ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теми «Кратні інтеграли» і «Векторний аналіз» є одними з найбільш прикладних у курсі вищої математики, оскільки знаходять застосування при розв'язуванні найрізноманітніших задач геометрії, механіки, фізики. Наведемо лише деякі з них.

За допомогою подвійних і потрійних інтегралів визначаються: площа, обмежена замкненими кривими, об'єми просторових тіл, положення їх центрів тяжіння, маси плоских і просторових областей, їх моменти інерції.

Криволінійні інтеграли знаходять своє застосування при визначенні роботи силового поля, при дослідженні плоских сталих течій нестискуваної рідини, при знаходженні довжини і маси кривої, тяжіння матеріальної точки матеріальною кривою.

За допомогою поверхневих інтегралів можна визначати маси, моменти, координати центрів тяжіння і тому подібні величини для матеріальних поверхонь, уздовж яких розподілені маси з визначеною в кожній точці поверхневою щільністю.

Застосування інтегрального числення до питань математичної фізики і механіки часто зручніше наводити у векторній формі. Тому студентам необхідно ознайомитися з деякими основними поняттями векторного аналізу, які приводять до векторної інтерпретації інтегральних утворень і формул інтегрального числення, що зв'язують їх. За допомогою цих понять можна проводити повний аналіз скалярних і векторних полів і знаходити їх основні характеристики: градієнт, потенціал, циркуляцію, потік і тому подібне.

Для розвитку навичок самостійного розв'язування практичних задач передбачені індивідуальні завдання за основними розділами тем «Кратні інтеграли» і «Векторний аналіз»: визначення площі фігури, обмеженої замкнутою кривою; обчислення об'єму тіла; знаходження криволінійних інтегралів; визначення основних характеристик векторного поля (у тому числі за допомогою формул Стокса і Остроградського—Гауса), знаходження потенціалу векторного поля.

1 ЗАГАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Дамо загальне визначення кратних інтегралів. Розглянемо для визначеності об'ємні інтеграли, тобто під областями будемо розуміти об'ємні частини простору, а як міру такої області будемо брати її об'єм.

Нехай у просторі задані кінцева область (Ω) і на ній, тобто в кожній її точці M, задана функція U = f(M), що приймає кінцеві значення. Тоді для складання інтегральної суми область (Ω) розбивається на шматочки $(\Delta\Omega_1)$, $(\Delta\Omega_2)$, …, $(\Delta\Omega_n)$, і в кожній довільно вибирається точка, відповідно M_1, $\mathrm{M}_2,\ldots,\mathrm{M}_n$...

Потім складається сума

$$\sum_{k=1}^{n} U_k \Delta\Omega_k = \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{M}_k)\Delta\Omega_k ,$$

де під $\Delta\Omega_k$ розуміється обсяг шматочка $(\Delta\Omega_k)$.

Межа цієї інтегральної суми в процесі, коли розбивка області (Ω) нескінченно подрібнюється, називається інтегралом (об'ємним) від функції f по області (Ω):

$$\int\limits_{(\Omega)} U d\Omega = \int\limits_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \ell im \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k .$$

Зовсім аналогічно дається визначення інтеграла по поверхні, плоскій або кривій, а також інтеграла по лінії; звичайно, при цьому замість об'єму шматочка треба взяти його площу або довжину.

Отже, якщо (Ω) — плоска область σ, то маємо подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y) d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k ;$$

якщо (Ω) — об'ємна область M, то маємо потрійний інтеграл:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z) dS = \lim_{\max \Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k ;$$

якщо (Ω) — плоска лінія L, то маємо криволінійний інтеграл:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \lim_{\max \Delta\ell_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\ell_k .$$

І, нарешті, якщо (Ω) — поверхня S, то одержуємо поверхневий інтеграл:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k .$$

Розв’язання типових задач почнемо з прикладів, що відносяться до подвійних інтегралів. Він обчислюється в залежності від конфігурації області, по якій розповсюджений подвійний інтеграл.

Припустимо спершу, що область інтегрування σ обмежена двома неперервними кривими ; $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = a$, $x = b$, причому для всіх значень x, укладених між a і b, має місце нерівність $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ (Рис. 1.1).

