ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Найбільші труднощі під час вивчення курсу вищої математики у студентів виникають при розв’язанні практичних задач. Розв’язання і аналіз задач дозволяють зрозуміти і запам’ятати основні теореми і формули даного курсу.

Дані методичні вказівки відносяться до теми «Ряди». Для розвитку навичок самостійного розв’язання практичних задач запропоновані індивідуальні завдання за основними розділами теми. Мета завдань – закріпити знання основних теорем і формул, засвоїти прийоми розв’язання задач.

У представленому до вашої уваги навчальному посібнику включені теоретичні питання та приклади практичних завдань до модульного контролю з теми «Ряди», з метою допомогти студентам у підготовці до написання модульної контрольної роботи.

У межах індивідуального завдання студент виконує п’ять задач, умови яких наведені у розд.2. Номера задач необхідно обирати відповідно до свого варіанта, який відповідає номеру залікової книжки. Наприклад, якщо студент має номер залікової книжки 150590079, то для того, щоб обрати номери задач слід взяти до уваги лише три останні цифри і розташувати під ними три перші літери українського алфавіту, наприклад:

0 7 9
а б в

Потім із кожного вертикального стовпчика додатку А, зазначеного внизу відповідною літерою, треба взяти одне число, яке стоїть у тому горизонтальному рядку, номер якого співпадає з номерами літер.

Наприклад, номери задач, які треба розв’язати для варіанта 150590079, наступні: 422, 439, 446, 453, 462.

Бажаємо успіхів!

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ З ТЕМИ «РЯДИ»

1.1 Числові ряди

Числовим рядом називається вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

де числа $a_1, a_{2 \ldots,} a_{n, \ldots,}$, які називаються членами ряда, утворюють відому числову послідовність.

Числовий ряд (1.1) називається *збіжним*, якщо сума n перших його членів $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ (часткова сума ряда) при $n \to \infty$ має границю.

Ця границя називається сумою ряду, який збігається.

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не існує, то ряд називається *розбіжним*.

Одним з найпростіших рядів, але таким, що часто зустрічається, є нескінченна геометрична прогресія:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{1.2}$$

Відомо, що при $|q| < 1$ ряд (1.2) є збіжним і має суму $a/(1-q)$. При $|q| \geq 1$ геометрична прогресія являє собою ряд, який розбігається.

Іншим важливим прикладом є узагальнений гармонічний ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{1.3}$$

який збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

Особливо часто зустрічається випадок, коли $p = 1$, якому відповідає розбіжний ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \tag{1.4}$$

відомий під іменем *гармонічного ряду*.

Ряд може збігатися лише за умови, коли спільний член ряду a_n наближається до нуля при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Це необхідна, але недостатня ознака для будь-якого ряду).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Для числових рядів з додатними членами $(a_n > 0)$, при дослідженні їх на збіжність, застосовують наступні достатні ознаки збіжності.

<u>*Перша ознака порівняння*</u>. Дано два знакододатних ряда:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \tag{1.5}$$

$$v_1 + v_2 + ... v_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} v_n . \tag{1.6}$$

Нехай члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду:

$$u_1 \leq v_1 ; u_2 \leq v_2 ,\ldots, u_n \leq v_n ,\ldots$$

і другий ряд збігається. У такому випадку перший ряд також збігається і його сума не перевищує суми другого ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 1}$.

Розв’язання. Члени даного ряду менше відповідних членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

Але останній ряд збігається як нескінчено спадна геометрична прогресія $(q = \frac{1}{2} < 1)$. Відповідно, збігається і даний ряд.

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 1}$ збігається.

<u>*Друга ознака порівняння*</u>. Дані два знакододатні ряди (1.5) і (1.6).

Нехай члени першого ряду (1.5) не менше відповідних членів другого ряду (1.6):

$$u_1 \geq v_1 , u_2 \geq v_2 ,\ldots, u_n \geq v_n ,\ldots$$

і ряд (1.6) розбігається. У такому випадку ряд (1.5) також розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжний ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots,$$

який розбігається як узагальнений гармонічний ряд (1.3) з показником $p = \frac{1}{2} < 1$. Оскільки кожен член ряду більше відповідного члена останнього ряду

$$\ln n < n, \ \sqrt{\ln n} < \sqrt{n}, \ \frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

то в силу другої ознаки порівняння початковий ряд розбігається.

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}$ розбігається.

Іноді буває корисною наступна теорема.

<u>Теорема.</u> Якщо збігається (розбігається) ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

то збігається (розбігається) і ряд

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots,$$

який отримуємо з даного ряду відкиданням перших m членів (цей останній ряд називають m-ю остачею початкового ряду); навпаки, зі збіжності (розбіжності) m-ї остачі ряду витікає збіжність (розбіжність) даного ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots$$

Розв'язання. Даний ряд отриманий із гармонічного відкиданням перших десяти членів. Отже, він розбігається.

Відповідь. Ряд $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots$ розбігається.

Третя ознака порівняння. Якщо існує кінцева і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n/v_n)=k$, то обидва ряди (1.5) і (1.6) одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots$$

Розв’язання. Тут $u_n=1/(3n-1)$. Порівняємо ряд з розбіжним гармонічним рядом (1.4), в якого $v_n=1/n$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$.

Отже, даний ряд розбігається.

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ розбігається.

