УДК 004.3

О. Н. Романюк, д.т.н., проф.,
М. С. Курінний, к.т.н.,
О.В.Мельник, пошукач
С. В. Олійник, магістрант
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця
ran12345@mail.ru

Кругова модель пікселя для задач антиаліайзингу

У статті розглянуті математичні моделі пікселів, які використовуються у методах крайового антиаліайзингу. Запропоновано модель пікселя, яка забезпечує порівняно із існуючими підходами більш високу точність визначення інтенсивності кольору точок зображення і, як наслідок, більш високу якість.

Ключові слова: пік сель, антиаліайзинг,інтенсивність кольору точок

Вступ

У більшості сучасних комп'ютерних систем зображення представляється у дискретній формі. Через це при відображенні інформації мають місце спотворення і на неперервних краях об'єктів з'являються чітко виражені сходинки або зубці. Цей артефакт отримав назву ступінчастого ефекту чи ефекту *аліайзингу* [1]. Ефект аліайзингу суттєво погіршує якість сформованого зображення.

Методи усунення ступінчастого ефекту в основному розділяють на дві групи [2]. До першої групи відносяться методи, які базуються на збільшенні дискретизації. В даних методах сцена спочатку розраховується з вищою роздільною здатністю, що дає можливість врахувати дрібні деталі, а при відображенні зменшується шляхом усереднення. Основний недолік даних методів полягає у великій обчислювальній складності, оскільки при збільшенні дискретизації в n разів, кількість пікселів (а отже і кількість обчислень на один піксель) збільшується в n^2 разів [2]. В методах другої групи піксель розглядається не як умовна точка, а як скінченна область. При цьому інтенсивність пікселів на краях об'єктів встановлюється пропорційно до площі тих частин пікселів, які покриваються даним об'єктом. Дані методи відрізняються меншою обчислювальною складністю, а отже є більш прийнятними для випадків, коли необхідно генерувати зображення у масштабі часу [3].

Від того, яка використовується математична модель для форми пікселя, безпосередньо залежить складність обчислення площі покриття. Більшість існуючих алгоритмів розглядають піксель як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, оскільки при цьому значно спрощуються формули для знаходження площі частини пікселя, яка покривається об'єктом. Математична модель пікселя, яка розглядає піксель як одиничне коло, є більш адекватною реальності, а отже забезпечує більш високу якість зображення. Дана модель не набула широкого використання через складність виразів для розрахунку площі покриття. Тому актуальним є питання знаходження апроксимаційних формул для обчислення площі, що відтинається від пікселя різними графічними примітивами, які мають меншу обчислювальну складність.

Кругова модель пікселя

Знайдемо площу, що відтинається від пікселя ідеальним ребром багатокутника. Піксель будемо розглядати як скінчену область у формі кола з одиничним діаметром.

На рис.1 зображений перетин пікселя ребром багатокутника. Відстань від центра пікселя до ребра багатокутника дорівнює h. Пряма CD проходить через центр пікселя і паралельна ребру багатокутника. Частина пікселя, яка знаходиться всередині багатокутника, позначена сірим кольором. Як видно з рис.1, ця площа складається з декількох частин: площі трикутника AOB, ½ площі круга та площі секторів AOC та BOD.

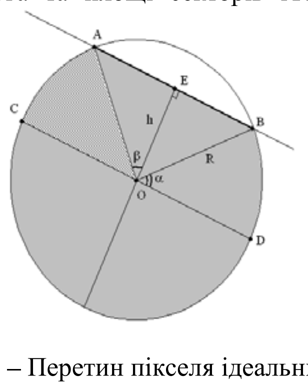

Рисунок 1 – Перетин пікселя ідеальним відрізком прямої

Відповідно формула для шуканої площі може бути записана наступним чином:

$$S = S_{\Delta AOB} + 2 \cdot S_{сектAOC} + \frac{\pi R^2}{2}. \quad (1)$$

Запишемо вираз для знаходження площі трикутника АОВ:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{AB \cdot OE}{2} = 2\sqrt{R^2 - h^2} \cdot \frac{h}{2} = h\sqrt{R^2 - h^2} .$$