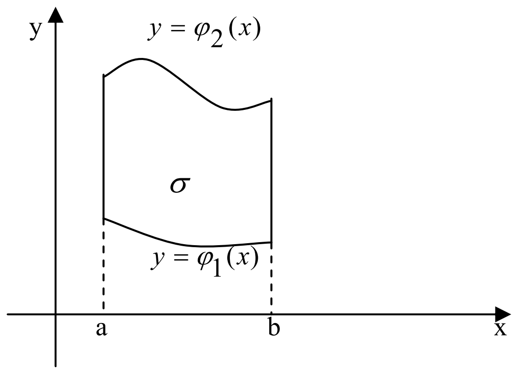

Рисунок 1.1

У цьому випадку подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ на області σ обчислюється у виді

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy . \tag{1.1}$$

Для того, щоб обчислити повторний інтеграл у правій частині формули (1.1), потрібно спершу обчислити визначений інтеграл

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,,$$

вважаючи X постійним. Результат обчислення цього інтеграла є функцією тільки від X. Інтегруючи тепер цю функцію в границях від a до b, одержимо значення подвійного інтеграла.

Якщо область σ має конфігурацію, зображену на рис.1.2, то має місце рівність

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)d\sigma = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{u_1(y)}^{u_2(y)} f(x,y)dx \qquad (1.2)$$

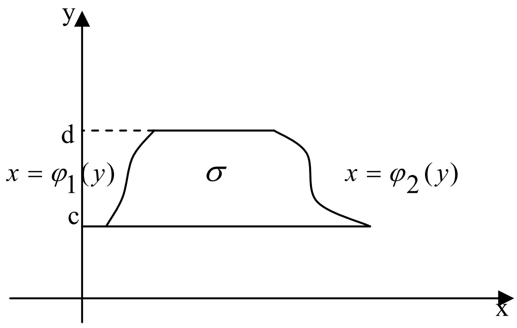

Рисунок 1.2

Якщо контур області σ більш складний, ніж зображення на рис.1.2, то діють таким чином. Область σ розбивають на кінцеве число частин задовольняючим умовам, при яких справедлива формула (1.1) або (1.2). Потім обчислюємо інтеграл за формулою (1.1) або (1.2) для кожної з таких областей. Інтеграл же по всій області дорівнює сумі інтегралів по кожній з цих частин.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл

$$\mathrm{I} = \iint\limits_{\sigma} xy^2 d\sigma\,,$$

якщо область інтегрування σ обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$ (рис. 1.3).

Розв’язання.

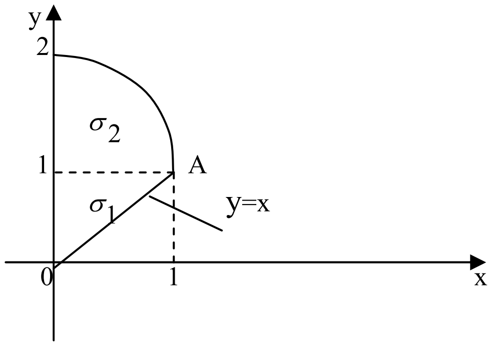

Рисунок 1.3

Застосуємо формулу (1.1), приймаючи:

$\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 2 - x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

Тому

$$I = \iint_{\sigma} xy^2 d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} xy^2 dy = \int_0^1 xdx \int_x^{2-x^2} y^2 dy = \int_0^1 x \cdot \left[\left. \frac{y^3}{3} \right|_x^{2-x^2} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x \cdot \frac{(2-x^2)^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right] dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 (2-x^2)^3 d(2-x^2) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^4 dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{6}\frac{(2-x^2)^4}{4} + \frac{x^5}{15} \right]_0^1 = -\frac{1}{24} - \frac{1}{15} + \frac{2^4}{24} = \frac{67}{120}.$$

Якщо при обчисленні подвійного інтеграла користуватися формулою (1.2), то доведеться область інтегрування σ розбити на дві частини σ_1 і σ_2 (рис.1.3), тому що лінія ОАВ, на якій розташовані точки виходу, на окремих ділянках задається різними рівняннями. Маємо

$$\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma = \int_{\sigma_1} xy^2 d\sigma + \iint_{\sigma_2} xy^2 d\sigma .$$

Застосовуємо формулу (1.2) до кожного з інтегралів, що стоять у правій частині останньої рівності. Знаходимо спочатку перший інтеграл.

