УДК 628.440.22

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАЗОРЕ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ СКОСОМ (БЕЗ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ КРАЯ ПОЛЮСОВ)

Бершадский И.А.
Донецкий национальный технический университет
ilya@elf.dgtu.donetsk.ua

In paper the analytical computational method of a magnetic force on height of a clearance with a parabolical angularity is reduced depending on parameters of a magnet system. A magnetic force on a vertical axes separately is computed

Электромагниты, имеющие сложную форму воздушного зазора, широко применяются в устройствах для магнитного ориентирования и отделения деталей, магнитной и феррогидростатической сепарации, радиочастотной сварки и т.д. Следует также отметить группу гидродинамических электрических аппаратов, областью применения которых являются сетевые указатели поврежденных участков распределительных сетей [1, 2]. В них движение внутренних ферромагнитных смесителей и красящих пигментов происходит под воздействием градиентного магнитного поля и в значительной степени связано с законом изменения пондеромоторной силы в межполюсном пространстве, который определяется профилем полюсных наконечников (ПН).

Эффективность работы таких магнитных систем может быть повышена путем выбора уравнения кривых, по которым рассчитываются профили ПН с качественно различными законами изменения пондеромоторной силы в зависимости от радиус-вектора в полярных координатах. При этом очень ценными являются аналитические выражения магнитной силы, позволяющие с достаточным для практики приближением сравнить различные формы воздушных зазоров.

Наиболее часто [3, 4] форма двух полюсных наконечников описывается двумя эквипотенциальными поверхностями, на которых магнитный потенциал U=const. Такое допущение можно считать правомерным при выполнении условия квазистационарности, отсутствии насыщения и исследовании поля в диэлектрической среде.

Если тело, помещенное в неоднородное магнитное поле мало и незначительно его искажает, то магнитная сила, действующая на это тело, определяется из выражения:

$$F_э = \mu_0 \kappa_T V_\phi H gradH ,$$

где κ_T – магнитная восприимчивость тела (частицы),

V_ϕ – его объем, $\kappa_T V_\phi = \chi$,

H – напряженность магнитного поля в частице,

μ_0 – магнитная постоянная.

Цель настоящей работы – вывод формул напряженности и магнитной силы в зазоре, образованном скошенными полюсами с параболическим скосом и сравнение полученных результатов с зазором, образованным полюсами с прямоугольным скосом (работа М.С.Захаровой [3]).

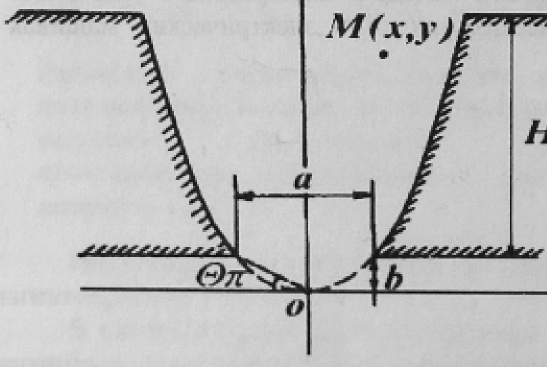

Рисунок 1 – Параболические полюсные наконечники

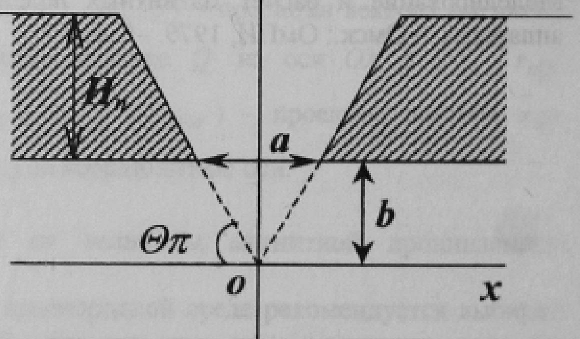

Рисунок 2 – Полюсные наконечники с прямоугольным скосом

Уравнение параболы

$$y = kx^2. \qquad (1)$$

Определим коэффициент k. Так как парабола проходит через точку $\left(\frac{a}{2}, в\right)$ (рис.1).

$$в = к\left(\frac{a^2}{4}\right); \qquad к = \frac{4в}{a^2}.$$

Так как $\frac{2в}{a} = tg\,(\theta\pi)$, то к $= \frac{2tg(\theta\pi)}{a}$.

