УДК 004.94

Т.В. Михайлова, канд. техн. наук, доцент,
О.В. Кучереносова
Донецький національний технічний університет, г. Донецьк, Украйна
tanyatv1275@mail.ru

Модель неоднорідного кластера зі спільним використанням дискового простору

Запропоновано Марківську модель неоднорідного кластера зі спільним використанням дискового простору.

Ключові слова: неоднорідний кластер, Марківська модель, матриця перехідних ймовірностей, абсолютні імовірності

Вступ

Зараз існує велика кількість задач, що вимагають застосування потужних обчислювальних систем, серед яких задачі моделювання роботи систем масового обслуговування й керування, розподілених систем, складні обчислювальні задачі та ін. Для розв'язку таких задач усе ширше використовуються кластери, які стають загальнодоступними та відносно недорогими апаратними платформами для високопродуктивних обчислень [1].

Однією з основних проблем, що виникають при проектуванні й експлуатації паралельних і розподілених обчислювальних систем (ОС) є складання рекомендацій раціонального використання ресурсів обчислювального середовища. Одним з ефективних способів вирішення цієї проблеми може бути використання результатів непреривних або дискретних аналітичних моделей.

Об'єднання великої кількості комп'ютерів у єдиний обчислювальний комплекс породило такі задачі, як збалансованість навантаження, виявлення вузьких місць в обчислювальній системі, забезпечення заданого часу відповіді при роботі великої кількості користувачів, вибір обладнання при максимальній продуктивності при обмеженій заданій вартості, тощо. [2].

Велика кількість створюваних обчислювальних систем і, часто, неефективне їхнє використання, говорять про те, що роботи, пов'язані з дослідженням ефективності паралельних ОС, вимагають подальшого розвитку й не втрачають своєї актуальності [3].

Ціль - дослідження ефективності функціонування неоднорідної кластерної системи.

Задача – побудова марковської моделі неоднорідної кластерної системи.

Модель неоднорідного кластера зі спільним використанням дискового простору

У моделі з подільованими дисками (рис.1) кожний вузол у кластері має свою власну пам'ять, усі вузли спільно використовують дискову підсистему. Спрощена модель кластера зі спільним використанням дискового простору наведена на рис. 2.

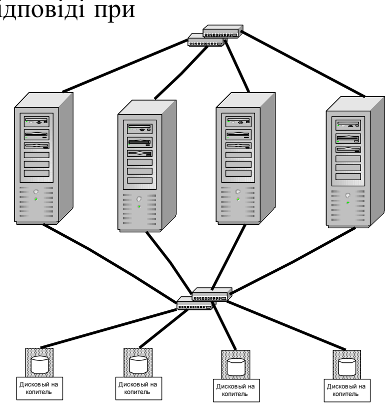

Рисунок 1 – Неоднорідний кластер зі спільним використанням дискового простору

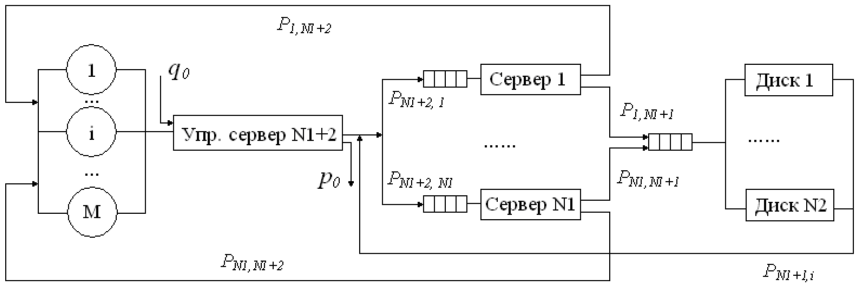

Рисунок 2 - Структурна схема марківської моделі кластера зі спільним використанням дискового простору

Вхідний вузол (керуючий сервер) розподіляє між обчислювальними серверами (виконуючими неоднакові завдання) задачі. Кількість обчислювальних серверів – *N1*. Кожний з них може звернутися до даних, розташованих на дисках, кількість яких *N2* [14]. Через обмежені обчислювальні можливості будемо вважати, що кількість задач, оброблювана такою обчислювальною системою не більш *M*.