$$\iint_{\sigma_1} xy^2 d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^y xy^2 dx,$$

тому що $x_{вх} = \psi_1(y) = 0, \quad x_{вых} = \psi_2(y) = y; \quad c = 0; \quad d = 1.$

Отже, маємо:

$$\int_0^1 y^2 \left(\frac{x^2}{2} \bigg|_0^y \right) dy = \int_0^1 \frac{y^4}{2} dy = \frac{y^5}{10} \bigg|_0^1 = \frac{1}{10}.$$

Аналогічно знаходимо й інтеграл за областю σ_2:

$$\iint_{\sigma_2} xy^2 d\sigma = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} xy^2 dx = \int_1^2 y^2 \left(\frac{x^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{2-y}} \right) dy = \int_1^2 \frac{(2-y)y^2}{2} dy =$$

$$= \int_1^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right]_1^2 = \frac{11}{24}.$$

Таким чином, остаточно

$$\mathrm{I} = \frac{1}{10} + \frac{11}{24} = \frac{67}{120}.$$

Відповідь: $\mathrm{I} = \dfrac{67}{120}$.

Приклад, що був розглянутий показує, що для знаходження подвійного інтеграла в даному конкретному випадку краще застосувати формулу (1.1). Це варто мати на увазі при обчисленні подвійних інтегралів і користуватися тією з формул (1.1) або (1.2), застосування якої веде до менш громіздких обчислень.

Приклад 2. Знайти площу, обмежену лініями $y = \dfrac{1}{a}(x-a)^2$ $(a \succ 0)$, $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 1.4).

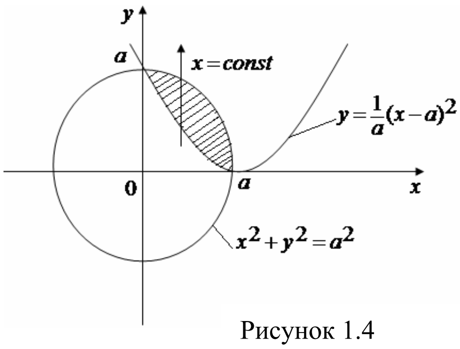

Рисунок 1.4

Розв'язання.

$$S = \iint_{a} 1\cdot dxdy = \int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}(x-a)^2}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_0^a dx\, y\Big|_{\frac{1}{a}(x-a)^2}^{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \int_0^a \left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{a}\left(x-a\right)^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx - \frac{1}{a}\int_0^a \left(x-a\right)^2 dx = \begin{bmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \frac{1}{a}\cdot\frac{(x-a)^3}{3}\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{12}\left(3\pi - 4\right).$$

Відповідь: $\mathrm{I} = \frac{a^2}{12}\left(3\pi - 4\right)$ (одиниць площі).

Приклад 3. Обчислити масу квадратної пластинки зі стороною a, щільність якої в будь-якій точці пропорційна квадратові відстані від цієї точки до однієї з вершин квадрата.

Розв'язання.

Вибираємо систему координат так, щоб вершина квадрата збіглася з початком координат, а сторони були спрямовані по осях. Тоді, з огляду на те, що поверхнева щільність пластинки за умовою

$$\delta(x, y) = k(x^2 + y^2),$$

а маса пластинки виражається через подвійний інтеграл за допомогою формули:

$$m = \iint_{\sigma} \delta(x, y) d\sigma,$$

Отримаємо:

$$m = \iint_{\sigma} k\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^a dx \int_0^a k\left(x^2 + y^2\right)dy =$$

$$= k\int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^a \cdot dx = k\int_0^a \left(x^2 a + \frac{a^3}{3} \right) =$$

$$= k\left(a\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3}x \right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^4 k.$$

Відповідь: $\mathrm{I} = \dfrac{2}{3}a^4 k$ (одиниць маси).

2 ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА У ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Обчислення подвійного інтеграла часто буває зручно вести в полярних координатах. Установимо зв'язок між подвійним інтегралом у декартових і полярних координатах. Виберемо полярну систему координат так, щоб полюс збігався з початком декартової прямокутної системи координат, а полярна вісь – з віссю абсцис. Тоді декартові координати x, y точки P виражаються через полярні ρ, φ за формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi . \qquad (2.1)$$

Припустимо, що область σ обмежена двома кривими з полярними рівняннями $\rho = \rho_1(\varphi)$ *і* $\rho = \rho_2(\varphi)$ променями, $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$, що йдуть з полюса O (рис. 2.1).