Порівняння з гармонічними рядами (1.3) і (1.4) дозволяють встановити поведінку багатьох рядів. За першою і другою ознаками порівняння:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ розбігається: $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ збігається: $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p>0)$ розбігається: $(\ln n)^p<n$ (для достатньо великих n);

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ збігається: $\frac{n!}{n^n}<\frac{2}{n^2}$ (для n>3).

За третьою ознакою порівняння:

а) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^3}$ $(b > 0)$ збігається при $S > 1$, розбігається при $S \le 1$: $\frac{1}{(a+bn)^S} : \frac{1}{n^3} \to \frac{1}{b^3}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ розбігається: $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \to 1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$ $(0 < x < \pi)$ розбігається: $\sin\frac{x}{n} : \frac{1}{n} \to x$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{x}{n})$ збігається: $(1-\cos\frac{x}{n}) : \frac{1}{n^2} \to \frac{x^2}{2}$.

Слід зазначити, що в рядах, які містять факторіали, корисною буває формула Стірлінга:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{Q}{12\pi}} \quad (0 < Q < 1),$$

яка дозволяє оцінити величину факторіала $n!$ при великих значеннях n.

Використання ознак порівняння при дослідженні рядів часто буває ускладненим через необхідність складати допоміжний ряд. Спільних прийомів для цього, придатних для всіх випадків, не існує. Тому, при дослідженні рядів, часто використовуються інші достатні ознаки, зокрема, наступна:

Ознака Даламбера. Якщо для знакододатного ряду (1.5) існує границя відношення наступного члена ряда до попереднього при необмеженому збільшенні номера члена n, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p,$$

то при $p < 1$ ряд збігається, при $p > 1$ ряд розбігається.

Одразу відмічаємо, що при $p = 1$ дана ознака не дає можливості судити про поведінку ряду (1.5).

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}.$$

Розв'язання. Використаємо ознаку Даламбера;
Маємо:

$$u_n=\frac{2^n}{n^{10}};\ u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n}=\frac{2\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}=2.$$

Оскільки $p=2>1$, то ряд розбігається.

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$ розбігається.

У тих випадках, коли ознака Даламбера не дозволяє зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду, поряд з ознаками порівняння часто використовується наступна достатня ознака збіжності ряду.

<u>Інтегральна ознака Коші</u>. Нехай члени знакододатнього ряду (1.5) $u_n\,(n=1,2,\ldots)$ є значеннями при $x=1,2,3,\ldots,n,\ldots$ деякої функції $f(x)$ додатньої, неперервної, спадної на інтервалі $1\le x<\infty$ так, що

$$u_1=f(1),\quad u_2=f(2),\ \ldots,\quad u_n=f(n),\ \ldots,$$

тоді ряд (1.5) буде збігатися або розбігатися у залежності від того, збігається чи розбігається інтеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^p n}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^p x}$ при $x > 1$ є додатньою і спадною (при будь-якому p і достатньо великому x). Тому, для дослідження даного ряду на збіжність можна використати інтегральну ознаку Коші.

Маємо:

$$I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \lim_{A \to \infty} \left. \frac{\ln^{1-p} x}{1-p} \right|_2^A$$

При $p > 1$ отримаємо:

$$I = \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 2} < \infty$$

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n}$ збігається при $p > 1$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2 + 1}$.

Розв'язання. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, розглянемо інтеграл

$$I = \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim_{A \to \infty} \int_1^{A} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim_{A \to \infty} \int_1^{A} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{A \to \infty} \ln(x^2+1) \Big|_1^2 =$$

$$= \ln(+\infty) - \ln 2 = +\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається. Отже, даний ряд також розбігається.

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2 + 1}$ розбігається.

<u>Радикальна ознака Коші</u>. Якщо для ряду (1.5) існує $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = c$, то цей ряд збігається при $c < 1$ і розбігається при $c > 1$. При $c = 1$ дана ознака не дозволяє робити висновок про збіжність ряду(1.5).

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Розв'язання.

З умови маємо:

$$u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

Тут зручно використати ознаку Коши, оскільки

$$\sqrt[n]{u_n}=\frac{n}{2n+1}.$$

Отримуємо

$$c=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Відповідь. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ збігається.

Розглянемо тепер ряди, члени яких мають різні знаки.

Знакопочережним рядом називається ряд, який має вигляд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots, \tag{1.7}$$

де $u_n>0$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

<u>Ознака Лейбніца</u>. Знакопочережний ряд (1.7) збігається, якщо абсолютні величини його членів спадають, а спільний член наближається до нуля, тобто, якщо виконуються наступні дві умови:

1) $u_1>u_2>\ldots>u_n>u_{n+1}>\ldots$ і

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1\cdot2^2}+\frac{1}{2\cdot3^2}+\frac{1}{3\cdot4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2}+\ldots$$

Розв'язання. Цей ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца:

1) $\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \ldots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$

Відповідь. Даний ряд збігається.

Теорема. Знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.8}$$

збігається, якщо збігається ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1.9}$$

У цьому випадку ряд (1.8) називається абсолютно збіжним.

Збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається умовно збіжним, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбігається.

При практичному використанні збіжних рядів зазвичай обмежуються декількома їх першими членами. Допустима при цьому помилка (остача ряда) найбільш просто оцінюється для знакопочережних рядів.

Теорема Лейбніца. Помилка при заміні суми збіжного знакопочережного ряду сумою декількох його членів менша за абсолютне значення першого з відкинутих членів.

