О ЕДИНСТВЕ ПЕРВОГО И ВТОРОГО МЕТОДОВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Жиляков В. И., Денищик С. С., Дрючин В. Г.
Донбасский горно-металлургический институт

Постановка задачи. Задача аналитического конструирования регуляторов решается различными методами, в том числе и методом динамического программирования, при использовании которого была обнаружена тесная связь его с прямым методом Ляпунова [1].

Связь эта состоит в том, что принципу оптимальности Беллмана удовлетворяет некоторое множество положительно-определенных квадратичных функций. Решение задачи дают лишь те из них, которые являются функциями Ляпунова. Найденные по этим функциям регуляторы придают устойчивость замкнутой системе.

Задачу синтеза регуляторов можно решать прямым методом Ляпунова. Дело в том, что в устойчивой системе функция Ляпунова $V > 0$, а $\dot{V} < 0$. поэтому функция Ляпунова убывает и в состоянии равновесия достигает своего минимального значения. А поскольку в замкнутой системе устойчивость обеспечивается регулятором, то его естественно синтезировать из условия минимума функции Ляпунова. При построении функций Ляпунова для линейных систем по методу, предложенному самим Ляпуновым, предварительно задают положительно-определенную квадратичную форму, коэффициенты которой выбирают произвольно [2]. Такой выбор коэффициентов допустим в задачах анализа устойчивости. В задачах же синтеза произвольный выбор коэффициентов этой функции недопустим, поскольку, численные значения этих коэффициентов однозначно определяют численные значения коэффициентов регулятора и, следовательно, определяют качество регулирования. Поэтому эти коэффициенты необходимо выбирать из условия обеспечения желаемого качества регулирования. Поскольку в настоящее время такую задачу выбора решить не представляется возможным, предлагается следующий подход. Положительно-определенная квадратичная форма строится на переменных исходной системы дифференциальных уравнений как на ее решениях. Поэтому целесообразно задавать положительно-определенную квадратичную форму с неизвестными коэффициентами и задавать дополнительно решение синтезируемой замкнутой системы по выходной координате. Повидимому, выполнить это будет несложно, т.к. задать решение означает задать желаемое качество регулирования в замкнутой системе.

Решение задачи. Пусть объект задан уравнениями

$$\dot{x}_i = \sum_k b_{ik} x_k + m_k U, \qquad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}, \tag{1}$$

возмущенного движения.

Совершим линейное невырожденное преобразование

$$\mathrm{x} = \mathrm{Dy} \tag{2}$$

и приведем систему (1) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i = y_i + 1, && i = 1, \ldots n-1, \\ &\dot{y}_n = -\sum_i b_i y_i + U, && -\sum_i b_i y_i + U = U_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где b_i – коэффициенты характеристического уравнения разомкнутой системы (1).

Зададим положительно определенную форму

$$W = \sum_k a_k y_k^2 + U_1^2 \tag{4}$$

с неизвестными a_k коэффициентами, причем, y_k есть решение системы дифференциальных уравнений замкнутой системы, построенной для объекта (3), и зададим дополнительно траекторию

$$\mathrm{y}_1(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{p}_1 \mathrm{t}} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{p}_2 \mathrm{t}} + \ldots + \mathrm{C}_\mathrm{n} \mathrm{e}^{\mathrm{p}_\mathrm{n} \mathrm{t}}, \qquad \mathrm{p}_\mathrm{i} < 0, \qquad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}, \tag{5}$$

проектируемой замкнутой системы по выходной координате в виде, например, апериодического переходного процесса заданной длительности.

Задача заключается в том, чтобы найти управление U_1, которое обеспечивает устойчивость замкнутой системы и минимум положительно-определенной функции

$$\mathrm{V} = \sum_\mathrm{k} \sum_\alpha \mathrm{A}_{\mathrm{k}\alpha} \mathrm{y}_\mathrm{k} \mathrm{y}_\alpha, \qquad \mathrm{A}_{\mathrm{k}\alpha} = \mathrm{A}_{\alpha\mathrm{k}} \tag{6}$$

Ляпунова при убывании ее вдоль траектории (5).