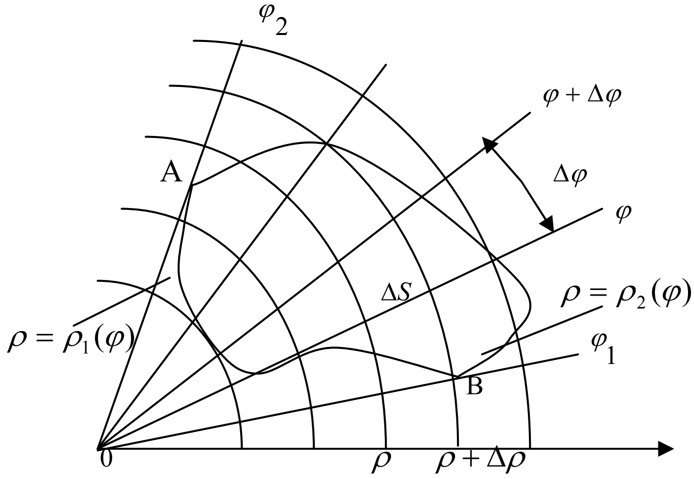

Рисунок 2.1

Розіб'ємо область σ на часткові області за допомогою кіл $\rho = const$ і променів $\varphi = const$. Якщо при цьому зазначені лінії перетинають границю області σ не більш ніж у двох точках, то таку область називають *правильною.*

Визначимо в полярних координатах міру часткової області ΔS, обмеженої нескінченно близькими променями, проведеними під кутами φ і $\varphi + \Delta\varphi$, і нескінченно близькими колами ρ і $\rho + \Delta\rho$ (рис.2.1). Отриманий криволінійний чотирикутник ΔS можна приблизно прийняти за прямокутник з бічною стороною $\Delta\rho$ і основою $-\rho \cdot \Delta\varphi$. Тоді

$$\Delta S \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\varphi.$$

Отже, елемент площі dS в полярних координатах прийме вид

$$dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi. \qquad (2.2)$$

З огляду на (2.1) і (2.2), одержимо:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(D)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\rho d\rho d\varphi. \qquad (2.3)$$

Таким чином, щоб перетворити подвійний інтеграл у декартових координатах у подвійний інтеграл у полярних координатах, потрібно x й y у підінтегральній функції замінити відповідно на $\rho\cos\varphi$ і $\rho\sin\varphi$, а добуток $dxdy$ замінити добутком $\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$.

Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат, так само як і в декартовій, зводиться до послідовного інтегрування по змінним ρ і φ.

Прямими $\varphi = const$ розіб'ємо область σ на смуги. Інтегруючи спочатку по ρ в межах його зміни від точок входу до точок виходу в область σ у прямих $\varphi = const$, а потім по φ в межах його найбільшої зміни (рис.2.2), одержимо:

$$\iint\limits_{(D)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\rho \cdot d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho\,(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\rho d\rho.$$

Інтегрування в зворотньому порядку, тобто спочатку по φ, а потім по ρ, зазвичай не зустрічається.

Якщо область σ (рис.2.3) обмежена замкнутій кривій $\rho = \rho(\varphi)$, а полюс лежить усередині області, то межі подвійного інтеграла приймають вигляд:

$$\iint\limits_{\sigma} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\rho \cdot d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\rho d\rho.$$

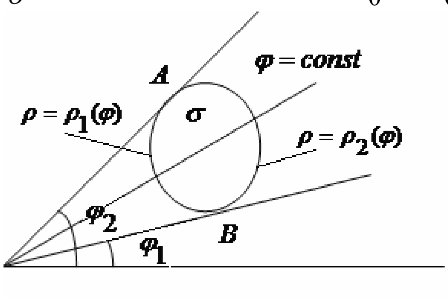

Рисунок 2.2

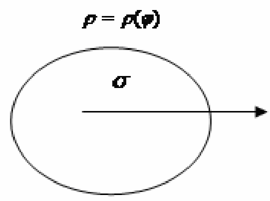

Рисунок 2.3

Приклад 1. Знайти масу круглої пластинки, якщо поверхнева щільність у кожній її точці пропорційна квадратові відстані від цієї точки до центра пластинки.