Приклад. Перевірити, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ збігається і обчислити, приблизно, значення суми з точністю до $0,01$.

Розв’язання. Перевіряємо збіжність ряду за ознакою Лейбніца: впевнюємося, що його члени спадають за абсолютним значенням і що

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0 .$$

Далі знаходимо декілька послідовних перших членів даного ряду, доки не отримаємо такий член, абсолютне значення якого менше за 0,01:

$$a_1 = -\frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{9};\ a_3 = -\frac{1}{28};\ a_4 = \frac{1}{65};\ a_5 = -\frac{1}{126}.$$

За вказаною вище властивістю знакопочережних рядів для обчислення суми даного ряду з точністю до 0,01 достатньо взяти суму чотирьох перших членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}\approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}\approx -0,41.$$

Відповідь. Сума даного ряду приблизно дорівнює -0,41.

1.2 Функціональні ряди

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$, члени якого є функціями від змінної X, називається *функціональним*.

При різних значеннях X з функціонального ряду отримуємо різні числові ряди, які можуть бути збіжними або розбіжними.

Сукупність значень X, при яких функціональний ряд збігається, називається його *областю збіжності*.

З усіх функціональних рядів найпростішими і найбільш уживаними є *степеневі ряди* вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (1.10)$$

або більш спільного вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... \qquad (1.11)$$

Областю збіжності будь-якого степеневого ряду є один інтервал числової осі, що є симетричним відносно точки $X=0$ (для ряду (1.10)) або $X=X_0$ (для ряду (1.11)), який може бути закритим або відкритим, або напіввідкритим.

Для визначення області збіжності функціональних рядів зазвичай спочатку використовують ознаку Даламбера, а потім ті значення X, для яких ця ознака не вирішує питання про збіжність ряду ($p=1$), досліджується особливо, за допомогою інших ознак збіжності рядів.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}x^{2n}.$$

Розв'язання. Використовуючи ознаку Даламбера, шукаємо границю

$$p=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)!x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}x^{2n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)x^2}{(2n+1)(2n+2)}\right| =$$

$$=2x^2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}=0<1,$$

тобто, для даного ряду $p<1$ при будь-якому значенні X.

Отже, згідно ознаки Даламбера, цей ряд збігається при будь-якому значенні X.

Відповідь. Інтервалом збіжності є вся числова вісь $-\infty < x < \infty$.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{\sqrt{1}}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Складаємо границю

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} : \frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = |x|.$$

Таким чином, даний ряд збігається для $|x|<1$, тобто, в інтервалі $(-1,1)$, і розбігається для $|x|>1$. Радіус збіжності ряду $R=1$. Дослідимо тепер збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x=1$ і $x=-1$.

Підставляючи в даний ряд $x = I$, отримаємо розбіжний узагальнений гармонічний ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

(оскільки $p=\frac{1}{2}<1$).

В точці $x=-1$ отримаємо знакопочережний ряд

$$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots,$$

який збігається на основі ознаки Лейбніца.

Відповідь. Областю збіжності даного ряду є інтервал $-1 \le x < 1$.

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки a називається степеневий ряд, який має вигляд:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (1.12)$$

Оскільки різниця між $f(x)$ і сумою $n+1$ членів ряду Тейлора є додатковий член $r_n(x)$, то, очевидно: для того, щоб при деякому значенні X дійсно мало місце разкладання (1.12), необхідно і достатньо, щоб додатковий член $r_n(x)$ формули Тейлора – при цьому значенні X – наближався до нуля зі зростанням n:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \quad (1.13)$$

Найчастіше доводиться мати справу з випадком, коли $a=0$ і функція $f(x)$ розкладається в ряд безпосередньо за степенями X:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (1.14)$$

Цей ряд звичайно називають *рядом Маклорена*.

Таким чином, для розкладання даної функції в ряд Тейлора (або Маклорена) треба:

1) написати ряд Тейлора для даної функції, тобто, обчислити значення цієї функції і її похідних при $x=a$ і підставити їх у загальний вираз ряду Тейлора (1.12) для довільної функції;

2) дослідити залишковий член r_n формули Тейлора для даної функції і визначити сукупність значень X, при яких отриманий ряд збігається до даної функції, тобто при яких виконується співвідношення (1.13).

Залишковий член $r_n(x)$ при цьому зазвичай записують у формі Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \ a < Q < x. \qquad (1.15)$$

Для багатьох функцій, які використовуються у практичних застосуваннях математичного аналізу, інтервал збіжності ряду Тейлора повністю співпадає з сукупністю тих значень X, при яких відповідний залишковий член $r_n \to 0$, коли $n \to \infty$, тобто для багатьох функцій кожна точка X збіжності ряду Тейлора є і точкою збіжності цього ряду до функції, що його породила. Тому при розкладанні багатьох функцій у ряд Тейлора можна замість дослідження відповідного залишкового члена r_n, що в багатьох випадках загалом важко, досліджувати збіжність самого ряду Тейлора, як звичайного степеневого ряду.

Наведемо розкладання у ряд Тейлора наступних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \ -\infty < x < \infty; \qquad (1.16)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ..., \ -\infty < x < \infty; \qquad (1.17)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ..., \ -\infty < x < \infty; \qquad (1.18)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., \ -1 < x \le 1; \qquad (1.19)$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ..., \ -1 \le x \le 1; \qquad (1.20)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... \qquad (1.21)$$

Це останнє розкладання придатне:

При $m \ge 0$, якщо $-1 \le x \le 1$;

при $-1 < m < 0$, якщо $-1 < x \leq 1$;
при $m \leq -1$, якщо $-1 < x < 1$.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,001 число e.