По прямому методу Ляпунова (2) для обеспечения устойчивости необходимо и достаточно, чтобы функция (6) была функцией

Ляпунова, т.е. чтобы относительно этой функции выполнялось условие

$$\frac{dV}{dt} = -W, \tag{7}$$

что в силу дифференциальных уравнений (3) эквивалентно функциональному уравнению

$$\sum_k a_k y_k^2 + U_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial y_i} y_{i+1} + \frac{\partial V}{\partial y_n} U_1 = 0. \tag{8}$$

Для определения условий минимизации функции Ляпунова продифференцируем (8) по U_1 и определим

$$2U_1 + \frac{\partial V}{\partial y_n} = 0. \tag{9}$$

Решая совместно уравнения (6), (8), (9) определим систему

$$\begin{aligned}
&a_k = A_{kn}^2 - 2A_{(k-1)k}, && k = 1,\ldots,n,\\
&A_{1i} = A_{1n}A_{(i+1)n}, && i = 1,\ldots,n-1,\\
&A_{2i} = A_{2n}A_{(i+1)n} - A_{1(i+1)}, && i = 2,\ldots,n-1,\\
&A_{3i} = A_{3n}A_{(i+1)n} - A_{2(i+1)}, && i = 3,\ldots,n-1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{(n-2)i} = A_{(n-2)n}A_{(i+1)n} - A_{(n-3)(i+1)}, && i = n-2,\ldots,n-1,\\
&A_{(n-1)i} = A_{(n-1)n}A_{(i+1)n} - A_{(n-2)(i+1)}, && i = n-1,
\end{aligned} \tag{10}$$

нелинейных алгебраических уравнений, определяющих соотношения между коэффициентами функции Ляпунова.

Для преодоления известных вычислительных трудностей при решении системы (10) определим из (9) управление

$$U_1 = -\sum_i A_{in} y_i, \tag{11}$$

с неизвестными A_{in} коэффициентами, которое совместно с уравнениями (3) образует систему уравнений, описывающих движение замкнутой устойчивой системы автоматического регулирования и имеющих известное решение в виде заданной траектории (5) квадратичной формы (4).

Для системы (3), (11) найдем характеристическое уравнение

$$p^n + A_{nn}p^{n-1} + \ldots + A_{1n} = 0. \tag{12}$$

С другой стороны, по известному решению (5), используя числа P_i как корни характеристического уравнения и формулы Виета, найдем характеристическое уравнение

$$p^n + \gamma_n p^{n-1} + \ldots + \gamma_1 = 0 \tag{13}$$

с известными γ_i, $i = 1, \ldots, n$ коэффициентами.

Рассматривая (12), (13) как две формы характеристического уравнения и сравнимая соответствующие их коэффициенты, найдем в управлении (11)

$$A_{in} = \gamma_i. \tag{14}$$

Поскольку (14) определяют A_{in} коэффициентов функции Ляпунова, то с их учетом система (10) превращается в систему линейных алгебраических уравнений, которая позволяет определить все остальные A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}, …, $A_{(n-2)i}$, $A_{(n-1)i}$ коэффициенты функции (6) Ляпунова, и коэффициенты a_k, $k = 1, \ldots, n$ квадратичной формы (4).

Определим вспомогательное управление U_1 (11) и его коэффициенты (14), найдем фактическое управление

$$U = -\sum_i n_i y_i, \qquad n_i = A_{in} - b_i, \tag{15}$$

которое обеспечивает выполнение поставленной задачи.

Выполняя преобразование, обратное (2), можно перейти в управлении (15) к фазовым координатам объекта (1).

Пусть система автоматического регулирования представлена только характеристическим уравнением вида (12) и пусть коэффициенты этого характеристического уравнения подчиняются критерию Гурвица или Рауса. Тогда справедливо следующее утверждение: если в характеристическом уравнении коэффициенты A_{in}, $i = n, \ldots, 1$, удовлетворяют критерию Гурвица (или Рауса), то коэффициенты A_{in} есть коэффициенты V функции Ляпунова, обеспечивающие необходимые и достаточные условия устойчивости и выполнение условий $V > 0$, $\dot{V} < 0$.

