\operatorname{tg} \omega t = -\xi, \quad \sin \omega t = \mp \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \cos \omega t = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Большой динамический коэффициент  $k_d$  будет при нижних знаках тригонометрических функций

$$k_d = 1 - \cos \omega t + \xi \cdot \sin \omega t = 1 + \frac{1+\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = 1 + \sqrt{1+\xi^2},$$

т.е. формула динамического коэффициента принимает вид

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{gf} \eta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \eta}. \quad (10.28)$$

Этот динамический коэффициент получен, как отношение динамической нагрузки к статической, т.е. по отношению к падающему грузу  $Q$ . Но динамическая нагрузка определена из уравнения перемещений

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + f(1 - \cos \omega t).$$

Следовательно, динамический коэффициент, вычисленный по перемещениям, будет таким же, как по отношению нагрузки (10.28).

На этот коэффициент нужно умножать значение падающего груза, т.е. балку нужно рассчитывать на статическое воздействие груза  $Q_0 = M_0 g$  и динамическую нагрузку  $Q k_d$ . Расчетный изгибающий момент в заделке

$$M_{\max} = -Q_0 l - Q l k_d = -Q_0 l \left( 1 + \frac{Q}{Q_0} k_d \right).$$

Из (10.28) видно, что при внезапном приложении нагрузки, когда  $h=0$  динамический коэффициент равен двум (наименьшее значение, см. задачу 10.7).

Из формулы динамического коэффициента (10.28) видно, что динамический эффект загрузки зависит от жесткости упругой системы (чем больше прогиб от статического нагружения  $f = \delta_{11} Q$ , тем меньше динамический коэффициент), и от значения массы упругой системы, учитывающейся коэффициентом передачи энергии  $\eta = M / (M + M_0)$  (чем больше масса упругой системы  $M_0$ , тем меньше динамический эффект удара).

При ударе упругой системе передается энергия  $K = \frac{1}{2} M v^2$ , потенциальная энергия упругой системы численно равна некоторой доли этой энергии

$$U = \frac{1}{2} (M + M_0) v_0^2 = \frac{1}{2} (M + M_0) v^2 \frac{M^2}{(M + M_0)^2} = \frac{1}{2} v^2 M \eta. \text{ Разность этих энергий}$$

$$\Delta K = K - U = \frac{1}{2} M v^2 (1 - \eta) = \frac{1}{2} M v^2 \frac{M_0}{M + M_0} = \frac{1}{2} M v^2 \eta_{\text{п}}. \text{ Здесь } \eta - \text{ коэффициент}$$

передачи энергии, а  $\eta_{\text{п}}$  - коэффициент потери энергии, разность этих энергий идет на соударение масс или на поковку изделия, расположенного между соуда-

ряющимися массами. Вот почему масса наковальни должна быть значительно больше ударяющей массы, вот зачем мяснику колода.

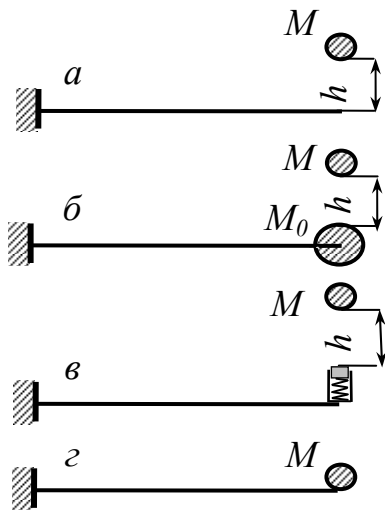


Рис. 10.12

**Задача 10.10.** На невесомую консоль с высоты  $h = 5f$  падает неупругая масса  $M$  ( $f$  - прогиб на конце консоли при условии статического приложения груза  $Q=Mg$ ), рис. 10.12. Вычислить динамический коэффициент при заданных условиях, при наличии на консоли сосредоточенной массы  $M_0=10M$  и при наличии амортизатора с коэффициентом жесткости  $c = 1/\delta_{11}$ .

**Решение.** При падении массы  $M$  на невесомую консоль (вариант рис. 10.12, а) динамический коэффициент вычисляется по формуле (10.28) при  $\eta=1$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{Ql^3} 3EJ} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5f}{f}} = 4,316$$

В варианте рис. 10.12, б нужно учесть коэффициент передачи энергии

$$\eta = \frac{M}{M + M_0} = \frac{1}{11}, \text{ при этом } k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5f}{f} \frac{1}{11}} = 2,382.$$

В третьем варианте (рис.10.12,в) при наличии амортизатора с коэффициентом жесткости  $\Delta = \frac{Q}{c} = Q\delta_{11} = \frac{Ql^3}{EJ} = f$ . Динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f + \Delta}} = 3,449.$$

В варианте внезапного приложения груза  $Q$  (рис. 10.12, г) коэффициент  $k_d = 2$ .

**Задача 10.11.** На невесомую раму с сосредоточенной массой  $M_0$  с некоторой высоты  $h$  падает неупругая масса  $M$ , рис.10.13. Найти расчетное напряжение при ударе.

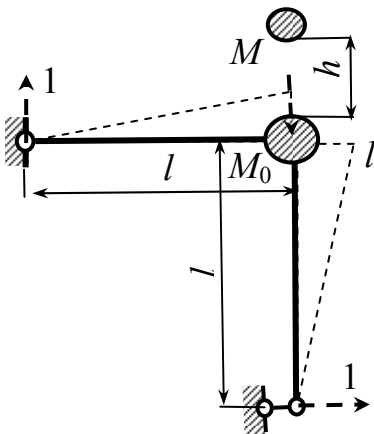


Рис. 10.13

**Решение.** Задача решается непосредственно по формуле (10.28)

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \eta}$$

Для вычисления статического перемещения узла рамы  $f$  от силы  $Q = Mg$  нужно в точке удара приложить единичную силу, построить эпюру от этой силы (на рис.10.13) эти построения показаны штриховыми линиями) и по правилу Верещагина перемножить площади этой эпюры, увеличенные в  $Q$  раз, на изгибающие моменты в сечениях, соответствующих положению центров тяжести тре-

угольников:  $f = 2 \frac{l^2}{2} \frac{2l}{3EJ}$ .

Коэффициент передачи энергии  $\eta = \frac{M}{M + M_0}$ . Динамический коэффициент

ент  $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{3hEJ}{l^3} \frac{M}{M + M_0}}$ . Изгибающий момент в узле рамы  $M_{\max} = Qlk_d$ .

Напряжение в узле ригеля  $\sigma = \left( \frac{Ql}{W} + \frac{Q}{F} \right) k_d$ .

Если в этой задаче раму повернуть под прямым углом, то получим боковой удар массы в горизонтальном направлении, когда внезапного приложения силы изгибающей раму нет, а это значит в динамическом коэффициенте (10.28) обе единицы нужно выбросить (см. задачу 10.4).

### 10.1.5. Вынужденные колебания при гармонических нагрузках

В случае гармонической нагрузки  $p(x, t) = p(x) \sin \theta t$  в формуле (10.21) нужно вычислить интеграл

$$w(t) = \omega \int_0^l \delta_{1x} p(x) dx \int_0^t \sin \theta \tau \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Но этого можно избежать следующим путем. Нам нужно найти частное решение уравнения

$$y(t) = \delta_{11} (Q - M\ddot{y}(x - k\dot{y}(x))) + \int_0^t \delta_{1x} p(x, t) dx,$$

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = g + \omega^2 \left( \int_0^t \delta_{1x} p(x, t) dx \right) \sin \theta t. \quad (10.29)$$

Так как  $\int_0^t \delta_{1x} p(x, t) dx = \Delta_{1p}$  представляет статическое перемещение массы от

возмущающей нагрузки, а  $\sin \theta t = \text{Jme}^{i\theta t}$ , то уравнение (10.29) представим в виде

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = g + \omega^2 \Delta_{1p} \text{Jme}^{i\theta t} = g + \omega^2 \Delta_{1p} \text{Jm}(\cos \theta t + i \sin \theta t). \quad (10.30)$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде аналогичном правой части уравнения  $w(t) = E + D \text{Jme}^{i\theta t}$  и подставим его в (10.30)

$$D \text{Jm}(-\theta^2 + \omega^2 + 2i\theta) e^{i\theta t} + \omega^2 E = g + \omega^2 \Delta_{1p} \text{Jme}^{i\theta t}.$$

Отсюда находим:

$$E = \frac{g}{\omega^2} = f, \quad D = \frac{1}{1 - \delta^2 + 2i\varepsilon\theta/\omega^2}, \quad \delta = \frac{\theta}{\omega}.$$

Обозначив  $\gamma = \varepsilon T$  (логарифмический декремент затухания колебаний) и  $T = 2\pi/\omega$  (период собственных незатухающих колебаний), получим амплитуду колебаний



$$D = \Delta_{1p} \frac{1}{(1 - \delta^2) + i \frac{\gamma \delta}{\pi}} = \Delta_{1p} \frac{(1 - \delta^2) - i \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)}{(1 - \delta^2)^2 + \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)^2}.$$

Так находим частное решение неоднородного уравнения (10.30)

$$\begin{aligned} w(t) &= f + \text{Jm}(\cos \theta t + i \sin \theta t) = \\ &= f + \text{Jm} \Delta_{1p} \frac{(1 - \delta^2) - i \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)}{(1 - \delta^2)^2 + \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)^2} (\cos \theta t + i \sin \theta t). \end{aligned}$$

Обозначим:  $\text{tgr} = -\frac{\gamma \delta}{\pi(1 - \delta^2)},$  (10.31)

$$\begin{aligned} \sin \rho &= -\frac{\gamma \delta / \pi}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)^2}}, \quad \cos \rho = -\frac{1 - \delta^2}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)^2}}, \\ v &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \left( \frac{\gamma \delta}{\pi} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

При этих обозначениях уравнение движения массы примет вид

$$w(t) = f + \Delta_{1p} v \sin(\theta t + \rho),$$

где:  $f$  – статический прогиб от груза  $Q = Mg$ ,  $\rho$  – сдвиг фазы вынужденных колебаний.

Подставляя сюда значения статических перемещений массы от возмущающей нагрузки  $\Delta_{1p} = \delta_{1p} P$  и  $f = \delta_{11} Q$  при значении  $\sin(\theta t + \rho) = 1$ , получим

$$w_{\max} = f \left( 1 + \frac{\delta_{1p} P}{\delta_{11} Q} v \right) = f k_d,$$

где  $k_d$  – динамический коэффициент при вынужденных колебаниях одномассовых систем

$$k_d = 1 + 1 + \frac{\delta_{1p} P}{\delta_{11} Q} v, \quad (10.33)$$

а  $v$  – коэффициент нарастания колебаний, без учета сопротивления движению он равен

$$v = \frac{1}{1 - \delta^2}. \quad (10.34)$$

Заметим, что до резонанса, когда  $\theta < \omega$ , т.е.  $\delta < 1$ , сдвиг фазы (10.31) отрицательный, т.е. движение груза происходит против направления возмущающей нагрузки. При резонансе, когда  $\delta = 1$  и  $\text{tgr} = \infty$ , получим  $v = \pi / \gamma$ , т.е. коэф-

коэффициент нарастания колебаний не бесконечно большой, как это следует из приближенного значения (10.34). Однако, вдали от резонанса при  $0,7 > \delta > 1,3$  можно пользоваться формулой (10.32), т.е. в формуле (10.32) вторым слагаемым под корнем можно пренебречь. При  $\delta > 1$  динамический коэффициент уменьшается и при  $\delta \rightarrow \infty$  коэффициент  $\nu \rightarrow 0$ , как это видно из (10.31), (10.32).

Вспомним шоферскую поговорку – «чем больше газу, тем меньше кочек», это значит, что на ухабистой дороге при большой скорости движения автомобиль движется практически плавно, лишь колеса автомобиля испытывают большие перемещения относительно кузова.

Например, будем раскачивать шарик, закрепленный на тонкой резиновой нити (практически невесомой по сравнению с весом шарика) путем перемещения руки, удерживающей нить, по вертикали с переменной возрастающей скоростью. До резонанса, когда частота возмущения меньше собственной (9.8), шарик продолжает перемещаться навстречу движению руки и лишь с некоторым опозданием меняет направление движения в сторону возмущающего перемещения. Чем ближе к резонансной частоте возмущения, тем короче опоздание; при резонансе движение шарика практически противоположно направлению перемещения руки, упругая нить теряет устойчивость. После непродолжительного беспорядочного движения шарик устойчиво движется по направлению перемещения руки, его амплитуда колебаний уменьшается до нуля, при этом лишь верхний конец нити следует колебательным перемещениям руки, а шарик висит неподвижно.

Несмотря на то, что аналогия с шариком подтверждает шоферский афоризм, не следует на автомобиле экспериментировать описанный опыт, если автомобиль с неразрезной подвеской передних колес.

При отсутствии сопротивления движению вывод расчетных зависимостей значительно упрощается. В этом случае в уравнение (10.17)

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \omega^2 \int_0^l \delta_{1x} p(x) dx \cdot \sin \theta t = \omega^2 \Delta_{1p} \sin \theta t$$

нужно подставить частное решение  $w(t) = D \sin \theta t$

$$D(-\theta^2 + \omega^2) = \omega^2 \Delta_{1p},$$

откуда находим амплитуду вынужденных колебаний при гармоническом возмущении

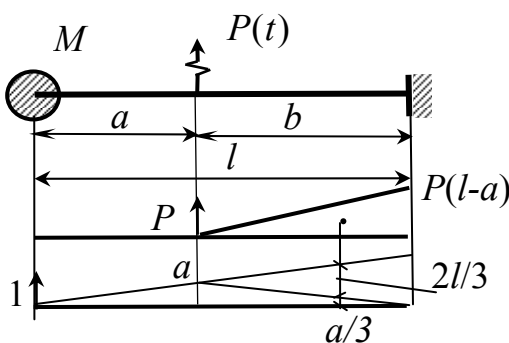
$$D = \frac{\Delta_{1p}}{1 - \theta^2 / \omega^2} = \nu \Delta_{1p}.$$

При этом частное решение, т.е. уравнение движения массы при гармоническом возмущении принимает вид

$$w(t) = \left( \nu \int \delta_{1x} p(x) dx \right) \sin \theta t = \nu \Delta_{1p} \sin \theta t. \quad (10.35)$$

**Задача 10.12.** Невесомая консоль с сосредоточенной массой  $M$  загружена возмущающей гармонической нагрузкой  $P(t) = P \sin \theta t$  с заданной амплитудой возмущения и частотой  $\theta$ , рис.10.14.

**Решение.** Прежде всего нужно составить уравнение движения массы  $M$  (10.35). Для этого по правилу Верещагина находим грузовой коэффициент



$$\Delta_{1p} = P \frac{(l-a)^2}{2EJ} \left( \frac{2l}{3} + \frac{a}{3} \right).$$

Для конкретности примем  $a=l/2$ , тогда  $\Delta_{1p} = \frac{5Pl^3}{48EJ}$  и уравнение

движения массы примет вид  $w(t) = \frac{5Pl^3}{48EJ} v \sin \theta t$ .

С учетом статического нагружения грузом  $Q = Mg$  получаем уравнение движения

$$y(t) = -\delta_{11}Q + w(t) = -\delta_{11}Q \left( 1 - \frac{\delta_{1p}P}{\delta_{11}Q} \sin \theta t \right) = f \left( 1 - \frac{5}{16} \frac{P}{Q} v \sin \theta t \right).$$

Здесь  $f = -\delta_{11}Q = -\frac{Ql^3}{EJ}$  - статический прогиб от груза  $Q$ .

Сила инерции колеблющейся массы  $P_{и} = -M\ddot{w}(t) = M\theta^2 w(t)$ .

Так как  $\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}M}$ , а  $M = \frac{1}{\delta_{11}\omega^2}$ , силу инерции получим в виде

$$P_{и} = -M\ddot{w}(t) = M\theta^2 w(t) = \frac{\theta^2}{\omega^2} \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} vP \sin \theta t = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v\delta^2 P \sin \theta t.$$

Изгибающий момент от возмущающей нагрузки

$$M_z(x) = P_{и}x + P(t)(x-a) = \left( Px \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v\delta^2 + P(x-a) \right) \sin \theta t.$$

С учетом статики

$$\sum M_z(x) = -Qx + M_z(x) = -Qx \left[ 1 - \left( \frac{\delta_{1p}P}{\delta_{11}Q} v\delta^2 + \frac{P}{Q} \frac{x-a}{x} \right) \sin \theta t \right].$$

При  $t = \frac{3\pi}{2\theta}$  и  $a=0$   $\sum M_z(x) = -Qx \left[ 1 - \left( \frac{P}{Q} (1 + v\delta^2) \right) \right]$ .

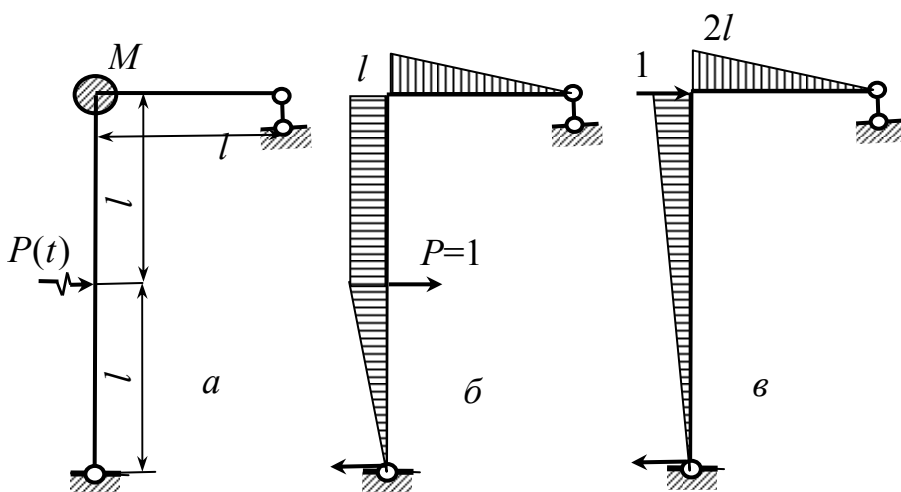


Рис. 10.15, а, б, в

**Задача 10.13.** На невесомую раму с сосредоточенной массой действует возмущающая нагрузка  $P(t) = P \sin \theta t$ , рис. 10.15, а. Построить эпюру расчетных изгибающих моментов.

**Решение.** Согласно (10.35) уравнение вынужденных горизонтальных колебаний груза будет иметь вид

$$w(t) = v\delta_{1p}P \sin \theta t,$$

$$\text{а сила инерции } P_{\text{и}} = -M\ddot{w}(t) = M\theta^2 w(t) = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v\delta^2 P \sin \theta t.$$

Единичные коэффициенты вычисляем по правилу Верещагина с использованием эпюр рис 10.15, б, в:

$$EJ\delta_{11} = \frac{2}{3} 2l \left( \frac{2l \cdot 2l}{2} + \frac{2l \cdot l}{2} \right) = 4l^3,$$

$$EJ\delta_{1p} = \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l + l^2 \frac{3}{2} l + \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} 2l = \frac{5}{2} l^3.$$

Сила инерции равна

$$P_{\text{и}} = \frac{5}{8} v\delta^2 P \sin \theta t.$$

Для конкретности примем:  $\theta = \frac{\omega}{2}$ , т.е.  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $v = \frac{1}{1-\delta^2} = \frac{4}{3}$ ,  $= \frac{5}{24} P \sin \theta t$ .

Для построения эпюры изгибающих моментов единичную эпюру 10.15 в нужно умножить на  $P_{\text{и}}$  и сложить с эпюрой грузовой (эпюру рис.10.15 б умножить на  $P$ ), рис. 10.15 г.

В случае горизонтального расположения рамы к эпюре рис. 10.15 в нужно прибавить эпюру от статического нагружения рамы грузом  $Q$ , которая образуется путем умножения единичной эпюры рис.10.15 б на силу  $Q$ . Для случая, когда  $Q = 2P$  такая суммарная эпюра показана на рис 10.15 д.

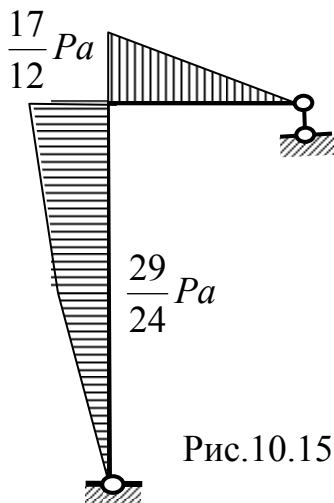


Рис.10.15, г

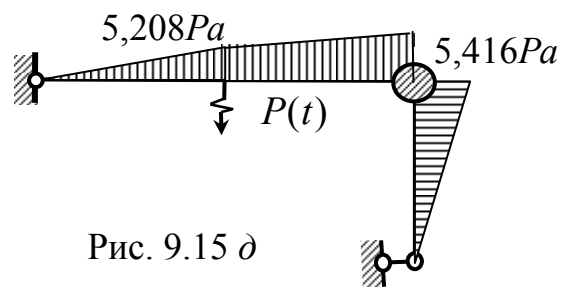


Рис. 9.15 д

### 10.1.6. Метод начальных параметров в вынужденных колебаниях систем с одной степенью свободы

Задачи на вынужденные колебания можно решать методом начальных параметров на квазистатическое нагружение системы амплитудными значениями возмущающей нагрузки.

**Задача 10.14.** Решить задачу 10.12 методом начальных параметров.

**Решение.** В начале координат (на левом конце балки) действует сила инерции

$$P_0(t) = -M\ddot{y}(t) = M\theta^2 y_0 \sin \theta t,$$

а в сечении  $x=a$  действует возмущающая сила  $P(t) = P \sin \theta t$ .

Составляем уравнение перемещений метода начальных параметров

$$y(x) = y_0 + y_0'x + \frac{P_0 x^3}{6EJ} + \frac{P(x-a)^3}{6EJ} e(x-a),$$

где  $e(x-a)$  - единичная функция, указывающая на то, что последнее слагаемое учитывается только при  $x \geq a$ .

С учетом значения  $P_0$  уравнения изогнутой оси и углов поворота принимают вид:

$$y(x) = y_0 \left( 1 + M\theta^2 \frac{x^3}{6EJ} \right) + y_0'x + \frac{P(x-a)^3}{6EJ},$$

$$y'(x) = y_0 M\theta^2 \frac{x^2}{2EJ} + y_0' + \frac{P(x-a)^2}{2EJ}.$$

Из условий  $y(l) = y'(l) = 0$  получаем систему уравнений:

$$y_0 \left( 1 + M\theta^2 \frac{l^3}{6EJ} \right) + y_0' l = -\frac{Pb^3}{6EJ},$$

(10.36)

$$y_0 M\theta^2 \frac{l^2}{2EJ} + y_0' = -\frac{Pb^2}{2EJ}.$$

Главный определитель этой системы

$$Det = 1 + M\theta^2 \frac{l^3}{6EJ} - M\theta^2 \frac{l^3}{2EJ} = 1 - M\theta^2 \frac{l^3}{3EJ}.$$

Отсюда, положив  $Det=0$  с заменой  $\theta$  на  $\omega$ , получим частоту собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{Ml^3}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}}.$$

При этом определитель системы уравнений можно представить в виде

$$Det = 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} = 1 - \delta^2 = \frac{1}{v}, \quad \delta = \frac{\theta}{\omega},$$

где  $v = \frac{1}{1 - \delta^2}$  - коэффициент нарастания колебаний.

Теперь систему уравнений (9.36) можно представить в следующем виде:

$$y_0 \left( 1 + \frac{\delta^2}{2} \right) + y_0' l = -\frac{Pb^3}{6EJ},$$

$$y_0 \frac{3\delta^2}{2l} + y_0' = -\frac{Pb^2}{2EJ}.$$

Отсюда находим начальные параметры:

$$y_0 = \left( -\frac{Pb^3}{6EJ} + \frac{Pb^2l}{2EJ} \right) v = \delta_{1p} P v,$$

$$y'_0 = \left[ -\frac{Pb^2}{2EJ} \left( 1 + \frac{\delta^2}{2} \right) + \frac{Pb^3}{6EJ} \frac{3\delta^2}{2l} \right] v = -\frac{Pb^2}{2EJ} \left( 1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2 b}{2l} \right) v.$$

Положим  $b = \frac{l}{2}$ , тогда начальные параметры примут вид:

$$y_0 = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ} v = \delta_{1p} P v,$$

$$y'_0 = -\frac{Pl^2}{8EJ} \left( 1 + \frac{\delta^2}{4} \right) v = \theta_{1p} \left( 1 + \frac{\delta^2}{4} \right) v.$$

С учетом статического нагружения грузом  $Q = Mg$ , будем иметь:

$$y_0 = f + \delta_{1p} P(t) v = f \left( 1 + \frac{\delta_{1p} P}{\delta_{11} Q} v \sin \theta t \right),$$

$$y'_0 = -\frac{Ql^2}{2EJ} - \frac{P(t)l^2}{8EJ} \left( 1 + \frac{\delta^2}{4} \right) v = \alpha \left[ 1 + \frac{\delta_{1p} P}{\delta_{11} Q} \left( 1 + \frac{\delta^2}{4} \right) v \sin \theta t \right].$$

Динамическая сила в месте приложения массы  $M$  может быть найдено по прогибу

$$P_d = \frac{y_0}{\delta_{11}} = \frac{y_{1p}}{\delta_{11}} P v \sin \theta t.$$

Она состоит из силы инерции массы  $M$

$$P_{и} = -M\ddot{y}_0 = M\theta^2 y_0 = M\theta^2 \delta_{1p} P v \sin \theta t = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v \delta^2 P \sin \theta t$$

и силы воздействия возмущающей нагрузки на массу  $M$

$$P_1 = \frac{y_1(P)}{\delta_{11}} = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} P \sin \theta t,$$

$$\text{т.е. } P_d = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} P (1 + v\delta^2) \sin \theta t = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} P \left( 1 + \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} v\delta^2 \right) \sin \theta t = \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v P \sin \theta t.$$

Но при вычислении изгибающего момента нужно учитывать силу инерции

$$M_z(x) = P_{и}x + P(x - a) = Px \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v\delta^2 + P(x - a) = Px \left( \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} v\delta^2 + \frac{x - a}{x} \right).$$

Для сравнения, решение по готовой формуле (10.35) приводит к виду

$$w(t) = v\delta_{1p} P \sin \theta t.$$

Коэффициент  $\Delta_{1p}$  вычисляется по правилу Верещагина или методом начальных

параметров  $\delta_{1p} = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$ .