Розв'язання. Скористаємося розкладанням (1.16), підставивши в нього $x = 1$.

Отримаємо

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Узявши перші $n + 1$ членів, отримаємо приблизну нерівність

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Оцінимо похибку наближення за допомогою залишкового члена ряду Маклорена. Оскільки $f^{(n+1)}(x) = e^{x}$, то $r_n(x) = e^{c} \cdot x^{n+1}/(n+1)!$, $0 < c < 1$. При $x = 1$ маємо $r_n(1) = \dfrac{e^{c}}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \dfrac{e^{c}}{(n+1)!}$, $0 < c < 1$.

Беручи до уваги, що $e^{c} < e^{1} < 3$, отримаємо:

$$r_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Якщо $n = 5$, то

$$\frac{3}{(5+1)!} = \frac{1}{240} > 0,001,$$

а якщо $n = 6$, то

$$\frac{3}{(6+1)!} = \frac{1}{1680} < 0,001.$$

Тому для досягнення необхідної точності достатньо взяти $n = 6$.

Таким чином, з точністю до 0,001 маємо

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

Кожний доданок випишемо з одним додатковим знаком, щоб до нашої помилки не додавались помилки від округлення доданків:

$$e \approx 1,0000 + 1,0000 + 0,5000 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181.$$

Відповідь. $e = 2,718$ з точністю до 0,001.

Приклад. Обчислити $\sin 18^0$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Переводячи 18^0 у радіани і використовуючи розкладання (1.17), отримаємо:

$$\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots$$

Отриманий ряд знакопочережний, його члени спадають за абсолютною величиною і спільний член наближається до нуля, тобто виконуються всі умови ознаки Лейбніца. Ці обставини полегшують дослідження, оскільки остача ряду не перевищує першого відкинутого члена.

Оскільки $\frac{\pi^3}{3!10^3} > 0,0001$, $\frac{\pi^5}{5!10^5} < 0,0001$, то з точністю до 0,0001 отримаємо:

$$\sin 18^0 \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} = 0,31416 - 0,00517 = 0,30899.$$

Відповідь. $\sin 18^0 \approx 0,3090$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{243 + x^5}}$ з точністю до 0,001 шляхом розкладання підінтегральної функції у степеневий ряд.

Розв'язання. Безпосереднє застосування ряда (1.21) до розкладання підінтегральної функції не можливе через дві причини:

По-перше, у біномі $(1 + x)^m$ основа повинна бути представлена у вигляді суми одиниці і змінної; по-друге, відрізок інтегрування [0,2] виходить за межі області збіжності біноміального ряду. Враховуючи названі протиріччя, виконаємо перетворення під даним інтегралом.

$$I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{243 + x^5}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{243(1 + \frac{x^5}{243})}} = \frac{1}{\sqrt{243}} \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^5}}.$$

Зробимо заміну. Нехай $\frac{x}{3} = t$. Тоді $x = 3t$, $dx = 3dt$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$; якщо x=2 $x = 2$, то $t = \frac{2}{3}$. Інтеграл приймає вигляд

$$I = \frac{3}{3^2 \cdot \sqrt{3}} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^5}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{2}{3}} (1+t^5)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Підінтегральну функцію розкладемо в степеневий ряд за формулою

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots, \quad x \in (-1,1].$$

Отримаємо

$$(1+t^5)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}t^5 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^{10} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}t^{15} +$$

$$+ \ldots = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}t^5 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^{10} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^{15} + \ldots, -1 < t \le 1.$$

Відрізок інтегрування $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ входить до області збіжності отриманого ряду, отже, його можна почленно інтегрувати:

$$I = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}t^5 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^{10} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^{15} + \ldots\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^6}{2 \cdot 1! 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot t^{11}}{2^2 \cdot 2! 11} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t^{16}}{2^3 \cdot 3! \cdot 16} + \ldots\right) \Bigg|_0^{\frac{2}{3}} =$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{2\cdot 1!\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{2^2\cdot 2!\cdot 11}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{2^3\cdot 3!\cdot 16}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}-\frac{2^5}{1!6\cdot 3^6}+\frac{1\cdot 3\cdot 2^9}{2!11\cdot 3^{11}}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 2^{13}}{3!16\cdot 3^{16}}+\ldots\right).$$

Оскільки отриманий числовий ряд є знакопочережним, то для обчислення з точністю $E=10^{-3}$ достатньо зберегти таке число членів, щоб перший з відкинутих був менше, ніж 10^{-3}. Послідовно обчислюємо члени ряда, поки не виконається нерівність

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}u_n<10^{-3},$$

тобто

$$u_n<3\sqrt{3}\cdot 10^{-3}<5,2\cdot 10^{-3}.$$

Обчислення ведемо з однією запасною цифрою (з чотирма знаками після коми). Отримаємо

$$I\approx 0,1925\left(0,6667-0,0073+0,0004-\ldots\right).$$

Оскільки $u_3=0,0004<5,2\cdot 10^{-3}$, то зберігаємо у правій частині останньої рівності два доданки. Остаточно отримуємо

$$I=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{243+x^5}}\approx 0,1925\left(0,6667-0,0073\right)=0,2693\approx 0,269$$

з усіма вірними знаками.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, рокладаючи підінтегральну функцію у степеневий ряд і використовуючи сім членів цього розкладення.