Побудуємо дискретну марківську модель. Вимоги, що надходять на обслуговування до кожного із обчислювальних серверів, надходять у відповідну обмежену чергу (не більш *M*), з якої на обслуговування вибираються за правилом «перший прийшов – перший обслужився».

Задачі, оброблювані на такому кластері, неоднорідні й мають наступні характеристики: $p_{N1+2,i}$ – імовірність запиту до *i-му* серверу, $i=\overline{1,N1}$, $p_{i,N1+1}$ – імовірність запиту *i-го* обчислювального сервера до одного з *N2* дисків, $i=\overline{1,N1}$, $p_{i,N1+2}$ – імовірність запиту *i-го* обчислювального вузла до керуючого сервера $i=\overline{1,N1}$, $p_{N1+1,i}$ – імовірність запиту одного з *N2* диска до *i-го* сервера, $i=\overline{1,N1}$, q_i – імовірність завершення обслуговування задачі *i-м* вузлом $i=\overline{1,N}$, p_0 – імовірність завершення обслуговування задачі системою, q_0 – імовірність вступу в систему нової задачі.

Для обчислювальних ресурсів приймемо, що тривалості часів обслуговування заявок на вхідному вузлі, обчислювальному сервері або дисковому масиві, відповідно, мають геометричний розподіл із середнім T_i, ($i=\overline{1,N}$). Тоді $q_i=\dfrac{\tau}{T_i}$ – імовірність завершення обслуговування задачі на вхідному вузлі, обчислювальному сервері або дисковому масиві, відповідно, ($i=\overline{1,N}$), r_i– імовірність продовження обслуговування задачі на вхідному вузлі, обчислювальному сервері або дисковому масиві, відповідно, ($i=\overline{1,N}$), r_i=1-q_i.

За стан системи приймемо розміщення *M* заявок по *N* вузлам $\overline{m}=(m_1,m_2,m_3,..m_{N1+2})$, де m_i – кількість задач в i-ому вузлі. Необхідно визначити всі можливі стани. Позначимо множину станів через $S=\{(m_1,m_2,m_3,..m_{N1+2})\,|\sum_{i=1}^{N}m_i=M$ }. Число станів системи для того самого кількості задач *j*= $\sum_{i=1}^{N}m_s$ дорівнює числу розміщень *j* задач по *N* вузлам і визначається по формулі $L_j=C_{j+N-1}^{N-1}$, загальна кількість станів обчислюється так:

$$L=\sum_{j=0}^{M}L_j \tag{1}$$

Вектор $\overline{k}=(k_1,k_2,k_3,..k_{N1+2})$ визначає кількість пристроїв у кожному вузлі.

Визначимо перехідні ймовірності для кожної пари станів $P_{ij}(l)=P\{s_j^{(l)}\,|\,s_j^{(l-1)}\}$, тобто ймовірності переходу зі стану S_i, в якому вона знаходилася на *(l-1)*-м кроці. Визначемо матрицю переходних ймовірностей $\boldsymbol{P}$.

Розглянемо перехід з довільного стану $\overline{m}$ в стан $\overline{m'}$.

В стані $\overline{m}$ обробляється $j = \sum_{s=1}^{N} m_S$ задач, а в стані $\overline{m'}$ – $j' = \sum_{s=1}^{N} m'_S$.