**Задача 10. 15.** Двухопорная невесомая балка с сосредоточенной массой  $M$  посередине пролета испытывает воздействие гармонической возмущающей силы  $P(t) = P \sin \theta t$ , рис. 10.16. Вычислить расчетные силовые и деформационные факторы.

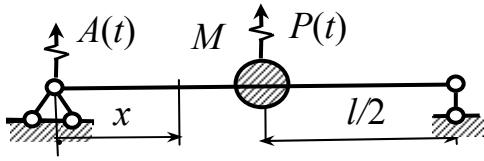


Рис. 10.16

**Решение.** Используя метод начальных параметров, составляем уравнение изогнутой оси балки в установившемся режиме колебаний

$$y(x) = y(x) \sin \theta t, \quad y(x) = y'_0 x + \frac{Ax^3}{6EJ}.$$

Отсюда дифференцированием находим:

$$y'_0(x) = y'_0 + \frac{Ax^2}{2EJ}, \quad M_z(x) = Ax, \quad Q(x) = A.$$

Сила инерции колеблющейся массы

$$P_{ин} = -M\ddot{y}(l/2) = M\theta^2 y(l/2) = M\theta^2 \left( y'_0 \frac{l}{2} + \frac{Al^3}{48EJ} \right)$$

Динамические начальные параметры находим из условий

$$y'(l/2) = 0, \quad Q(l/2) = A = -\frac{P}{2} - \frac{P_{ин}}{2}:$$

$$y'_0 + \frac{Ax^2}{8EJ} = 0, \quad A = -\frac{P}{2} - \frac{P_{ин}}{2} = -\frac{P}{2} - M\theta^2 \left( y'_0 \frac{l}{4} + \frac{Al^3}{96EJ} \right).$$

Отсюда получаем систему неоднородных уравнений:

$$y'_0 + \frac{Al^2}{8EJ} = 0,$$

$$y'_0 M\theta^2 \frac{l}{4} + A \left( 1 + M\theta^2 \frac{l^3}{96EJ} \right) = \frac{P}{2}.$$

Главный определитель этой системы

$$Det = 1 + M\theta^2 \frac{l^3}{96EJ} - M\theta^2 \frac{l^3}{32EJ} = 1 - M\theta^2 \frac{l^3}{48EJ}.$$

Если этот определитель приравнять нулю, заменив частоту возмущения  $\theta$  на собственную частоту  $\omega$ , то получим формулу частоты собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{Ml^3}}.$$

Таким путем определитель можно представить в виде

$$Det = 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} = 1 - \delta^2 = \frac{1}{v},$$

где  $\delta = \theta/\omega$  - отношение частоты возмущения к собственной частоте, а  $v$  - коэффициент нарастания колебаний.

Из системы неоднородных уравнений находим начальные параметры:

$$y'_0 = \frac{Pl^2}{16EJ} v, \quad A = -\frac{P}{2} v.$$

Динамический прогиб посередине пролета

$$y(l/2) = \frac{Pl^2}{16EJ} v \frac{l}{2} - \frac{P}{2} v \frac{l^3}{48EJ} = v \frac{Pl^3}{48EJ} = v\delta_{11}P.$$

С учетом статического нагружения прогиб посередине пролета будет равен

$$y_{\max} = \frac{Ql^3}{48EJ} + \frac{Pl^3}{48EJ} v = \frac{Ql^3}{48EJ} \left(1 + \frac{P}{Q} v\right) = fk_{\text{д}}.$$

Динамическая сила может быть получена через прогиб

$$P_{\text{д}} = \frac{y(t, l/2)}{\delta_{11}} = vP \sin \theta t.$$

Она состоит из силы инерции массы  $M$

$$P_{\text{и}} = M\theta^2 \delta_{11} P \sin \theta t = v\delta^2 P \sin \theta t$$

и приложенной возмущающей силы, т.е.

$$P_{\text{д}} = P(1 + v\delta^2) \sin \theta t = P \left(1 + \frac{\delta^2}{1 - \delta^2}\right) \sin \theta t = Pv \sin \theta t.$$

Изгибающий момент с учетом статического нагружения

$$M_{\max} = \frac{Ql}{4} + \frac{Pv}{2} \frac{l}{2} = \frac{Ql}{4} \left(1 + \frac{P}{Q} v\right) = M_{\text{ст}} k_{\text{д}}.$$



## 10.2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Примером такой системы может быть невесомая балка с двумя сосредоточенными массами  $M_1$  и  $M_2$ , рис. 10.17.

Уравнения перемещения масс имеют вид:

$$y_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2, \quad y_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2. \quad (10.37)$$

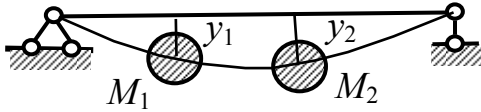


Рис.10.17

В случае собственных колебаний нагрузками на балку будут силы инерции масс  $P_1 = -M_1\ddot{y}_1$  и  $P_2 = -M_2\ddot{y}_2$ , а уравнения перемещений известны в виде:

$$y_1 = A \sin(\omega t + \mu), \quad y_2 = B \sin(\omega t + \mu).$$

Подставляя силы инерции  $P_1 = M_1\omega^2 A \sin(\omega t + \mu)$  и  $P_2 = M_2\omega^2 B \sin(\omega t + \mu)$  в уравнения перемещений (9.17), получим систему амплитудных уравнений

$$A(1 - \delta_{11}\omega^2 M_1) - B\delta_{12}\omega^2 M_2 = 0, \quad (10.38)$$

$$-A\delta_{21}\omega^2 M_1 + B(1 - \delta_{22}\omega^2 M_2) = 0.$$

Приравнявая определитель этой системы нулю, получаем биквадратное частотное уравнение

$$\omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)M_1M_2 - \omega^2(\delta_{11}M_1 + \delta_{22}M_2) + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(\delta_{11}M_1 + \delta_{22}M_2) \mp \sqrt{(\delta_{11}M_1 + \delta_{22}M_2)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)M_1M_2}}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)M_1M_2} \quad (10.39)$$

определяют две частоты собственных колебаний – меньшую (первую)  $\omega_1$  и большую (вторую)  $\omega_2$ .

Из системы уравнений (9.38) следует, что между амплитудами колебаний существует определенная зависимость

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - \delta_{11}\omega^2 M_1}{\delta_{12}\omega^2 M_2} = k. \quad (10.40)$$

Частоте  $\omega_1$  соответствует коэффициент  $k_1 = B_1 / A_1$ , а частоте  $\omega_2$  -  $k_2 = B_2 / A_2$ . Так можно найти уравнения движения масс и их скоростей:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \mu_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \mu_2), \\ v_1 &= A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \mu_1) + A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \mu_2), \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= k_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \mu_1) + k_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \mu_2), \\ v_2 &= A_1 \omega_1 k_1 \cos(\omega_1 t + \mu_1) + A_2 \omega_2 k_2 \cos(\omega_2 t + \mu_2), \end{aligned}$$

В этой системе четыре неизвестных – две амплитуды и две начальные фазы. Умножая первое и второе уравнения системы (9.41) на  $k_2$  и вычитая из них третье и четвертое уравнения при условии  $y_1(0) = y_1^0$ ,  $v_1(0) = v_1^0$ ,

$y_2(0) = y_2^0$ ,  $v_2(0) = v_2^0$ , находим:

$$A_1 = \frac{1}{\omega_1(k_2 - k_1)} \sqrt{(y_1^0 k_2 - y_2^0)^2 \omega_1^2 + (v_1^0 k_2 - v_2^0)^2},$$

$$\mu_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_1^0 k_2 - y_2^0}{v_1^0 k_2 - v_2^0} \omega_1,$$

$$A_2 = \frac{1}{\omega_2(k_1 - k_2)} \sqrt{(y_1^0 k_1 - y_2^0)^2 \omega_2^2 + (v_1^0 k_1 - v_2^0)^2},$$

$$\mu_2 = \operatorname{arctg} \frac{y_1^0 k_1 - y_2^0}{v_1^0 k_1 - v_2^0} \omega_2.$$
(10.42)

По амплитудам и частотам колебаний можно вычислить силы инерции и выполнить расчет прочности балки.

Положения масс в произвольное время определяет форму изогнутой оси балки, непрерывно изменяющуюся по своему виду в различное время. Но эта форма движения определяется двумя частотами колебаний, каждой из которых соответствует своя форма. Начальными условиями всегда можно получить такую форму колебаний, при которой перемещения всех масс соответствуют определенной частоте колебаний рассматриваемой упругой системы. Количество таких форм колебаний будет равно количеству частот колебаний, т.е. количеству степеней свободы и называются они главными или нормальными формами колебаний.

В частном случае симметричной системы, когда  $M_1 = M_2 = M$  при симметричном расположении масс из (10.39) найдем два положительных корня, соответствующие двум частотам колебаний

$$\omega_1^2 = \frac{1}{(\delta_{11} + \delta_{12})M}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{(\delta_{11} - \delta_{12})M}.$$

Этим частотам соответствуют коэффициенты  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -1$ , определяющие две формы колебаний - симметричную с низшей частотой колебаний  $\omega_1$  и кососимметричную с частотой  $\omega_2$ , рис. 10.18:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \mu_1) + A_1 \sin(\omega_2 t + \mu_2),$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_1 t + \mu_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \mu_2).$$

Силы инерции масс:

$$P_1 = -M_1 \ddot{y}_1 = M_1 \omega_1^2 A_1 \left( \sin(\omega_1 t + \mu_1) + \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \sin(\omega_2 t + \mu_2) \right),$$

$$P_2 = -M_2 \ddot{y}_2 = M_2 \omega_1^2 A_1 \left( \sin(\omega_1 t + \mu_1) - \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \sin(\omega_2 t + \mu_2) \right).$$

В случае вынужденных колебаний от заданных гармонических нагрузок  $\vec{P}_1(t) = \vec{P}_1 \sin \theta t$ ,  $\vec{P}_2(t) = \vec{P}_2 \sin \theta t$  система уравнений (10.38) без учета сопротивления движению будет неоднородной:

$$A(1 - \delta_{11}\theta^2 M_1) - B\delta_{12}\theta^2 M_2 = \delta_{11}\ddot{P}_1 + \delta_{12}\ddot{P}_2,$$

$$-A\delta_{21}\theta^2 M_1 + B(1 - \delta_{22}\theta^2 M_2) = \delta_{21}\ddot{P}_1 + \delta_{22}\ddot{P}_2.$$

Отсюда найдем амплитуды вынужденных колебаний:

$$A = \left[ (1 - \delta_{22}M_1\theta^2)(\delta_{11}\ddot{P}_1 + \delta_{12}\ddot{P}_2) + \delta_{12}M_2\theta^2(\delta_{21}\ddot{P}_1 + \delta_{22}\ddot{P}_2) \right] / Det,$$

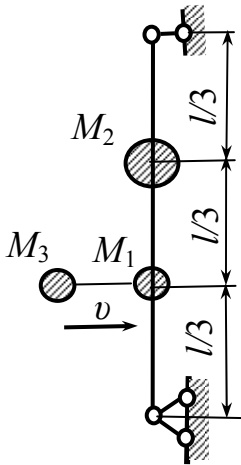
$$B = \left[ (1 - \delta_{11}M_1\theta^2)(\delta_{21}\ddot{P}_1 + \delta_{22}\ddot{P}_2) + \delta_{12}M_1\theta^2(\delta_{11}\ddot{P}_1 + \delta_{12}\ddot{P}_2) \right] / Det.$$

Здесь главный определитель системы уравнений

$$Det = \theta^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)M_1M_2 - \theta^2(\delta_{11}M_1 + \delta_{22}M_2) + 1.$$

**Задача 10.16.** По невесомой вертикальной балке с массами  $M_1=0,5M$  и  $M_2=M=1000$  кг ударяет масса  $M_3=0,5M$  со скоростью  $v$  и удерживается на балке при колебаниях, рис.10.19. Вычислить расчетный изгибающий момент при условии  $EJ=5$  МНм<sup>2</sup>,  $l=3$  м.

**Решение.** Единичные коэффициенты можно найти по правилу Верещагина:



$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4}{243} \frac{l^3}{EJ}, \quad \delta_{12} = \frac{7}{486} \frac{l^3}{EJ}$$

После удара в точках загрузки будут приложены одинаковые массы  $M_1+M_3=M$  и  $M_2=M$ .

Квадраты собственных частот:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{M(\delta_{11} + \delta_{12})} = \frac{486}{15} \frac{EJ}{Ml^3},$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{M(\delta_{11} - \delta_{12})} = \frac{486EJ}{Ml^3},$$

Рис.10.19

Отсюда при заданных параметрах балки находим:  $\omega_1=77,46$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2=300$  с<sup>-1</sup>.

Амплитудные коэффициенты:  $k_1=1$ ,  $k_2=-1$ .

В начале колебаний при  $t=0$   $y_1^0 = y_2^0 = 0$ ,  $v_2^0 = 0$ ,  $v_1^0 = v \frac{M_3}{M_1 + M_3} = \frac{v}{2}$

По формулам (10.42)  $\mu_1=\mu_2=0$ , а амплитуды:

$$A_1 = \frac{v_1^0 k_2}{\omega_1(k_2 - k_1)} = \frac{v}{4\omega_1}, \quad A_2 = \frac{v_1^0 k_1}{\omega_2(k_1 - k_2)} = \frac{v}{4\omega_2}.$$

Уравнения движения грузов и скорость движения:

$$y_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t,$$

$$y_1 = \frac{v}{4} \sqrt{\frac{Ml^3}{486EJ}} (\sqrt{15} \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t),$$

$$v_1 = \omega_1 A_1 \cos \omega_1 t + \omega_2 A_2 \cos \omega_2 t.$$

Приравняв скорость  $v_1$  нулю, получим трансцендентное уравнение для вычисления времени, при котором перемещение  $y_1$ , будет максимальным

$$\cos \omega_1 t + \cos \sqrt{15} \omega_1 t = 0.$$

Отсюда находим  $t=8,323 \cdot 10^{-3}$  с. При этом перемещение в точке 1 будет равно

$$y_1 = \frac{v}{4} \sqrt{\frac{Ml^3}{486EJ}} (\sqrt{15} \sin 0,6447 + \sin 2,4969) = 0,732v \sqrt{\frac{Ml^3}{486EJ}},$$

А в точке 2

$$y_2 = k_1 A_1 \sin \omega_1 t + k_2 A_2 \sin \omega_2 t = \frac{v}{4} \sqrt{\frac{Ml^3}{486EJ}} (\sqrt{15} \sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t) = 0,432v \sqrt{\frac{Ml^3}{486EJ}}.$$

Силы инерции в этих сечениях:

$$\vec{P}_1 = M\omega_1^2 A_1 (\sin 0,6447 + \sqrt{15} \sin 2,4969) = \frac{486 EJ}{15 l^3} \frac{\sqrt{15}}{4} v \sqrt{\frac{Ml^3}{486EJ}} 2,928 = 4,167v \sqrt{\frac{MEJ}{l^3}},$$

$$\vec{P}_2 = M\omega_1^2 A_2 (\sin \omega_1 t - \sqrt{15} \sin \omega_2 t) = -2,457v \sqrt{\frac{MEJ}{l^3}}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении на третьем участке

$$M_z(x) = Ax + \vec{P}_1 \left( x - \frac{l}{3} \right) + \vec{P}_2 \left( x - \frac{2l}{3} \right),$$

при  $x=l/3$

$$M_z \left( \frac{l}{3} \right) = \frac{l}{9} (2\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \frac{v}{9} \sqrt{\frac{MEJ}{l}} (2 \cdot 4,167 - 2,457) = 26,7 \cdot 10^3 v, \text{ Нм.}$$

Напряжение (при  $W=250 \text{ см}^3$ ) составляет  $\sigma = \frac{26,7 \cdot 10^3}{W} v = 106,6v \text{ МПа.}$

Таким же путем можно найти напряжение в сечении 2.

Из условия прочности сечения 1  $\sigma \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  можно найти допускаемую скорость удара  $v=1,5 \text{ м/с.}$

## 10.3. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 10.3.1. Поперечные колебания систем с распределенными параметрами

Невесомые упругие системы с бесконечным количеством сосредоточенных масс или системы с массой, распределенной по известному закону называются системами с распределенными параметрами. Ограничимся рассмотрением систем с равномерно распределенной массой интенсивностью  $m$ , рис. 10.20.

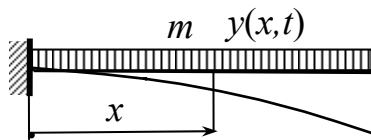


Рис. 10.20

Используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EJ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M(x,t)$$

и дважды его продифференцируем

$$EJ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t). \quad (10.43)$$

Здесь  $q(x,t) = -m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + p(x,t)$  - интенсивность сил инерции и возмущающей нагрузки.

Если возмущающей нагрузки нет, когда  $p(x,t)=0$ , то получим собственные колебания.

#### 10.3.1.1. Собственные поперечные колебания весоных балок

Дифференциальное уравнение движения сечений балки в этом случае будет иметь вид

$$EJ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \quad (10.44)$$

Решение этого уравнения ищем методом Фурье, т.е. функцию двух переменных представляем в виде произведения двух функций  $y(x,t) = y(x)T(t)$ , что соответствует стоячим волнам, когда отношение произвольного перемещения в любом сечении балки к перемещению в этом же сечении, но в зафиксированное время, будет зависеть лишь от времени, рис. 10.21

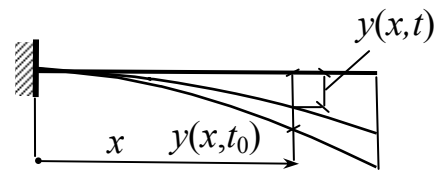


Рис. 10.21

$$\frac{y(x,t)}{y(x,t_0)} = T(t), \quad \text{т.е. } y(x,t) = y(x)T(t).$$

Подставляем это решение в (9.44)

$$\frac{EJ}{m} \frac{d^4 y(x)}{dx^4} T(t) = -\frac{d^2 T(t)}{dt^2} y(x).$$

Разделим это равенство на произведение  $y(x)T(t)$

$$\frac{EJ}{m} \frac{y^{IV}(x)}{y(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}. \quad (10.45)$$

В этом отношении левая часть, содержащая функции  $x$ , не зависит от  $t$  и равна правой части не зависящей от  $x$ . Это значит, что такое отношение функций представляет постоянную величину, которую обозначим  $\omega^2$

$$\frac{EJ}{m} \frac{y^{IV}(x)}{y(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2.$$

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Решение дифференциального уравнения  $\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$  уже известно из предыдущих разделов  $T(t) = C \sin(\omega t + \mu)$ , оно определяет гармоническую форму колебаний.

Решение второго уравнения

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - k^4 y(x) = 0, \quad k^4 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad (10.46)$$

ищем в виде  $y(x) = C_1 e^{nx}$ , что приводит к характеристическому уравнению

$n^4 - k^4 = 0$ , корни которого определяют волновые числа  $n_{1,2} = \pm k$ ,  $n_{3,4} = \pm ki$  и частоты колебаний (10.46).

Так получаем уравнение изогнутой оси балки в виде

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{kix} + C_4 e^{-kix}$$

или

$$y(x) = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx + C \cos kx + D \sin kx. \quad (10.47)$$

В виду линейности исходного дифференциального уравнения его удовлетворяет бесконечная сумма решений (10.47), соответствующих форм и частот колебаний т.е.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \operatorname{ch} k_i x + B_i \operatorname{sh} k_i x + C_i \cos k_i x + D_i \sin k_i x) \sin(\omega_i t + \mu_i). \quad (10.48)$$

### 10.3.1.2. Определение спектра частот собственных колебаний

Для вычисления спектра частот собственных колебаний достаточно рассмотреть уравнение изогнутой оси балки (10.47), подчинив его условиям закрепления балки на опорах. Из этих условий образуется система однородных уравнений, определитель которой приравняется нулю. Это приведет к трансцендентному уравнению, собственные числа которого дадут возможность найти волновые числа  $k$ , а зная эти числа по (10.46) можно вычислить спектр частот собственных колебаний.

Эта последовательность решения задач представляет **алгоритм 6** по вычислению спектра собственных частот поперечных колебаний однопролетных балок с распределенными параметрами.

**Задача 10.17.** Двухопорная балка с распределенной массой  $m$  испытывает собственные колебания, рис. 10.22. Найти частоты собственных колебаний.

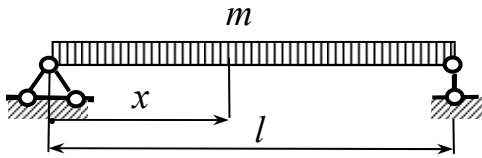


Рис. 10.22

**Решение.** Используем уравнение (10.47) и дважды его проинтегрируем:

$$y(x) = Achkx + Bshkx + C \cos kx + D \sin kx,$$

$$\frac{y'(x)}{k} = Ashkx + Bchkx - C \sin kx + D \cos kx,$$

$$\frac{y''(x)}{k^2} = Achkx + Bshkx + C \cos kx - D \sin kx.$$

Из условий закрепления балки на левой опоре  $y(0) = y''(0) = 0$  получаем систему уравнений:

$$Bsh\lambda + D\sin\lambda = 0, \quad Bsh\lambda - D\sin\lambda = 0, \quad \lambda = kl.$$

Отсюда следует, что  $Bsh\lambda = 0$  и  $D\sin\lambda = 0$ . В первом равенстве  $sh\lambda \neq 0$ , так как  $sh\lambda = 0$  только при  $\lambda=0$ , т.е. при  $k=0$ , но при этом и  $\sin kx = 0$ , что соответствует отсутствию движения. Значит  $B=0$ . Во втором равенстве  $D\sin\lambda = 0$ ,  $D \neq 0$ , так как при  $D = 0$  не будет колебаний. Значит

$$\sin\lambda = 0,$$

т.е.  $\lambda = n\pi$ . Так находим  $kl = n\pi$ , т.е.  $k = \frac{n\pi}{l}$  и уравнение движения сечений

принимает вид

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin(\omega_n t + \mu_n),$$

а согласно (10.46) получаем спектр частот собственных колебаний

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

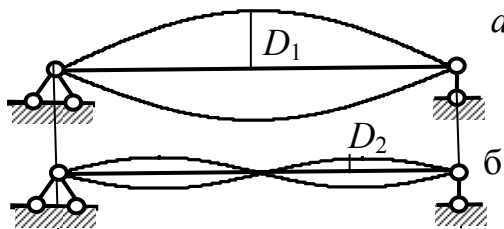


Рис. 10.23

При  $n=1$   $y(x) = D_1 \sin \frac{\pi x}{l},$

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Это первый тон колебаний с симметричной формой изгиба по одной полуволне, рис. 10.23 а.

При  $n=2$   $y(x) = D_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$

будет кососимметричная форма колебаний, рис. 10.23 б.

Бесконечное значение корней трансцендентного уравнения (10.48) определяет спектр частот с бесконечным количеством форм колебаний.

### 10.3.1.3. Метод начальных параметров в динамическом расчете балок

При наличии на балке сосредоточенных масс, а также в балках с несколькими участками, удобно применять метод начальных параметров, избегая стыковки участков балки на границах участков при решении конкретных задач.

Рассмотрим уравнение (10.47) и его производные:

$$\begin{aligned}
y(x) &= Achkx + Bshkx + C \cos kx + D \sin kx, \\
y'(x) &= k(Ashkx + Bchkx - C \sin kx + D \cos kx), \\
M(x) &= k^2 EJ(Achkx + Bshkx - C \cos kx - D \sin kx), \\
Q(x) &= k^3 EJ(Ashkx + Bchkx + C \sin kx - D \cos kx).
\end{aligned}
\tag{10.49}$$

Выразим постоянные интегрирования через начальные параметры из условий:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad M(0) = M_0, \quad Q(0) = P_0.$$

Из этих условий получаем зависимости:

$$y_0 = A + C, \quad \frac{y'_0}{k} = B + D, \quad \frac{M_0}{k^2 EJ} = A - C, \quad \frac{P_0}{k^3 EJ} = B - D.$$

Отсюда находим начальные параметры

$$A = \frac{y_0}{2} + \frac{M_0}{2k^2 EJ}, \quad B = \frac{y'_0}{2} + \frac{P_0}{2k^3 EJ}, \quad C = \frac{y_0}{2} - \frac{M_0}{2k^2 EJ}, \quad D = \frac{y'_0}{2} - \frac{P_0}{2k^3 EJ}$$

и подставляем их в уравнение изогнутой оси балки (10.48)

$$y(x, t) = \left( y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EJ} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ} D_{kx} \right) \sin(\omega t + \mu). \tag{10.50}$$

Здесь использованы функции академика А.Н. Крылова:

$$\begin{aligned}
A_{kx} &= (\operatorname{ch} kx + \cos kx) / 2, & \frac{d}{dx} A_{kx} &= k D_{kx}, & \int A_{kx} dx &= B_{kx} / k, \\
B_{kx} &= (\operatorname{sh} kx + \sin kx) / 2, & B'_{kx} &= k A_{kx}, & \int B_{kx} dx &= C_{kx} / k, \\
C_{kx} &= (\operatorname{ch} kx - \cos kx) / 2, & C'_{kx} &= k B_{kx}, & \int C_{kx} dx &= D_{kx} / k, \\
D_{kx} &= (\operatorname{sh} kx - \sin kx) / 2, & D'_{kx} &= k C_{kx}, & \int D_{kx} dx &= A_{kx} / k,
\end{aligned}
\tag{10.51}$$

Уравнением (10.50) пользуются так же, как (9.47).