Розв’язання. Скориставшись формулою (1.16), отримаємо:

$$e^{-x^2}=1+\frac{\left(-x^2\right)}{1!}+\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-x^2\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}+\ldots=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Цей ряд збігається при будь-якому X. Проінтегрувавши почленно його перші сім членів, отримаємо:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11} + \frac{x^{13}}{6!13} \right) \Big|_0^1 =$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}. \qquad (1.23)$$

Оцінимо остачу ряду r_7. В силу теореми Лейбніца

$$\left|r_7\right| \le \frac{x^{15}}{7!15} \Big|_0^1 = \frac{1}{75600} < 0,0000133 < 1,5\cdot 10^{-5}.$$

Враховуючи точність оцінки (чотири вірних знака після коми), обчислюємо суму (1.23) з п’ятьма знаками після коми (з одним запасним знаком). Остаточно отримаємо

$$\int_0^1 e^{-x^2} \approx 1 - 0,33333 + 0,10000 - 0,02381 + 0,00463 - 0,00076 + 0,00011 =$$

$$= 0,74684 \approx 0,7468$$

з усіма вірними знаками. Помітимо, що в наведеному прикладі обчисленню суми (1.23) передує оцінка остачі ряда.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{1/10} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до $E = 10^{-4}$ шляхом розкладання підінтегральної функції в степеневий ряд.

Розв’язання. Зробимо заміну в підінтегральному виразі $\ln(1+x)$ його розкладанням (1.19) в степеневий ряд. Така заміна допустима, оскільки відрізок інтегрування $\left[0;0,1\right]$ входить в інтервал $\left(-1;1\right)$ збіжності цього ряду.

Отримаємо

$$I = \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int_0^{0,1} \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \right]dx =$$

$$=\int\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+...\right)\Bigg|_0^{0,1}= \qquad (1.24)$$

$$=0,1-\frac{0,01}{4}+\frac{0,001}{9}-\frac{0,0001}{16}+...$$

Оскільки отриманий числовий ряд є знакопочережним, то достатньо обрати таке число членів, щоб перший з відкинутих був менше, ніж 10^{-4}. Цій умові задовольняє четвертий член, тому що

$$\frac{0,0001}{16}=\frac{1}{160000}<10^{-4}.$$

Підрахуємо суму трьох перших членів (1.24). Обчислення будемо вести з п'ятьма знаками після коми, а остаточну відповідь округлимо:

$$I\approx 0,1-\frac{0,01}{4}+\frac{0,001}{9}\approx 0,10000-0,00250+0,00011=0,09761.$$

Відповідь: $I\approx 0,00976$.

Слід зауважити, що у випадках, подібних до розглянутого прикладу, практично немає потреби заздалегідь визначати перший з відкинутих елементів. Легше послідовно обчислювати члени ряду (1.24) при відповідних значеннях x до тих пір, поки не дійдемо до члена ряду, абсолютна величина якого менше заданої похибки.

Викладемо тепер на прикладах метод знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння за допомогою рядів. Цей метод придатний для наближеного розв'язання диференціального рівняння будь-якого порядку.

Розв'язок диференціального рівняння може в багатьох випадках бути представлений у вигляді степеневого ряду, який збігається на певному інтервалі. Коефіцієнти цього ряду можна знайти методом, який спирається на застосування ряду Тейлора, відповідно до якого, шуканий розв'язок диференціального рівняння $y=y(x)$ має вигляд:

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+... \qquad (1.25)$$

Приклад. Знайти перші чотири члена розкладання у степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=y^2+x(x+1)$ за початкової умови $y(0)=1$.

Розв'язання. Нехай функція, яку шукаємо, $y(x)$ розкладена у ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{y^{(n)}}{n!} x^n + ... \qquad (1.26)$$

Перший коефіцієнт дан в умові задачі, другий отримаємо під час підстановки відомих величин в дане рівняння

$$y'(0) = \left[y(0)\right]^2 + 0 \cdot (0+1) = 1,$$

а наступні коефіцієнти знайдемо шляхом послідовного диференціювання даного рівняння:

$$y'' = 2yy' + 2x + 1;$$

$$y''' = 2(y'^2 + y \cdot y'') + 2 = 2(y'^2 + yy'' + 1);$$

Звідси при $x = 0$ отримаємо:

$$y''(0) = 2y(0) \cdot y'(0) + 2 \cdot 0 + 1 = 3;$$

$$y'''(0) = 2(1^2 + 1 \cdot 3 + 1) = 10.$$

Підставляючи ці значення коефіцієнтів в ряд Маклорена (1.26), отримаємо розкладання, яке шукали, у вигляді

$$y = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3 + ...$$

Відповідь. $y \approx 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3$.

Приклад. Записати перші шість ненульових членів розкладення в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диферінціального рівняння $y'' = x + y^2$ за початкових умов $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Приблизний розв'язок будемо шукати у вигляді ряду (1.26). За даними задачі відразу маємо: $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 0$.