Отразим конформно внутренность параболы, лежащей в плоскости z, т.е. часть плоскости, содержащую фокус параболы, на полосу в плоскости $W=u+i\upsilon$, параллельную действительной оси:

$$\{W{:}\,0 \le u \le M_\delta\},$$

где M_δ - магнитодвижущая сила (разность потенциалов), приходится на зазор с параболическими скосами.

Для решения этой задачи, воспользуемся результатами [5] об отображении областей, ограниченных кривыми второго порядка.

Функция $w = i\sqrt{2}ch\left(\pi\sqrt{\frac{z}{2p}}\right)$ переводит внутренность параболы вида (рис.3)

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \tag{2}$$

на верхнюю полуплоскость.

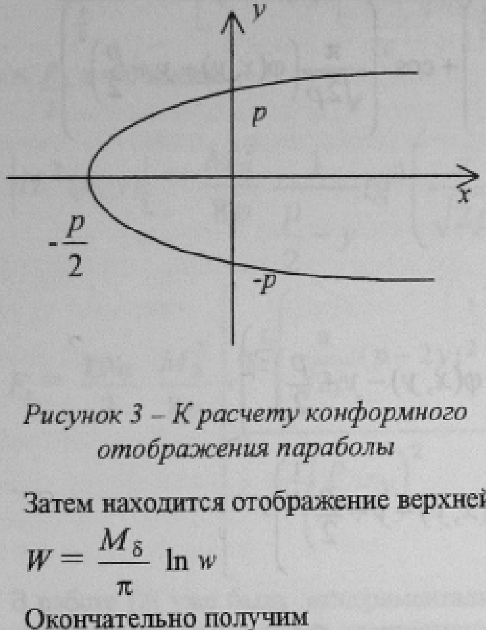

Рисунок 3 – К расчету конформного отображения параболы

Преобразование $z \to -iz - \frac{p}{2}$,

где $p = \frac{1}{2к} = \frac{a}{4tg(\theta\pi)}$ переводит параболу (1) в параболу (2).

$$y^2 = \frac{a}{2tg(\theta\pi)}\left(x + \frac{a}{8tg(\theta\pi)}\right).$$

Следовательно, отображение, переводящее внутренность параболы (1) на верхнюю полуплоскость, имеет вид

$$w = i\sqrt{2}ch\left(\pi\sqrt{\frac{-iz - p/2}{2p}}\right) \tag{3}$$

Затем находится отображение верхней полуплоскости на полосу шириной M_δ

$$W = \frac{M_\delta}{\pi}\ln w \tag{3'}$$

Окончательно получим

$$W = \frac{M_\delta}{\pi}\ln\left(i\sqrt{2}ch\left(\pi\sqrt{\frac{-iz - p/2}{2p}}\right)\right) \tag{4}$$

Для определения модуля напряжённости магнитного поля воспользуемся формулой [3]:

$$|H| = \left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|.$$

Дифференцируя (4) по z находим

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{M_\delta}{\pi}\frac{Sh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}\right)}{ch\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}\right)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}\right)' = -\frac{i}{2}\frac{M_\delta}{\sqrt{2p}}\frac{1}{\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}}th\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}\right).$$

$$|H| = \frac{M_\delta}{2\sqrt{2p}} \frac{1}{\left|\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}\right|} \left| th\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}\right)\right| \tag{5}$$

Найдём явную зависимость напряжённости магнитного поля в точке $M\ (x,\ y)$ от значения декартовых координат этой точки (см. рис. 1). Так как

$$-iz - \frac{p}{2} = \left(y - \frac{p}{2}\right) - ix, \quad \text{а} \left|-iz - \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2}\text{, то}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{-iz - \frac{p}{2}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left|-iz - \frac{p}{2}\right|}} = \left(\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{4}}. \tag{6}$$

Разложив выражение для модуля гиперболического тангенса и обозначив

$$\varphi(x,\ y) := \left|-iz - \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2},$$

получим искомую формулу:

$$|H(x,y)| = \frac{M_\delta}{2\sqrt{2p}} (\varphi(x,y))^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{Sh^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) + y - \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) - y + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{Sh^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) + y - \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) - y + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}}. \tag{7}$$

Магнитную силу находим из известных соотношений

$$F_x = \frac{\chi\mu_0}{2}\frac{\partial |H|^2}{\partial x};\ F_y = \frac{\chi\mu_0}{2}\frac{\partial |H|^2}{\partial y}.$$