#### 10.3.1.4. Учет сосредоточенных масс в колебаниях весоных балок

Если на инерционной (весомой) балке есть сосредоточенная масса  $M_a$  (рис. 10.24), то при собственных колебаниях вследствие линейных перемещений  $y(a, t) = y_a \sin(\omega t + \mu)$  от перемещающейся массы  $M_a$  возникает сила инерции

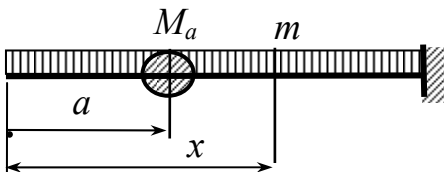


Рис. 10.24

где

$$P_a = -M_a \ddot{y}(a, t) = M_a \omega^2 y_a \sin(\omega t + \mu) = P_a \sin(\omega t + \mu),$$

$$P_a = M_a \omega^2 y_a = M_a \frac{k^4 EJ}{m} y_0 - \tag{10.52}$$

амплитудное значение силы инерции.



Амплитудное значение силы инерции  $P_a$  при собственных колебаниях в уравнении изогнутой оси балки (10.50) учитывается слагаемым, аналогичным слагаемому, содержащему  $P_0$ , но функция  $D_{k(x-a)}$  должна учитывать плечо  $(x-a)$ .

Последовательность определения спектра частот собственных колебаний в этом случае (при наличии сосредоточенных масс) остается прежней - нужно составить уравнение деформированной оси стержня методом начальных параметров, включая силы инерции от сосредоточенных масс, рассмотреть опорные условия, получить систему однородных уравнений, определитель системы приравнять нулю, что приведет к частотному уравнению, корни этого трансцендентного уравнения (собственные числа) согласно (10.46) дают возможность найти спектр частот собственных колебаний.

**Задача 10.18.** Найти спектр частот собственных колебаний весоной консоли с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$ , рис. 10.25.

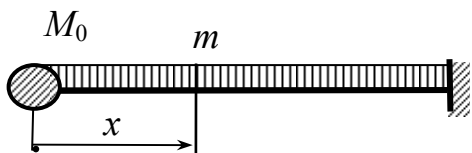


Рис.10.25

**Решение.** По формуле (9.52) определяем силу инерции от колеблющейся массы  $M_0$ , приложенной в начале координат с прогибом  $y_0$

$$P_0 = M_0 \frac{k^4 EJ}{m} y_0.$$

Уравнение перемещений (9.50) принимает следующий вид

$$y(x, t) = \left( y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ} D_{kx} \right) \sin(\omega t + \mu).$$

С учетом силы инерции уравнение изогнутой оси балки будет следующим:

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ} D_{kx} = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{y'_0}{k} B_{kx},$$

где обозначено:  $\xi = \frac{M}{ml}$ ,  $\lambda = kl$ .

Отсюда дифференцированием с учетом зависимостей (10.51) получим уравнение углов поворота

$$y'(x) = y_0 k (D_{kx} + \xi \lambda C_{kx}) + y'_0 A_{kx}.$$

Из условий  $y(l) = y'(l) = 0$  получаем систему однородных уравнений:

$$y_0 (A_\lambda + \xi \lambda D_\lambda) + \frac{y'_0}{k} B_\lambda = 0,$$

$$y_0 k (D_\lambda + \xi \lambda C_\lambda) + y'_0 A_\lambda = 0.$$

Приравнявая определитель этой системы нулю, получаем частотное уравнение

$$A_\lambda (A_\lambda + \xi \lambda D_\lambda) - B_\lambda (D_\lambda + \xi \lambda C_\lambda) = 0,$$

$$A_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda = \xi \lambda (B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda).$$

С использованием функций Крылова (9.51), это уравнение можно привести к виду

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda + \frac{1}{\xi \lambda} \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda} \right). \quad (10.53)$$

При заданном значении  $\xi$  (например,  $\xi=1$ ) из (10.53) находим собственные числа  $\lambda_1=1,2479$ ,  $\lambda_2=4,0311$ ,  $\lambda_3=7,1341$  и собственные частоты:

$$\omega_1 = k_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{1,2479^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{4,0311^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

При  $\xi=0$  из (10.53) получаем частотное уравнение для этого частного случая

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = -1, \quad (10.54)$$

корни которого:  $\lambda_1=1,875$ ,  $\lambda_2=4,694$ ,  $\lambda_3=7,856$ .

Рассмотрим влияние сосредоточенной массы  $M$  на спектр собственных частот

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \sqrt{\frac{\lambda^4 EJ}{ml \cdot l^3 M}} = \sqrt{\frac{\xi \lambda^4 3EJ}{3M \cdot l^3}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\xi \lambda^4}{3}}. \quad (10.55)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{3EJ}{Ml^3}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}M}}$  - частота колебаний невесомой балки с сосредоточенной массой  $M$ .

При  $\xi=3$  из (10.53) находим первый корень  $\lambda = 0,9812$  и согласно (9.55)

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{3 \cdot 0,9812^4}{3}} = 0,963 \omega_0, \text{ т.е. первая частота собственных колебаний весо-}$$

мой консоли с массой  $M = 3ml$  лишь на 3,7% меньше частоты колебаний невесомой консоли с такой же сосредоточенной массой.

При  $\xi=5$  найдем  $\lambda=0,870$ ,  $\omega_1 = 0,87^2 \sqrt{\frac{5}{3}} \omega_0 = 0,977 \omega_0$ , что на 2,27% меньше,

чем в невесомой консоли.

Какой сосредоточенной массой  $M_{\text{пр}}$  можно заменить распределенную массу консоли, чтобы частоты колебаний невесомой консоли с приведенной массой была равна частоте первого тона колебаний весо-мой консоли?

Первый корень частотного уравнения (10.54)  $\lambda_1=1,8751$  и частота основного тона колебаний  $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ . Для невесомой балки с сосредоточенной массой  $M_{\text{пр}}$  на конце консоли согласно (1.8) частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{M_{\text{пр}}l^3}}$ .

Приравнивая эти частоты, получим коэффициент приведения масс

$$\xi = \frac{M_{\text{пр}}}{ml} = \frac{3}{\lambda^4} = \frac{3}{1,8751^4} = 0,24267.$$

Положим, что весо-мая консоль с погонной массой интенсивностью  $m$  имеет сосредоточенную массу  $M = ml$ . Выше было получено при  $\xi=1$

$$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{1,5573}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

В приближенном решении эту балку можно считать невесомой с сосредоточенной на конце консоли массой  $M = 1,24246ml$ , частота которой будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{1624267ml \cdot l^3}} = \frac{1,5573}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{1,5537}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

что на 0,23% меньше точного значения.

### 10.3.1.5. Свойства собственных функций систем с распределенными параметрами

При изучении колебаний систем с распределенными параметрами, т.е. систем с распределенными массами, возникает необходимость знать свойства собственных функций.

Собственные функции определяют главные (нормальные) формы колебаний с соответствующими частотами этих колебаний, на основании которых можно получить решения более сложных задач.

Известно [6], что для однородных стержней с одним участком при различных условиях закрепления на опорах собственные функции всегда ортогональны, т.е. интегральная сумма произведений уравнений двух любых различных главных форм колебаний будет равна нулю

$$\int_0^l Y_m(x)Y_n(x)dx = 0. \quad (10.56)$$

Но если упругая система состоит из двух и более участков, а также при наличии сосредоточенных масс в системе с распределенными массами, то собственные функции будут ортогональными только с весом, т.е. дополнительным слагаемым в (10.56).

Для изучения свойств собственных функций систем с распределенными параметрами рассмотрим две произвольные главные формы колебаний  $Y_m(x)$  и  $Y_n(x)$  с соответствующими частотами  $\omega_m$  и  $\omega_n$  и применим к ним теорему о взаимности работ (теорему Бетти): работа сил, взятых из первого состояния, на соответствующих перемещениях, взятых из второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях первого состояния (рис. 10.26), [7].

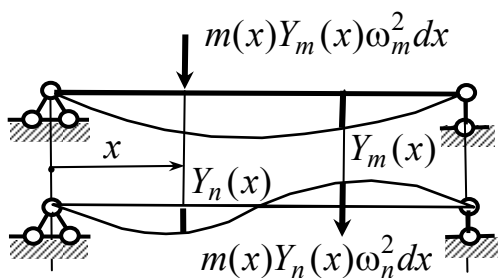


Рис. 10.26

Элементарной силой при колебаниях в первом состоянии будет сила инерции участка  $dx$

$$-m(x)\ddot{y}_m(x)dx = m(x)\omega_m^2 C_m Y_m(x)dx,$$

которой соответствует перемещение  $C_n Y_n(x)$  во втором состоянии. Аналогично, силе  $m(x)\omega_n^2 C_n Y_n(x)dx$  второго состояния соответствует перемещение  $C_m Y_m(x)$  в первом состоянии.

По теореме Бетти получаем

$$\int_l m(x)\omega_m^2 C_m Y_m(x) C_n Y_n(x) dx = \int_l m(x)\omega_n^2 C_n Y_n(x) C_m Y_m(x) dx = \cdot$$

$$= C_m C_n (\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_l m(x) Y_m(x) Y_n(x) dx .$$

Так как  $\omega_m \neq \omega_n$ , то из рассмотренного равенства находим

$$\int_l m(x) Y_m(x) Y_n(x) dx = 0 . \quad (10.57)$$

В этом заключается ортогональность главных форм собственных колебаний систем с распределенными параметрами упругой системы с одним участком.

Если стержень однородный по длине, когда  $m(x) = m = \text{const}$ , то собственные функции будут ортогональными при любом закреплении стержня на опорах, т.е. [Тим]

$$\int_l Y_m(x) Y_n(x) dx = 0 . \quad (10.58)$$

Если стержень окажется ступенчато переменного сечения, когда погонные

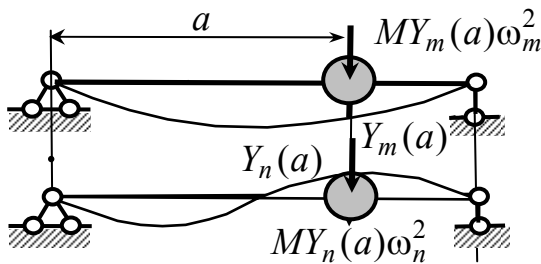


Рис. 10.27

массы по участкам стержня не одинаковы, равенство (10.57) будет представлять сумму интегралов, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{l_i} m_i(x) Y_{im}(x) Y_{in}(x) dx = 0 . \quad (10.59)$$

При наличии на балке сосредоточенных масс  $M$  из теоремы Бетти получаем равенство, рис. 10.27

$$MY_m(a)\omega_m^2 Y_n(a) = MY_n(a)\omega_n^2 Y_m(a), \text{ т.е.}$$

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) MY_m(a) Y_n(a) = 0 ,$$

откуда находим

$$MY_m(a) Y_n(a) = 0 .$$

Это слагаемое добавляется к (9.57)

$$\int_l m(x) Y_m(x) Y_n(x) dx + MY_m(a) Y_n(a) = 0 . \quad (10.60)$$

Здесь удобно использовать дельта-функцию Дирака. Дельта-функция Дирака  $\delta(x-a)$  - это функция, которая определяется условием  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$ , т.е. эта функция равна нулю при любом значении аргумента  $x$ , отлична от нуля и равна бесконечности при  $x = a$ , но интеграл от нее равен единице. Это значит, что интеграл какой-либо функции  $f(x)$  в сочетании с дельта-функцией Дирака будет равен значению этой функции в том сечении, которое отражается дельта-функцией, т.е. при  $x = a$ .

Если сосредоточенную массу принять за условно распределенную с дельта-функцией Дирака  $\delta(x - a)$ , то равенство (10.60) можно записать одним интегралом

$$m \int_l \left( 1 + \frac{M}{ml} l \cdot \delta(x - a) \right) Y_m(x) Y_n(x) dx = m \int_l (1 + \xi l \delta(x - a)) Y_m(x) Y_n(x) dx = 0,$$

или

$$\int_l \rho(x) Y_m(x) Y_n(x) dx = 0. \quad (10.61)$$

Этим интегралом для стержня с распределенной массой  $m$  и сосредоточенной  $M$  определяется ортогональность собственных функций с весом [7], [8]

$$\rho(x) = m(1 + \xi l \delta(x - a)). \quad (10.62)$$

При наличии нескольких участков нужно брать сумму интегралов (9.62) по участкам стержня.

Если начало координат принято не на конце балки, а в произвольном сечении, то в теореме Бетти нужно учитывать работу сил внешних и внутренних, т.е. кроме сил инерции от распределенной массы нужно учитывать поперечную силу в сечении с началом координат.

Например, в симметричных системах с началом координат на оси симметрии, где приложена сосредоточенная масса  $M$ , можно ограничиться интегрированием по половине пролета и весовой функцией учесть не только распределенную массу  $m$ , но и поперечную силу, которая будет равна половине силы инерции сосредоточенной массы

$$\int_0^{l/2} \left( m + \frac{M}{2} \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \right) Y_m(x) Y_n(x) dx = 0, \text{ т.е. } m \int_0^{l/2} \left( 1 + \frac{\xi l}{2} \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \right) Y_m(x) Y_n(x) dx = 0.$$

Следовательно, весовая функция (9.62) примет вид:

$$\rho(x) = m \left( 1 + \frac{\xi l}{2} \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \right). \quad (10.63)$$

Свойства собственных функций при поперечных колебаниях также можно определить из дифференциальной зависимости [8]:

$$(k_n^4 - k_m^4) \int_0^l Y_n(x) Y_m(x) dx = \left| Y_m \frac{d^3 Y_n}{dx^3} - Y_n \frac{d^3 Y_m}{dx^3} - \frac{dY_m}{dx} \frac{d^2 Y_n}{dx^2} + \frac{dY_n}{dx} \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right|_0^l. \quad (10.64)$$

При решении динамических задач, в том случае, когда собственные функции ортогональны, используется квадрат нормы собственных функций, т.е. интеграл вида

$$\Delta_n^2 = \int_l Y^2(x) dx. \quad (10.65)$$

Квадрат нормы собственных функций ортогональных с весом вычисляется интегралом

$$\Delta_n^2 = \int_l \rho(x) Y^2(x) dx. \quad (10.66)$$

Входящий сюда интеграл можно вычислять из зависимости (10.64) [Тим] дифференцированием по переменной  $z = kx$

$$\int_0^l Y^2(x) dx = \frac{1}{4k} \left[ 3Y Y''' + kx(Y^2 - 2Y' Y'' + (Y'')^2) - Y' Y'' \right]_0^l \quad (10.67)$$

При решении задач на собственные колебания рассматриваются уравнение (10.50) при удовлетворении граничных и начальных условий. При использовании трех граничных условий все начальные параметры можно выразить через один и получить уравнение движения сечений балки в собственных функциях  $Y(x)$

$$y(x,t) = C Y(x) \sin(\omega t + \mu), \quad v(x,t) = C \omega Y(x) \cos(\omega t + \mu).$$

Четвертое граничное условие приведет к трансцендентному уравнению, собственные числа которого  $\lambda$  позволят найти волновые числа  $k$ , а затем согласно (10.46) найти спектр частот собственных колебаний

Из одного из начальных условий

$$y(x,0) = C Y(x) \sin \mu, \quad v(x,0) = C \omega Y(x) \cos \mu$$

можно найти начальную фазу

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{y(x,0)}{v(x,0)} \omega, \quad (10.68)$$

а второе начальное условие позволяет вычислить начальный параметр в уравнении изогнутой оси балки.

Выше приведенная последовательность решения динамических задач по определению частот собственных колебаний, представленная алгоритмом 6, требует дополнительных операций – **алгоритм 7**:

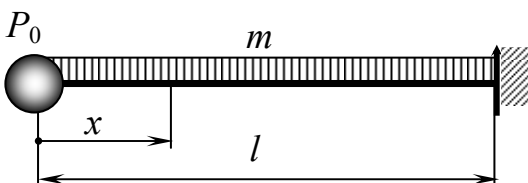
- методом начальных параметров (10.50) составляется уравнение изогнутой оси балки с учетом сосредоточенных сил инерции;

- последовательным дифференцированием находится уравнение углов поворота сечений и кривизны балки;

- из граничных и опорных условий составляется система однородных уравнений;

- приравняв определитель системы однородных уравнений нулю, получаем частотное уравнение;

- собственные числа частотного уравнения согласно (10.46) позволяют найти спектр собственных частот.



**Задача 10.19.** Найти собственные функции, весовую функцию и квадрат нормы собственных функций для консоли с распределенной и сосредоточенной масса-

ми, рис. 10.28.

**Решение.** Принимая начало координат на левом конце консоли и пренебрегая моментом сил инерции сосредоточенной массы, уравнение движения сечений балки с учетом (10.50) принимает вид:

$$y(x,t) = \left( y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ} D_{kx} \right) \sin(\omega t + \mu),$$

где амплитудное значение силы инерции

$$P_0 = -M\ddot{y}(0,t) = M\omega^2 y_0 = M \frac{k^4 EJ}{m} y_0$$

С учетом этой силы уравнение деформированной оси консоли принимает вид

$$y(x) = y_0 \left( A_{kx} + \frac{Mk}{m} D_{kx} \right) + \frac{y'_0}{k} B_{kx} = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{y'_0}{k} B_{kx}, \quad \xi = \frac{M}{ml}, \quad \lambda = kl.$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение углов поворота

$$y'(x) = y_0 k (D_{kx} + \xi \lambda C_{kx}) + y'_0 A_{kx}.$$

Из условия защемления  $y'(l) = 0$  находим зависимость

$$\frac{y'_0}{k} = - \frac{D_\lambda + \xi \lambda C_\lambda}{A_\lambda} y_0 = -\alpha y_0,$$

подставляя которую в уравнение деформированной оси балки, получим

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 Y(x)$$

Выражение в скобках определяет главные формы колебаний, т.е. представляет собственные функции.

Так собственные функции и их производные по переменной  $z = kx$  известны:

$$Y(kx) = A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}, \quad \frac{dY(x)}{dz} = Y'(kx) = (D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} - \alpha A_{kx}),$$

$$Y''(x) = k^2 (C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} - \alpha D_{kx}), \quad Y'''(x) = k^3 (B_{kx} + \xi \lambda A_{kx} - \alpha C_{kx}). \quad (10.69)$$

Весовая функция определяется формулой (10.63), в которой при наличии одного участка на балке массу  $m$  можно не учитывать, так как она при составлении начального условия будет сокращаться.

$$\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x).$$

Квадрат нормы собственных функций (10.66)

$$\Delta_n^2 = \int_l \rho(x) Y^2(x) dx = \int_l (1 + \xi l \delta(x)) Y^2(x) dx = \int_l Y^2(x) dx + \xi l Y^2(0)$$

с учетом интеграла (9.67) и собственных функций (10.69) примет вид:  $\Delta_n^2 = \frac{1}{4k} (kl(Y''(l))^2 - 3Y(0)Y'''(0) + \xi l Y^2(0))l + \xi l = \frac{l}{4} ((Y''(l))^2 - 3\xi) + \xi l = \frac{l}{4} ((Y''(l))^2 + \xi)$ .

**Задача 10.20.** Найти собственные функции, весовую функции и квадрат нормы собственных функций для двухопорной симметричной балки с распределенной и сосредоточенной массами, рис. 10.29

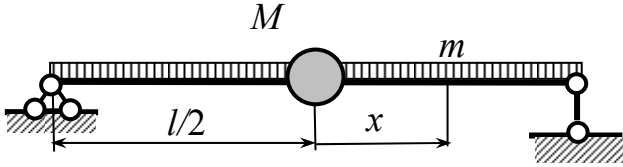


Рис. 10.29

**Решение.** Принимая начало координат посередине пролета и учитывая лишь симметричные формы колебаний, уравнение деформированной оси балки

представим в виде:

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ_z} D_{kx}.$$

Здесь  $P_0$  представляет поперечную силу в начале координат, которая вследствие симметрии системы равна половине силы инерции от сосредоточенной массы

$$P_0 = -\frac{M}{2} \ddot{y}(0) = \frac{M}{2} \omega^2 y_0 = \frac{M}{2} \frac{k^4 EJ}{m} y_0.$$

С учетом этой силы получаем уравнение деформированной оси балки

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{Mk^4 EJ}{2mk^3 EJ} y_0 D_{kx} = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{M_0}{k^2 EJ} C_{kx},$$

где об означено  $\xi = \frac{M}{ml}$ ,  $\lambda = \frac{kl}{2}$ .

Из условия закрепления балки на опорах, т.е.  $y(l/2) = 0$ , получаем зависимость

$$\frac{M_0}{k^2 EJ} = -\frac{A_\lambda + \xi \lambda D_\lambda}{C_\lambda} y_0 = -y_0 \alpha.$$

С учетом этой зависимости получаем собственные функции  $Y(x)$  и их производные:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}) = y_0 Y(x), \\ y'(x) &= y_0 k (D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 k Y'(x), \\ y''(x) &= y_0 k^2 (C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} - \alpha A_{kx}) = y_0 k^2 Y''(x), \\ y'''(x) &= y_0 k^3 (B_{kx} + \xi \lambda A_{kx} - \alpha D_{kx}) = y_0 k^3 Y'''(x). \end{aligned} \quad (10.70)$$



Весовую функцию получаем на основании (10.63)

$$\rho(x) = 1 + \frac{\xi l}{2} \delta(x).$$

Убедимся в этом на основании равенства (10.64)

$$(k_n^4 - k_m^4) \int_0^{l/2} Y_n(x) Y_m(x) dx = -Y_m(0) Y_n'''(0) + Y_n(0) Y_m'''(0).$$

Из вышеприведенных уравнений следует:  $Y(0) = A(0) = 1$ ,

$$Y'''(0) = k^3 \xi \lambda A(0) = \frac{k^4}{2} \xi l.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (k_n^4 - k_m^4) \int_0^{l/2} Y_n(x) Y_m(x) dx &= -Y_m(0) k_n^4 \frac{\xi l}{2} Y_n(0) + Y_n(0) k_m^4 \frac{\xi l}{2} Y_m(0) = \\ &= -(k_n^4 - k_m^4) \frac{\xi l}{2} Y_n(0) Y_m(0), \end{aligned}$$

т.е.  $\int_0^{l/2} Y_n(x) Y_m(x) dx = -\frac{\xi l}{2} Y_n(0) Y_m(0).$

Отсюда следует весовая функция  $\rho(x) = 1 + \frac{\xi l}{2} \delta(x)$ , что согласуется с (10.63).

Квадрат нормы собственных функций (10.66)

$$\Delta_n^2 = \int_0^{l/2} \left( 1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x) \right) Y^2(x) dx = \int_0^{l/2} Y^2(x) dx + \frac{\xi l}{2} Y^2(0).$$

Подготовим интеграл (10.67), входящий в эту формулу

$$\int_0^{l/2} Y^2(x) dx = -\frac{1}{4k} \left[ \frac{kl}{2} 2Y'(l/2)Y'''(l/2) + 3Y(0)Y'''(0) \right] = -\frac{l}{8} [2Y'(l/2)Y'''(l/2) + 3\xi].$$

Так как  $Y(0) = A(0) = 0$ , то квадрат нормы собственных функций принимает вид

$$\Delta_n^2 = -\frac{l}{8} [2Y'(l/2)Y'''(l/2) - \xi].$$

### 10.3.1.6. Собственные поперечные колебания весоных балок

Собственные колебания возникают при отклонении упругой системы от положения статического равновесия или путем сообщения системе начальной скорости движения в произвольном сечении. При этом используется уравнение изогнутой оси балки (10.50).

Подчиняя уравнение изогнутой оси балки граничным условиям, определяются собственные функции и спектр частот собственных колебаний, а из на-

чальных условий находится начальная фаза и амплитудное перемещение в начале координат.

При этом после определения спектра собственных частот по алгоритму 7 рассматриваются начальные условия, одно из которых по формуле (10.68) определяет начальную фазу, а второе начальное условие с использованием метода Фурье определяет амплитуду колебаний. Для этого начальное условие умножается на собственную функцию иного порядка, весовую функцию (10.62) (при наличии сосредоточенной массы) и интегрируется по длине балки. В левой части равенства образуется квадрат нормы собственных функций (10.65) или (10.66) (при наличии сосредоточенной массы) с интегралом квадрата нормы (10.67). Так, определив начальный параметр, получаем уравнение движения сечений балки – **алгоритм 8**.

**Задача 10.21.** Консоль с распределенной массой интенсивностью  $m$  нагружена силой  $P$ , которая внезапно снимается, рис. 10.30.

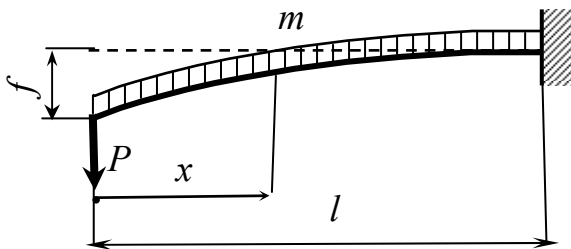


Рис. 10.30

Определить расчетный изгибающий момент при собственных колебаниях балки.

**Решение.** После снятия силы упругая балка за счет внутренних усилий стремится возвратиться в исходное состояние статического равновесия. Но за счет возникающих при движении сил инерции она не может остановиться в первоначальном

состоянии, возникают собственные колебания.

