ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШАРНИРНЫХ УГЛОВ ПОВОРОТА ЗВЕНЬЕВ НОГИ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Рафиков Г. Ш., Хорхордин А. В., Теряев В. Н.
Донецкий национальный технический университет

В работе рассматривается способ определения шарнирных углов ноги шагающего аппарата на основе метода неявных функций. При использовании указанного метода принято допущение, что в процессе управления имеется информация о шарнирных углах ног аппарата. Поэтому позиционная следящая система построена путем вычисления программных значений шарнирных углов и использования рассогласования между измеренными и программными углами. Эти рассогласования служат для формирования управляющего воздействия в контуре обратной связи по каждому из углов. Однако, можно совместить процесс вычисления программных значений углов и отработки ногой возникшего позиционного рассогласования [1,2].

Выразим декартовы координаты стопы i-ой ноги в осях, связанных с корпусом аппарата, через угловые координаты ноги. Введем в рассмотрение вектор заданного положения стопы i-ой ноги в виде

$$r_i^{П} = \left(r_x^{П} \quad r_y^{П} \quad r_z^{П}\right). \tag{1}$$

Тогда вектор заданного положения ступни i-ой ноги можно представить в следующем виде

$$\begin{bmatrix} r_X^{П} \\ r_Y^{П} \\ r_z^{П} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [l_0 + l_1 \sin\alpha_2 + l_2 \sin\varphi]\cos\alpha_1 \\ [l_0 + l_1 \sin\alpha_2 + l_2 \sin\varphi]\sin\alpha_1 \\ l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos\varphi \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\varphi = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$. (3)

$$r_x^{П} = [l_0 + l_1 \sin(\alpha_2) + l_2 \sin(\varphi)]\cos(\alpha_1); \tag{4}$$

$$r_y^{П} = [l_0 + l_1 \sin(\alpha_2) + l_2 \sin(\varphi)]\sin(\alpha_1); \tag{5}$$

$$r_z^{\Pi} = [l_1 \cos(\alpha_2) + l_2 \cos(\varphi)]. \quad (6)$$

Точное решение системы 3-х уравнений (4), (5) и (6) относительно 3-х неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно получить на основе решения обратной кинематической задачи. Однако истинные значения шарнирных углов из-за действия возмущений будут отличаться от точного решения.

Примем допущение о том, что в процессе управления имеется информация об углах в шарнирах ног. Такая информация выдается потенциометрическими датчиками. Тогда позиционная следящая система может быть построена, например, путем вычисления программных значений углов, удовлетворяющих системе уравнений (4), (5), (6), и использования рассогласования между измеренными и программными углами. Эти рассогласования могут служить для формирования управляющего воздействия в контуре обратной связи по каждому из углов. Можно, однако, совместить процесс решения системы (4), (5), (6) с процессом отработки ногой возникшего позиционного рассогласования.

Рассмотрим один из вариантов такого совмещения.

Предположим, что в момент времени t реализовались некоторые углы α_{ij}. Переход по времени к углам, удовлетворяющим системе (4), (5), (6) может быть выполнен неоднозначно. Воспользуемся аналогом градиентного метода, широко применяемого для численного решения систем алгебраических уравнений [3]. Этот метод состоит в следующем.

Пусть требуется решить систему уравнений вида

$$\overline{P}(\overline{\alpha}) = 0. \quad (7)$$

Сведем данную задачу к минимизации функции [4]

$$F = P_1^2(\overline{\alpha}) + P_2^2(\overline{\alpha}) + P_3^2(\overline{\alpha}), \quad (8)$$

где F – функция Ляпунова для рассматриваемого уравнения (7);

$P_1(\overline{\alpha}), P_2(\overline{\alpha}), P_3(\overline{\alpha})$ - компоненты вектора положения по осям X, Y, Z декартовой системы координат соответственно.

Итерационный шаг $\Delta\overline{\alpha}$ назначим таким образом, чтобы в пространстве компонент P_i вектора $\overline{P}(\overline{\alpha})$ смещение происходило в направлении, противоположном градиенту F по $\overline{P}(\overline{\alpha})$ [5], т. е.

$$\Delta\overline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \overline{P}}\cdot\Delta\tau = -\overline{P}(\overline{\alpha})\cdot\Delta\tau\,, \qquad (9)$$

где $\Delta\tau$ - параметр, задающий величину смещения. В качестве такого параметра можно принять приращение времени Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате такого перехода получим

$$\dot{\overline{\alpha}} = -\left(\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{\alpha}}\right)^{-1}\cdot\overline{P}\,. \qquad (10)$$

Через $\dfrac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{\alpha}}$ обозначим Якобиан левой части уравнения (7). Равенство (10) определяет закон перехода от произвольных значений переменных $\overline{\alpha}$ к решению системы (7).