Оскільки за один такт може надійти на обробку до ОС або покинути її одне завдання, то різниця $\Delta = j - j'$ повинна задовольняти умові

$$\Delta \in \{1, 0, -1\}. \qquad (2)$$

Введемо вектор $\overline{\alpha}$, *s*-а компонента якого визначає число загружених пристроїв в *s*-му узлі.

$$\alpha_S = \min(m_S, k_S), \quad s = \overline{1, N}. \qquad (3)$$

Обчислимо вектор $\bar{i}$

$$\bar{i} = \overline{m} - \overline{m'} = (i_1, i_2, \ldots, i_N), \qquad (4)$$

кожна компонента i_S якого, представляє змінення числа задач у *s*-му вузлі. Якщо $i_S > 0$, то вузола *s* повинні залишити i_S задач. Якщо $i_S < 0$, то до вузла *s* повинні прийти $|i_S|$ задач. При любому переході з $\overline{m}$ число задач, обслужених *s*-м вузлом обробки, не може бути більше α_s, тобто

$$i_S \le \alpha_S, \quad s = \overline{1, N}. \qquad (5)$$

Кількість завдань, що надійшли до керуючого сервера від обчислюючих серверів, не може перевищувати кількості працюючих серверів (за винятком випадку, коли з'являється нове завдання або залишає ОС завдання, для якого обслуговування завершене, про що свідчить символ δ), тобто

$$|i_N| + \gamma \le \sum_{s=1}^{N1} \alpha_s, \qquad (6)$$

де $\gamma = \begin{cases} -1, & \Delta = 1, \\ 1, & \Delta = -1, \\ 0, & \Delta = 0. \end{cases}$

Аналогічно, кількість задач, що надійшли, до дисків від обчислюючих серверів не може перевищувати кількості працюючих серверів

$$|i_{N-1}| \le \sum_{s=1}^{N1} \alpha_s \quad . \qquad (7)$$

Від обчислювальних вузлів задачі надходять і до управляючого серверу і до дисків, тому загальна кількість збіглих задач не перевищує кількості працюючих обчислювальних серверів

$$|i_N| + |i_{N-1}| + \gamma \le \sum_{s=1}^{N1} \alpha_s . \qquad (8)$$

Кількість задач, що надійшли, до обчислювальних серверів не перевищує кількості працюючих управляючих пристроїв і дисків

$$\sum_{s=1}^{N1} |i_s| \le \alpha_N + \alpha_{N-1}. \qquad (9)$$

Перехід $\overline{m} \to \overline{m'}$ можливий, якщо дотримуються умови (2), (5), (8) і (9).

Розподіл програм, обслужених на дисках, по серверним вузлам визначимо *N*-1-мірним вектором $\overline{\beta}$. *N*-1-й елемент вектора дорівнює загальній кількості задач, обслужених дисками й розподілених по обчислювальних вузлах:

$$\beta_{N-1} = \sum_{s=1}^{N1} \beta_S . \qquad (10)$$

Кількість задач, яка залишає дисковий вузол, лежить у наступних межах:

$$|i_{N-1}| \le \beta_{N-1} \le \alpha_{N-1}. \qquad (11)$$

Назвемо цей вектор $\overline{\beta}$ індикатором розподілу задач, обслужених дисковим вузлом по обчислювальних вузлах системи.

Кількість задач, яка може надійти від дисків до *s*-го обчислювального серверу не перевищує кількості працюючих дисків:

$$\beta_s \le \alpha_{N-1}, \quad (s = \overline{1, N1}). \qquad (12)$$

Якщо i_s=0, то *s*-й обчислювальний сервер обробив усі задачі, які до нього надійшли в даний такт. Кількість задач, яка може обробити один обчислювальний вузол за один такт часу, не перевищує кількості працюючих пристроїв на цьому вузлі. Тобто, для всіх обчислювальних серверів, для яких i_s=0 виконується наступна умова:

$$\beta_s \le \alpha_s, \quad (s = \overline{1, N1}). \qquad (13)$$

У випадку i_s<0 на *s*-й сервер приходить як мінімум $|i_s|$ завдань. Якщо ж i_s >0, то на *s*-й сервер не може прийти ні однієї програми.