Таким образом, первый метод Ляпунова тоже может быть назван прямым методом. Здесь коэффициенты функции Ляпунова строятся на коэффициентах характеристического уравнения, обеспечивая тем самым выполнение необходимых и достаточных условий устойчивости.

Пример. Задан объект [3] уравнениями

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + U,$$
$$\dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - U, \quad (16)$$
$$\dot{x}_3 = 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + U.$$

По характеристическому уравнению объекта и запишем

$$\dot{y}_1 = y_2,$$
$$\dot{y}_2 = y_3, \quad (17)$$
$$\dot{y}_3 = 5y_3 - 7y_2 + 3y_1 + U = U_1.$$

Зададим квадратичную форму (4) и траекторию (5) с желаемым распределением корней $P_1 = -2$, $P_2 = -3$, $P_3 = -3$.

Тогда система (10) принимает вид

$$a_1 = A_{13}^2,$$
$$A_{11} = A_{13}A_{23},$$
$$A_{12} = A_{13}A_{33},$$
$$a_2 + 2A_{12} = A_{23}^2, \quad (18)$$
$$A_{13} + A_{22} = A_{23}A_{33},$$
$$a_3 + 2A_{23} = A_{33}^2.$$

Получена система нелинейных алгебраических уравнений, которую нужно решать.

Для решения в соответствии с (11)

$$U_1 = -A_{13}y_1 - A_{23}y_2 - A_{33}y_3$$

и характеристическое уравнение (12)

$$p^3 + A_{33}p^2 + A_{23}p + A_{13} = 0.$$

Поскольку задано распределение корней, то уравнение (13)

$$p^3 + 8p^2 + 21p + 18 = 0.$$

Следовательно

$$A_{13} = 18, \qquad A_{23} = 21, \qquad A_{33} = 8, \quad (19)$$

а искомое управление (15)

$$U = -n_1 y_1 - n_2 y_2 - n_3 y_3,$$
$$n_1 = 18 + 3 = 21, \qquad n_2 = 21 - 7 = 14, \qquad n_3 = 8 + 5 = 13. \tag{20}$$

Затем, что при решении задачи необходимо найти только A_{in} коэффициентов функции Ляпунова в управлениях (11), (15), в данном примере коэффициенты A_{12}, A_{23}, A_{33}, определяемые равенствами (19). Но найденные по (19) коэффициенты функции Ляпунова превращают (18) в систему линейных алгебраических уравнений, из которых можно найти остальные коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{22} и коэффициенты a_1, a_2, a_3 заданной квадратичной формы.

В управлении (20) совершим переход к исходным фазовым координатам. Для того по [3] найдем матрицу Д-1, обратную матрице Д (2) и найдем, что

$$y_1 = x_1 + x_2, \qquad y_2 = x_2 + x_3, \qquad y_3 = x_3. \tag{21}$$

Подставим (21) в (20) и окончательно найдем

$$U = -21x_1 - 35x_2 - 27x_3.$$

Список источников

1. Летов А.М. Динамика полета и управление. –М.: Наука, 1969.
2. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Ч.П. –Л.: Энергия, 1966.
3. Кожинская Л. И., Ворновицкий А. Э. Управление качеством систем. –М.: Машиностроение, 1979.

УПРАВЛЕНИЕ КАЧЕСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ткачук Д. Я.
Донбасский горно-металлургический институт

Постановка задачи. При решении задачи аналитического синтеза (аналитического конструирования) регуляторов исходят из того, что задан объект управления уравнениями возмущенного движения и задан квадратичный функционал, отражающий требование к качеству регулирования синтезируемой системы. Задача заключается в том, чтобы найти уравнение регулятора, как функцию фазовых координат объекта, который обеспечивает минимум функционала и желаемое качество регулирования (желаемый вид переходного процесса). До