Далі, послідовно диференціюючи, отримаємо:

$y''' = 1 + 2y \cdot y'$;	$y'''(0) = 1$;
$y^{1V} = 2y \cdot y'' + 2y'^2$;	$y^{1V}(0) = 2$;
$y^{V} = 2y \cdot y''' + 6y' \cdot y''$;	$y^{V}(0) = 0$;
$y^{V1} = 2y \cdot y^{1V} + 8y' \cdot y''' + 6y''^2$;	$y^{V1}(0) = 8$;

$y^{V111} = 2y' \cdot y^{1V} + 8y' \cdot y^{1V} + 2y \cdot y^{V} + 20y'' \cdot y'''$; $y^{V11}(0) = 20$;

$y^{V111} = 2y \cdot y^{V1} + 12y' \cdot y^{V} + 30y'' \cdot y^{1V} + 20y''^{2}$; $y^{V111}(0) = 20$.

Підставивши у ряд (1.26) знайдені значення, отримаємо наближений розв'язок нашої задачі:

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{252} + \frac{x^8}{2016} + \ldots$$

Відповідь. $y(x) \approx x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{252} + \frac{x^8}{2016}$.

1.3 Ряди Фур'є

Переходимо до питань розкладання функцій в ряди Фур'є.

Нехай на деякому проміжку $[-\ell, \ell]$ задана функція $f(x)$. Поставимо питання, чи не можна побудувати такий тригонометричний ряд, який на цьому проміжку збігався б до функції $f(x)$? Як знайти коефіцієнти a_n і b_n такого ряду?

На ці питання допомагає відповісти теорема: якщо функція $f(x)$ може бути розкладена в рівномірно збіжний на всій числовій осі тригонометричний ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x\right), \qquad (1.27)$$

то коефіцієнти цього ряду знаходяться за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (1.28)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

Цей ряд називається *рядом Фур'є* для функції $f(x)$, a_0, a_n, b_n - коефіцієнти Фур'є.

Формально, для будь-якої функції, яка інтегрується на проміжку $[-\ell, \ell]$ можна скласти ряд Фур'є. Однак, між функцією і цим рядом не завжди можна поставити знак рівності.

Наступна теорема дає достатні умови для розкладання функції в ряд Фур'є.

<u>*Теорема Дирихле.*</u> Якщо періодична функція $f(x)$ має період $T = 2\ell$ і є неперервною або має кінцеве число точок розриву та кінцеве число екстремумів, то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається в усіх точках. Сума отриманого ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності функції. В точках розриву функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ справа і зліва, тобто, якщо $x = c$ - точка розриву функції, то

$$S(x)\,\Big|_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Примітки:

1. Якщо $f(x)$ - парна функція, то

$$b_n = 0,\ a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \tag{1.29}$$

а тому

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}. \tag{1.30}$$

2. Якщо $f(x)$ - непарна функція, то

$$a_0 = a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \tag{1.31}$$

а тому розкладання має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}. \tag{1.32}$$

3. Функція, яка задана на інтервалі $[0, \ell]$ може бути розкладена в залежності від вимоги або тільки в ряд косинусів, або тільки в ряд синусів.

Для цього вона повинна бути продовжена на інтервалі $\left[-\ell, 0\right]$ або як парна, або як непарна функція.

4. При $\ell = \pi$ формули розкладання в ряд Фур'є мають вигляд:

$$f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \qquad (1.33)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nxdx, \; n=1,2,\ldots \qquad (1.34)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nxdx, \; n = 1, 2, \ldots$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію, яка задана на інтервалі $\left[-1;1\right]$ рівнянням $f\left(x\right) = x^2$.

Розв'язання. Функція, яка розглядається, є парною, тому використаємо формули (1.29), (1.30) при $\ell = 1$. Отримаємо:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx.$$

Двічі інтегруємо по частинах:

1. $u = x^2, dv = \cos n\pi x dx, du = 2xdx, v = \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x;$

$$a_n = \frac{2x^2}{n\pi}\sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x \sin \pi x dx = -\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x dx;$$

2. $u = x, dv = \sin n\pi x dx, du = dx, v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x;$

$$a_n = \frac{4x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n.$$

Отже,

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.$$

Відповідь.

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\frac{\cos 4\pi x}{4^2}+...\right).$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі $\left[0;2\right]$ рівнянням $f\left(x\right)=x-\frac{x^2}{2}$.

Розв'язання. Функція може бути розкладена в ряд Фур'є великою кількістю способів. Наведемо два найбільш важливих варіанта розкладання.

1. Довизначаємо функцію на інтервалі $\left[-2;0\right]$ парним способом. З формул (1.29), (1.30) маємо при $\ell=2$

$$a_0=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right]\Bigg|_0^2=\frac{2}{3},$$

$$a_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Інтегруємо по частинах:

$$u=x-\frac{1}{2}x^2,\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx,\ du=\left(1-x\right)dx,\ v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\left(1-x\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Ще раз інтегруємо по частинах:

$$u=1-x,\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx,\ du=dx,\ v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2},$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-x\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2} =$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^n\right],$$

$b_n = 0.$

Таким чином,

$$f\left(x\right) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Відповідь:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x + \frac{1}{4^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{6^2}\cos 3\pi x + \ldots\right).$$

2. Довизначаємо функцію $f(x)$ на інтервалі $\left[-2;0\right]$ непарним способом. Використаємо формули (1.31), (1.32):

$$b_n = \int_0^2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx;$$

$$u = x - \frac{x^2}{2};\, dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx;\, du = \left(1-x\right)dx;\, v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2};$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2\left(1-x\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx;$$

$$u = 1 - x;\, dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx;\, du = -dx;\, v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2};$$

$$b_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{8}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right],a_n=0,\left(n=1,2,3,...\right).$$

Таким чином,

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Відповідь: $f(x)=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+...\right).$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\frac{x}{2}$ на інтервалі $(0,2\pi)$.