Розв'язання.

Нехай R – радіус пластинки і її центр збігається з початком декартової системи координат. Тоді щільність пластинки $\delta(x, y)$ за умовою буде $k\left(x^2 + y^2\right)$, де x і y — координати довільної точки пластинки. Отже,

$$m = \iint_{\sigma} k\left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

де σ — коло радіуса R. Переходячи до полярних координат, знаходимо

$$m = \iint_{\sigma} k\rho^3 d\rho d\varphi = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = k\pi \frac{R^4}{2}.$$

Відповідь: $m = k\pi \frac{R^4}{2}$ (одиниць маси).

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = \left(x^4 + y^4\right) \cdot a^2.$$

Розв'язання.

Лінія симетрична щодо осей координат (рис.2.4). Її рівняння в полярних координатах має вигляд:

$$\rho^2 = a^2\left(cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi\right).$$

Шукана площа:

$$S = 4S_1 = 4\iint_{\sigma} dxdy = 4\iint_{\sigma} \rho \cdot d\rho d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} \rho \cdot d\rho =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi\right) d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\cos^4 \varphi + 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi\right) - 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\right) d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1 - \cos 4\varphi}{4} \right) d\varphi = \frac{3}{4}\pi \cdot a^2 .$$

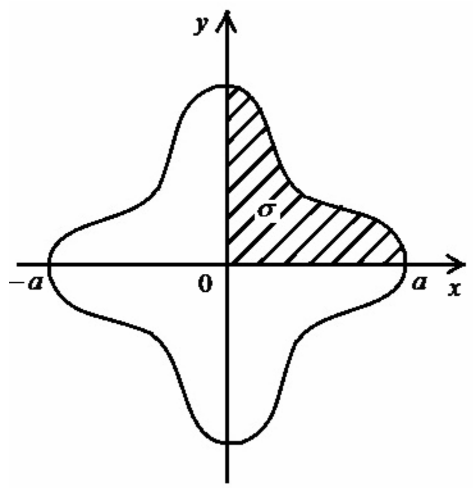

Рисунок 2.4

Відповідь: $S = \frac{3}{4}\pi a^2$ (одиниць площі).

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2ax^3 .$$

Розв’язання.

Наявність двочлена $x^2 + y^2$, як і в попередньому прикладі, наштовхує на думку перейти до полярних координат. Однак перед цим корисно скласти загальне уявлення про вид кривої. Крива симетрична щодо осі X (рівняння не змінюється від заміни y на $-y$), розташована праворуч від осі y (x не може бути від’ємним); перетинає вісь x при $x = 0$ і $x = 2a$. До того ж крива обмежена: з самого рівняння зрозуміло, що

Малюнок 8.

$$x^4 \le 2ax^3,$$

отже,

$$x \le 2a,$$

а через те, що і $y^4 \le 2ax^3$, то і $|y| \le 2a$. Ескіз кривої наведено на рис.2.5.

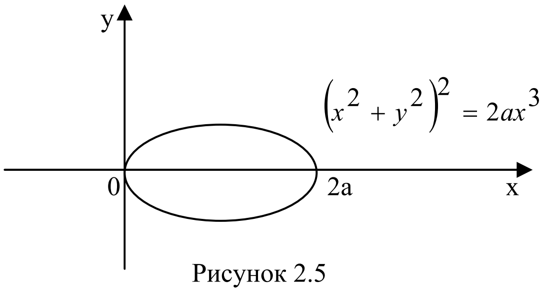

Рисунок 2.5

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} \rho d\rho = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \cdot \cos 2\varphi d\varphi\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\cdot 0 + \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8}\sin 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 \varphi\right) d\left(\sin 2\varphi\right)\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi a^2}{8}.$$

Відповідь: $S = \dfrac{5\pi a^2}{8}$ (одиниць площі).

3 ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Потрійний інтеграл має вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV. \tag{3.1}$$

Потрійний інтеграл вважається заданим, якщо відомі тіло (V) і неперервна функція $f(x,y,z)$, визначена в кожній точці цього тіла.