Уравнение движения сечений балки можно составить на основании (10.67) при  $\mu=\pi/2$ , что следует из (10.68), так как колебания вызваны перемещением  $y_0$  при  $v_0=0$ :

$$y(x,t) = \left( y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} \right) \cos \omega t .$$

Отсюда дифференцированием получаем уравнение углов поворота

$$y'(x) = ky_0 D_{kx} + y'_0 A_{kx} .$$

Из условия  $y(l) = 0$  найдем замену  $\frac{y'_0}{k} = -\frac{D_\lambda}{A_\lambda} y_0 = -\alpha y_0$ , где  $(\lambda = kl)$  и подставляем в уравнение деформированной оси консоли

$$y(x) = y_0 (A_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 Y(x) .$$

Так находим собственные функции  $Y(x)$  и их производные при дифференцировании по  $z = kx$ :

$$Y(x) = A_{kx} - \alpha B_{kx}, \quad Y'(x) = D_{kx} - \alpha A_{kx}, \quad Y''(x) = C_{kx} - \alpha D_{kx}. \quad (10.71)$$

Уравнение изгибающих моментов

$$M(x) = EJy''(x) = EJk^2(C_{kx} - \alpha D_{kx}), \quad (10.72)$$

Из условия отсутствия перемещения в защемлении, т.е. при  $(x = l)$   $Y(l)=0$  получаем частотное уравнение

$$A_\lambda - \alpha B_\lambda = 0, \text{ т.е. } A_\lambda = \frac{D_\lambda}{A_\lambda} B_\lambda.$$

Если сюда подставить функции Крылова (1), то получим трансцендентное уравнение вида

$$\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda = -1,$$

собственные числа которого:  $\lambda_1=1,8751$ ,  $\lambda_2=4,6941$ ,  $\lambda_3=7,8532$  определяют спектр частот собственных колебаний (9.46).

Теперь можно рассматривать начальное условие, требующее, чтобы в начале колебаний, т.е. при  $t = 0$ , изогнутая ось консоли соответствовала уравнению статического равновесия от силы  $P$

$$f(x) = -\frac{Pl^3}{3EJ} \left( 1 - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^3} \right) = f_0 \left( 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3} \right).$$

С учетом этого уравнения, способом Фурье получаем равенство

$$\sum y_0 \int_0^l Y_n(x) Y_m(x) dx = \int_0^l f(x) Y(x) dx. \quad (10.73)$$

Так как в этой задаче собственные функции ортогональны, то в левой части равенства все интегралы с функциями несовпадающих индексов будут равны нулю, т.е. в левой части равенства получим квадрат нормы собственных функций  $\Delta_n^2 = \int_l Y^2(x) dx$ , который вычисляется по (10.67).

С учетом условия защемления консоли (при  $x = l$ )  $Y(l) = Y'(l) = 0$ , а на свободном конце (при  $x = 0$ )  $Y''(0) = Y'''(0) = 0$ , формула (10.67) упрощается

$$\int_0^l Y^2(x) dx = \frac{1}{4k} [kl(Y'')^2] = \frac{l}{4} (C_\lambda - \alpha D_\lambda) = \frac{l}{4} \left( C_\lambda - \frac{D_\lambda}{A_\lambda} D_\lambda \right).$$

Для основного тона колебаний при  $\lambda_1=1,8751$  находим:  $A_\lambda = 1,5189$ ,  $B_\lambda = 2,0691$ ,  $C_\lambda = 1,8185$   $D_\lambda = 1,1150$ ,  $\alpha = 0,7341$ .

При этих значениях квадрат нормы будет равен  $\Delta_n^2 = \frac{l}{4}$ .

Для вычисления правой части условия 10.73) на основании интегрирования по частям получаем:

$$\int_0^l Y(x) dx = \int_0^l (A_{kx} - \alpha B_{kx}) dx = \frac{l}{\lambda} (B_{kx} - \alpha C_{kx}) \Big|_0^l = 0,3915l,$$

$$\int_0^l x^2 Y(x) dx = \frac{l^3}{\lambda} (B_{kx} - \alpha C_{kx}) - \frac{2l^3}{\lambda^2} (C_\lambda - \alpha D_\lambda) + \frac{2l^3}{\lambda^3} [D_\lambda - \alpha(A_\lambda - 1)] = 0,0454l^3,$$

$$\int_0^l x^3 Y(x) dx = \frac{l^4}{k} (B_\lambda - \alpha C_\lambda) - 3 \frac{l^4}{k^2} (C_\lambda - \alpha D_\lambda) + \frac{6l^4}{k^3} [D_\lambda - \alpha(A_\lambda - 1)] = -0,10545l^4.$$

Из начального условия (10.73)

$f(0,3915 - \frac{3}{2}0,0454 - \frac{1}{2}0,10545)l = y_0 \frac{l}{4}$ , находим амплитудное значение перемещения торца консоли от первой гармоники колебаний

$$y_0 = 1,0827 f = 1,0827 \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки

$$M(x) = y_0 EJk^2 (C_{kx} - \alpha D_{kx}) = 1,0827 \frac{Pl}{3} \lambda^2 (C_{kx} - \alpha D_{kx}).$$

В защемлении, где  $(C_\lambda - \alpha D_\lambda) = 1,234Pl$ .

Учет последующих гармоник колебаний несколько уменьшит эти значения. Очевидно, что коэффициенты при прогибе и моменте будут устремляться к единице.

Важно заметить, что через полпериода колебаний эти динамические расчетные факторы поменяют знак на обратный. Это значит, что первоначальные сжимающие напряжения станут растягивающими, что опасно для хрупких материалов.

Консоль с нагрузкой направленной вверх, при внезапном снятии силы разрушится в верхнем сечении, где при статическом нагружении было сжатие

**Задача 10.22.** Двухопорная балка с распределенной массой интенсивностью  $m$  загружена посередине пролета силой  $P$ , которая внезапно снимается, рис.10.31. Определить расчетный изгибающий момент при свободных колебаниях.

**Решение.** Уравнение статического равновесия балки от сосредоточенной силы  $P$  получим методом начальных параметров, приняв начало координат на левой опоре, где

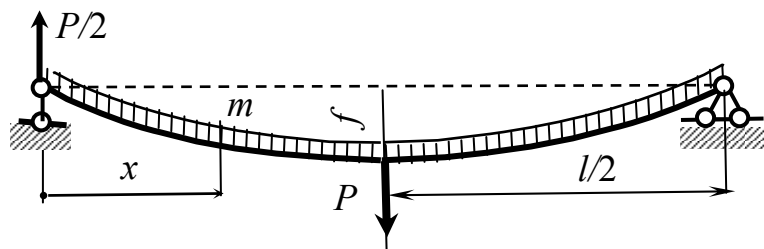


Рис. 10.31

прогиб и изгибающий момент равны нулю, а сосредоточенная сила равна

$$P/2: f(x) = \theta_0 x + \frac{P}{2} \cdot \frac{x^3}{6EJ}$$

Из условия равенства угла поворота посередине балки, находим угол поворота в начале координат  $\theta_0 = -\frac{Pl^2}{16EJ}$  и уравнение изогнутой оси балки при статическом нагружении принимает вид

$$f(x) = -\frac{Pl^3}{48EJ} \left( 3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3} \right) = f \left( 3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3} \right).$$

После снятия сосредоточенной силы возникают собственные колебания, уравнения деформационных и силовых факторов которых можно взять в виде (10.47):

$$\begin{aligned} y(x) &= Achkx + Bshkx + C \cos kx + D \sin kx, \\ y'(x) &= k(Ashkx + Bchkx - C \sin kx + D \cos kx), \\ M(x) &= EJ_z \cdot y''(x) = EJ_z k^2 (Achkx + Bshkx - C \cos kx - D \sin kx), \\ Q(x) &= EJ_z k^3 (Ashkx + Bchkx + C \sin kx - D \cos kx). \end{aligned}$$

Из условий  $y(0) = y''(0) = 0$  находим  $A=C=0$ , а из условий  $y'(l/2) = 0$ ,  $y'''(l/2) = 0$  получаем систему однородных уравнений

$$Bch\lambda + D \cos \lambda = 0, \quad Bch\lambda - D \cos \lambda = 0, \quad (\lambda = kl/2),$$

откуда следует, что  $B = 0$  (так как  $ch\lambda \neq 0$ ),  $D \neq 0$ , а  $\cos \lambda = 0$ , т.е.

$$\lambda = \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}(2n-1) \text{ или } kl = \pi(2n-1).$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси балки при собственных колебаниях  $y(x) = D \sin kx = DY(x)$  и собственные функции определены:

$$Y(x) = \sin kx, \quad \frac{dY(x)}{dz} = Y'(x) = \cos kx, \quad Y''(x) = -\sin kx, \quad Y'''(x) = -\sin kx, \quad z = kx.$$

Теперь можно рассмотреть начальное условие, требующее, чтобы в начале колебаний уравнение деформированной оси балки соответствовало уравнению изогнутой оси балки в статическом равновесии

$$DY(x) = f(x).$$

По схеме Фурье это равенство нужно умножить на собственную функцию другого индекса и проинтегрировать по длине балки

$$\sum_1^{\infty} \int_l DY_n(x) Y_m(x) dx = \int_l f(x) Y(x) dx. \quad (10.74)$$

Так как собственные функции ортогональны, то в левой части этого равенства все слагаемые, содержащие интегралы произведений функций с различными номерами, будут равны нулю и останутся лишь интегралы с функциями одинакового номера, т.е. в левой части будет квадрат нормы собственных функций, который найдем из зависимости (10.67).

При этом учтем, что  $Y'''(kl/2) = 0$ ,  $Y'(kl/2) = 0$ ,  $Y(0) = 0$ ,  $Y''(0) = 0$

$$\Delta_n^2 = \int_0^{l/2} Y^2(x) dx = \frac{1}{4k} \cdot \frac{kl}{2} [(Y(kl/2))^2 + (Y''(kl/2))^2] = \frac{l}{8} \cdot 2 \sin^2 \lambda = \frac{l}{4}.$$

Для вычисления правой части условия (10.74) подготовим интегралы:

$$\int_0^{l/2} xY(x) dx = \int_0^{l/2} x \sin kx dx = \left( -\frac{x}{k} \cos kx + \frac{1}{k^2} \sin kx \right) \Big|_0^{l/2} = \frac{1}{k^2} \sin \lambda,$$

$$\int_0^{l/2} x^3 \sin kx dx = \left( \frac{3l^2}{4k^2} - \frac{6}{k^4} \right) \sin \lambda$$

С учетом этих интегралов и уравнения статического состояния балки условие (9.74) принимает следующий вид:

$$D\Delta_n^2 = f \left( \frac{3}{l} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{4}{l^3} \cdot \frac{3l^2}{4k^2} + \frac{24}{k^4 l^3} \right) \sin \lambda = f \frac{24l}{\lambda^4} \sin \lambda.$$

Отсюда находим амплитудное перемещение произвольной формы колебаний

$$D_n = f \frac{24l}{\lambda^4} \sin \lambda = \frac{24 \cdot 4}{\pi^4 (2n-1)^4} \sin \lambda = \frac{2 \cdot 48}{\pi^4 (2n-1)^4} \cdot \frac{Pl^3}{48EJ} \sin \lambda.$$

Уравнение перемещения сечений балки при колебаниях

$$y(x,t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{(2n-1)^4} \sin k_n x \cdot \sin \omega_n t. \quad (10.75)$$

Максимальное перемещение посередине пролета

$$y(l/2) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda}{(2n-1)^4} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Так как  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ , то  $y(l/2) = \frac{Pl^3}{48EJ}$ .

Дифференцированием (9.76) получаем изгибающий момент

$$M(l/2) = EJy''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 EJD_n = EJ \frac{Pl}{48EJ} \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 l^2 \frac{24 \cdot 4}{(kl)^4} = 2Pl \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Так как  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , то  $M(l/2) = \frac{Pl}{4}$ .

**Задача 10.23.** На вертикальную двухопорную балку с распределенной массой интенсивностью  $m$  и сосредоточенной массой  $M_0$  со скоростью  $v$  посередине пролета налетает неупругая масса  $M$  и удерживается на балке при колебаниях, рис. 10.32.

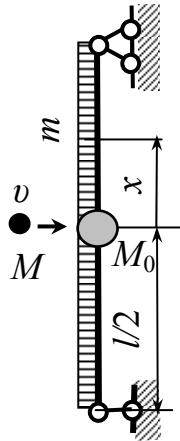


Рис. 10.32

Найти максимальный прогиб и изгибающий момент при колебаниях.

**Решение.**

Собственные функции получены в задаче 10.20:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}) = y_0 Y(x), \\ y'(x) &= y_0 k(D_{kx} + \xi\lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 k Y'(x), \\ y''(x) &= y_0 k^2(C_{kx} + \xi\lambda B_{kx} - \alpha A_{kx}) = y_0 k^2 Y''(x), \\ y'''(x) &= y_0 k^3(B_{kx} + \xi\lambda A_{kx} - \alpha BD) = y_0 k^3 Y(x). \end{aligned}$$

Из условия на шарнирной опоре  $y(l/2) = y''(l/2) = 0$  с использованием первой и третьей строк приведенных уравнений получаем систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} (A_\lambda + \xi\lambda D_\lambda) &= \alpha C_\lambda, \\ (C_\lambda + \xi\lambda B_\lambda) &= \alpha A_\lambda, \end{aligned}$$

определитель которой приводит к частотному уравнению

$$A_\lambda(A_\lambda + \xi\lambda D_\lambda) = C_\lambda(C_\lambda + \xi\lambda B_\lambda)$$

или с использованием функций Крылова – к уравнению вида

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{th}\lambda + \frac{2}{\xi\lambda}. \quad (10.76)$$

Собственные числа этого уравнения при  $\xi=1$ :  $\lambda_1=1,1916$ ,  $\lambda_2=4,1197$ ,  $\lambda_3=7,1901$ .

Весовая функция

$$\rho(x) = 1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x).$$

Осталось рассмотреть начальное условие, требующее, чтобы в начале колебаний скорость движения сечений была равна заданной лишь в месте удара

$$v_0 = v \frac{M}{M + M_0} = v\eta$$

$$\dot{y}(x, t) = -v_0 e(-x), \text{ т.е. } y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n Y_n(x) = -v_0 e(-x),$$

что определяется единичной функцией  $e(-x)$ .

В соответствии с методом Фурье это равенство нужно умножить на собственную функцию  $n$ -го порядка  $Y_n(x)$ , вес  $\rho(x) = 1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x)$  и проинтегрировать по длине балки (в виду симметрии можно ограничиться половиной длины балки):

$$y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int_0^{l/2} \left(1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x)\right) Y_n(x) Y_m(x) dx = -v_0 \int_0^{l/2} e(-x) \left(1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x)\right) Y(x) dx. \quad (10.77)$$

Интеграл левой части этого равенства приводит к квадрату нормы собственных функций (10.66)

$$\Delta_n^2 = \int_0^{l/2} \left(1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x)\right) Y^2(x) dx = \int_0^{l/2} Y^2(x) dx + \frac{\xi l}{2} Y^2(0).$$

Для этого подготовим интеграл квадрата нормы собственных функций (10.67), учитывая, что  $Y(l/2) = Y''(l/2) = 0$ ,  $Y'(0) = 0$ ,  $Y'''(0) = \xi \lambda A(0) = \xi \lambda$ :

$$\int_0^{l/2} Y^2(x) dx = -\frac{1}{4k} \left[ \frac{kl}{2} 2Y'(l/2)Y'''(l/2) + 3Y(0)Y'''(0) \right] = -\frac{l}{8} [2Y'(l/2)Y'''(l/2) + 3\xi].$$

Так как  $Y(0) = A(0) = 1$ , то квадрат нормы собственных функций принимает вид

$$\Delta_n^2 = -\frac{l}{8} [2Y'(l/2)Y'''(l/2) - \xi].$$

В правой части условия (10.77) первый интеграл равен нулю благодаря наличию единичной функции  $e(-) = 1$  (только при  $x=0$ ), а второй интеграл благодаря наличию функции Дирака равен функции  $Y(0) = A(0) = 1$ .

Так из условия (10.77) находим

$$y_0 = -\frac{v_0 \xi l}{2\omega_n \Delta_n^2} = -\frac{4v_0 l^2}{k_n^2 l^2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \frac{\xi}{2Y'(l/2)Y'''(l/2) - \xi} = \frac{vl^2 \eta}{\lambda_n^2} \frac{\xi}{\xi - 2Y'(l/2)Y'''(l/2)} \sqrt{\frac{m}{EJ}}.$$

Следовательно, уравнение перемещений сечений балки при колебаниях  $y(x, t) = \sum y_0 Y(x) \sin \omega_n t =$

$$= vl^2 \xi \eta \sqrt{\frac{m}{EJ}} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}}{\xi - 2(D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) \cdot (B_{kx} + \xi \lambda A_{kx} - \alpha D_{kx})} \sin \omega_n t. \quad (10.78)$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение изгибающих моментов

$$M(x, t) = EJy''(x, t) = \\ = 4v\xi\eta\sqrt{EJm} \sum_0^{\infty} \frac{C_{kx} + \xi\lambda B_{kx} - \alpha A_{kx}}{\xi - 2(D_{kx} + \xi\lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) \cdot (B_{kx} + \xi\lambda A_{kx} - \alpha D_{kx})} \sin \omega_n t.$$

При  $x = 0$

$$M(0) = 4v\xi\eta\sqrt{EJm} \sum_0^{\infty} \frac{\alpha}{\xi - 2(D_{kx} + \xi\lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) \cdot (B_{kx} + \xi\lambda A_{kx} - \alpha D_{kx})} \sin \omega_n t.$$



**Задача 10.24.** Неупругая масса  $M$  со скоростью  $v$  ударяет по сосредоточенной массе  $M_0$ , закрепленной на консоли с распределенной массой  $m$ , и вместе с ней совершает колебательные движения, рис. 10.33.

Найти расчетные уравнения напряженно-деформированного состояния консоли.

**Решение.** Учитывая, что начальное отклонение консоли равно нулю  $y_0 = 0$ , а моментом сил инерции колеблющихся масс пренебрегаем  $M_0 = 0$ ,

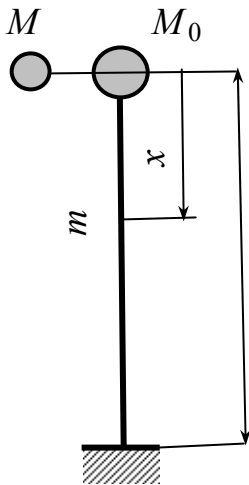


Рис.10.33

уравнение деформированной оси консоли (10.50) представим в виде

$$y(x, t) = \left( y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ} D_{kx} \right) \sin(\omega t). \quad (9.79)$$

Подставляя сюда значение силы инерции колеблющихся масс

$P = -(M + M_0)\ddot{y}(0) = (M + M_0)\omega^2 y_0$  с учетом частоты собственных колебаний  $\omega^2 = \frac{k^4 EJ}{m}$ , получим уравнение изогнутой оси консоли в виде

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{y'_0}{k} B_{kx},$$

где  $\xi = \frac{M + M_0}{ml}$ ,  $\lambda = kl$ .

Из условия  $y(l) = 0$  выразим угол поворота через прогиб

$\frac{y'_0}{k} = -\frac{A_\lambda + \xi \lambda D_\lambda}{B_\lambda} y_0 = -\alpha y_0$ . При этом уравнение изогнутой оси консоли примет вид

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 Y(x). \quad (10.80)$$

Так находим собственные функции и их производные:

$$Y(x) = A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}, \quad \frac{dY(x)}{dx} = Y'(x) = k(D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} - \alpha A_{kx}),$$

$$Y''(x) = k^2(C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} - \alpha D_{kx}), \quad Y'''(x) = k^3(B_{kx} + \xi \lambda A_{kx} - \alpha C_{kx})$$

Из условия  $Y'(l) = 0$  получаем частотное уравнение

$$A_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda = \xi \lambda (B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda).$$

Используя известные сочетания функций А.Н. Крылова (см. Приложение 2) это уравнение можно привести к виду

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda + \frac{1}{\xi \lambda} \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda} \right). \quad (10.81)$$

Рассмотрим начальное условие, требующее, чтобы начальная скорость движения сечений была равна нулю во всех сечениях, кроме сечения в месте удара  $\dot{y}(x, 0) = -v_0 e(-x)$ , т.е.

$$\omega_n y_0 Y_n(x) = -v_0 e(-x).$$

По схеме Фурье умножаем это равенство на собственную функцию  $Y_m(x)$ , вес  $\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x)$  и интегрируем по длине консоли

$$y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int_0^l (1 + \xi l \delta(x)) Y_n(x) Y_m(x) dx = -v_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l (1 + \xi l \delta(x)) e(-x) Y(x) dx.$$

Интеграл левой части этого равенства определяет квадрат нормы собственных функций

$$\Delta_n^2 = \int_0^l \rho(x) Y^2(x) dx = \int_0^l Y^2(x) dx + \xi l Y^2(0).$$

Входящий сюда интеграл найдем по формуле (10.67) с учетом граничных условий

$$\int_0^l Y^2(x) dx = \frac{l}{4} (kl(Y''(l))^2 - 3\xi).$$

Следовательно,

$$\Delta_n^2 = \frac{l}{4} (kl(Y''(l))^2 + \xi).$$

Интеграл правой части начального условия

$$\int_0^l (1 + \xi l \delta(-x)) e(-x) Y(x) dx = \int_0^l e(-x) Y(x) dx + \xi l \int_0^l e(-x) \delta(-x) Y(x) dx = \xi l Y(0) = \xi l.$$

Так находим начальный параметр

$$y_0 = -\frac{v_0 \xi l}{\omega \Delta_n^2} = -\frac{4v_0 \xi}{\omega} \frac{1}{(Y''(l))^2 + \xi} = -4v_0 \xi l^2 \sqrt{\frac{m}{EJ}} \frac{1}{(Y''(l))^2 + \xi}$$

и уравнение движения сечений консоли

$$y(x, t) = -4v_0 \eta \xi l^2 \sqrt{\frac{m}{EJ}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \frac{A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}}{(Y''(l))^2 + \xi} \sin \omega t. \quad (10.82)$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение изгибающих моментов

$$M(x, t) = -4v_0 \eta \xi \sqrt{EJm} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} - \alpha D_{kx}}{(C_{\lambda} + \xi \lambda B_{\lambda} - \alpha D_{\lambda})^2 + \xi} \sin \omega t.$$

### 10.3.1.7. Вынужденные поперечные колебания весоных балок

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний имеет вид, см. (10.43)

$$EJ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t).$$

$$\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p(x,t)}{m} = f(x,t).$$

Следуя методу Фурье решение этого уравнения ищем в разложении по собственным функциям

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) Y_n(x) \quad (10.83)$$

при однородных начальных условиях.

Подставим это решение в исходное дифференциальное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{EJ}{m} k_n^4 w_n(t) + \ddot{w}_n(t) \right) Y_n(x) = f(x,t),$$

Учитывая, что  $\omega^2 = k^4 EJ / m$ , получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \ddot{w}_n(t) + \omega_n^2 w_n(t) \right) Y_n(x) = f(x,t). \quad (10.84)$$

Отсюда следует, что грузовая функция  $f(x,t)$  раскладывается в ряд Фурье. Поэтому к ней применяем общую схему Фурье, т.е. умножаем (10.84) на вес  $\rho(x)$ , собственную функцию  $Y_m(x)$  и интегрируем по длине балки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \ddot{w}_n(t) + \omega_n^2 w_n(t) \right) \int_0^l \rho(x) Y_n(x) Y_m(x) dx = \int_0^l f(x,t) \rho(x) Y_n(x) dx. \quad (9.65)$$

Интеграл в левой части этого равенства представляет квадрат нормы собственных функций  $\Delta_n^2$ , поэтому равенство (9.65) можно представить в виде

$$\ddot{w}_n(t) + \omega_n^2 w_n(t) = f_n(t), \quad (10.66)$$

где обозначено

$$f_n(t) = \frac{1}{m \Delta_n^2} \int_0^l p(x,t) \rho(x) Y_n(x) dx. \quad (10.67)$$

Решение уравнения такого вида уже получено в 10.1.3 (см.(10.17))

$$w_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau.$$

С учетом грузовой функции (9.67) получаем коэффициенты разложения

$$w_n(t) = \frac{1}{m \omega_n \Delta_n^2} \int_0^l \rho(x) Y_n(x) dx \int_0^t p(x,\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

и частное решение при вынужденных колебаниях принимает вид

$$y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{m \omega_n \Delta_n^2} \int_0^l \rho(x) Y_n(x) dx \int_0^t p(x,\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau. \quad (10.68)$$

где:  $p(x, t)$  - интенсивность возмущающей нагрузки переменной интенсивности,  $\tau$  - временная переменная времени загрузки  $t$ .

В случае нагрузки, неизменяющейся во времени  $p(x)$  из (10.68) получим

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{m\omega_n^2 \Delta_n^2} \int_0^l \rho(x) Y_n(x) p(x) dx \cdot (1 - \cos \omega_n t). \quad (10.69)$$

Для решения таких задач используются алгоритмы 7 и 8: методом начальных параметров найти собственные функции  $Y_n(x)$ , вес  $\rho(x)$ , квадрат нормы  $\Delta_n^2$ , спектр собственных частот  $\omega_n$  и вычислить интеграл (10.69) - алгоритм 9.

**Задача 10.25.** На консоль с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  внезапно приложена сила  $P$ , рис. 10.34.

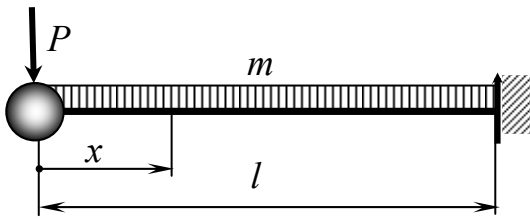


Рис. 10.34

Получить уравнение перемещений сосредоточенной массы.

**Решение.** Уравнение изогнутой оси консоли при колебаниях найдено в задаче 10.24

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 Y(x),$$

$$\text{где: } \xi = \frac{M}{ml}, \quad \lambda = kl. \quad \alpha = -\frac{D_\lambda + \xi \lambda C_\lambda}{A_\lambda}.$$

Весовая функция  $\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x)$ .