Отже, елементи індикатору розподілу α_{N-1} задач по обчислювальних серверах приймають наступні значення:

$$\begin{cases} 0 \le \beta_s \le \alpha_{N-1} \ \& \ \beta_s \le \alpha_s, \text{ якщо } is=0; \\ |i_s| \le \beta_s \le \alpha_{N-1} \ \& \beta_s \le |i_s| + \alpha_s, \\ \qquad \text{якщо } is<0; \end{cases} \qquad (14)$$

$$\beta_s = 0, \qquad \text{якщо } is>0,\ (s=\overline{1,N1}).$$

Уведемо вектор $\overline{\delta}$, що визначає розподіл задач, які були оброблені керуючим сервером, по обчислювальних серверах. *N-1*-й елемент розглянутого вектора дорівнює кількості задач, оброблених керуючим сервером і відправлених на управляючий вузол:

$$\delta_{N-1} = \sum_{s=1}^{N1} \delta_S , \tag{15}$$

N-й елемент вектора $\overline{\delta}$ дорівнює номеру обчислювального сервера, на який було відправлено задачі, оброблене керуючим сервером:

$$\delta_N = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{N-1} = 0; \\ s, & \text{иначе}, \delta_S = 1, \quad s = \overline{1,N1}. \end{cases} \tag{16}$$

Елементи вектора $\overline{\delta}$ з індексами від 1 до *N*1 рівні або 0, якщо при переході зі стану $\overline{m}$ в стан $\overline{m'}$ на *s*-му обчислювальному сервері зменшилося число задач, або може мінятися від нуля до одиниці, якщо кількість задач збільшилася або залишилося незмінним:

$$\begin{cases} 0 \le \delta_s \le 1, \text{ якщо } i_s \le 0, \\ \delta_s = 0, \text{ якщо } i_s > 0,\ (s=\overline{1,N1}). \end{cases} \tag{17}$$

Назвемо цей вектор $\overline{\delta}$ індикатором розподілу задач, обслужених керуючим сервером, по обчислювальних вузлах системи.

У розглянутій моделі кластерної системи керуючий сервер за один такт може обробити не більш однієї задачі. Отже, необхідне виконання наступного умови:

$$\delta_{N-1} \le 1, \tag{18}$$

Розподіл завдань, які обслуговано обчислювальними серверами, по інших вузлах системи задамо *N*-мірним вектором $\overline{\eta}$, компонента η_s $(s=\overline{1,N1})$ якого дорівнює числу задач, які обслужено *s*-м сервером, а компонент η_s $(s=\overline{N-1,N})$ дорівнює загальному числу задач, що надійшли від обчислювальних серверів на відповідний вузол системи. Нехай $\overline{\eta}$ – індикатор розподілу завдань, обслужених обчислювальними серверами, по інших вузлах системи. *N*-2-мірні вектори $\overline{z}$ й $\overline{y}$ визначають кількість задач, що надходять від обчислювальних серверів до дисків і керуючому вузлу відповідно.

Безлічі припустимих індикаторів розподілу задач $\overline{\beta}, \overline{\delta}, \overline{\eta}$, $\overline{z}$ і $\overline{y}$ для довільного переходу $\overline{m} \to \overline{m'}$ відповідно позначимо як $A=\{\overline{\beta}\}, B=\{\overline{\delta}\}, C=\{\overline{\eta}\}$, $Z=\{\overline{z}\}$ і $Y=\{\overline{y}\}$.

Розрахуємо матрицю перехідних імовірностей.

Випадок $\Delta = 1$. Кількість задач, оброблюваних на кластері при переході $\overline{m} \to \overline{m'}$, зменшується на одну. Якщо m_n=0, то ймовірність переходу $\overline{m} \to \overline{m'}$ дорівнює нулю, якщо m_n>0, то ймовірність – ненульова, обчислимо її.

Визначимо ймовірність для події, обумовленої довільним припустимим для переходу $\overline{m} \to \overline{m'}$ індикатором розподілу програм $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{N-1})$.