Розв'язання. Дана функція не парна і не непарна, тому обчислюємо її коефіцієнти Фур'є за спільними формулами (1.27), (1.28), припускаючи,що $\ell=\pi$ і беручи границями інтегралів 0 і 2π, оскільки функція задана в інтервалі $(0,2\pi)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4\pi}\Big|_0^{2\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=0$$

$n=1,2,3,...$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}.$$

Для обчислення інтегралів були використані формули інтегрування по частинах.

Підставляючи значення коефіцієнтів a_0, a_n і b_n у тригонометричний ряд (1.27), отримаємо шукане розкладання даної функції в ряд Фур'є:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Відповідь: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < 1; \\ 2 - x, 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Зобразимо графік функції (рис. 1.1)

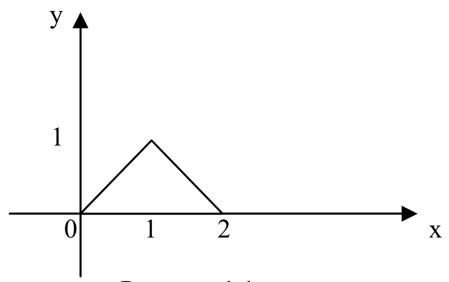

Рисунок 1.1

Щоб розкладання функції в ряд Фур'є містило тільки синуси, необхідно, щоб ця функція була непарною. Продовжимо дану функцію $f(x)$ на відрізку $[-2; 0]$ непарним способом (рис. 1.2).

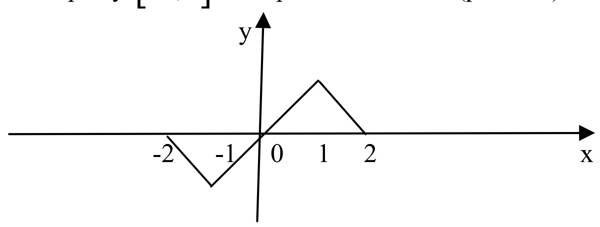

Рисунок 1.2

Скористаємося формулами (1.31) і (1.32). Для заданої функції період T=4 , отже, $\ell = 2$, тоді

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{2}{2}\int_1^2 \left(2-x\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = I_1 + I_2.$$

Отримані інтеграли візьмемо по частинах:

$$I_1 = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left[\begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx; v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(2-x\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left[\begin{array}{l} u = 2-x; du = dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx; v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array}\right] = -\frac{2\left(2-x\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 -$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi +$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$b_n = I_1 + I_2 = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Отримане значення b_n підставимо в (1.32).

Отримаємо

$$f\left(x\right) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{\left(2n+1\right)\pi x}{2}.$$

Відповідь: $f\left(x\right)=\frac{8}{\pi^2}\left(-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{2}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{2}+...\right).$

РОЗДІЛ 2. МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

2.1 Індивідуальні завдання

Розв’язати у відповідності до шифру наступні п’ять завдань. Дані для вибору конкретних номерів взяті з таблиці А.1, наведеної у додатку А.

421-430. Дослідити збіжність числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

421. $u_n=\frac{n+3}{n^3-2}$

422. $u_n=\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

423. $u_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}$

424. $u_n=\frac{3^n}{(2n)!}$

425. $u_n=\frac{n^3}{e^n}$

426. $u_n=\frac{1}{(n+1)\left[\ln(n+1)\right]^2}$

427. $u_n=\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$

428. $u_n=\frac{n^2}{(3n)!}$

429. $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

430. $u_n=\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

431-440. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

431. $a_n=\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$

432. $a_n=\frac{2^n}{n(n+1)}$

433. $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$

434. $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n}$

435. $a_n = \frac{n}{3^n (n+1)}$

436. $a_n = \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}$

437. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

438. $a_n = \frac{n+1}{3^n (n+2)}$

439. $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n (3n-1)}}$

440. $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$

441-450. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^b f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд і потім проінтегрувати його почленно.

441. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}, b = 1$

442. $f(x) = \cos\sqrt{x}, b = 1$

443. $f(x) = x \cdot \mathrm{arctg}x, b = 0,5$

444. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, b = 0,5$

445. $f(x) = x\ln(1-x^2), b = 0,5$

446. $f(x) = x \cdot e^{-x}, b = 0,5$

447. $f(x) = \mathrm{arctg}x^2, b = 0,5$

448. $f(x) = \sin x^2, b = 1$

449. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}, b = 0,5$

450. $f(x) = \sqrt{1+x^2}, b = 0,5$

451-460. Знайти три перших, відмінних від нуля розкладання у степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, яке задовольняє початковій умові $y(0) = y_0$.

451. $y' = \cos x + y^2; y(0) = 1$. 452. $y' = e^x + y^2; y(0) = 0.$

453. $y' = y + y^2; y(0) = 3$. 454. $y' = 2e^y - xy; y(0) = 0.$

455. $y' = \sin x + y^2; y(0) = 1$. 456. $y' = e^x + y; y(0) = 4.$

457. $y' = x^2 + y^2; y(0) = 2$. 458. $y' = \sin x + 0,5y^2; y(0) = 1.$

459. $y' = 2e^y + xy; y(0) = 0$. 460. $y' = x + x^2 + y^2; y(0) = 5.$

461-470. Розкласти дану функцію $f(x)$ в ряд Фур'є на інтервалі (a, b).