Враховуючи, що $R = 1/2$, отримуємо:

$$S_{\Delta AOB} == h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} . \quad (2)$$

Площа сектора АОС знаходиться за формулою:

$$S_{сектAOC} = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha(рад) \quad (3)$$

Для знаходження кута α скористаємось наступними співвідношеннями:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta ;$$

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta ;$$

$$\alpha = \arcsin(\cos\beta) .$$

З трикутника АОЕ:

$$\cos\beta = \frac{OE}{AO} = \frac{h}{R} = 2h \quad (4)$$

Враховуючи вираз (4) маємо наступну формулу для кута α:

$$\alpha = \arcsin(2h) . \quad (5)$$

Підставивши отриманий вираз в формулу (3) та врахувавши, що $R = 1/2$, отримуємо:

$$S_{сектAOC} = \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin(2h) = \frac{\arcsin(2h)}{8} . \quad (6)$$

Підставивши вирази (2) та (6) в формулу (1), отримуємо:

$$S = h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} + 2\frac{\arcsin(2h)}{8} + \frac{\pi}{8} = = h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} + \frac{\arcsin(2h)}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (7)$$

У відповідності з принципом "крайового антиаліайзингу" інтенсивність кольору точки встановлюється пропорційно до площі тієї частини пікселя, яка відтинається ребром багатокутника. Інтенсивність кольору i-го пікселя визначається за формулою:

$$I_i = I_M \frac{S_i}{S_{\max}} \quad (8)$$

де I_M - інтенсивність кольору, з якою треба відтворити ребро багатокутника;

S_i - площа, яка відтинається від i-го пікселя ребром багатокутника;

$S_{\max}$ - площа пікселя. У випадку, коли піксель розглядається як коло діаметром 1, $S_{\max} = \pi R^2 = \pi/4$.

Позначимо співвідношення $\frac{S_i}{S_{\max}}$ як $f(h)$. З врахуванням виразу (7), отримуємо:

$$f(h) = \frac{S_i}{S_{\max}} = \frac{h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} + \frac{\arcsin(2h)}{4} + \frac{\pi}{8}}{\pi/4} = = \frac{4h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} + \frac{1}{2} \quad (9)$$

Безпосереднє обчислення за виразом (9) вимагає великих часових витрат, а отже при використанні його для антиаліайзингу ребра багатокутника призведе до значного зменшення швидкодії формування зображення.

Доведемо, що замість виразу (9) можна використати вираз

$$g(h) = h + 1/2 , \quad (10)$$

при цьому похибка складатиме в найгіршому випадку не більше 6%.

Розглянемо функцію $d(h) = f(h) - g(h)$. З врахуванням виразу (9) отримуємо:

$$d(h) = f(h) - g(h) =$$

$$= \frac{4h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} + \frac{1}{2} - h - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{4h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} - h$$

На рис.2 зображено графік функції $d(h)$.

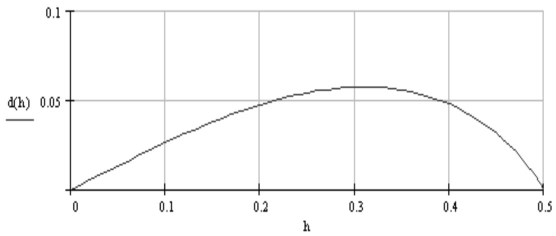

Рисунок 2 - Графік функції $d(h)$

Для визначення максимального значення, яке може приймати функція $d(h)$, знайдемо похідну даної функції:

$$d'(h) = \left(\frac{4h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} - h \right)' =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} - \frac{4h^2}{\pi\sqrt{1/4 - h^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1 - 4h^2}} - 1$$

Прирівняємо даний вираз до нуля:

$$\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{1}{4}-h^2}-\frac{4h^2}{\pi\sqrt{1/4-h^2}}+\frac{2}{\pi\sqrt{1-4h^2}}-1=0\,.$$

Розв'язками даного рівняння є $h_0=\frac{1}{8}\sqrt{16-\pi^2}\approx 0{,}309$; $h_1=-\frac{1}{8}\sqrt{16-\pi^2}$. Відповідно максимальне значення похибки дорівнює:

$$d_{\max}=d(h_0)=0{,}058\,.$$

Отже, замість виразу (9) можна в розрахунках використовувати вираз (10), при чому похибка складе не більше 6%.