У розглянутому переході керуючий сервер обробляє завдання, яке, у свою чергу, залишає систему. Імовірність такої події рівна p_0q_4. Керуючий сервер за один такт може обробити не більш однієї задачі, отже, при $\Delta = 1$ в систему не може надійти нове задачі, чому відповідає ймовірність r_0.

Розглянемо групу запам'ятовуючих пристроїв (ЗП). Цій групі в стані $\overline{m}$ відповідає m_s задач, що перебувають на обслуговуванні й у черзі до ЗП. Число задач, що обслуговуються, дорівнює α_{N-1}. Кількість оброблених задач у каналі при переході зі стану $\overline{m}$ дорівнює β_{N-1}. Таким чином, із числа α_{N-1}, завантажених пристроїв β_{N-1} закінчує обслуговування своїх задач, чому буде відповідати ймовірність, дорівнює $C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}}$.

Імовірність запиту одного з *N2* диска до *s*-го обчислювального серверу дорівнює $p_{n-1,s}$. Кількість задач, оброблених ЗП, що й надійшли на відповідні вузли, дорівнює $\prod_{s=1}^{N1} p_{N-1,s}^{\beta_s}$.

Кількість розміщень задач, оброблених дисковим вузлом, по обчислювальних серверах дорівнює $\frac{\beta_{N-1}!}{\prod_{s=1}^{N1} \beta_s!}$, де β_{N-1} – число задач, які закінчують своє обслуговування на ЗП, β_s – кількість заявок, що надійшли від дисків до *s*-го серверу, *(s=1,N-1)*.

Побудуємо безліч припустимих індикаторів розподілу завдань, оброблених обчислювальними серверами, по вузлах системи. Елементи векторів $\bar{\eta}$ визначаються за наступними формулами:

$$\eta_s = |\beta_s - |i_s||, (s = \overline{1, N1}), \quad (19)$$

$$\eta_N = |i_N - 1|, \quad (20)$$

$$\begin{cases} 0 \le \eta_{N-1} \le \beta_{N-1}, & i_{N-1} = 0, \\ 0 \le \eta_{N-1} \le |\beta_{N-1} - i_{N-1}|, & i_{N-1} > 0, \\ |i_{N-1}| \le \eta_{N-1} \le \beta_{N-1} + |i_{N-1}|, & i_{N-1} < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Формулу (21) можна переписати в такий спосіб:

$$\begin{cases} 0 \le \eta_{N-1} \le |\beta_{N-1} - i_{N-1}|, \; i_{N-1} \ge 0, \\ |i_{N-1}| \le \eta_{N-1} \le \beta_{N-1} - i_{N-1}, i_{N-1} < 0, \end{cases}$$

(22)

У безліч припустимих індикаторів розподілу задач C увійдуть усі отримані вектори $\bar{\eta}$, які задовольняють умові:

$$\sum_{s=1}^{N1} \eta_s = \eta_{N-1} + \eta_N, \quad (23)$$

тобто кількість задач, які покинули обчислювальні вузли, дорівнює сумі задач, які надійшли до дискового вузла і керуючого серверу.

Щоб визначити можливі розміщення задач, оброблених обчислювальними серверами, по інших вузлах системи, побудуємо множини $Z = \{\bar{z}\}$ й $Y = \{\bar{y}\}$. Задачі, що надходять від обчислювальних вузлів до дисків, описує вектор $\bar{z}$, а до керуючого сервера – $\bar{y}$. Значення кожного елемента векторів дорівнює кількості задач, що надійшли від s-го сервера на відповідний вузол:

$$\begin{cases} 0 \le z_s \le \eta_s \;\&\; z_s \le \eta_{N-1}, \\ 0 \le y_s \le \eta_s, \;\&\; y_s \le \eta_N, \; (s = \overline{1, N1}). \end{cases} \quad (24)$$

При цьому повинні виконуватися наступні умови:

$$\sum_{s=1}^{N1} z_s = \eta_{N-1} \quad (25)$$

$$\sum_{s=1}^{N1} y_s = \eta_N \quad (26)$$

Загальна кількість задач, яка оброблена s-м сервером не може перевищувати одиниці:

$$z_s + y_s \le 1, \; (s = \overline{1, N1}). \quad (27)$$

Кількість припустимих пар векторів $\bar{z}$ і $\bar{y}$ позначимо через $G = \{\bar{z}, \bar{y}\}$.