Припустимо, що тіло (V) обмежено поверхнями $z = z_1(x,y)$ — знизу і $z = z_2(x,y)$ — зверху (рис. 3.1). Аналогічно, як і для плоскої області σ, визначається правильна тривимірна область (V), а також точки «входу» і «виходу» у цю область. За допомогою площин, паралельним координатним площинам, область (V) можна розбити на правильні області так, що точки входу (виходу) будуть лежати на поверхнях, заданих одним аналітичним виразом.

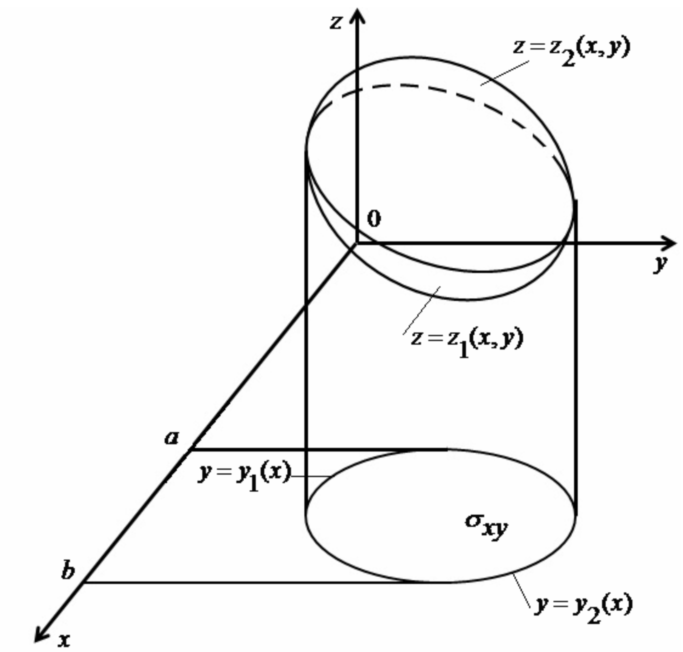

Рисунок 3.1

Тоді можна довести, що значення потрійного інтеграла обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left\{ \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} d\sigma. \qquad (3.2)$$

Для обчислення потрійного інтеграла (2.5) спочатку знаходять внутрішній інтеграл, вважаючи x і y постійними. Межі цього інтеграла визначаються з рівнянь поверхонь, на яких лежать точки входу і виходу в область (V) прямих, що паралельні осі OZ. Потім, за відомими правилами, обчислюють зовнішній подвійний інтеграл.

Розбиваючи області (V) на стовпці, паралельні осі OX або осі OY, одержимо аналогічні формули переходу від потрійного інтеграла до подвійного і визначеного:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_{\sigma_{yz}} dS \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(x,z)} f(x,y,z)dx; \qquad (3.3)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_{\sigma_{xz}} dS \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \qquad (3.4)$$

З формул (3.2) – (3.4) випливає, що при переході від потрійного інтеграла до подвійного і визначеного внутрішній інтеграл береться по тій змінній, яка змінюється на як завгодно тонких стовпцях, на які розбивається область (V). При цьому, межі внутрішнього інтеграла визначаються з рівнянь поверхонь, на яких лежать точки «входу» і «виходу» в область (V) зазначених стовпців. Зовнішній подвійний інтеграл береться по області σ, що є проекцією тіла (V) на координатну площину, перпендикулярну тим же стовпцям. Якщо у формулах (3.2) – (3.4) подвійний інтеграл замінити двократним, то одержимо формули переходу від потрійного інтеграла до трикратного.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл:

$$\mathrm{I} = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz,$$

де (V) – область, обмежена координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і площиною $x+2y+2z=2$.

Розв'язання.

Область (V) – піраміда, обмежена знизу площиною $z=0$, а зверху площиною $z=1-0{,}5x-y$ (рис.3.2).