Действительно, дифференциальное уравнение(10) имеет стационарную точку, удовлетворяющую(7), и эта точка асимптотически устойчива, т.к. функция F является функцией Ляпунова для уравнения вида (7). При условии, конечно, что построенный таким образом асимптотический переход в требуемую окрестность стационарной точки осуществляется достаточно быстро, его можно положить в основу позиционной следящей системы.

Обозначим текущий радиус-вектор положения i-ой стопы, рассчитанный по реализовавшимся углам α_{ij}, через $r^{-f} = \left(r_X^f,\quad r_Y^f,\quad r_Z^f\right)^T$. Тогда

$$\overline{P} = r^{-f} - r^{-П}\,, \qquad (11)$$

где вектор $\overline{P} = \left(P_1,\quad P_2,\quad P_3\right)^T$, (12)

P_1, P_2, P_3 – компоненты вектора $\overline{P}$ на оси декартовой системы координат.

Причем эти компоненты определяются следующими выражениями

$$P_1 = r_x^{П} = \left[l_0 + l_1\cos(\alpha_2) + l_2\cos(\varphi)\right]\cos(\alpha_1); \qquad (13)$$

$$P_2 = r_y^{\Pi} = [l_0 + l_1\cos(\alpha_2) + l_2\cos(\varphi)]\sin(\alpha_1); \qquad (14)$$

$$P_3 = r_z^{\Pi} = [l_1\sin(\alpha_2) + l_2\sin(\varphi)]. \qquad (15)$$

Для решения дифференциального уравнения (10) необходимо вначале вычислить якобиан I_f для выражений (13), (14), (15) по формуле:

$$I_f = \frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{P}_1}{\partial \overline{\alpha}_1} & \frac{\partial \overline{P}_1}{\partial \overline{\alpha}_2} & \frac{\partial \overline{P}_1}{\partial \overline{\alpha}_3} \\ \frac{\partial \overline{P}_2}{\partial \overline{\alpha}_1} & \frac{\partial \overline{P}_2}{\partial \overline{\alpha}_2} & \frac{\partial \overline{P}_2}{\partial \overline{\alpha}_3} \\ \frac{\partial \overline{P}_3}{\partial \overline{\alpha}_1} & \frac{\partial \overline{P}_3}{\partial \overline{\alpha}_2} & \frac{\partial \overline{P}_3}{\partial \overline{\alpha}_3} \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Из уравнений (13), (14), (15) вычислим частные производные $\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j}$ (i=1,2,3; j=1,2,3) выражения(16), которые являются элементами матрицы Якоби.

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} = -[l_0 + l_1\cos(\alpha_2) + l_2\cos\varphi]\sin\alpha_1;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} = -[l_1\sin(\alpha_2) + l_2\sin\varphi]\cos\alpha_1;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_3} = -l_2\sin\varphi\cos\alpha_1;$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} = [l_0 + l_1\cos(\alpha_2) + l_2\cos\varphi]\cos\alpha_1;$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} = -[l_1\sin(\alpha_2) + l_2\sin\varphi]\sin\alpha_1; \qquad (17)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha_3} = -l_2\sin\varphi\sin\alpha_1;$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \alpha_1} = 0;$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \alpha_2} = l_1 \cos(\alpha_2) + l_2 \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \alpha_3} = l_2 \cos\varphi.$$

Для упрощения записи элементов матрицы Якоби введем следующие обозначения:

$$L_{ss} = l_1 \sin\alpha_2 + l_2 \sin\varphi;$$

$$L_{cc} = l_1 \cos\alpha_2 + l_2 \cos\varphi;$$

$$L_s = l_2 \sin\varphi; \tag{18}$$

$$L_c = l_2 \cos\varphi.$$

С учетом обозначений (18) матрица Якоби запишется следующим образом:

$$I_f = \frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} -(l_0 + L_{cc})\sin\alpha_1 & -L_{ss}\cos\alpha_1 & -L_s\cos\alpha_1 \\ (l_0 + L_{cc})\cos\alpha_1 & -L_{ss}\sin\alpha_1 & -L_s\sin\alpha_1 \\ 0 & L_{cc} & L_c \end{bmatrix} \tag{19}$$

Обратную матрицу Якоби I_f^{-1} вычислим по формуле

$$I_f^{-1} = \frac{1}{|I_f|} \cdot \begin{bmatrix} I_{f11} & I_{f21} & I_{f31} \\ I_{f12} & I_{f22} & I_{f32} \\ I_{f13} & I_{f23} & I_{f33} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где I_{fij} (i=1,2,3; j=1,2,3) – алгебраические дополнения элементов матрицы Якоби;

$|I_f|$ - детерминант (определитель) матрицы Якоби.