Розглянемо алгоритм усунення ступінчастого ефекту для границі кола, оснований на отриманих раніше формулах.

На кожному кроці при обчислені площі тієї частини пікселя, яка знаходиться всередині кола, відрізок дуги апроксимується прямою. Відстань від прямої до центра пікселя дорівнює відстані від центра пікселя до кола.

В даному випадку у відповідності з принципом крайового антиаліайзингу інтенсивність кольору i-го пікселя визначається за формулою:

$$I_i=(h_i+1/2)\cdot I_M\,, \tag{11}$$

де I_M - інтенсивність кольору, з якою треба відтворити коло;

h_i - відстань від центра пікселя до кола.

Відстань від центра пікселя до кола визначається за формулою:

$$h_i=R-\sqrt{x_i^{\,2}+y_i^{\,2}}\,. \tag{12}$$

Наявність у виразі "довгих" операцій призводить до збільшення обчислювальних витрат і зниження швидкодії. Обчислення квадратного кореня можна спростити, і тим самим підвищити швидкодію алгоритму.

Відомо, що квадратний корінь можна наближено обчислювати за формулою Герона [4]:

$$s_i=\frac{1}{2}\left(s_{i-1}+\frac{a}{s_{i-1}}\right),$$

$$\sqrt{a}\approx s_i$$

де s_0 - перше наближення до кореня;

s_i - наближене значення виразу $\sqrt{a}$, отримане на i-й ітерації (є більш точною апроксімацією кореня ніж попереднє значення);

$i=0,1,2...N$.

З кожним кроком значення s_i все більше наближається до дійсного значення виразу $\sqrt{a}$.

Для нашого випадку: $a=\sqrt{x^2+y^2}$, тому початкове наближення доцільно взяти рівним радіусу кола: $s_0=R$.

Розглянемо похибку, яка виникає у разі використання лише одної ітерації для наближеного обчислення квадратного кореня. У даному випадку наближене значення обчислюється за формулою:

$$s_1=\frac{1}{2}\left(s_0+\frac{x^2+y^2}{s_0}\right)=\frac{1}{2}\left(R+\frac{x^2+y^2}{R}\right). \tag{13}$$

Визначимо різницю між наближеним значенням (13) та точним значенням виразу $\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\begin{aligned}\Delta&=\frac{1}{2}\left(R+\frac{x^2+y^2}{R}\right)-\sqrt{x^2+y^2}=\\&=\frac{R^2+x^2+y^2}{2R}-\frac{2R\sqrt{x^2+y^2}}{2R}=\\&=\frac{R^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+\left(x^2+y^2\right)}{2R}=\\&=\frac{\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{2R}\end{aligned} \tag{14}$$

При коловій інтерполяції, більшість алгоритмів забезпечує виконання наступної умови:

$$\left|R-\sqrt{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}\,.$$

Враховуючи останню умову та вираз (14) отримуємо максимальне значення похибки:

$$\Delta\le\frac{1}{8R}\,.$$

Таким чином, похибка обернено пропорційна радіусу окружності і для найменшого радіусу ($R=2$) максимальна похибка складає 6,25%.

Отже, замість виразу (12) можна використати наступний вираз:

$$\begin{aligned}h_i&=R-\frac{1}{2}\left(R+\frac{x^2+y^2}{R}\right)=\frac{R^2}{2R}-\frac{x^2+y^2}{2R}=\\&=\frac{R^2-(x^2+y^2)}{2R}\end{aligned} \tag{15}$$

В алгоритмах колової інтерполяції за методом оцінювальної функції найбільш часто використовується оцінювальна функція виду:

$$OF=x^2+y^2-R^2\,.$$

Підставивши (15) в (11) та врахувавши останній вираз, отримуємо наступну формулу для визначення інтенсивності кольору:

$$I_i=\frac{I_M}{2}+\frac{R^2-(x^2+y^2)}{2R}I_M=\frac{I_M}{2}-\frac{OF}{2R}I_M\,.$$

Для того, щоб уникнути в циклі інтерполювання необхідності виконувати операцію ділення та множення інтенсивність кольору пікселів будемо приймати рівною дискретним рівням: $\frac{I_M}{2};\frac{I_M}{4};\frac{I_M}{8};\frac{I_M}{16};....$. Кількість дискретних рівнів визначається в залежності від необхідної точності та якості формування кінцевого зображення.