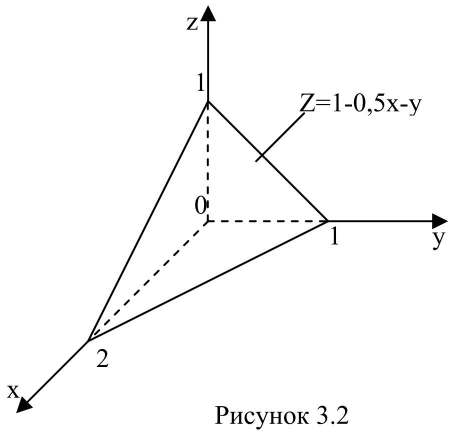

Рисунок 3.2

Тому,

$$I = \iint\limits_{\sigma_{xy}} d\sigma \int\limits_{0}^{1-0,5x-y} (x+y+z)dz = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-\frac{x}{2}-y} \cdot d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left[(x+y)(1-\frac{x}{2}-y) + \frac{1}{2}(1-\frac{x}{2}-y)^2 \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left[(x+y)(1-\frac{x}{2}) - xy - y^2 + \frac{1}{2}(1-\frac{x}{2}-y^2 \right] dxdy.$$

Тут σ_{xy} — проекція області (V) на площину ХОУ (рис.3.3).

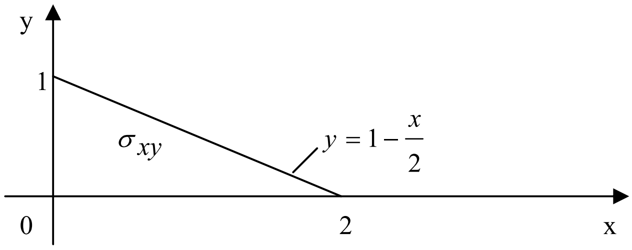

Рисунок 3.3

$$I=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}}\left[(x+y)(1-\frac{x}{2})-xy-y^2+\frac{1}{2}(1-\frac{x}{2}-y)^2\right]dy=$$

$$=\int_0^2\left\{(1-\frac{x}{2})(xy+\frac{y^2}{2})\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}}-x\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}}-\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}(-1)\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{2}-y\right)^3\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}}\right\}dx=$$

$$=\int_0^2\left\{\left(1-\frac{x}{2}\right)\left[x(1-\frac{x}{2})+\frac{1}{2}(1-\frac{x}{2})^2\right]-\frac{x}{2}(1-\frac{x}{2})^2-\frac{1}{3}(1-\frac{x}{2})^3+\frac{1}{6}(1-\frac{x}{2})^3\right\}dx=$$

$$=\int_0^2\left[\frac{x}{2}(1-\frac{x}{2})^2+\frac{1}{3}(1-\frac{x}{2})^3\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x(1-x+\frac{x^2}{4})dx-\frac{1}{3}\cdot 2\int_0^2(1-\frac{x}{2})^3\,d(1-\frac{x}{2})=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2+\frac{x^4}{16}\Bigg|_0^2\right]-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(1-\frac{x}{2})^4\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}(2-\frac{8}{3}+1)-\frac{1}{6}(0-1)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Обчислюємо отриманий подвійний інтеграл:

Відповідь: $I=\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$2x+3y-12=0,\quad z=\frac{1}{4}y^2,\quad z=1,\quad x=0$ (рис.3.4).

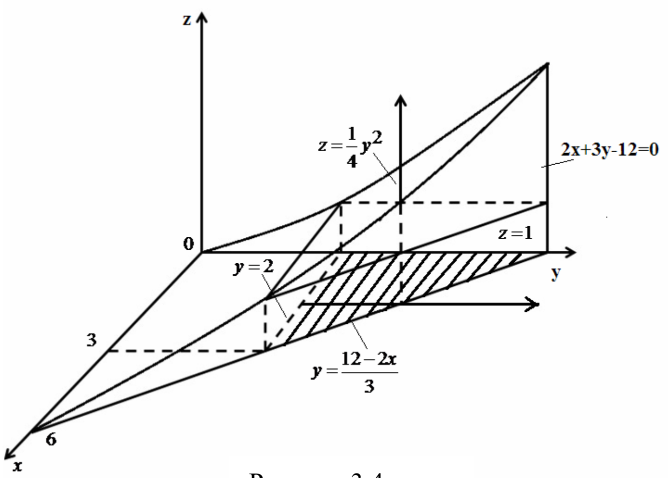

Рисунок 3.4

Розв’язання.

Будуємо тіло (V). Доцільно розбивати його на стовпці, паралельні осі OZ. Знизу тіло обмежене поверхнею $z = 1$, а зверху — $z = \frac{1}{4}y^2$. Проекцією тіла (V) на площину XOY є ΔABC. Рівняння сторони $AB: 2x + 3y - 12 = 0$, а сторони $BC: y = 2$.