Вначале вычислим алгебраические дополнения I_{fij} элементов матрицы Якоби.

$$
\begin{aligned}
&I_{f11} = l_1 l_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_3;\\
&I_{f12} = L_c(l_0 + L_{cc})\sin\alpha_1;\\
&I_{f13} = \ L_{cc}(l_0 + L_{cc})\cos\alpha_1;\\
&I_{f21} = l_1 l_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_3;\\
&I_{f22} = -L_c(l_0 + L_{cc})\sin\alpha_1;\\
&I_{f23} = -L_{cc}(l_0 + L_{cc})\sin\alpha_1;\\
&I_{f31} = 0;\\
&I_{f32} = (l_0 + L_{cc})L_s;\\
&I_{f33} = L_{ss}(l_0 + L_{cc}).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Детерминант матрицы Якоби равен:

$$\left|I_f\right| = -l_1 l_2 (l_0 + L_{ss})\sin\alpha_3.$$

С учетом полученных выражений (21) обратная матрица Якоби имеет вид:

$$
I_f^{-1} = \begin{bmatrix}
-\dfrac{\sin\alpha_1}{l_0 + L_{cc}} & -\dfrac{\cos\alpha_1}{l_0 + L_{cc}} & 0\\
-\dfrac{\sin\alpha_1\cos\varphi}{l_1\sin\alpha_3} & \dfrac{\sin\alpha_1\cos\varphi}{l_1\sin\alpha_3} & -\dfrac{\sin\varphi}{l_1\sin\alpha_3}\\
-\dfrac{L_{cc}\cos\alpha_1}{l_1 l_2\sin\alpha_3} & \dfrac{L_{cc}\sin\alpha_1}{l_1 l_2\sin\alpha_3} & -\dfrac{L_{ss}}{l_1 l_2\sin\alpha_3}
\end{bmatrix}.
\tag{22}
$$

Для проверки правильности вычисления обратной матрицы необходимо при умножении матрицы Якоби на ее обратную матрицу получить единичную матрицу, т.е.

$$I_f I_f^{-1} = I \quad \text{или} \quad I_f^{-1} I_f = I, \tag{23}$$

где I единичная матрица, размерность которой совпадает с размерностью матриц I_f *и* I_f^{-1}. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что условие (23) выполняется.

Следует отметить, что для существования обратной матрицы I_f^{-1} необходимо, чтобы определитель матрицы Якоби (детерминант, якобиан) (см. выражение (19)) был отличен от нуля. Поскольку детерминант матрицы Якоби определяется выражением (21)

$$\left|I_f\right| = l_1 l_2 (l_0 + L_{ss}) \sin\alpha_3,$$

то необходимое условие выполнения неравенства $\left|I_f\right| = l_1 l_2 (l_0 + L_{ss}) \sin\alpha_3 \neq 0$, будет соблюдаться в том случае, если $(l_0 + L_{ss}) \neq 0$ *и* $\sin\alpha_3 \neq 0$. В противном случае $\left|I_f\right| = 0$.

Последние два неравенства имеют геометрический смысл. Если конец ноги находится под точкой подвеса ее, то

$$l_0 + l_1\cos\alpha_2 + l_2\cos\varphi = 0, \qquad (24)$$

откуда следует неопределенность решения системы неявных уравнений (см. первые два элемента верхней строки матрицы I_f^{-1} (22)) относительно α_1.

Неравенство $\sin\alpha_3 \neq 0$ означает, что надо избегать пересечений траектории стопы с осью поворота плоскости ноги. В дальнейшем будем полагать, что угол α_3 может изменяться в пределах

$$\varepsilon \le \alpha_3 \le \pi - \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0) \qquad (25)$$

$$\dot\alpha_1 = -I_{f11}^{-1}\Delta P_1 - I_{f12}^{-1}\Delta P_2 - I_{f13}^{-1}\Delta P_3;$$

$$\dot\alpha_2 = -I_{f21}^{-1}\Delta P_1 - I_{f22}^{-1}\Delta P_2 - I_{f23}^{-1}\Delta P_3; \qquad (26)$$

$$\dot\alpha_3 = -I_{f31}^{-1}\Delta P_1 - I_{f32}^{-1}\Delta P_2 - I_{f33}^{-1}\Delta P_3;$$

$$\Delta x = r_x^{\Pi} - r_x^{f};$$

$$\Delta y = r_y^{\Pi} - r_y^{f}; \qquad (27)$$

$$\Delta z = r_z^{\Pi} - r_z^{f} \ .$$

Переходной процесс (26) получается устойчивым и имеет очень малое время регулирования. На рис. 2 изображен переходной процесс для случая, когда координаты ступни ноги имеют значения:

$$r_x^{\Pi} = 0.2\,; \quad r_y^{\Pi} = 0.3\,; \quad r_z^{\Pi} = 0.12\,.$$

Структурная схема позиционной следящей системы выглядит следующим образом:

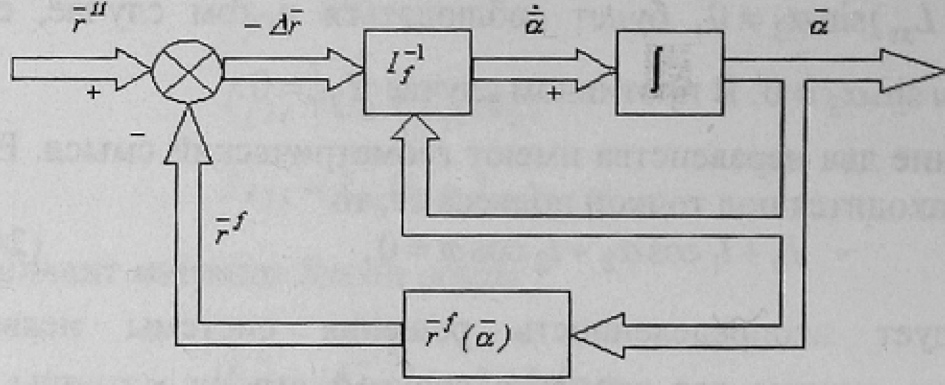

Рисунок 1 - Структурная схема позиционной следящей системы

Анализируя полученные переходные процессы, можно отметить, что все они имеют устойчивый характер и высокое быстродействие (переходный процесс заканчивается за 5-6 шагов дискретности). Следовательно, использование обратной матрицы Якоби в позиционной следящей системе эффективно и целесообразно. Также важно, что углы могут быть определены в реальном масштабе времени, т. е. система будет успевать отслеживать задающую векторную величину.

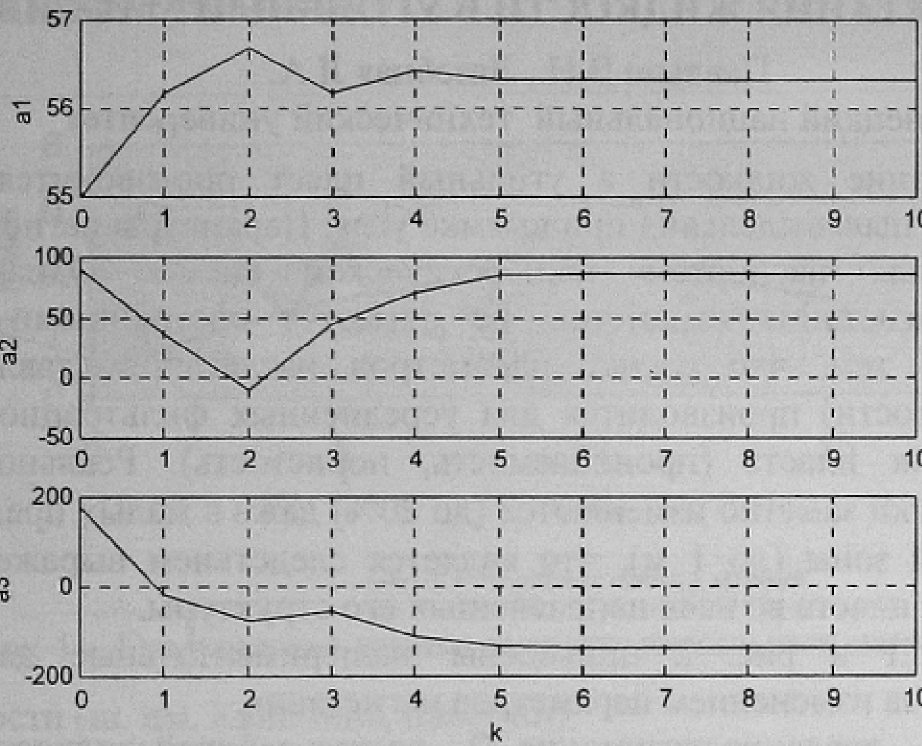

Рисунок 2 – Переходные процессы угловых координат положения ступни ноги.

Список источников

1. Штильман Л. Г. Организация специальной следящей системы для управления движением искуственной конечностью. – В кн.: 6 [го] Всесоюзного симпозиума по теории и принципам устройств роботов и манипуляторов: Тез. 1976. Тольяти, 1976, секция 3, с. 75-90.

2. Штильман Л.Г. О преобразовании координат в системе управления искусственной конечностью. – В кн.: Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики. М.: Издательство МГУ, 1978, с. 75-90.

3.Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1976.

4. Корн Т., Корн Г. Электронные аналоговые и аналогоцифровые вычислительные машины. М.: Мир, 1967. Т.1. 462 с., 1968. Т.2. 311 с.

5. Левин Л. Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин. М.: Мир, 1966. 415с.