Частотное уравнение получено в задаче 10.24

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda + \frac{1}{\xi \lambda} \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda} \right).$$

Квадрат нормы  $\Delta_n^2 = \frac{l}{4} ((Y''(l))^2 + \xi)$  получен в задаче 10.19.

Уравнение движения сечений можно получить из (10.69), положив сосредоточенную силу как условно распределенную (с дельта-функцией Дирака), т.е.  $P\delta(-x)$

$$y(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{m\omega_n^2 \Delta_n^2} \int_0^l \rho(x) Y_n(x) P\delta(-x) dx \cdot (1 - \cos \omega_n t).$$

Рассмотрим интеграл этой формулы

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(x) Y(x) P\delta(-x) dx &= \int_0^l (1 + \xi l \delta(-x)) Y(x) P\delta(-x) dx = \\ &= \int_0^l Y(x) P\delta(-x) dx + \xi l \int_0^l Y(x) P\delta(-x) dx = \int_0^l Y(x) P\delta(-x) dx + \xi l \int_0^l Y(x) P\delta(-x) dx = PY(0). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение движения (10.70) принимает вид

$$y(x, t) = -\frac{Pl^3}{3EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \cdot \frac{A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}}{(C_\lambda + \xi \lambda B_\lambda - \alpha D_\lambda)^2 + \xi} (1 - \cos \omega t). \quad (10.70)$$

**Задача 10.26.** Двухопорная балка с погонной массой интенсивностью  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  загружается внезапно приложенной силой  $P$ , рис. 10.35.

Найти уравнение расчетных перемещений.

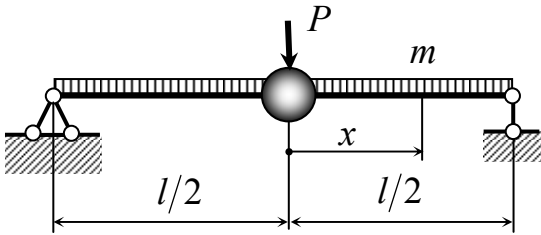


Рис. 10.35

**Решение.** Весовая функция  $\rho(x) = 1 + \frac{\xi l}{2} \delta(-x)$ ,

собственные функции

$$y(x) = y_0(A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}) = y_0 Y(x),$$

$$y''(x) = y_0 k^2 (C_{kx} + \xi \lambda B_{kx} - \alpha A_{kx}) = y_0 k^2 Y''(x),$$

$$y'(x) = y_0 k (D_{kx} + \xi \lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) = y_0 k Y'(x)$$

$$y'''(x) = y_0 k^3 (B_{kx} + \xi \lambda A_{kx} - \alpha D_{kx}) = y_0 k^3 Y(x)$$

и квадрат нормы собственных функций

$$\Delta_n^2 = -\frac{l}{8} [2Y'(l/2)Y'''(l/2) - \xi].$$

определены в задаче 10.23, где.

$$\alpha = -\frac{A_\lambda + \xi \lambda D_\lambda}{C_\lambda}.$$

При внезапном приложении нагрузки возникают вынужденные колебания с уравнением движения сечений (10.69), в которое нужно подставить формально распределенную нагрузку  $q(x) = -P\delta(x)$ . Тогда получим

$$y(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x) P (1 - \cos \omega t)}{m \omega_n^2 \Delta_n^2} \int_0^l \left(1 + \frac{\xi l}{2} \delta(x)\right) Y_n(x) \delta(x) dx.$$

С учетом свойства интегрирования дельта-функции Дирака

$$\int_0^l \delta(x) \delta(x) dx = \delta(x) = 0, \text{ а } \int_0^l \delta(x) dx = 1 \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Pl^3 Y_n(x)}{4EJ\lambda^4} (1 - \cos \omega t) = \\ &= -\frac{Pl^3}{48EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \cdot \frac{A_{kx} + \xi \lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}}{\xi - 2(D_\lambda + \xi \lambda C_\lambda - \alpha B_\lambda)(B_\lambda + \xi \lambda A_\lambda - \alpha D_\lambda)} (1 - \cos \omega t). \end{aligned} \quad (10.71)$$

### 10.3.1.8. Ударные нагрузки при изгибе весомых балок

В разделе 10.3.1.6 рассмотрено воздействие скорости, сообщенной балке в вертикальном положении, когда возникают собственные колебания системы с распределенными параметрами.

Если на балку, расположенную в горизонтальном положении, падает некоторый груз, то кроме сообщения балке скорости удара нужно учитывать внезапное приложение падающего груза, что рассмотрено в задачах 10.23, 10.24.

### Задача 10.27

Консоль с распределенной массой интенсивностью  $m$  и сосредоточенной массой  $M_0$  испытывает удар неупругой массы  $M$ , падающей с высоты  $h$ , рис. 10.37. Найти уравнение движения сечений балки.

**Решение.** В задаче 10.24 от воздействия скорости удара уравнение изогнутой оси консоли получено в виде (10.82)

$$y(x,t) = -4v\eta\xi l^2 \sqrt{\frac{m}{EJ}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \frac{A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}}{(Y''(l))^2 + \xi} \sin \omega t.$$

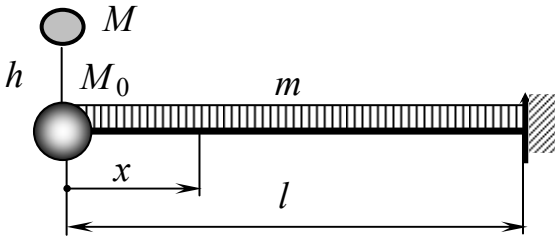


Рис. 10.36

От внезапного приложения груза  $Q = Mg$  уравнение вынужденных колебаний (10.70) задачи 10.25 получено в виде

$$y(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4QY_n(x)}{k^4 EJ} \frac{1}{(Y''(l))^2 + \xi} (1 - \cos \omega_n t) =$$

$$= -\frac{Ql^3}{3EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \frac{A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}}{(C_{kx} + \xi\lambda B_{kx} - \alpha D_{kx})^2 + \xi} (1 - \cos \omega_n t).$$

Суммарное уравнение движения сечений

$$y(x,t) = -\frac{Ql^3}{3EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \left( 1 - \cos \omega_n t + \lambda_n^2 \sqrt{\frac{2hEJ}{mgl^4}} \sin \omega_n t \right) \frac{A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha B_{kx}}{(C_{kx} + \xi\lambda B_{kx} - \alpha D_{kx})^2 + \xi}.$$

**Задача 10.28.** Двухопорная балка с погонной массой  $m = 400$  кг/м и сосредоточенной массой  $M_0 = 1000$  кг испытывает удар неупругой массы

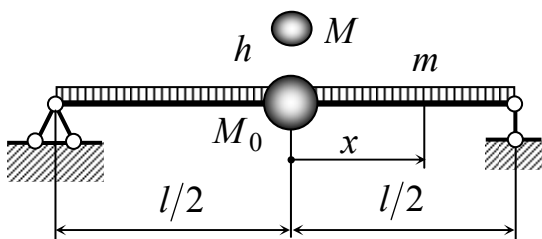


Рис. 10.37

$M = 500$  кг, падающей с высоты  $h = 2$  см, рис. 10.37. Балка длиной  $l = 4$  м имеет жесткость при изгибе  $EJ = 3,68 \cdot 10^6$  Нм<sup>2</sup>.

Найти прогиб и изгибающий момент в месте удара.

**Решение.** В этой задаче нужно суммировать два решения: на воздействие скорости удара и внезапное приложение падающего груза.

Влияние скорости удара рассмотрено в задаче 10.23, см. уравнение (10.78)

$$y(x,t) = vl^2 \xi \eta \sqrt{\frac{m}{EJ}} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}}{\xi - 2(D_{kx} + \xi\lambda C_{kx} - \alpha B_{kx}) \cdot (B_{kx} + \xi\lambda A_{kx} - \alpha D_{kx})} \sin \omega_n t.$$

Влияние внезапного приложения груза  $Q = Mg$  рассмотрено в задаче 10.26, уравнение (10.71)

$$y(x,t) = -\frac{QPl^3}{48EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \cdot \frac{A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}}{\xi - 2(D_{\lambda} + \xi\lambda C_{\lambda} - \alpha B_{\lambda})(B_{\lambda} + \xi\lambda A_{\lambda} - \alpha D_{\lambda})} (1 - \cos \omega t).$$

Общее уравнение движения сечений представляет сумму этих двух решений:

$$y(x,t) = -\frac{Ql^3}{48EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \left( 1 - \cos \omega_n t + 4\lambda_n^2 \sqrt{\frac{2EJh}{mgl^4}} \sin \omega_n t \right) \cdot \frac{Y(x)}{\xi - 2Y'(x)Y'''(x)}.$$

Если производную от этого выражение приравнять нулю

$\frac{d}{dt}(1 - \cos \omega t + \beta \sin \omega t) = 0$ , то найдем экстремальное значение

$$\omega l = \arctg \omega t = -\beta = -4\lambda_n^2 \sqrt{\frac{2EJh}{mgl^4}}, \text{ откуда определяются значения } \sin \omega t = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

и  $\cos \omega t = -\frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}$ , при которых максимальный прогиб прогиб принимает вид

$$y(x) = -\frac{Ql^3}{48EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + 16\lambda^4 \frac{2EJh}{mgl^4}} \right) \frac{A_{kx} + \xi\lambda D_{kx} - \alpha C_{kx}}{\xi - 2(D_{\lambda} + \xi\lambda C_{\lambda} - \alpha B_{\lambda})(B_{\lambda} + \xi\lambda A_{\lambda} - \alpha D_{\lambda})}.$$

Отсюда дифференцированием получаем уравнение изгибающего момента  $M(x) = EJy''(x)$

$$M(x) = -\frac{Ql}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda^2} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + 16\lambda^4 \frac{2EJh}{mgl^4}} \right) \frac{C_{kx} + \xi\lambda B_{kx} - \alpha A_{kx}}{\xi - 2(D_{\lambda} + \xi\lambda C_{\lambda} - \alpha B_{\lambda})(B_{\lambda} + \xi\lambda A_{\lambda} - \alpha D_{\lambda})}.$$

В начале координат (при  $x = 0$ ) находим:

$$y(0) = -\frac{Ql^3}{48EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\lambda^4} \cdot \frac{\check{k}}{\xi - 2Y'(\lambda)Y'''(\lambda)}, \quad M(0) = \frac{Ql}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda^2} \cdot \frac{\alpha \cdot \check{k}}{\xi - 2\xi - 2Y'(\lambda)Y'''(\lambda)}.$$

При заданных условиях задачи находим:

$\xi = \frac{M_0 + M}{ml} = \frac{1000 + 500}{400 \cdot 4} = 0,9375$  - отношение сосредоточенных масс к массе балки;

первый корень частотного уравнения (9.76)  $\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda + \frac{2}{\xi \lambda}$ ,  $\lambda_1 = 1,204425$ ;

динамический коэффициент прогиба

$$\begin{aligned}
K_y &= \frac{12}{\lambda^4} \cdot \frac{\tilde{k}}{\xi - 2Y'(\lambda)Y'''(\lambda)} = \\
&= \frac{12}{\lambda^4} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + 16\lambda^4 \frac{2EJh}{mgl^4}} \right) \frac{1}{\xi - 2(D_\lambda + \xi\lambda C_\lambda - \alpha B_\lambda)(B_\lambda + \xi\lambda A_\lambda - \alpha D_\lambda)} = \\
&= \frac{12}{1,204425^4} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + 16 \cdot 1,204425^4 \frac{2 \cdot 3,68 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{400 \cdot 9,81 \cdot 4^4}} \right) \frac{1}{5,71212} = \\
&= \frac{12}{1,204425^4} \cdot \frac{3,43868}{5,71212} = 3,43386.
\end{aligned}$$

Динамический коэффициент изгибающего момента

$$K_M = \frac{4}{\lambda^2} \cdot \frac{\alpha \cdot \tilde{k}}{\xi - 2Y'(\lambda)Y'''(\lambda)} = \frac{4}{1,204425^2} \cdot \frac{1,94284 \cdot 3,43868}{5,71212} = 3,22501.$$

Здесь использованы значения функций Крылова аргумента  $\lambda$ :

$$A(\lambda) = 1,087791, B(\lambda) = 1,2255621, C(\lambda) = 0,729562, D(\lambda) = 0,2919281,$$

$$\alpha = (A + \xi\lambda D / C = 1,942838$$

Заметим, что динамические коэффициенты по прогибам и изгибающим моментам не одинаковы.

### 10.3.1.9. Вынужденные колебания при гармонических нагрузках

Если на весомую систему действует возмущающая гармоническая нагрузка  $p(x, t) = p(x)\sin\theta t$ , то в установившемся режиме колебаний уравнение движения сечений стержней системы будет иметь вид гармонической функции с частотой возмущения  $\theta$ :

$$y(x, t) = y(x)\sin\theta t \quad (10.72.)$$

При сосредоточенной возмущающей силе  $P(t) = P\sin\theta t$ , приложенной в сечении  $x = a$ , ее амплитудное значение  $P$  в уравнении изогнутой оси (9.50) учитывается слагаемым, аналогичным слагаемому, содержащему  $P_0$ , т.е. слагаемым

$$\frac{P}{k^3 EJ_z} D_{k(x-a)}.$$

Распределенная нагрузка учитывается интегралом  $\int_{u_n}^{u_k} \frac{q(x)dx}{k^3 EJ_z} D_{k(x-u)}$  по

длине загруженного участка.

При наличии сосредоточенной массы  $M$  в сечении  $a$  при колебаниях будет возникать сила инерции  $P_u = -M\ddot{y}(a)$ , где ускорение  $\ddot{y}(a) = -\theta^2 y(a)\sin\theta t$ ,



т.е.  $P_u = M\theta^2 y(a)\sin\theta t$ . Учитывая, что  $k^4 = \frac{m\theta^2}{EJ_z}$ , силу инерции представим в виде:  $P_u = \frac{M}{m} EJ_z k^4 y(a)\sin\theta t$ . Ее амплитудное значение  $\frac{Mk^4 EJ_z}{m} y(a)$  учитывается аналогично начальному параметру  $P_0$ .

Так же, как и при собственных колебаниях, рассматриваются условия закрепления балки на опорах, что приведёт к системе неоднородных уравнений, позволяющей вычислить начальные параметры. После этого дифференцированием уравнения изогнутой оси можно найти все остальные расчётные уравнения.

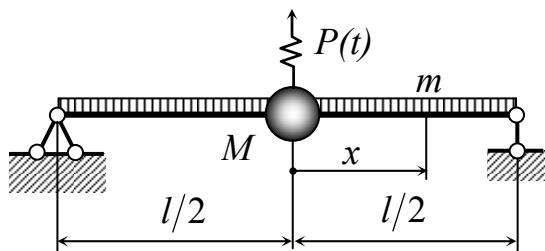


Рис. 10.38

**Задача 10.29** Двухопорная весомая балка (погонная масса  $m=400$  кг/м) с сосредоточенной массой  $M=1500$  кг посередине пролета, испытывает воздействие гармонической силы  $P(t) = P \sin \theta t$  с заданным амплитудным значением  $P=2750$  Н и частотой возмущения  $\theta=30$  с<sup>-1</sup> (рис. 10.38).

Найти расчетный изгибающий момент и наибольшие напряжения, если пролет двутавровой балки  $l=4$  м, № 22,  $EJ_z=5 \cdot 10^6$  Нм<sup>2</sup>.

**Решение.** Приняв начало координат посередине пролета балки, уравнение изогнутой оси (10.50.) запишем в виде:

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ_z} D_{kx}.$$

Здесь  $P_0$  - поперечная сила в начале координат, равная половине амплитудного значения возмущающей силы и силы инерции колеблющейся массы, т.е.

$$P_0 = \frac{P}{2} + \frac{P_u}{2} = \frac{P}{2} + \frac{Mk^4 EJ_z}{2m} y_0.$$

Обозначив  $\xi = \frac{M}{ml}$ ,  $\lambda = \frac{kl}{2}$ , получим

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{P_0}{2k^3 EJ_z} D_{kx}.$$

Дважды дифференцируя, найдем уравнение изгибающих моментов:

$$M(x) = EJ_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = EJ_z y_0 k^2 (C_{kx} + \xi \lambda B_{kx}) + M_0 A_{kx} + \frac{P}{2k} B_{kx}.$$

Из условия  $y(l/2) = 0$ ,  $M(l/2) = 0$  получим систему уравнений:

$$y_0 (A_\lambda + \xi \lambda D_\lambda) + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_\lambda = -\frac{P}{2k^3 EJ_z} D_\lambda,$$

$$k^2 EJ_z y_0 (C_\lambda + \xi \lambda B_\lambda) + M_0 A_\lambda = -\frac{P}{2k} B_\lambda.$$

Отсюда находим начальные параметры:

$$y_0 = \frac{P}{2k^3 EJ_z} \frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{A_\lambda^2 - C_\lambda^2 + \xi \lambda (A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda)},$$

$$M_0 = -\frac{P}{2k} \frac{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{A_\lambda^2 - C_\lambda^2 + \xi \lambda (A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda)}.$$

Учитывая известные сочетания функций А.Н. Крылова (см. Приложение 2), формулы начальных параметров представим в виде:

$$y_0 = \frac{Pl^3}{48EJ_z} k_y, \quad M_0 = -\frac{Pl}{4} k_M,$$

где

$$k_y = \frac{3}{\lambda^3} \frac{\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda}{2 - \xi \lambda (\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda)}, \quad k_M = \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda}{2 - \xi \lambda (\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda)}.$$

Если знаменатель этих формул приравнять нулю, то получим частотное уравнение (10.76)

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda + \frac{2}{\xi \lambda}. \quad (10.73)$$

При заданных условиях, когда  $\xi = \frac{M}{ml} = \frac{1500}{400 \cdot 4} = 0,9375$ , из этого уравнения найдем  $\lambda_1 = 1,20442$ ,  $\lambda_2 = 4,12931$ , и первые две частоты собственных колебаний будут такими:

$$\omega_1 = \left( \frac{2\lambda_1}{l^2} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{m}} = \left( \frac{2 \cdot 1,20442}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{400}} = 40,5466 \text{ с}^{-1} \quad \omega_2 = 481,34 \text{ с}^{-1}.$$

При заданной частоте возмущения  $\theta = 30 \text{ с}^{-1}$  находим

$$\lambda(\theta) = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{m\theta^2}{EJ_z}} = \frac{4}{2} \sqrt{\frac{400 \cdot 30^2}{5 \cdot 10^6}} = 1,0360 \text{ с}^{-1},$$

чему соответствуют  $\operatorname{tg} \lambda = 1,6881$ ,  $\operatorname{th} \lambda = 0,7763$ . При этом  $y_0 = 2,2075 \frac{Pl^3}{48EJ_z}$ ,

$$M_0 = -2,1346 \frac{Pl}{4}.$$

Динамические напряжения:

$$\sigma_{дин} = \frac{M_{расч}}{W_z} = 2,1346 \frac{2750}{254} = 23,11 \text{ МПа}$$

Статические напряжения:

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{ст}}{W_z} = \frac{1}{W_z} \left( \frac{Ql}{4} + \frac{ql^2}{8} \right) = \frac{9,81}{254 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{1500 \cdot 4}{4} + \frac{400 \cdot 4^2}{8} \right) = 88,83 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Полные расчетные коэффициенты по прогибам  $k_y$  и по изгибающим мо-

ментам  $k_M$  неодинаковы.

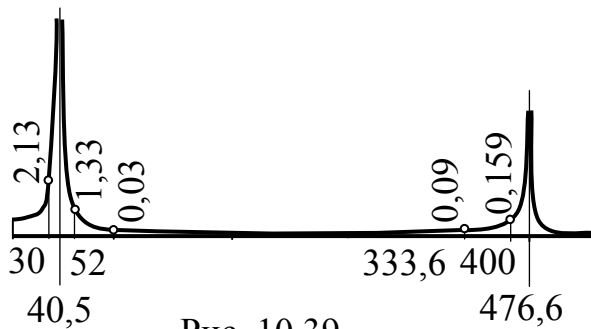


Рис. 10.39

На рисунке 10.39 показан график изменения динамического коэффициента  $k_M$  при изменении частоты возмущения  $\theta$  в пределах первой  $\omega_1 = 40,54 \text{ с}^{-1}$  и второй  $\omega_2 = 476,6 \text{ с}^{-1}$  собственных частот.

Из графика видно, что за первым резонансом динамическое влияние резко снижается практи-

чески до нуля.

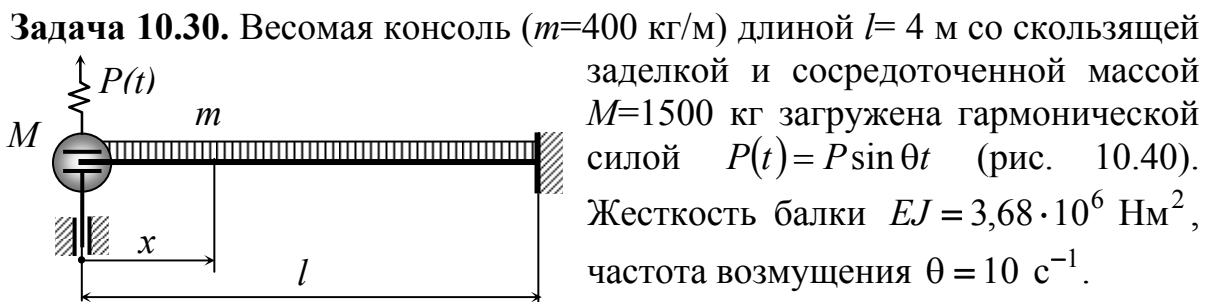


Рис. 10.40

**Задача 10.30.** Весомая консоль ( $m=400 \text{ кг/м}$ ) длиной  $l=4 \text{ м}$  со скользящей заделкой и сосредоточенной массой  $M=1500 \text{ кг}$  загружена гармонической силой  $P(t) = P \sin \theta t$  (рис. 10.40). Жесткость балки  $EJ = 3,68 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$ , частота возмущения  $\theta = 10 \text{ с}^{-1}$ .

Найти динамические коэффици-

енты.

**Решение.** Уравнения изогнутой оси балки:

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{M_0}{k^2 EJ} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ} D_{kx}.$$

Здесь  $P_0 = P + P_{и}$ ,  $P_{и0} = -M\ddot{y}(0) = M\theta^2 y_0 = M \frac{k^4 EJ}{m} y_0$  - амплитудное значение возмущающей силы и сила инерции колеблющейся массы.

С учетом начального параметра  $P_0$  уравнения изогнутой оси и углов поворота принимают вид:

$$y(x) = y_0 (A_{kx} + \xi \lambda D_{kx}) + \frac{M_0}{k^2 EJ} C_{kx} + \frac{P}{k^3 EJ} D_{kx},$$

$$y'(x) = y_0 k (D_{kx} + \xi \lambda C_{kx}) + \frac{M_0}{k EJ} B_{kx} + \frac{P}{k^2 EJ} C_{kx}.$$

Из условий  $y(l) = 0$ ,  $y'(l) = 0$  с учетом известных сочетаний функций Крылова (см. Приложение 2) получаем систему уравнений, откуда находим начальные параметры:

$$y_0 = \frac{P}{k^3} \frac{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda + \xi \lambda (B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2)} = \frac{Pl^3}{12 EJ} \frac{12}{\lambda^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda}}{\xi \lambda \left( \frac{1}{\text{ch}\lambda \cdot \cos\lambda} \right) - (\text{tg}\lambda + \text{th}\lambda)},$$

$$M_0 = -\frac{P}{k} \cdot \frac{A_\lambda C_\lambda - D_\lambda^2}{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda + \xi \lambda (B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2)} = -\frac{Pl}{2k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{th} \lambda}{(\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda) - \xi \lambda \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda} \right)}$$

Если знаменатель этих формул, представляющий определитель системы,  $Det = A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda + \xi \lambda (B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) - \xi \lambda (1 - \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda)$  приравнять нулю, то получим частотное уравнение:

$$\operatorname{tg} \lambda = \xi \lambda \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda} - 1 \right) - \operatorname{th} \lambda.$$

Первый корень этого уравнения  $\lambda_1 = 1,7389$ , чему соответствует частота основного тона собственных колебаний балки:

$$\omega_1 = \left( \frac{\lambda_1}{l^2} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{m}} = \left( \frac{1,7389}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{400}} = 21,13 \text{ с}^{-1}.$$

При заданной частоте возмущения  $\theta = 10 \text{ с}^{-1}$

$$\lambda(\theta) = kl = l^4 \sqrt{\frac{m\theta^2}{EJ_z}} = 4^4 \sqrt{\frac{400 \cdot 10^2}{3,68 \cdot 10^6}} = 1,2916 \text{ с}^{-1}.$$

По этому аргументу находим гиперголо-тригонометрические функции, а затем вычисляем динамические коэффициенты по прогину и изгибающему моменту:

$$k_y = \frac{12}{\lambda^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda}}{\xi \lambda \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda} \right) - (\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda)} = 1,3518,$$

$$k_M = \frac{2}{k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{th} \lambda}{(\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda) - \xi \lambda \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda} \right)} = 1,3189.$$

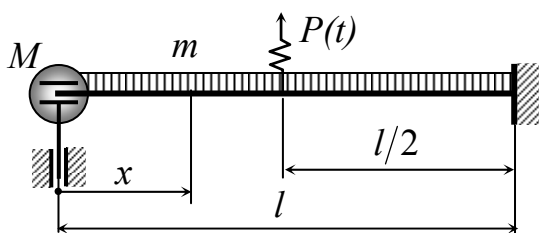


Рис.10.41

**Задача 10.31** Весомая консоль ( $m=400$  кг/м) длиной  $l=4$  м со скользящей заделкой и сосредоточенной массой  $M=1500$  кг загружена гармонической силой  $P(t) = P \sin \theta t$  (рис. 10.41). Жесткость балки  $EJ_z = 5 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$ , частота возмущения

$$\theta = 15 \text{ с}^{-1}.$$

Найти динамические коэффициенты.