Імовірність переходу z_s завдань від s-го обчислювального сервера до дисків дорівнює $p_{s,N-1}^{z_s}$, а до керуючого сервера $p_{s,N}^{y_s}$. Відповідно, загальна ймовірність розподілу задач від обчислювальних серверів по інших вузлах системи дорівнює

$$\prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_S^{1-\eta_s} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s}.$$

На підставі проведеного аналізу ймовірність переходу зі стану $\bar{m}$ в стан $\bar{m}'$ обчислюється по формулі:

$$P = \begin{cases} r_0 p_0 q_N \Big[\sum_A \Big(C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}} \prod_{s=1}^{N1} p_{N-1,s}^{\beta_s} \dfrac{\beta_{N-1}!}{\prod_{s=1}^{N1} \beta_s!} * \\ * \prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_S^{1-\eta_s} \sum_G \Big(\prod_{s=1}^{N1} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s} \Big) \Big) \Big], \quad j < M, \\ p_0 q_N \Big[\sum_A \Big(C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}} \prod_{s=1}^{N1} p_{N-1,s}^{\beta_s} \dfrac{\beta_{N-1}!}{\prod_{s=1}^{N1} \beta_s!} * \\ * \prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_S^{1-\eta_s} \sum_G \Big(\prod_{s=1}^{N1} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s} \Big) \Big) \Big], \quad j = M. \end{cases} \quad (28)$$

Випадок $\Delta = -1$, тобто кількість задач, оброблюваних в обчислювальній системі при переході $\bar{m} \to \bar{m}'$, збільшується на одну. Якщо $m'_N = 0$, то ймовірність переходу $\bar{m} \to \bar{m}'$ дорівнює нулю, якщо $m'_N > 0$, те ймовірність – не дорівнює нулю. Розрахуємо її.

У розглянутому переході в систему до керуючого серверу надходить одна нова задача. Імовірність цієї події дорівнює q_0. Жодна задача не може покинути систему.

Кількість $A = \{\bar{\beta}\}$ обчислюється по формулі (14) з урахуванням обмеження (11). Для визначення $B = \{\bar{\delta}\}$ використовується (17) з урахуванням обмеження (18). Кількість R складається з пар векторів $\bar{\beta}$ і $\bar{\delta}$ за допомогою повного перебору всіх можливих комбінацій, які задовольняють умові:

$$\beta_s + \delta_s \le |1 - i_s|, \; (s = \overline{1, N1}). \quad (29)$$

Умова (29) відображає наступне: кількість задач, що надійшли на s-й сервер від дисків і керуючого сервера, не перевищує суми програм, які повинні прийти на s-й вузол з урахуванням однієї програми, яка могла покинути обчислювальний сервер.

Сформуємо індикатор розподілу задач від обчислювальних серверів по інших вузлах системи:

$$\begin{cases} \eta_N = \delta_{N-1} + |i_N| - 1, \\ \eta_{N-1} = \beta_{N-1} - i_{N-1}, \\ \eta_s = |\delta_s + \beta_s - |i_s||, \quad (s = \overline{1, N1}). \end{cases} \tag{30}$$

Для всіх векторів, що входять у множину $C = \{\overline{\eta}\}$, повинна виконуватися умова:

$$\sum_{s=1}^{N1} \eta_s = \eta_{N-1} + \eta_N . \tag{31}$$

Умова (31) показує те, що загальна кількість задач, які надійшли до обчислювальних вузлів, дорівнює сумі задач, відправлених з дисків і керуючого сервера до них.

Множина $G = \{\overline{z}, \overline{y}\}$ будується на основі індикаторів $\overline{z}$ і $\overline{y}$ по формулах (25) і (26), враховуючи обмеження (27).