461. $f(x) = x + 1$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

462. $f(x) = x^2 + 1$ на інтервалі $(-2, 2)$.

463. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

464. $f(x) = 1 + |x|$ на інтервалі $(-1, 1)$.

465. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

466. $f(x) = |1 - x|$ на інтервалі $(-2, 2)$.

467. $f(x) = |x|$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

468. $f(x) = x - 1$ на інтервалі $(-1, 1)$.

469. $f(x) = x^2$ на інтервалі $(0, 2\pi)$.

470. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ на інтервалі . $(-\pi, \pi)$.

2.2 Перелік теоретичних запитань до модульної контрольної роботи

1. Послідовності. Арифметичні дії з послідовностями.
2. Обмежені та монотонні послідовності.
3. Границі послідовностей.
4. Числові ряди, збіжність і сума ряду.
5. Необхідна умова збіжності числового ряду.
6. Геометрична прогресія.
7. Узагальнений гармонічний ряд.
8. Гармонічний ряд і його збіжність.
9. Властивості збіжних числових рядів.
10. Перша ознака порівняння рядів з додатними членами.
11. Друга ознака порівняння рядів з додатними членами.
12. Ознака Даламбера.
13. Інтегральна ознака збіжності числових рядів з додатними членами.
14. Радикальна ознака збіжності числових рядів з додатними членами.
15. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбниця.
16. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.
17. Функціональні ряди. Область збіжності функціонального ряду.
18. Степеневі ряди. Теорема Абеля.
19. Степеневі ряди. Радіус і інтервал збіжності.
20. Ряд Тейлора.
21. Ряд Маклорена.
22. Розкладання функції y=sin(x) у ряд Маклорена.
23. Розкладання функції y=cos(x) у ряд Маклорена.
24. Розкладання функції $y = e^{x}$ у ряд Маклорена.
25. Біноміальний ряд.
26. Розкладання функції $y = \frac{1}{1+x}$ у ряд Маклорена.
27. Розкладання функції $y = \frac{1}{1-x}$ у ряд Маклорена.
28. Розкладання функції y=ln(1+x) у ряд Маклорена.
29. Розкладання функції y=arctg(x) у ряд Маклорена.
30. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень інтегралів.
31. Поняття ортогональної системи функцій. Приклади.
32. Розкладання функції $y = \sqrt[m]{A}$ у ряд Маклорена.
33. Розкладання функції y=sint у ряд Маклорена.
34. Розкладання функції y=Lnt у ряд Маклорена.
35. Застосування степеневих рядів до обчислень суми числових рядів.

36. Застосування степеневих рядів до розв'язання диференціальних рівнянь.
37. Ряд Фур'є за ортогональною системою функцій.
38. Тригонометричний ряд Фур'є на [-e; e].
39. Тригонометричний ряд Фур'є на [0; e].
40. Тригонометричний ряд.
41. Теорема Діріхле.
42. Ряди Фур'є.
43. Коефіцієнти ряду Фур'є.
44. Ряд Фур'є для парних функцій.
45. Ряд Фур'є для непарних функцій.

2.3 Приклади практичних завдань до модульної контрольної роботи

1. Довести збіжність ряду і знайти його суму:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$

2. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$

3. Дослідити на збіжність знакопочережні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{(2n+1)n}$

4. Обчислити суму ряду з точністю до α :

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{3n^2}, \quad \alpha = 0,01$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \dfrac{1}{n!\left(2n+1\right)}, \quad \alpha = 0,001$

5. Знайти область збіжності ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n} x^{n}}{n^{2}+1}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^{n}}$

6. Розкласти у ряд Маклорена функцію f(x).

а) $f(x) = \cos 5x$

б) $f(x) = x^{3} \operatorname{arctg} x$

7. Використовуючи розкладання підінтегральної функції у степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл з точністю 0,001:

а) $\int\limits_{0}^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})dx$

б) $\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)dx$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1967. – 440 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: АСК., 2001. – 480 с.
3. Дюженкова Л.І. Вища математика: Приклади і задачі: посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. –624 с.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу/ Г.И. Запорожец. – М.: Высш. шк., 1964. – 479 с.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1

Номер рядка	Номери задач контрольних завдань				
1	426	431	442	452	467
2	427	432	443	454	463
3	428	433	444	456	461
4	429	434	445	458	470
5	430	435	450	460	468
6	421	436	449	451	469
7	422	437	448	453	466
8	423	438	447	455	465
9	424	439	446	457	462
10	425	440	441	459	464
	б	в	в	б	в

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Вовк Леонід Петрович
Корольов Євгеній Олександрович
Непомняща Тетяна Володимирівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
і завдання для самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Тема «Ряди» (для студентів напрямів підготовки 6.070106 «Автомобільний транспорт», 6.070101 «Транспортні технології»)

Підписано до друку 30.06.2010 р.Формат 70Х90/16. Гарнітура Times New Roman.
Друк - різографія. Тираж 100 прим. Умов. друк. арк. 2,5. Зам. №126.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова,51

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007р.