**Решение.** Уравнения изогнутой оси и углов поворота балки:

$$y(x) = y_0(A_{kx} + \xi\lambda D_{kx}) + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{P}{k^3 EJ_z} D_{k(x-0,5l)},$$

$$y'(x) = y_0 k(D_{kx} + \xi\lambda C_{kx}) + \frac{M_0}{kJ_z} B_{kx} + \frac{P}{k^2 EJ_z} C_{k(x-0,5l)}.$$

Из условий  $y(l) = 0$ ,  $y'(l) = 0$  получаем систему уравнений, откуда находим начальные параметры:

$$y_0 = \frac{Pl^3}{24EJ_z} \cdot \frac{24}{\lambda^3} \frac{C_\lambda C_{0,5\lambda} - B_\lambda D_{0,5\lambda}}{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda + \xi\lambda(B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2)} = \frac{Pl^3}{24EJ_z} k_y,$$

$$M_0 = -\frac{Pl}{8} \cdot \frac{8}{\lambda} \frac{A_\lambda C_{0,5\lambda} - D_\lambda D_{0,5\lambda} + \xi\lambda(D_\lambda C_{0,5\lambda} - C_\lambda D_{0,5\lambda})}{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda + \xi\lambda(B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2)} = -\frac{Pl}{8} k_M,$$

Если знаменатель этих формул, представляющий главный определитель системы,

$$Det = A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda + \xi\lambda(B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2) = \frac{1}{2}(\text{ch}\lambda \sin\lambda + \text{sh}\lambda \cos\lambda) - \xi\lambda(1 - \text{ch}\lambda \cos\lambda)$$

приравнять нулю, то получим частотное уравнение:

$$\text{tg}\lambda = \xi\lambda \left( \frac{1}{\text{ch}\lambda \cos\lambda} - 1 \right) - \text{th}\lambda.$$

Первый корень этого уравнения  $\lambda_1 = 1,7389$ , чему соответствует частота основного тона собственных колебаний балки:

$$\omega_1 = \left( \frac{\lambda_1}{l^2} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{m}} = \left( \frac{1,7389}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{400}} = 21,13 \text{ с}^{-1}.$$

При заданной частоте возмущения  $\theta = 15 \text{ с}^{-1}$

$$\lambda(\theta) = kl = l^4 \sqrt{\frac{m\theta^2}{EJ_z}} = 4^4 \sqrt{\frac{400 \cdot 15^2}{5 \cdot 10^6}} = 1,4651 \text{ с}^{-1},$$

и соответствующие функции:  $A_\lambda = 1,1925$ ,  $B_\lambda = 1,5215$ ,  $C_\lambda = 1,0871$ ,  $D_\lambda = 1,5271$ ,  $\det = 0,7198$ ,  $C_{0,5\lambda} = 0,2685$ ,  $D_{0,5\lambda} = 0,0655$ .

Динамические коэффициенты:

$$k_y = 2,0377, \quad k_M = 2,8996.$$

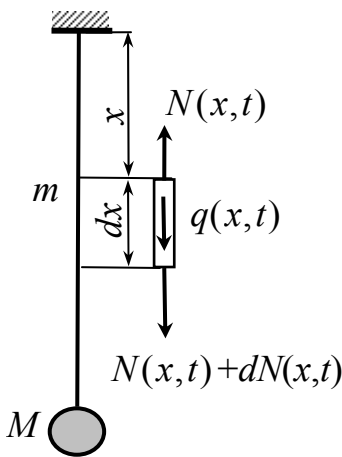
## 10.4. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕСОМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для изучения продольных колебаний рассмотрим упругий стержень с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  на конце стержня, рис.10.42.

Из условия равновесия элемента  $dx$  получаем

$$dN(x,t) + q(x,t)dx = 0, \quad (10.74)$$

где:  $dN(x,t)$  - приращение внутреннего усилия,  $q(x,t) = -m\ddot{u}(x,t) + p(x,t)$  - интенсивность сил инерции и возмущающей нагрузки (без учета статического нагружения).



По закону Гука  $N(x,t) = EF \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ , а

$$dN(x,t) = \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx = EF \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx$$

и равенство (10.74) приводит к дифференциальному уравнению продольных перемещений сечений при динамическом воздействии нагрузки, т.е. к волновому уравнению

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u''(x,t) = f(x,t), \quad (10.75)$$

Рис. 10. 42

где обозначено:  $c^2 = EF / m$ ,  $f(x,t) = q(x,t) / m$ .

Выясним, что собою представляет параметр стержня  $c$ . Так как перемещения сечений обозначены через  $u$ , то скорость движения деформаций будет  $v = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \varepsilon \dot{x}$ , где  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  - относительная де-

формация, а  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  - скорость волны деформаций.

Рассмотрим уравнение количества движения  $v \cdot m dx = N \cdot dt$ , откуда находим  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{N}{mv} = \frac{F\sigma}{m \cdot \varepsilon \dot{x}} = \frac{EF\varepsilon}{\varepsilon m \dot{x}}$ . Отсюда получаем

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{EF}{m}} = c$$

Следовательно, параметр  $c$  представляет собою скорость волны деформаций. Так для стального стержня с модулем упругости  $E=2 \cdot 10^5$  МПа и плотностью материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> скорость волны деформаций равна 5000 м/с.

При отсутствии возмущающей нагрузки уравнение (9.75) будет однородным, что соответствует свободным (собственным) колебаниям.

### 10.4.1. Общая теория собственных продольных колебаний

Решение однородного уравнения, полученного из (10.75) при  $f(x,t) = 0$  ищем по методу Фурье, представляя уравнение продольных перемещений сече-

ний стержня в виде произведения двух функций

$$u(x, t) = u(x)T(t), \quad (10.76)$$

подстановка которого в (10.75) приводит к зависимости

$$c^2 \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)},$$

которая не зависит ни от координаты  $x$ , ни от времени  $t$  и отношение производных к соответствующим функциям является постоянной величиной, обозначим ее через  $\omega^2$ :

$$c^2 \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2.$$

Отсюда получаем два обыкновенных уравнения. Одно из них  $\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$  имеет известное решение вида

$$T(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

или

$$T(t) = C \sin(\omega t + \mu).$$

Решение второго уравнения

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

представим в виде гармонических функций

$$u(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (10.77)$$

Так получаем уравнение движения сечений стержня при продольных колебаниях (10.76) для произвольной гармоники

$$u(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) \sin(\omega t + \mu). \quad (10.78)$$

Отсюда дифференцированием находим уравнение продольных усилий

$$N(x, t) = EFu'(x, t) = EFk(-A \sin kx + B \cos kx) \sin(\omega t + \mu) \quad (10.79)$$

и уравнение скорости движения сечений

$$v(x, t) = \omega(A \cos kx + B \sin kx) \cos(\omega t + \mu). \quad (10.80)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  выразим через начальные параметры из условий  $u(0, t) = u_0$ ,  $N(0, t) = N_0$ , откуда получаем  $A = u_0$ ,  $B = \frac{N_0}{kEF}$ .

Но учитывая оба условия (10.79), (10.80), умножив (10.78) на  $\sin kx$ , а (10.80) на  $\cos kx$  и суммируя, получим  $B = \frac{v_0}{\omega} \left( 1 + \frac{N_0}{kEF} \frac{\omega}{v_0 \cdot \operatorname{tg} kl} \right)$ . Так как для свободного торца стержня  $\operatorname{tg} kl = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(2n-1) = \infty$ ,  $N_0 = -EF \frac{v_0}{c}$ , то  $B = \frac{v_0}{\omega}$  (см. задачи 10.32. 10.33).

Следовательно, уравнение движения сечений можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( u_0 \cos kx + \frac{N_0}{kEF} \sin kx \right) \sin(\omega t + \mu). \quad (10.81)$$

или

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( u_0 \cos kx + \frac{v_0}{\omega} \sin kx \right) \sin(\omega t + \mu) \quad (10.82)$$

для стержня с незагруженным торцом.

Спектр частот собственных колебаний вычисляется по формуле

$$\omega = kc = k \sqrt{\frac{EF}{m}} = \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}}, \quad (10.83)$$

а начальная фаза (см. (10.68))

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{u(x, 0)}{v(x, 0)} \omega. \quad (10.84)$$

Из граничных условий, выразив один начальный параметр через другой, уравнение движения при продольных колебаниях можно представить через собственные функции  $X(x)$  и амплитудное перемещение  $D$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X(x) \sin(\omega_n t + \mu_n). \quad (10.85)$$

#### 10.4.2. Свойства собственных функций продольных колебаний

Так же, как при поперечных колебаниях, здесь собственные функции будут ортогональными при отсутствии сосредоточенных масс для стержней с одним участком. В более общем случае (для стержней с несколькими участками и сосредоточенными массами) собственные функции будут ортогональными с весом  $\rho(x)$ .

$$\rho(x) = m(1 + \xi l \delta(x - a)). \quad (10.86)$$

При продольных колебаниях свойства собственных функций также можно определять из дифференциальной зависимости [9]:

$$(k_n^2 - k_m^2) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = |X_n X'_m - X_m X'_n|_0^l. \quad (10.87)$$

Квадрат нормы собственных функций продольных колебаний



$$\Delta_n^2 = \int_l \rho(x) X^2(x) dx. \quad (10.88)$$

находится из зависимости (при дифференцировании по  $z = kx$ )

$$\int_0^l X^2(x) dx = \frac{1}{2k} \left[ kx(X^2 + (X')^2) - X \right] \Big|_0^l. \quad (10.89)$$

### 10.4.3. Собственные продольные колебания упругих стержней

Собственные колебания стержневых систем можно вызвать отклонением системы от положения статического равновесия или сообщением системе некоторой скорости в определенном сечении.

При этом уравнение движения сечений определяется одной из вышеприведенных формул (10.81) или 10.82), а частота колебаний вычисляется по (10.83).

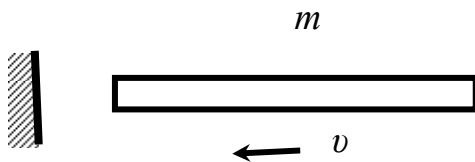


Рис.10.43

**Задача 10.32** Упругий стержень с погонной массой  $m$  со скоростью  $v$  налетает на абсолютно жесткую опору, рис. 10.43.

Определить напряженно-деформированное состояние стержня.

**Решение.** Уравнение продольных колебаний сечений стержня примем в соответствии с (10.81)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( u_0 \cos kx + \frac{N_0}{kEF} \sin kx \right) \sin(\omega t + \mu).$$

При выборе начала координат на опоре (рис. 10.44)  $u_0 = 0$ , а согласно (10.84)  $\mu = 0$ . Значит, в этом случае уравнение движения сечений принимает вид

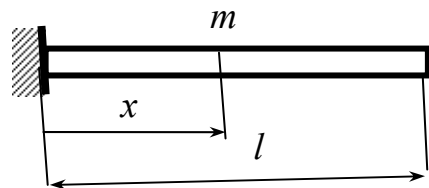


Рис. 10.44

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_0}{kEF} \sin kx \cdot \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n(x) \cdot \sin \omega t,$$

а скорость движения сечений

$$v(x, t) = \dot{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \omega_n X_n(x) \cdot \cos \omega t.$$

Дифференцированием уравнения перемещений по переменной  $x$  находим уравнение продольных усилий

$$N(x, t) = EFu'(x, t) = N_0 \sum_{n=1}^{\infty} \cos kx \cdot \sin \omega t.$$

Из условия свободного от напряжений торца стержня  $N(l) = 0$  получаем частотное уравнение  $\cos kl = 0$ , откуда находим собственные числа

$$\lambda = kl = \frac{\pi}{2}(2n - 1).$$

Рассмотрим начальное условие, требующее, чтобы скорость движения сечений в начальное время была равна скорости стержня до удара во всех сечениях, кроме сечения в начале координат

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \omega_n X_n(x) = -v.$$

Так как при отсутствии на стержне сосредоточенных масс собственные функции  $X_n(x)$  ортогональны, то по схеме Фурье уравнение начального условия следует умножить на собственную функцию другого порядка  $X_m(x)$  и проинтегрировать по длине стержня

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \omega_n \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = -v \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l X_n(x) dx.$$

Вследствие ортогональности собственных функций в левой части этого равенства все интегралы равны нулю, кроме тех, у которых индексы совпадают, т.е. в левой части равенства получаем квадрат нормы собственных функций  $\Delta_n^2$

$$\Delta_n^2 = \int_0^l X^2 dx = \int_0^l \sin^2 kx dx = \int_0^l \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4} \sin 2kx \Big|_0^l = \frac{l}{2}.$$

Интеграл правой части начального условия

$$\int_0^l X(x) dx = \int_0^l \sin kx dx = \frac{1}{k} = \frac{l}{\lambda},$$

а начальное условие принимает вид  $D_n \omega_n \Delta_n^2 = -v \frac{l}{\lambda_n}$ , откуда находим

$$D_n = -\frac{vl}{\lambda_n \omega_n \Delta_n^2} = -\frac{vl}{\lambda_n k_n c l} = -2 \frac{vl}{c \lambda_n^2}.$$

Так получаем уравнения движения сечений и продольных усилий:

$$u(x,t) = 2 \frac{vl}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin kx \cdot \sin \omega t,$$

$$N(x,t) = EFu'(x,t) = EF \frac{2vl}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\lambda_n^2} \cos kx \cdot \sin \omega t = 2 \frac{v}{c} EF \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \cos kx \cdot \sin \omega t.$$

Внутреннее усилие в начале координат

$$N(x=0) = -2 \frac{v}{c} EF \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)} \cos kx = -\frac{4v}{\pi c} EF \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = -\frac{4v}{\pi c} EF \cdot \frac{\pi}{4} = -EF \frac{v}{c}.$$

Перемещение на конце стержня

$$u(l) = -\frac{8vl}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{(2n-1)^2} = \frac{8vl}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2} = -\frac{8vl}{\pi^2 c} \cdot \frac{\pi^2}{8} = -\frac{vl}{c}. \quad (10.90)$$

**Задача 10.33.** На упругий стержень, защемленный с одной стороны, со скоростью  $v$  налетает некоторая масса, которая после удара на стержне не удерживается, рис. 9.45

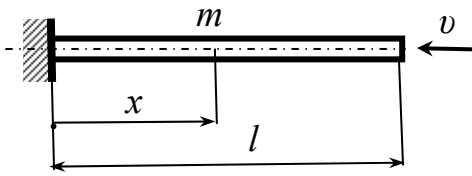


Рис.10.45

Определить напряженно-деформированное состояние стержня.

**Решение.** Примем уравнение деформированного стержня в виде (10.82) с учетом отсутствия перемещения в начале координат

$$u(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_0}{\omega} \sin kx \sin \omega t.$$

Дифференцированием находим уравнения внутренних усилий и скорости движения сечений:

$$N(x, t) = EFu'(x) = -EFk \frac{v}{\omega} \cos kx \cdot \sin \omega t,$$

$$v(x, t) = \dot{u}(x) = -v \sin kx \cdot \cos \omega t.$$

Приравнявая продольное усилие на торце стержня  $N(l) = 0$ , получаем частотное уравнение  $\cos kl = \cos \lambda = 0$ , откуда, так же, как и в предыдущей задаче, находим собственные числа  $\lambda = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$  и спектр частот собственных колебаний (10.83)

$$\omega = \frac{\pi}{2l}(2n - 1) \sqrt{\frac{EF}{m}}.$$

Рассмотрим уравнение перемещений с учетом сообщения скорости в торцевом сечении, приняв сосредоточенное воздействие скорости как условно распределенное по длине стержня, используя дельта-функцию Дирака.

Для произвольной гармоники

$$u_n(l) = - \int_0^l \delta(x - l) \frac{v}{\omega_n} \sin k_n x dx = - \frac{v}{\omega_n} \sin k_n l = - \frac{v}{\omega_n} \sin \lambda_n.$$

Суммируя гармоники перемещений, получим полное перемещение на торце стержня

$$u(l) = -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n}{\omega_n} = -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n}{k_n c} = - \frac{vl}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n} = -2 \frac{vl}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n - 1} = - \frac{vl}{2c}.$$

Здесь использована известная формула суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n - 1} = \frac{\pi}{4}$ .

Продольное усилие в начале координат, при  $x = 0$

$$N(0) = EFu'(0) = -EFk \frac{v}{\omega} = -EF \frac{v}{c} = -v \sqrt{EFm}. \quad (10.91)$$

**Задача 10.34.** На упругий стержень, защемленный с одной стороны, со скоростью  $v$  налетает неупругая масса  $M$ , которая вызывает колебания стержня вместе с этой массой, рис. 10.46.

Определить напряженно-деформированное состояние стержня.

**Решение.** Уравнение движения сечений (10.81) с учетом отсутствия начального перемещения  $u_0$ , когда  $\mu=0$ , имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{0n}}{k_n EF} \sin k_n x \sin \omega_n t = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin k_n x \sin \omega_n t = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n(x) \sin \omega_n t.$$

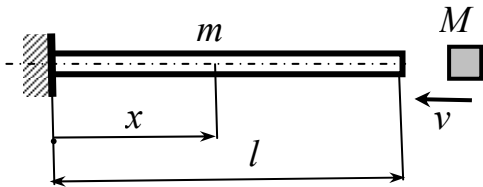


Рис. 10.46

В этом уравнении продольное усилие  $N(x) = N_0 \cos kx$ , которое при  $x=l$  равно силе инерции  $P_{\text{и}} = -M\ddot{u}(l) = M\omega^2 u(l)$ . Из этого равенства

$$N_0 \cos \lambda = Mk^2 c^2 \frac{N_0}{kEF} \sin \lambda = \xi \lambda N_0 \sin \lambda,$$

$\xi = \frac{M}{ml}$ ,  $\lambda = kl$ , получаем частотное уравнение

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{\xi \lambda}. \quad (10.92)$$

Собственные функции  $X(x) = \sin kx$  ортогональны с весом  $\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x-l)$ .

Квадрат нормы собственных функций (9.88)

$$\Delta_n^2 = \int_l^l \rho(x) X^2(x) dx = \int_0^l (1 + \xi l \delta(x-l)) X^2(x) dx = \int_0^l X^2(x) dx + \xi l X^2(l).$$

Интеграл квадрата нормы от функции  $X^2(x) = \sin^2 kx$  можно найти непосредственно или по (10.89)

$$\int_0^l X^2(x) dx = \frac{1}{2k} [kl(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) - \sin \lambda \cos \lambda] = \frac{l}{2} (1 - \xi \sin^2 \lambda).$$

Рассмотрим начальное условие, требующее, чтобы в начале колебаний скорость движения сечений была равна нулю везде, кроме торцевого сечения

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \omega_n X_n(x) = -ve(x-l).$$

Это равенство умножаем на вес  $\rho(x)$ , функцию  $X_m(x)$  и интегрируем по длине стержня

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l D_n \omega_n \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = -\alpha v \int_0^l e(x-l) \rho(x) X_m(x) dx.$$

Интеграл левой части этого равенства приводит к квадрату нормы собственных функций (10.88)

$$\Delta_n^2 = \int_l^l \rho(x) X^2(x) dx = \int_0^l X^2(x) dx + \xi l X(l)^2 = \frac{l}{2} (1 - \xi \sin^2 \lambda) + \xi l \sin^2 \lambda,$$

т.е.

$$\Delta_n^2 = \frac{l}{2} (1 + \xi \sin^2 \lambda).$$

В правой части равенства, описывающего начальное условие, первый интеграл равен нулю благодаря наличию единичной функции  $\epsilon(x-l)$ , а второй, благодаря наличию функции Дирака равен собственной функции трца стержня

$$\int_0^l \xi l \delta(x-l) X(x) dx = \xi l \sin \lambda.$$

Следовательно, начальное условие примет вид  $D_n \omega_n \Delta_n^2 = -v \xi l \sin \lambda$  откуда находим начальный параметр

$$D_n = -\frac{2v\xi}{\omega_n} \frac{\sin \lambda_n}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} = -\frac{2v\xi l}{c \lambda_n} \frac{\sin \lambda_n}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n}$$

и уравнение движения сечений определено

$$u(x,t) = -\frac{2v\xi l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\sin \lambda \cdot \sin kx}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \sin \omega_n t. \quad (10.93)$$

Отсюда дифференцированием находим продольное усилие

$$N(x,t) = EFu'(x,t) \text{ и напряжение } \sigma = N/F \quad \sigma(x,t) = -\frac{2Ev\xi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \cdot \cos kx}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \sin \omega_n t.$$

**Задача 10.35.** Упругий канат с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  нагружен силой  $P$ , которая внезапно снимается, рис. 10.47

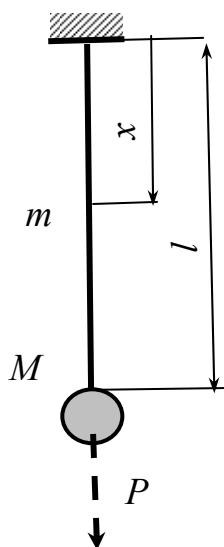


Рис.10.47

Найти расчетные уравнения перемещений и внутренних усилий.

**Решение.** При выборе начала координат на опоре  $u_0 = 0$ , значит  $\mu = \pi/2$  (см. (10.84)).

На основании (19.81) получаем уравнение движения сечений стержня при колебаниях

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{0n}}{k_n EF} \sin k_n x \cdot \cos \omega_n t = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) \cdot \cos \omega_n t.$$

Дифференцированием находим уравнение продольных усилий

$$N(x) = EFu'(x) = N_0 \cos kx.$$

Из граничного условия, требующего, чтобы после снятия нагрузки усилие на конце стержня было равно силе инерции колеблющейся массы, получаем:

$$P_u = -M\ddot{u}(l) = M\omega^2(l) = Mk^2 \frac{EF}{m} u(0) = k\xi l N_0 \sin \lambda, \quad \xi = \frac{M}{ml}, \quad \lambda = kl.$$

Из условия  $N_0 \cos \lambda = \xi \lambda \sin \lambda$  получаем частотное уравнение

$$\xi \lambda \operatorname{tg} \lambda = 1. \quad (10.94)$$

Рассмотрим начальное условие, требующее, чтобы в начале колебаний перемещения сечений были равны статическим, вызванным силой  $P$ , т.е.  $u(x,0) = \varepsilon x$ , где относительная деформация  $\varepsilon = \sigma / E$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) = \varepsilon x.$$

При наличии сосредоточенной массы на стержне собственные функции будут ортогональными с весом

$$\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x - l).$$

Уравнение начального условия умножаем на вес  $\rho(x)$ , собственную функцию  $X_m(x)$  и интегрируем по длине стержня:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = \varepsilon \int_0^l \rho(x) x X_m(x) dx.$$

Интеграл левой части этого равенства приводит к квадрату нормы собственных функций

$$\Delta_n^2 = \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx = \int_0^l X_n^2(x) dx + \xi l X_n^2(l) = \frac{l}{2} (1 + \xi \sin^2 \lambda).$$

Интеграл правой части равенства начального условия

$$\int_0^l \rho(x) x X(x) dx = \int_0^l (1 + \xi l \delta(x - l)) x X(x) dx = \int_0^l x X(x) dx + \xi l^2 X(l)$$

берем по частям, в результате чего получаем

$$\int_0^l \rho(x) x X(x) dx = -\xi l^2 \sin \lambda + \frac{1}{k^2} \sin \lambda + \xi l^2 \sin \lambda = \frac{l^2}{\lambda^2} \sin \lambda.$$

Так из начального условия находим амплитудное значение перемещения

$$C_n = \varepsilon \frac{l^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin \lambda}{\Delta_n^2} = \frac{P}{EF} \cdot \frac{l^2}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{l} \frac{\sin \lambda}{1 + \xi \sin^2 \lambda} = 2 \frac{Pl}{EF} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \frac{\sin \lambda}{1 + \xi \sin^2 \lambda}$$

и уравнение движения сечений принимает вид:

$$u(x,t) = \frac{Pl}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\sin \lambda_n \cdot \sin k_n x}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \cos \omega_n t \quad (10.95)$$

Отсюда дифференцированием находим напряжения

$$\sigma(x,t) = Eu'(x,t) = \varepsilon E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \cdot \frac{\sin \lambda_n \cdot \cos k_n x}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \cos \omega_n t .$$

Ряд (10.95) сходится очень быстро, так при  $\xi=1$   $\lambda_1=0,86$  и первый член ряда дает значение

$$u(l,t) = 0,986 \frac{Pl}{EF} \cos \omega_1 t .$$

#### 10.4.4. Вынужденные продольные колебания упругих стержней

Вынужденные колебания возбуждаются действием возмущающей нагрузки, которой может быть внезапное приложение силы, гармоническая нагрузка или удар.

Уравнение движения сечений стержня при возмущающей нагрузке интенсивностью  $p(x,t)$  имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{m\omega_n^2 \Delta_n^2} \int_0^l \rho(x) X_n(x) dx \int_0^t p(x,t) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad (19.96)$$

В случае загрузки неизменяющейся во времени, когда  $p = \text{const}$  это уравнение принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{m\omega_n^2 \Delta_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \int_0^l \rho(x) X_n(x) q(x) dx . \quad (10.97)$$

В случае гармонической нагрузки  $P(t) = P \sin \theta t$  с заданным амплитудным значением  $P$  и циклической частотой возмущения  $\theta$  уравнение движения сечений определяется формулой [8]

$$u(x,t) = \frac{\sin \theta t}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{(\omega_n^2 - \theta_n^2) \Delta_n^2} \int_0^l q(x) \rho(x) X_n(x) dx . \quad (10.98)$$

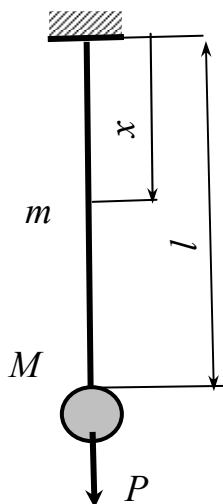


Рис. 10.48

**Задача 10.36** Упругий канат с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  загружен внезапно приложенной силой  $P$ , рис.10.48

Определить напряженно-деформированное состояние стержня.