Положим для удобства вычислений

$$g\ (x,\ y) := Sh^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) + y - \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) - y + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$f\ (x,\ y) := Sh^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) + y - \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\left(\varphi(x,y) - y + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Тогда, после ряда преобразований:

$$F_x = \frac{\chi\mu_0}{2}\frac{M_\delta{}^2}{8p}\left(-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi^2(x,y)}\frac{g(x,y)}{f(x,y)} + \frac{1}{\varphi(x,y)}\frac{\frac{\partial g}{\partial x}f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x,y)}{f^2(x,y)}\right) \tag{8}$$

$$F_y = \frac{\chi\mu_0}{2}\frac{M_\delta{}^2}{8p}\left(-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\varphi^2(x,y)}\frac{g(x,y)}{f(x,y)} + \frac{1}{\varphi(x,y)}\frac{\frac{\partial g}{\partial y}f(x,y) - g(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}}{f^2(x,y)}\right) \tag{9}$$

Отдельно вычислим магнитную силу на оси 0у. На оси 0у

$F_x = 0$

Осталось найти F_y.

Заметим, что при x=0

$$\varphi(x,\, y) = \begin{cases} y - \dfrac{p}{2} \ \text{при у} > \dfrac{p}{2} \\ 0 \ \text{при у} = \dfrac{p}{2} \\ \dfrac{p}{2} - y \ \text{при у} < \dfrac{p}{2} \end{cases} \quad \text{и, соответственно} \quad \frac{\partial\varphi(0,y)}{\partial y} = \begin{cases} 1 \ \text{при у} > \text{p}/2 \\ -1 \ \text{при у} < \text{p}/2 \end{cases}$$

Рассмотрим случай $y > \dfrac{p}{2}$, $x = 0$.

В этом случае

$$\left|H^2(o,y)\right| = \frac{M_\delta^2}{8p}\,\frac{1}{y-\dfrac{p}{2}}\,\frac{sh^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(2y-p)^{\frac{1}{2}}\right)}{sh^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(2y-p)^{\frac{1}{2}}\right)+1};$$

$$F_y = \frac{\chi\mu_0}{2}\,\frac{M_\delta^2}{8p}\left[\frac{-sh^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(2y-p)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(y-\dfrac{p}{2}\right)^2\left[sh^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(2y-p)^{\frac{1}{2}}\right)+1\right]} + \frac{1}{y-\dfrac{p}{2}}\,\frac{sh\left(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{p}}(2y-p)^{\frac{1}{2}}\right)\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}\,\dfrac{1}{(2y-p)^{\frac{1}{2}}}}{\left[sh^2\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{p}}(2y-p)^{\frac{1}{2}}\right)+1\right]^2}\right].$$

При $y < \dfrac{p}{2}$, $x = 0$ имеем

$$\left|H^2(o,y)\right| = \frac{M_\delta^2}{8p}\,\frac{1}{\dfrac{p}{2}-y}\,tg^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2p}}(p-2y)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$F_y = \frac{\chi\mu_0}{2}\,\frac{M_\delta^2}{8p}\left[\frac{tg^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(p-2y)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\dfrac{p}{2}-y\right)^2} + \frac{2tg\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(p-2y)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\dfrac{p}{2}-y\right)}\,\frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}(p-2y)\right)}\,\frac{\pi}{\sqrt{2p}}\,\frac{(-1)}{(p-2y)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

В работе [2] уже была экспериментально доказана эффективность работы магнитной системы с такими ПН по критерию максимизации электромагнитной энергии в рабочей области. Приведенные здесь выкладки имеют, на наш взгляд, теоретическую ценность, так как позволяют верифицировать результаты оптимизации магнитных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труб И.И. Гидравлический указатель короткого замыкания // Энергетик. – 1998. – №12. - С.12.
2. Бершадский И.А. Синтез конфигурации профиля полюсных наконечников в электромагните с градиентным распределением вертикальных усилий // Сб. науч. тр. ДонГТУ. Серия: Электротехника и энергетика. – Донецк. - 1999. – Вып. 4. - С.195-199.
3. Захарова М.С. Расчет магнитного поля в зазоре, образованном скошенными полюсами // В сб.: "Горная электромеханика и автоматика". – Вып. 16. Харьков. – Изд. ХГУ. – 1970. –С. 54-60.
4. Берлинский А.П., Шлепакова Л.И. и др. МГС сепарация минералов // Обзор. Лабораторные и технологические исследования и методы обогащения минерального сырья. - М.: ВИЭМС. – 1975. – 53 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965.- 352 с.
6. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972. - 279 с.