Імовірність переходу зі стану $\overline{m}$ в стан $\overline{m'}$ при $\Delta = -1$ обчислюється по формулі:

$$P = q_0 \sum_R \Big(C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}} \prod_{s=1}^{N1} p_{N-1,s}^{\beta_{N-1}} \frac{\beta_{N-1}!}{\prod_{s=1}^{N1} \beta_s!} q_N^{\delta_{N-1}} p_{N,\delta_N}^{\delta_{N-1}} r_N^{1-\delta_{N-1}} * \\ * \prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_s^{1-\eta_s} \sum_G \big(\prod_{s=1}^{N1} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s} \big) \Big) \tag{32}$$

Випадок $\Delta = 0$, тобто кількість завдань, оброблюваних на кластері при переході $\overline{m} \to \overline{m'}$, залишається незмінним.

У розглянутому переході можливі два варіанти його здійснення. Перший варіант: у систему не надходить нового завдання. Імовірність такої події рівна r_0. Другий варіант полягає в наступному: керуючий сервер обробляє завдання, яке, у свою чергу, залишає систему. Нове завдання надходить у систему. Такий варіант відповідає ймовірності $q_4 p_0 q_0$.

Знайдемо ймовірність для події, обумовленої довільним припустимим для переходу $\overline{m} \to \overline{m'}$ індикатором розподілу програм $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{N-1})$. Значення компоненти β_{N-1} дорівнює числу завдань, що зробили в серверні вузли від N_2 дисків, що працюють у стані $\overline{m}$.

Для побудови безлічі $A = \{\overline{\beta}\}$ використовується формула (14) з урахуванням обмеження (11). Безліч $B = \{\overline{\delta}\}$ обчислюється по формулі (17) з урахуванням обмеження (18). Безліч $R = \{\overline{\beta}, \overline{\delta}\}$ складається з пар векторів $\overline{\beta}$ і $\overline{\delta}$ за допомогою повного перебору всіх можливих комбінацій, які задовольняють умові (29).

Сформуємо індикатор розподілу завдань від серверів по інших вузлах системи:

$$\begin{cases} \eta_N = \delta_{N-1} + |i_N|, \\ \eta_{N-1} = \beta_{N-1} - i_{N-1}, \\ \eta_s = |\delta_s + \beta_s - |i_s||, \quad (s = \overline{1, N1}). \end{cases} \tag{33}$$

Для всіх векторів, що входять у безліч $C = \{\overline{\eta}\}$, повинне виконуватися умова (31).

Множина $G = \{\overline{z}, \overline{y}\}$ будується на основі індикаторів $\overline{z}$ і $\overline{y}$ по формулах (25) і (26), враховуючи обмеження (27).

Імовірність переходу зі стану $\overline{m}$ в стан $\overline{m'}$ при $\Delta = 0$ обчислюється по формулі:

$$P = \begin{cases} r_0 \sum_R \Big(C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}} \prod_{s=1}^{N1} p_{N-1,s}^{\beta_{N-1}} \frac{\beta_{N-1}!}{\prod_{s=1}^{N1} \beta_s!} q_N^{\delta_{N-1}} p_{N,\delta_N}^{\delta_{N-1}} r_N^{1-\delta_{N-1}} * \\ * \prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_s^{1-\eta_s} \sum_G \big(\prod_{s=1}^{N1} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s} \big) \Big) + q_0 p_0 q_N \sum_R \Big(C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}} * \\ * \prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_s^{1-\eta_s} \sum_G \big(\prod_{s=1}^{N1} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s} \big) \Big), \quad j < M, \\ \sum_R \Big(C_{\alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1}} q_{N-1}^{\beta_{N-1}} r_{N-1}^{\alpha_{N-1}-\beta_{N-1}} \prod_{s=1}^{N1} p_{N-1,s}^{\beta_{N-1}} \frac{\beta_{N-1}!}{\prod_{s=1}^{N1} \beta_s!} q_N^{\delta_{N-1}} p_{N,\delta_N}^{\delta_{N-1}} r_N^{1-\delta_{N-1}} * \\ * \prod_{s=1}^{N1} q_s^{\eta_s} r_s^{1-\eta_s} \sum_G \big(\prod_{s=1}^{N1} p_{s,N-1}^{z_s} p_{s,N}^{y_s} \big) \Big), \quad j = M. \end{cases} \tag{34}$$