**Решение.** Используем уравнение движения сечений (10.96). Собственные функции  $X_n(x) = \sin kx$ , квадрат

нормы собственных функций  $\Delta_n^2 = \frac{l}{2}(1 + \xi \sin^2 \lambda)$ , частотное уравнение  $\xi \lambda \operatorname{tg} \lambda = 0$  и весовая функция  $\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x - l)$  уже известны из двух предыдущих задач.

Вычислим интеграл уравнения (10.96), подставляя вместо сосредоточенной силы  $P$  условно распределенную силу при помощи дельта-функции Дирака  $p = \delta(x - l)P$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l p \rho(x) X_n(x) dx &= P \int_0^l \delta(x - l) (1 + \xi l) \delta(x - l) X_n(x) dx = \\ &= P \int_0^l \delta(x - l) X_n(x) dx + P \xi l \int_0^l \delta(x - l) \delta(x - l) X_n(x) dx = PX(l) = P \sin \lambda. \end{aligned}$$

Подставляя в (10.96) частоту колебаний и квадрат нормы, получим уравнение движения сечений при колебаниях

$$u(x, t) = 2 \frac{Pl}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \sin k_n x}{\lambda_n^2 (1 + \xi \sin^2 \lambda_n)} (1 - \cos \omega_n t). \quad (10.99)$$

**Задача 10.37** Упругий канат с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M_0$  испытывает удар неупругой массы  $M$ , падающей с некоторой высоты  $h$ , рис. 10.49

Определить напряженно-деформированное состояние стержня.

**Решение.** При ударе нужно рассматривать две задачи: сообщение стержню скорости удара  $v = \sqrt{2gh}$  и воздействие внезапного приложения груза  $Q = Mg$ .

Первая часть удара рассмотрена в задаче 10.34), см. (10.93)

$$u(x, t) = \frac{2v_0 \xi l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\sin \lambda \cdot \cos kx}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \sin \omega_n t,$$

где начальная скорость совместного движения масс

$$v_0 = vM / (M_0 + M) = v\eta.$$

Вторая часть удара рассмотрена в задаче 10.36, (10.99)

$$u(x, t) = 2 \frac{Ql}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \sin k_n x}{\lambda_n^2 (1 + \xi \sin^2 \lambda_n)} (1 - \cos \omega_n t).$$

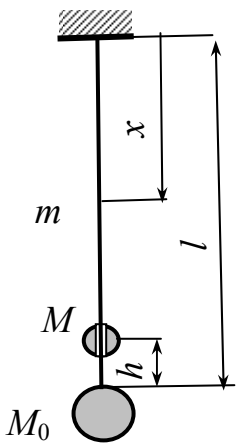


Рис. 9.49

Складывая эти два решения, получим уравнение движения сечений стержня при ударе:  $u(x, t) =$

$$= \frac{2v_0 \xi l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\sin \lambda \cdot \cos kx}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \sin \omega_n t + 2 \frac{Ql}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \sin k_n x}{\lambda_n^2 (1 + \xi \sin^2 \lambda_n)} (1 - \cos \omega_n t). \quad (10.100)$$



Если  $M = M_0 = ml$ , то  $\xi=2$ . При этом из (10.94) находим собственные числа:  $\lambda_1 = 0,6532$ ,  $\lambda_2 = 3,2923$ ,  $\lambda_3 = 6,3616$ , по (10.100) при  $t = \frac{\pi}{2\omega_1}$  получим

$$u(l, t) = 0,650 \frac{2v_0}{c} + 0,996 \frac{Ql}{EF}.$$

Дифференцированием (9.100) можно получить напряжения  $\sigma = Eu'$ .

**Задача 10.38** Упругий канат с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  испытывает воздействие гармонической силы  $P(t) = P \sin \theta t$  с заданным амплитудным значением  $P$  и циклической частотой возмущения  $\theta$ , рис. 10.50

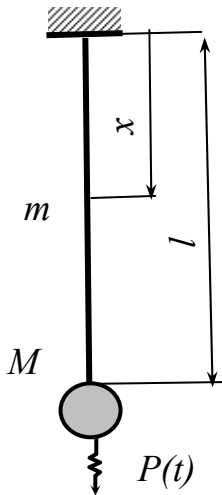


Рис. 10.50

Найти уравнение движения сечений стержня при колебаниях.

**Решение.** Задачу можно решить, используя формулу (9.81), подставляя условно распределенное амплитудное значение возмущающей силы  $p(x) = P\delta(x-l)$ . Тогда с учетом квадрата нормы собственных функций (см. предыдущую задачу) получим

$$u(x, t) = 2 \frac{Pl}{EF} \sin \theta t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \cdot \sin k_n x}{\lambda_n^2 (1 - \theta_n^2 / \omega_n^2) (1 + \xi \sin^2 \lambda_n)}. \quad (10.101)$$

Значительно проще эта задача решается методом начальных параметров, так как раскладывать воздействие гармонической силы на отдельные гармоники нет необходимости.

Используем уравнение (10.81), подставляя  $u_0 = 0$ , а  $N = P$  и заменяя гармоники собственных колебаний на гармоники вынужденных колебаний

$$u(x, t) = \frac{N_0}{kEF} \sin kx \cdot \sin \theta t.$$

Из условия  $N(l) = P + P_u$  с учетом силы инерции колеблющейся массы

$$P_u = -M\ddot{u}(l) = M\theta^2 u(l) = Mk^2 \frac{EF}{m} \cdot \frac{N_0}{kEF} \sin kl$$

получим равенство  $N_0 \cos \lambda = P + N_0 \xi l \sin \lambda$ , позволяющее найти начальный параметр

$$N_0 = \frac{P}{\cos \lambda - \xi l \sin \lambda}.$$

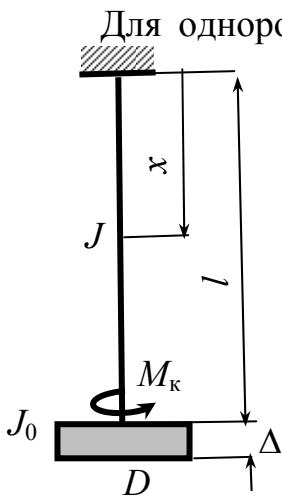
Следовательно, расчетные уравнения принимают вид:

$$u(x) = \frac{Pl}{EF} \frac{\sin kx}{\lambda(\cos \lambda - \xi l \sin \lambda)}, \quad N(x) = EFu'(x) = P \frac{\cos kx}{\cos \lambda - \xi l \sin \lambda}.$$

Если  $\xi = M/ml = 1$ , а частота возмущения в два раза меньше частоты основного тона колебаний, то из частотного уравнения  $\xi \lambda \operatorname{tg} \lambda = 1$  найдем первый корень  $\lambda(\omega) = 0,8603$ , соответствующий частоте основного тона колебаний, а  $\lambda(\theta) = 0,8603/2$ . При этом в установившемся режиме вынужденных колебаний получим:

$$u(l, t) = 1,329 \frac{Pl}{EF} \sin \theta t, \quad N(0, t) = 1,371P \sin \theta t, \quad N(l, t) = 1,246P \sin \theta t.$$

## 10.5. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕСОМЫХ ВАЛОВ



Для однородного вала, когда поперечное сечение и интенсивность момента инерции массы вала не изменяется по длине, дифференциальное уравнение углов закручивания сечений  $\varphi(x, t)$  вала имеет вид, аналогичный (10.75):

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{m(x, t)}{J}, \quad (10.102)$$

где:  $m(x, t)$  - интенсивность распределенной моментной возмущающей нагрузки,

$$J = \int \rho^2 dm = \gamma \int \rho^2 dF = \gamma J_p = \gamma \frac{\pi d^4}{32} = \frac{m d^2}{8}$$

Рис. 10.51 - погонный момент инерции погонной массы вала  $m$  диаметром  $d$  с плотностью материала  $\gamma$ .

Уравнение движения сечений вала, частота собственных крутильных колебаний аналогичны (10.82) и (10.83):

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_0 \cos kx + \frac{M_0}{kGJ_p} \sin kx \right) \sin(\omega t + \mu). \quad (19.102)$$

$$\omega = kc = k \sqrt{\frac{GF}{J}} = \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{G}{\gamma}}. \quad (10.103)$$

Эта же аналогия распространяется и на собственные функции  $\Phi(x)$  (вместо  $X(x)$ ), весовую функцию (10.86), квадрат нормы собственных функций (9.88), интеграл квадрата нормы (10.89).

**Задача 10.38.** Вал диаметром  $d$  с погонной массой  $m$  и диском массой  $M$  нагружен крутящим моментом  $M_k$ , который внезапно снимается, рис.10.51.

Найти расчетный крутящий момент и спектр частот собственных колебаний.

**Решение.** При внезапном снятии нагрузки возникают собственные колебания. Так как колебания вызваны начальным закручиванием вала  $\varphi_0$ , а начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , то в соответствии с формулой, аналогичной (10.84) получаем сдвиг фазы колебаний  $\mu = \text{arctg} \frac{\varphi_0(0,t)}{\dot{\varphi}_0(0,t)} \omega = \infty$ , т.е.  $\mu = \frac{\pi}{2}$  и уравнение углов закручивания (10.102) принимает вид:

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{0n}}{k_n G J_p} \sin k_n x \cdot \cos \omega_n t = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x) \cos \omega_n t.$$

Отсюда дифференцированием получаем уравнение крутящих моментов внутренних усилий

$$M_x(x,t) = G J_p \varphi'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{0n} \cos k_n x \cdot \cos \omega_n t.$$

На свободном конце вала крутящий момент внутренних усилий равен моменту сил инерции массы диска

$$M_u = -J_0 \ddot{\varphi}(l) = J_0 \omega^2 \varphi(l) = J_0 k^2 \frac{G J_p}{J} \cdot \frac{M_0}{k G J_p} \sin kl = M_0 \xi \lambda \cdot \sin \lambda.$$

Из этого условия получаем частотное уравнение (см. (10.94))

$$\xi \lambda \text{tg} \lambda = 1.$$

Сравнивая эту задачу с задачей о внезапном снятии силы при продольных колебаниях (см. задачу 10.35), замечаем, что они аналогичны. Поэтому уравнение движения при крутильных колебаниях примем в виде (10.95)

$$\varphi(x,t) = \frac{M_{\kappa} l}{G J_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\sin \lambda_n \cdot \sin k_n x}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \cos \omega_n t.$$

Отсюда получаем уравнение крутящих моментов

$$M_x(x,t) = G J_p \varphi'(x,t) = 2 M_{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\sin \lambda_n \cdot \cos k_n x}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \cos \omega_n t. \quad (10.104)$$

## 11. УПРОЩЕННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В инженерной практике расчета упругих стержневых систем широко используются различные приближенные способы, суть которых заключается в замене системы с распределенными параметрами одномассовой системой для определения частоты основного тона колебаний. Точность таких способов в значительной степени зависит от удачного выбора аппроксимирующего уравнения деформированного состояния заданной системы и от выбора положения сечения, куда приводится сосредоточенная масса в эквивалентной системе.

Однако, в таком расчете нет необходимости, если ограничиваться лишь вычислением приближенного значения основной частоты собственных колебаний системы с распределенными параметрами, т.к. частотные уравнения приводятся в справочной и другой литературе а в случае необходимости их составление не представляет трудностей, см. Приложение .10.4.

Заметим, что целесообразность упрощенного расчета будет в том случае, когда распределенную массу системы вместе с сосредоточенными массами приведем в сечение, испытывающее возмущающую нагрузку. При этом в случае гармонической нагрузки достаточно вычислить лишь коэффициент нарастания колебаний  $\nu = (1 - \theta^2 / \omega^2)^{-1}$ , а при ударном воздействии нагрузки – динамический коэффициент  $k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h\eta / f}$ , что потребует вычисления лишь приведенной массы и единичного квазистатического перемещения.

В случае поперечных колебаний частота первого тона колебаний балки с распределенными параметрами  $\omega_1 = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$  приравнивается частоте колебаний одномассовой балки  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}ml\xi_{\Pi}}}$ , откуда находится коэффициент приведения распределенной массы [8 ]

$$\xi_{\Pi} = \frac{l^3}{\lambda^4 \delta_{11} EJ}. \quad (11.1)$$

Здесь:  $\lambda$  – первый корень частотного уравнения балки с изгибной жесткостью  $EJ$  и распределенной массой  $m$  по всей длине балки  $l$ ;  $\delta_{11}$  - перемещение в точке приведения массы от единичной силы.

Корни частотных уравнений однопролетных балок можно найти из уравнения изогнутой оси балки при колебаниях (9.3.1.2), или из Приложения 10.3.

При продольных колебаниях коэффициент приведения массы вычисляется по формуле

$$\xi_{\Pi} = \frac{l}{\lambda^2 EF \delta_{11}}. \quad (11.2)$$

Аналогичная формула приведения массы будет при крутильных колебаниях

$$\xi_{\Pi} = \frac{l}{\lambda^2 GJ_p \varphi_{11}} \quad (11.3)$$

Единичные перемещения в (11.1) - (11.3) вычисляются по закону Гука:

$$\delta_{11} = \frac{l}{EF}, \quad \varphi_{11} = \frac{l}{GJ_p}$$

Упрощенным способом можно решить обратную задачу, когда заданы сосредоточенные массы и нужно вычислить приближенное значение основной частоты собственных колебаний. Для этого от каждой сосредоточенной массы  $M_i$  находится интенсивность эквивалентной распределенной массы  $m_1 = M_i / l\xi_i$ . Суммарная распределенная масса от группы сосредоточенных масс  $m = \sum m_i = \sum \frac{M_i}{l\xi_i}$ . С учетом коэффициентов приведения масс (11.1) при поперечных колебаниях получим суммарную распределенную массу

$$l \sum m_i = \sum \frac{M_i}{\xi_i} = \frac{\lambda^4}{l^3} EJ \sum M_i \delta_{ii} \quad (11.4)$$

От этой условной распределенной массы находится приближенное значение частоты основного тона колебаний

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\sum m_i}} = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ l^4}{\lambda_1^4 EJ \sum M_i \delta_{ii}}} = \sqrt{\frac{1}{\sum M_i \delta_{ii}}} \quad (11.5)$$

Если потребуется привести эту условную распределенную массу в конкретное сечение, то по (11.1) можно получить приведенную массу от группы сосредоточенных масс

$$M_n = l \sum m_i \cdot \xi_{11} = \frac{\lambda^4}{l^3} EJ \sum M_i \delta_{ii} \cdot \frac{l^3}{\lambda^4 \delta_{11} EJ} = \frac{\sum M_i \delta_{ii}}{\delta_{11}} \quad (11.6)$$

**Задача 11.1** Однопролетная балка с погонной массой  $m$  и сосредоточенной массой  $M$  испытывает воздействие гармонической силы  $P(t) = P \sin \theta t$ , рис. 11.1, а.

Найти амплитудное перемещение груза и динамическое напряжение при заданных параметрах балки:  $EJ = 3,68 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$ ,  $l = 4 \text{ м}$ ,  $m = 400 \text{ кг/м}$ ,  $M = 1200 \text{ кг}$ ,  $\theta = 10 \text{ 1/с}$ .

**Решение.** Заменяем заданную балку (рис. 11.1, а) условной одномассовой, рис. 11.1, б.

Используем известное частотное уравнение для балки с распределенной массой интенсивностью  $m$  при подвижной скользящей заделке на левой опоре и защемлении на правой (рис. 11.1, в):  $\text{tg} \lambda = - \text{th} \lambda$ , откуда получено  $\lambda = kl = 2,365$ , см. Приложение 10.3.

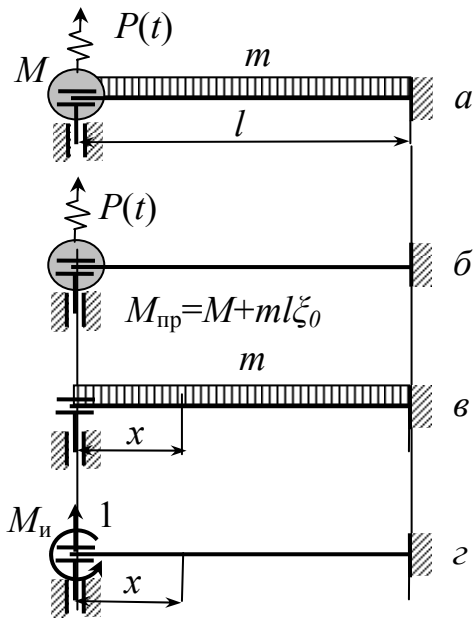


Рис. 11.1

Вычисляем единичное перемещение  $\delta_{11}$  из уравнения изогнутой оси балки при статическом нагружении единичной силой, приложенной в месте возмущения рис.11.1, *г*.

Методом начальных параметров находим уравнение изогнутой оси балки

$$y(x) = y_0 - \frac{M_{и}x^2}{2EJ} + \frac{x^3}{6EJ}.$$

Из условий защемления  $y'(l) = y(l) = 0$  находим начальные параметры:

$$M_{и} = \frac{l}{2}, \quad y_0 = \frac{l^3}{12EJ} = \delta_{11}.$$

По формуле (11.1) вычисляем коэффициент приведения распределенной массы

$$\xi_{п} = \frac{12}{2,365^4} = 0,38357$$

Находим частоту колебаний эквивалентной системы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + ml\xi_{п})}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 3,68 \cdot 10^6}{4^3(1200 + 400 \cdot 4 \cdot 0,38358)}} = 19,504 \text{ 1/с.}$$

Заметим, что спектр частот собственных колебаний заданной балки с отношением масс  $\xi = M / ml = 0,75$  находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = \xi \lambda \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda} - 1 \right) - \operatorname{th} \lambda,$$

откуда  $\lambda = 1,807043$ , а  $\omega_1 = 19,575 \text{ 1/с.}$

Вычисляем коэффициент нарастания колебаний

$$v = \frac{1}{1 - \theta^2 / \omega^2} = \frac{1}{1 - 10^2 / 19,5^2} = 1,3568$$

и динамическое перемещение груза

$$y_{д} = v y_0 P = 1,3568 \frac{Pl^3}{12EJ}.$$

Амплитудное значение возмущающей силы

$$P_{д} = P v \delta^2 = P \frac{\theta^2}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{10^2}{19,5^2 - 10^2} = 0,3568 P.$$

Динамическая нагрузка от амплитудного значения возмущающей и силы инерции

$$P_{\text{расч}} = P + P_{\text{д}} = P(1 + \nu\delta^2) = P \left( 1 + \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \right) = P\nu.$$

Расчетный изгибающий момент

$$M_{\text{расч}} = P_{\text{расч}} \frac{l}{2} = P\nu \frac{l}{2} = \frac{2500 \cdot 4}{2} 1,3568 = 6784 \text{ Нм},$$

а напряжение  $\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W} = \frac{6784}{184} = 36,8 \text{ МПа}.$

**Задача 11.2.** Вычислить прогиб и изгибающий момент посередине пролета двухопорной балки, рассмотренной в задаче 10.29, упрощенным способом.

**Решение.** Расчет балки как системы с распределенными параметрами приводит к формулам:

$$y(0) = -\frac{Pl^3}{48EJ} \cdot \frac{3}{\lambda^3} \frac{\text{tg}\lambda - \text{th}\lambda}{2 - \xi\lambda(\text{tg}\lambda - \text{th}\lambda)}, \quad M(0) = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{\text{tg}\lambda + \text{th}\lambda}{2 - \xi\lambda(\text{tg}\lambda - \text{th}\lambda)}.$$

При заданных условиях задачи, когда  $\xi = \frac{M}{ml} = \frac{1500}{400 \cdot 4} = 0,9375$ ,  $\lambda_1 = 1,20442$ , частота первого тона собственных колебаний

$$\omega_1 = \left( \frac{2\lambda_1}{l^2} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{m}} = \left( \frac{2 \cdot 1,20442}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{400}} = 40,5466 \text{ с}^{-1}.$$

При заданной частоте возмущения  $\theta = 30 \text{ с}^{-1}$  находим

$$\lambda(\theta) = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EJ_z}} = \frac{4}{2} \sqrt[4]{\frac{400 \cdot 30^2}{5 \cdot 10^6}} = 1,0360 \text{ с}^{-1},$$

чему соответствуют  $\text{tg}\lambda = 1,6881$ ,  $\text{th}\lambda = 0,7763$ . При этом

$$y_0 = 2,2075 \frac{Pl^3}{48EJ_z}, \quad M_0 = -2,1346 \frac{Pl}{4}.$$

В упрощенном расчете достаточно вычислить коэффициент нарастания колебаний  $\nu = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}$ , но для этого нужно найти приближенное значение частоты колебаний условной балки с приведенной массой  $M_{\text{пр}} = M + ml\xi_{\text{п}}$ , где коэффициент приведения массы балки вычисляется через значение первого корня частотного уравнения  $\lambda = \pi$  (см. Приложение 10.3).

Находим коэффициент приведения распределенной массы (11.1)

$$\xi_{\text{п}} = \frac{l^3}{\lambda^4 \delta_{11} EJ} = \frac{48}{\pi^4} = 0,492767.$$

Приведенная масса  $M_{пр} = 1500 + 400 \cdot 4 \cdot 0,492767 = 2288,4$  кг.

Приближенное значение частоты первого тона колебаний балки

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M_n}} = \sqrt{\frac{48EJ}{l^3 M_n}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 5 \cdot 10^6}{4^3 \cdot 2288,4}} = 40,48 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент нарастания колебаний  $\nu = \frac{1}{1 - (30/40,48)^2} = 2,218$

Приближенное значение прогиба

$$y(0) = \nu \frac{Pl^3}{48EJ} = 2,218 \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Приближенное значение изгибающего момента

$$M(0) = \frac{PL}{4} (1 + \nu \delta^2) = \nu \frac{Pl}{4} = 2,218 \frac{Pl}{4}.$$

Погрешность упрощенного расчета составляет 0,49% по прогибу и 3,9% по моменту.

**Задача 11.3.** Балка, представленная на рис. 11.2, испытывает удар неупругой массы  $M$ , падающей с высоты  $h$ . Вычислить значение динамического изгибающего момента упрощенным способом при заданных условиях:  $l=4$  м,  $m=400$  кг/м,  $M_0=1200$  кг,  $M=500$  кг,  $EJ=3,68 \cdot 10^6$  Нм<sup>2</sup>.

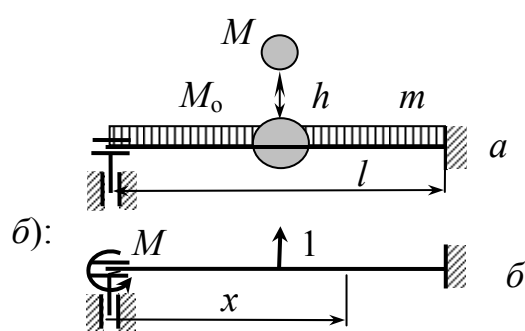


Рис. 11.2

**Решение.** В этой задаче распределенную массу нужно привести к сосредоточенной массе на середине пролета.

Вычисляем единичное перемещение в месте падения груза из уравнений (рис.11.2,

$$y(x) = y_0 - \frac{M_n x^2}{2EJ} + \frac{(x-l/2)^3}{6EJ},$$

$$y'(x) = -\frac{M_n x}{EJ} + \frac{(x-l/2)^2}{2EJ}.$$

Из условий защемления  $y'(l) = y(l) = 0$  находим:  $M_n = \frac{l}{8}$ ,  $y_0 = \frac{l^3}{24EJ}$ .

$$\delta_{11} = y(l/2) = \frac{5}{192} \frac{l^3}{EJ}$$

Статический прогиб от падающего груза



$$f = \Delta_{1p} = \delta_{11} Mg = \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 5}{192 \cdot 3,68 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

С использованием частоты первого тона колебаний балки с распределенной массой  $\lambda = 2,365$  (см. Приложение (10.3) по формуле (11.1) находим коэффициент приведения массы балки

$$\xi_{\Pi} = \frac{192}{5 \cdot 2,365^4} = 1,227.$$

Коэффициент передачи энергии

$$\eta = \frac{M}{M + M_0 + ml\xi_{\Pi}} = \frac{500}{500 + 1200 + 400 \cdot 4 \cdot 1,227} = 0,1365.$$

Динамический коэффициент при ударе

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \eta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,222} 0,1365} = 2,86.$$

Динамический изгибающий момент и напряжение

$$M_d = \frac{Mgl}{8} k_d = \frac{500 \cdot 9,81}{8} 4 \cdot 2,86 = 7014,1 \text{ Нм, } \sigma = 38,1 \text{ МПа.}$$

**Задача 11.4.** Двухопорная балка с погонной массой  $m = 400$  кг/м и сосредоточенной массой  $M_0 = 1000$  кг, рассмотренной в задаче 10.28, испытывает удар неупругой массы  $M = 500$  кг, падающей с высоты  $h = 2$  см, рис. 10.37. Балка длиной  $l = 4$  м имеет жесткость при изгибе  $EJ = 3,68 \cdot 10^6$  Нм<sup>2</sup>. Найти приближенное значение изгибающего момента.

**Решение.** В упрощенном расчете вычисляется общий динамический коэффициент в условной балке с приведенной массой

$$M_n = M_0 + ml\xi_n = 1000 + 400 \cdot 4 \cdot 0,49276 = 1788,4 \text{ кг.}$$

Коэффициент передачи энергии

$$\eta = \frac{M}{M + M_n} = \frac{500}{500 + 1788,4} = 0,2185$$

Динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \eta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 0,2185}{0,1777}} = 3,43277$$

Здесь квазистатический прогиб от падающего груза

$$f = \frac{Mgl^3}{48EJ} = \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 4^3}{48 \cdot 3,68 \cdot 10^6} = 0,1777 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Приближенное значение динамического изгибающего момента

$$M_u = \frac{Pl}{4} k_d = 3,4328 \frac{Pl}{4}.$$

Сравнивая этот коэффициент с коэффициентами, полученными в задаче 9.28, видим, что в прогибах погрешности практически нет, в изгибающем моменте погрешность по основной гармонике колебаний составила 6%.