Розглянемо приклад алгоритму антиаліайзингу для границі кола, який використовує 3 дискретних рівня інтенсивності кольору і оснований на алгоритмі колової інтерполяції за методом оцінювальної функції.

1. Встановлюємо початкові значення: $OF = 0; \quad x = 0; \quad y = R$.

2. Встановлюємо інтенсивність піксела $I(x, y) = \frac{I_M}{2}$.

3. Якщо $x \geq y$, то переходимо на крок 8.

4. Якщо $OF \geq 0$, то $OF = OF + 2x + 2y + 2$; інакше $OF = OF + 2x + 1$.

5. Якщо $OF \geq 0$, то $x = x + 1; y = y + 1$; $OF' = OF$;

інакше $x = x + 1$; $OF' = OF + 2y + 1$.

6. Встановлюємо інтенсивність пікселя за наступними правилами:

якщо $|OF'| \geq R$ та $OF' \geq 0$, то $I(x, y) = \frac{I_M}{2} - \frac{I_M}{2}$;

якщо $|OF'| \geq R$ та $OF' < 0$, то $I(x, y) = \frac{I_M}{2} + \frac{I_M}{2}$;

якщо $|OF'| \geq \frac{R}{2}$ та $OF' \geq 0$, то $I(x, y) = \frac{I_M}{2} - \frac{I_M}{4}$;

якщо $|OF'| \geq \frac{R}{2}$ та $OF' < 0$, то $I(x, y) = \frac{I_M}{2} + \frac{I_M}{4}$;

якщо $|OF'| \geq \frac{R}{4}$ та $OF' \geq 0$, то $I(x, y) = \frac{I_M}{2} - \frac{I_M}{8}$;

якщо $|OF'| \geq \frac{R}{4}$ та $OF' < 0$, то $I(x, y) = \frac{I_M}{2} + \frac{I_M}{8}$;

7. Переходимо до кроку 3.

8. Кінець.

Наведений алгоритм не містить довгих операцій та може бути просто реалізований як програмно так і апаратно.

Висновки

Запропонована модель пікселя забезпечує порівняно із існуючими підходами більш високу точність визначення інтенсивності кольору точок зображення і, як наслідок, більш високу його якість.

Список використаної літератури

1. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. Пер. с англ. – М.: Мир,1989. – 512 с
2. Crow, Franklin C. // The Aliasing problem in Computer Generated Shaded Images. CACM. – Vol. 20, P. 40-47.
3. Crow, Franklin C. // A Comparison of Antialiasing Techniques. IEEE CG & A. –1981 – Vol. 1. – p. 40-47.
4. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Киев, Наукова думка, 1984, стр. 189

Надійшла до редколегії 10.04.2012

О.Н. РОМАНЮК, М.С. КУРІННИЙ,
О.В. МЕЛЬНИК, С.В. ОЛІЙНИК
Вінницький національний технічний університет

КРУГОВАЯ МОДЕЛЬ ПИКСЕЛЯ ДЛЯ ЗАДАЧ АНТИАЛИАЙСИНГА

Рассмотрены математические модели пикселей, используемые в методах краевого антиалиайсинга. Предложена модель пикселя, которая обеспечивает в сравнении с существующими подходами более высокую точность определения интенсивности цвета точек изображения, и, как следствие, более выское качество.

Ключевые слова: пиксель, антиалиайсинг, интенсивность цвета точек

O.N. ROMANYUK, M.S. KURINNYI,
O.V. MELNIK, S.V. OLYINYK
Vinnytsia National Technical University

THE CIRCLE PIXEL MODEL FOR ANTI-ALIASING PROBLEMS

Mathematical pixel models using in antialiasing methods are considered. Proposed pixel model provides higher accuracy for image pixels color determination in comparison with existing approaches.

Keywords: pixel, antialiasing, pixel color intensity.