Для визначення вектора стаціонарних імовірностей станів $\overline{\pi} = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_L)$ необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР),

$$\overline{\pi} = \overline{\pi} \boldsymbol{P} , \tag{35}$$

відповідну до розглянутої моделі кластера.

За допомогою стаціонарних імовірностей можна обчислити основні характеристики: середнє число зайнятих пристроїв в s-му вузлі обробки, середнє число вільних пристроїв в s-*м* вузлі, середнє число зайнятих пристроїв в s-му вузлі, завантаження пристроїв, середнє число задач, що перебувають в s-му вузлі, середнє число завдань, що перебувають у черзі до s-го вузла, середній час перебування в s-му вузлі, середній час очікування в s-му вузлі, середній час перебування в обчислювальній системі.

Висновки

Запронована марківська модель неоднорідного кластера зі спільним використанням дискового простору.

Отримана марківська модель дозволяє розрахувати основні характеристики кластера: середня кількість зайнятих пристроїв в s-му вузлі; завантаження кожного з пристроїв; середня кількість задач, що перебувають в s-му вузлі; середня кількість задач, що перебувають у черзі до s-го вузлу; середній час перебування в s-му вузлі; середній час очікування s-му вузлі; середній час перебування в обчислювальній системі; середній час очікування у ОС.

Наукова новизна роботи визначається в розробці марківської моделі кластеру, на основі якої можна досліджувати ефективність кластерної обчислювальної системи.

Практична значущість полягає в застосуванні результатів марківської моделі для аналізу та синтезу кластерних обчислювальних систем для обробки певного классу завдань.

Подальший розвиток передбачає оцінку ефективноті та прискорення паралельного алгоритму побудови марківської моделі та дослідження характеристик систем.

Список літератури

1. Лю Лян. Исследование эффективности параллельных вычислений на кластере Московского энергетического института / Лю Лян // Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. – М., 2007. – 20 с.
2. Михайлова Т.В. Повышение эффективности кластерных вычислительных систем на основе аналитических моделей: автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.техн.наук / Т.В. Михайлова. – Донецк, 2007. – 20 с.
3. Фельдман Л.П. Использование марковских моделей для оценки эффективности кластерных систем / Л.П. Фельдман, Т.В. Михайлова // Материалы шестого Международного научно-практического семинара. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2007. – 255 с.
4. Столингс У. Структурная организация и архитектура компьютерных систем / У.Столингс. – М.: Вильямс, 2002. – 893 с.
5. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем / Т.И. Алиев. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 354 с.
6. Цилькер Б.Я. Организация ЭВМ и систем / Б.Я. Цилькер, С.А. Орлов. – М: ПИТЕР, 2004. – 668 с.

Надійшла до редакції 29.09.2012

Т.В. МИХАЙЛОВА, О.В.КУЧЕРЕНОСОВА
Донецкий национальный технический университет

Модель неоднородного кластера с общим использованием дискового пространства

Предложена дискретная модель Маркова кластера с общим использованием дискового пространства

Ключевые слова: неоднородный кластер, Марковская модель, матрица переходных вероятностей, абсолютные вероятности

T.V. MIKHAYLOVA, O.V. KUCHERENOSOVA
Donetsk National Technical University

Model of the Non-Uniform Cluster With Shared Storage

The discrete Markov model of a cluster with shared storage is offered.

Keywords: non-uniform cluster, the discrete Markov model, matrix of the transition probabilities, absolute probabilities