**Задача 11.5.** Двухпорная балка длиной  $l = 4$  м и жесткостью при изгибе  $EJ = 3,68 \cdot 10^6$  Нм<sup>2</sup> с тремя одинаковыми сосредоточенными массами  $M=300$  кг, закрепленными на равном расстоянии друг от друга, рис. 11.3.

Вычислить приближенное значение частоты первого тона колебаний

**Решение.** Заменяем сосредоточенные массы одной условной массой, приведенной к середине пролета балки, 11.3, б.

Для этого по правилу Верещагина находим единичные коэффициенты, рис. 11.3: в

$$\delta_{11} = \frac{3}{256} \frac{l^3}{EJ} = \delta_{33}, \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{48EJ}.$$

По формуле (11.6) вычисляем условную приведенную массу

$$M_{\Pi} = \frac{\sum M_i \delta_{ii}}{\delta_{22}} = M \frac{2 \cdot \frac{3}{256} + \frac{1}{48}}{\frac{1}{48}} = 2,125M.$$

Теперь по формуле одномассовой балки находим частоту колеба-

ний заданной балки с тремя массами

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{\delta_{22} M_{\Pi}}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 3,68 \cdot 10^6}{4^3 \cdot 2,1254 \cdot 300}} = 65,8 \text{ 1/с.}$$

**Задача 11.6.** Двухпорная балка из предыдущей задачи с тремя одинаковыми массами  $M=300$  кг испытывает удар неупругой массы  $M_0=500$  кг, падающей с высоты  $h = 2$  см, рис. 11,4.

Вычислить расчетный изгибающий момент.

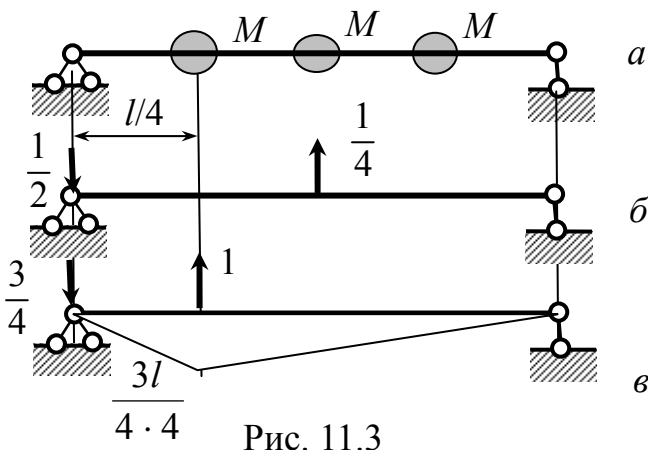


Рис. 11.3

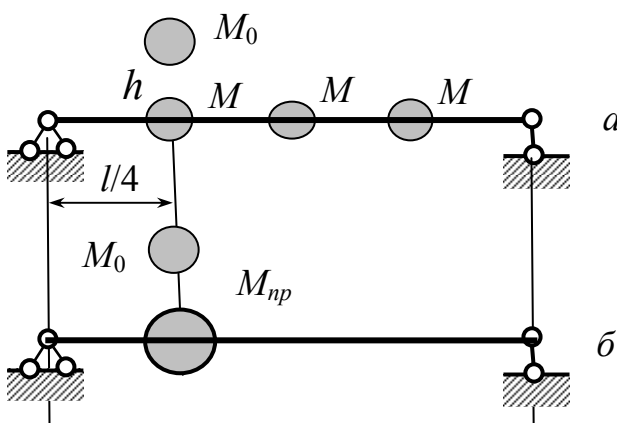


Рис. 11.4

**Решение.** Для расчета балки на удар по массе  $M_1$  приводим все массы в точку удара.

По формуле (11.6) вычисляем массу, приведенную в точку удара

$$M_{\Pi} = \frac{\sum M_i \delta_{ii}}{\delta_{11}} = M \frac{2 \cdot \frac{3}{256} + \frac{1}{48}}{\frac{3}{256}} = 3,778M.$$

Находим коэффициент передачи энергии

$$\eta = \frac{M_0}{M_0 + M_{\Pi}} = \frac{500}{500 + 3,778 \cdot 300} = 0,306.$$

Вычисляем квазистатический прогиб от падающего груза

$$f = \delta_{11} M_0 g = \frac{3}{256} \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 4^3}{3,68 \cdot 10^6} = 9,997 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент при ударе

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f}} \eta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,09997}} 0,306 = 4,639.$$

Динамический изгибающий момент

$$M_d = \frac{3}{16} M_0 g l k_d = \frac{3}{16} 500 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot 4,639 = 17,066 \cdot 10^3 \text{ Нм,}$$

а напряжение  $\sigma = 92,75 \text{ МПа.}$

**Задача 11.7.** Балка из двутавра №20 длиной  $l = 4 \text{ м}$  с погонной массой  $m = 400 \text{ кг/м}$  содержит три одинаковые сосредоточенные массы  $M = 900 \text{ кг}$  на равных расстояниях между опорами, рис. 11.5.

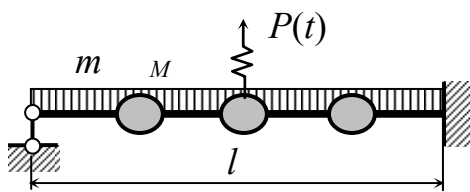


Рис.11.5

Жесткостью балки при изгибе задана -  $EJ = 3,68 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$ .

Вычислить расчетное напряжение от веса балки и возмущающей нагрузки  $P(t) = P \sin \theta t$  с амплитудным значением  $P = 3000 \text{ Н}$  и циклической частотой возмущения  $\theta = 30 \text{ 1/с}$ .

**Решение.** Прежде всего найдем уравнение изогнутой оси балки от единичной силы, приложенной на расстоянии  $a$  от левой опоры.

При статической нагрузке от единичной силы уравнение изогнутой оси и углов поворота имеют вид:

$$y(x) = y'_0 x + \frac{Rx^3}{6EJ} + \frac{(x-a)^3}{6EJ},$$

$$y'(x) = y'_0 + \frac{Rx^2}{2EJ} + \frac{(x-a)^2}{2EJ}.$$

Из условий  $y(l) = y'(l) = 0$  находим начальные параметры:

$$y'_0 = \frac{a(l-a)^2}{4EJl}, \quad R = -\frac{2l+a}{2l^3}(l-a)^2.$$

С учетом этих начальных параметров получаем формулу прогибов в месте приложения единичной силы при значении  $x = a$ :

$$y(a) = \frac{a^2(l-a)^2}{4EJl} \left( 1 - \frac{2l+a}{3l^2}a \right).$$

По этой формуле вычисляем прогибы в сечениях, соответствующих приложению сосредоточенных масс:

$$\delta_{11} = y(l/4) = 7,1411 \cdot 10^{-3} \frac{l^3}{EJ},$$

$$\delta_{22} = y(l/2) = 9,1146 \cdot 10^{-3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\delta_{33} = y(3l/4) = 2,7466 \cdot 10^{-3} \frac{l^3}{EJ}$$

Теперь по формуле (11.6) находим общую массу от сосредоточенных масс, приведенных к точке приложения средней массы

$$M_{\Pi} = \frac{\sum M_i \delta_{ii}}{\delta_{22}} = M \frac{\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}}{\delta_{22}} = M \frac{7,1411 + 9,1146 + 2,7466}{9,1146} = 2,089M ..$$

Приведенную массу от распределенной массы  $m$  найдем по формуле (11.1), используя известное значение первого корня частотного уравнения для балки с шарнирной опорой и защемлением (см. Приложение 103)  $\lambda=3,9266$ , а

также выше вычисленного единичного перемещения  $\delta_{22} = 9,1146 \cdot 10^{-3} \frac{l^3}{EJ}$

$$\xi(m) = \frac{l^3}{\lambda^4 \delta_{22} EJ} = \frac{1}{3,9266^4 \cdot 9,1146 \cdot 10^{-3}} = 0,4615$$

Частота колебаний условной балки с общей приведенной массой  $M_0 = M_n + ml\xi(m) = 2,089 \cdot 900 + 400 \cdot 4 \cdot 0,4615 = 2618,5$  кг

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{22} \cdot M_0}} = \sqrt{\frac{3,68 \cdot 10^6}{9,1148 \cdot 10^{-3} \cdot 4^3 \cdot 2618,5}} = 49,08 \text{ 1/с}$$

Коэффициент нарастания колебаний балки с одной массой при частоте возмущения  $\theta=30 \text{ 1/с}$

$$v = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - (30/49,08)^2} = 1,596.$$

Изгибающий момент в месте сосредоточенной массы  $M_{и} = R \frac{l}{2}$  от статической и динамической нагрузки

$$M_{и} = \frac{5}{16} (M_0 g + P v) \frac{l}{2} = \frac{5}{16} (2618,5 \cdot 9,81 + 3000 \cdot 1,596) \frac{4}{2} = 19047,18 \text{ Нм.}$$

$$\text{Напряжение } \sigma = \frac{M_{и}}{W} = \frac{19047,18}{184} = 103,5 \text{ МПа.}$$

**Задача 11.8.** На стержне длиной  $l$  с погонной массой  $m$  имеется сосредоточенная масса  $M = 3ml$ , рис. 11.6.

Вычислить приближенное значение частоты основного тона продольных колебаний.

**Решение.** На основании уравнения линейных перемещений сечений стержня при продольных колебаниях

$$u(x) = \frac{N_0}{kEF} \sin kx$$

из условия  $N(l) = N_0 \cos kl = 0$  находим первый корень  $\lambda = kl = \pi/2$  и частоту основного тона колебаний однородного стержня без сосредоточенной массы  $M$

$$\omega = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}.$$

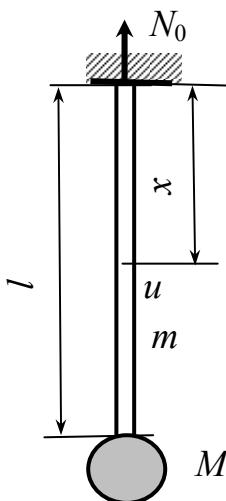


Рис. 11.6

Частота колебаний стержня от приведенной массы

$$ml\xi_0 \text{ равна } \omega = \sqrt{\frac{EF}{l \cdot ml\xi_{п}}}.$$

Из равенства частот находим коэффициент приведения распределенной массы при приведении ее к свободному концу стержня  $\xi_{п} = 4/\pi^2 = 0,4053$ .

Теперь можно найти приближенное значение частоты колебаний стержня с погонной и сосредоточенной массой

$$\omega = \sqrt{\frac{EF}{l(3,4053)ml}} = \frac{0,5419}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

$$\text{Точное значение частоты } \omega = \frac{0,5472}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \text{ и}$$

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 9.1

#### Коэффициенты снижения допускаемого напряжения при расчете на устойчивость

$\lambda$	Ст-3	Ст-5	Дер.	Чугун	$\lambda$	Ст.3	Ст.5	Дер.	Чугун
0	1,00	1,00	1,00	1,00					
10	0,99	0,98	0,99	0,97	110	0,52	0,43	0,25	–
20	0,96	0,95	0,97	0,91	120	0,45	0,36	0,22	–
30	0,94	0,92	0,93	0,81	130	0,40	0,33	0,18	–
40	0,92	0,89	0,87	0,69	140	0,36	0,29	0,16	–
50	0,89	0,86	0,80	0,57	150	0,32	0,26	0,14	–
60	0,86	0,82	0,71	0,44	160	0,29	0,24	–	–
70	0,81	0,76	0,60	0,34	170	0,26	0,21	–	–
80	0,75	0,70	0,48	0,26	180	0,23	0,19	–	–
90	0,69	0,62	0,38	0,20	190	0,21	0,17	–	–
100	0,60	0,51	0,31	0,16	200	0,19	0,16	–	–

### Приложение 10.1

#### Динамические функции А.Н. Крылова

$$\begin{aligned}
 A_{kx} &= (\operatorname{ch} kx + \cos kx) / 2, & \frac{d}{dx} A_{kx} &= kD_{kx}, & \int A_{kx} dx &= B_{kx} / k, \\
 B_{kx} &= (\operatorname{sh} kx + \sin kx) / 2, & B'_{kx} &= kA_{kx}, & \int B_{kx} dx &= C_{kx} / k, \\
 C_{kx} &= (\operatorname{ch} kx - \cos kx) / 2, & C'_{kx} &= kB_{kx}, & \int C_{kx} dx &= D_{kx} / k, \\
 D_{kx} &= (\operatorname{sh} kx - \sin kx) / 2, & D'_{kx} &= kB_{kx}, & \int D_{kx} dx &= A_{kx} / k,
 \end{aligned}$$

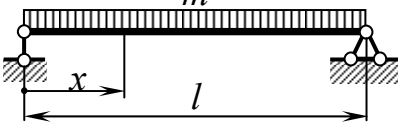
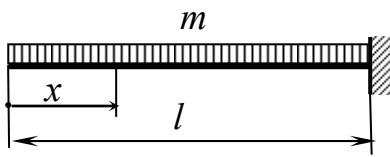
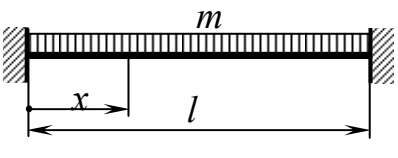
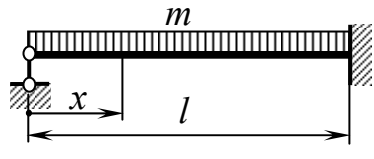
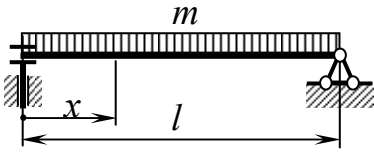
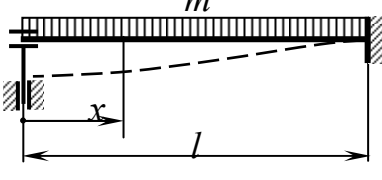
### Приложение 10.2

#### Сочетание функций А.Н. Крылова

$$\begin{aligned}
 A_{kx}^2 - B_{kx}D_{kx} &= (1 + \operatorname{ch} kx \cos kx) / 2, \\
 C_{kx}^2 - B_{kx}D_{kx} &= (1 - \operatorname{ch} kx \cos kx) / 2, \\
 B_{kx}C_{kx} - A_{kx}D_{kx} &= (\operatorname{ch} kx \sin kx - \operatorname{sh} kx \cos kx) / 2, \\
 A_{kx}C_{kx} - D_{kx}^2 &= \operatorname{sh} kx \sin kx / 2, \\
 A_{kx}B_{kx} - C_{kx}D_{kx} &= (\operatorname{ch} kx \sin kx + \operatorname{sh} kx \cos kx) / 2, \\
 A_{kx}^2 - C_{kx}^2 &= \operatorname{ch} kx \cos kx, \\
 B_{kx}^2 - D_{kx}^2 &= \operatorname{sh} kx \sin kx, \\
 B_{kx}C_{kx} - C_{kx}D_{kx} &= [(\operatorname{ch} kx - \cos kx) \sin kx] / 2.
 \end{aligned}$$





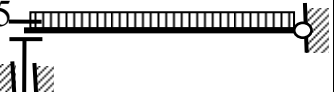

### Приложение 10.3

#### Спектр частот собственных колебаний весомых балок

№ п/п	Расчетная схема	Опорные условия	Частотное уравнение	Собственные числа
1		$y(0) = 0,$ $M(0) = 0,$ $y(l) = 0,$ $M(l) = 0$	$\sin kl = 0$	$\pi,$ $2\pi,$ $3\pi,$ $\dots$ $n\pi$
2		$M(0) = 0,$ $Q(0) = 0,$ $y(l) = 0,$ $\theta(l) = 0$	$\operatorname{ch}kl \cdot \cos kls = -1$	$1,8751,$ $4,6941,$ $7,8532,$ $\dots$ $\pi(2n - 1)/2$
3		$y(0) = 0,$ $\theta(0) = 0,$ $y(l) = 0,$ $\theta(l) = 0$	$\operatorname{ch}kl \cdot \cos kl = 1$	$4,7300,$ $7,8532,$ $10,9956,$ $\dots$ $\pi(2n + 1)/.2$
4		$y(0) = 0,$ $M(0) = 0$ $y(l) = 0,$ $\theta(l) = 0$	$\operatorname{tg}kl = \operatorname{th}kl$	$3,9266,$ $7,0686,$ $10,2102,$ $\dots$ $\pi(4n + 1)/4$
5		$\theta(0) = 0,$ $Q(0) = 0,$ $y(l) = 0,$ $M(l) = 0$	$\cos kl = 0$	$\pi/2,$ $2\pi/2,$ $3\pi/2$ $\dots$ $\pi(2n - 1).2$
6		$\theta(0) = 0,$ $Q(0) = 0,$ $y(l) = 0,$ $\theta(l) = 0,$	$\operatorname{tg}kl = -\operatorname{th}kl$	$2,3650,$ $2,4978,$ $8,6394,$ $\dots$ $\pi(4n - 1)/4$

## Приложение 10.4

### Частотные уравнения и коэффициенты приведения массы балок

Схема балки	Частотное уравнение	Первый корень $\lambda$	Коэффициенты приведения массы балки $\xi_0$
	$\sin\lambda=0$	$\pi$	$\frac{3}{\pi^4} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$
	$\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda + 1 = 0$	1,875	$\frac{3}{1,875^4} \frac{1}{(1-\alpha)^3}$
	$\operatorname{ch}\lambda \cdot \cos\lambda - 1 = 0$	4,730	$\frac{3}{4,73^4} \frac{1}{\alpha^3(1-\alpha)^3}$
	$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{th}\lambda$	3,927	$\frac{12}{3,927^4} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2(3-2\alpha-\alpha^3)}$
	$\cos\lambda=0$	$\pi/2$	$\frac{48}{\pi^4} \frac{1}{(1-\alpha)(1+\alpha-2\alpha^2)}$
	$\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{th}\lambda = 0$	2,365	$\frac{12}{2,365^4} \frac{1}{(1-\alpha)^2(1+2\alpha-3\alpha^2)}$

### Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические или круговые функции:

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}, \quad e^{\pm\alpha i} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

Гиперболические функции:

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{sh}\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \quad e^{\pm\alpha} = \operatorname{ch}\alpha \pm \operatorname{sh}\alpha,$$

$$\operatorname{ch}\alpha i = \cos\alpha, \quad \operatorname{sh}\alpha i = i\sin\alpha,$$

где  $\alpha$  – удвоенная заштрихованная площадь кругового сектора (рис. 1, а) или удвоенная заштрихованная площадь гиперболического сектора (рис. 1, б)

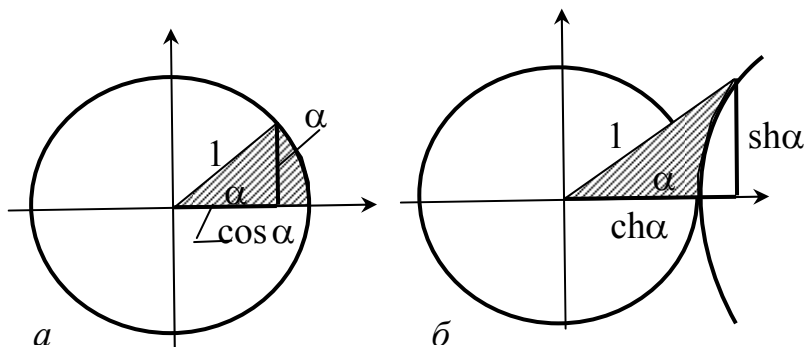


Рис. 1



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гин А.А., Кавтрев А.Ф.. Объяснить необъяснимое. Книга 1.: Москва, «ВИТА», 2012. С.-174.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: «Наука», Главная редакция физ-математ. лит., 1956. 512 с.
3. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1. Напряженно-деформируемое состояние стержней. /Учебное пособие - Донецк; ООО «NORD-PRESS», 2005, 288 с.
4. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 2. Сложное напряженное состояние. /Учебное пособие. – РИА ДонНТУ, 2007, 306 с.
5. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 856 с.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
7. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. –М.: Издат-во лит. по строит. 1964. – 332 с.
8. Шевченко Ф. Л., Царенко С.Н. Задачи по сопротивлению материалов. Изд. четвертое, ТОВ. «Цифрова типографія», 2009, 354 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ.....	7
1.1. Напряжения и продольные деформации.....	7
1.2. Статически определимые стержневые системы.....	9
1.3. Статически неопределимые стержневые системы.....	12
1.4. Механические характеристики материалов.....	14
2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ.....	16
2.1. Линейное напряженное состояние.....	16
2.2. Плоское напряженное состояние.....	17
2.3. Главные напряжения.....	18
2.4. Объемное напряженное состояние.....	20
2.5. Обобщенный закон Гука.....	21
2.6. Теории прочности.....	22
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	23
3.1. Определения.....	23
3.2. Вычисление геометрических характеристик непосредственным интегрированием.....	23
3.3. Преобразование системы координат.....	25
3.3.1. Параллельный перенос осей.....	26
3.3.2. Поворот координатных осей.....	28
3.4. Главные оси.....	29
4. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ.....	34
4.1. СДВИГ.....	34
4.1.1. Чистый сдвиг.....	35
4.1.2. Допускаемые напряжения при чистом сдвиге.....	37
4.2. Вычисление напряжений по деформациям.....	37
4.3. КРУЧЕНИЕ.....	40
4.3.1. Вычисление крутящего момента по мощности и скорости вращения вала.....	40
4.3.2. Напряжения и деформации при кручении круглых стержней..	41
4.3.3. Расчет вала на прочность и жесткость.....	44
4.3.4. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания.....	45
4.3.5. Напряжения на произвольных площадках при кручении.....	48
4.3.6. Статически неопределимые валы.....	49
5. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.....	51
5.1. Общие понятия о поперечном изгибе.....	51
5.2. Внутренние силовые факторы при изгибе.....	52
5.3. Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами.....	55
5.4. Построение эпюр в балках.....	56

5.5	Контроль правильности построения эпюр.....	59
5.6.	Построение эпюр в рамах.....	59
5.7.	Нормальные напряжения при изгибе.....	64
5.8.	Подбор сечения балки.....	68
5.9.	Касательные напряжения при изгибе.....	70
5.10.	Подбор сечения балки и полная проверка прочности.....	73
5.11.	Вычисление перемещений при изгибе.....	76
5.11.1.	Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.....	76
5.11.2.	Вычисление перемещений неопределенными интегралами...	79
5.11.3.	Метод начальных параметров.....	82
5.11.4.	Энергетические методы вычисления перемещений при изгибе.....	87
5.11.4.1.	Работа внешних сил и потенциальная энергия при изгибе.....	87
5.11.4.2.	Формула Мора.....	90
5.11.4.3.	Правило Верещагина.....	95
6.	<b>ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.....</b>	<b>99</b>
6.1.	Общие понятия о продольно-поперечном изгибе.....	99
6.2.	Метод начальных параметров при продольно-поперечном изгибе.....	100
7.	<b>СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....</b>	<b>107</b>
7.1.	Неплоский и кривой изгиб.....	107
7.2.	Внецентренное растяжение или сжатие.....	115
7.3	Изгиб с кручением.....	121
8.	<b>СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ.....</b>	<b>124</b>
8.1.	Метод сил.....	126
8.2.	Вычисление перемещений в статически неопределимых системах.....	130
8.3	Статически неопределимые балки.....	131
8.4.	Расчет простейших статически неопределимых рам.....	136
8.5.	Проверка правильности решения статически неопределимой системы.....	142
8.6	Расчет статически неопределимых ферм.....	145
9.0	<b>УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....</b>	<b>149</b>
9.1.	Формула Эйлера.....	149
9.2.	Границы применимости формулы Эйлера.....	156
9.3.	Практический расчет сжатых стержней.....	158
10.	<b>ДИНАМИКА УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....</b>	<b>166</b>
10.1.	<b>КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....</b>	<b>166</b>
10.1.1.	Собственные незатухающие колебания.....	167
10.1.2.	Собственные затухающие колебания.....	174
10.1.3.	Вынужденные колебания без учета сопротивления движению.....	176
10.1.4.	Ударное воздействие нагрузки.....	180
10.1.5.	Вынужденные колебания при гармонических нагрузках.....	184

10.1.6.	Метод начальных параметров в вынужденных колебаниях систем с одной степенью свободы.....	188
10.2.	КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.....	193
10.3.	КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	197
10.3.1.	Поперечные колебания систем с распределенными параметрами.....	197
10.3.1.2.	Определение спектра частот собственных колебаний.....	198
10.3.1.3.	Метод начальных параметров в динамическом расчете балок ...	199
10.3.1.4.	Учет сосредоточенных масс в колебаниях весо­мых балок....	200
10.3.1.5.	Свойства собственных функций систем с распределенными параметрами.....	203
10.3.1.6.	Собственные поперечные колебания весо­мых балок.....	209
10.3.1.7.	Вынужденные поперечные колебания весо­мых балок.....	218
10.3.1.8.	Ударные нагрузки при изгибе весо­мых балок.....	221
10.3.1.9.	Вынужденные колебания при гармонических нагрузках.....	224
10.4.	ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕСОМЫХ СТЕРЖНЕЙ....	230
10.4.1.	Общая теория собственных продольных колебаний стержней.....	230
10.4.2.	Свойства собственных функций продольных колебаний.....	232
10.4.3.	Собственные продольные колебания стержней.....	233
10.4.3.	Вынужденные продольные колебания упругих стержней....	239
10.5.	КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕСОМЫХ ВАЛОВ.....	242
11.	УПРОЩЕННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	244
	ПРИЛОЖЕНИЯ.....	254
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	258