Переходимо до обчислення об’єму тіла (V).

$$V = \iiint_V dV = \iint_{\sigma_{xy}} dS \int_1^{\frac{1}{4}y^2} dz = \iint_{\sigma_{xy}} dS \cdot z \Big|_1^{\frac{1}{4}y^2} = \iint_{\sigma_{xy}} \left(\frac{1}{4}y^2 - 1\right) dxdy =$$

$$= \int_0^3 dx \int_2^{\frac{12-2x}{3}} \left(\frac{1}{4}y^2 - 1\right) dy =$$

$$= \int_0^3 dx \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{3} - y\right) \Bigg|_2^{\frac{12-2x}{3}} = \int_0^3 \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{(12-2x)^3}{27} - \frac{12-2x}{3} - \frac{8}{12} + 2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{12\cdot 27} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(12-2x)^4}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(12-2x)^2}{2} + \frac{4}{3}x \right]_0^3 = 2\frac{1}{2}.$$

Відповідь: V=2,5 (одиниць об'єму).

4 ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА У ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Розглянемо обчислення потрійних інтегралів у циліндричних координатах.

Поряд з декартовими координатами положення точки в просторі може бути задано трьома числами

$\rho,\ \varphi,\ z$, де z – апліката точки;

$\rho,\ \varphi$ — полярні координати проекції точки на площину xOy :

($\rho,\ \varphi,\ z$) – циліндричні координати точки (рис 4.1).

Між декартовими і циліндричними координатами легко встановлюється зв'язок, а саме:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{4.1}$$

Область (V) розіб'ємо на часткові області ΔV за допомогою поверхонь $\rho = const,\quad \varphi = const,\quad z = const$, що являють собою відповідно кругові циліндричні поверхні з віссю Oz, напівплощини, що проходять через вісь Oz , і площини, паралельні площині XOY. Часткові області при цьому приймуть вид криволінійних призм (рис.4.2) з об'ємом $\Delta V = \Delta\sigma\Delta z \approx \rho\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z$. Отже, для елемента об'єму одержуємо вираз:

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz . \tag{4.2}$$

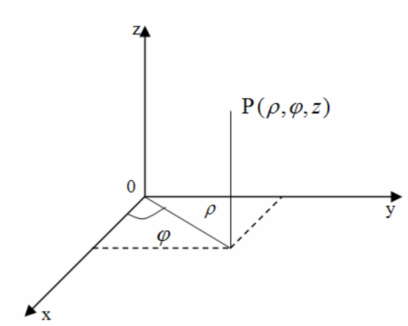

Рисунок 4.1

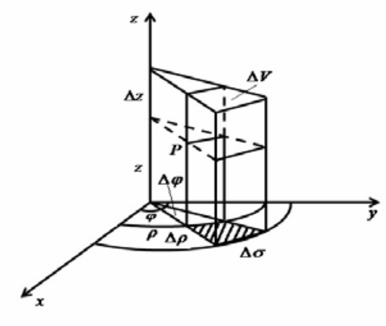

Рисунок 4.2

З урахуванням (4.1) потрійний інтеграл прийме вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (4.3)$$

Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах зводиться до інтегрування по z, ρ і φ на підставі тих же принципів, що й у випадку декартових координат. Крім того, якщо в потрійному інтегралі в декартових координатах внутрішній інтеграл береться по змінній z, а зовнішній подвійний обчислюється в полярних координатах, то ми користуємося фактично циліндричними координатами. Таким чином, алгоритм обчислення потрійних інтегралів у циліндричних координатах відрізняється від алгоритму їхніх обчислень у декартових координатах лише тим, що при знаходженні зовнішнього подвійного інтеграла варто перейти до полярних координат.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл

$$\mathrm{I} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dV,$$

де (V) – область, обмежена площиною z=2 і параболоїдом $x^2 + y^2 = 2z$.

Розв'язання.

Область (V) (рис.4.3) обмежена зверху площиною z=2, а знизу параболоїдом $x^2 + y^2 = 2z$. Ця площина проектується на площину Oxy в область σ_{xy}, обмежену колом $x^2 + y^2 = 4$. Отже,

$$\mathrm{I} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dV = \iint\limits_{\sigma_{xy}} d\sigma \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} \left(x^2 + y^2\right)dz.$$

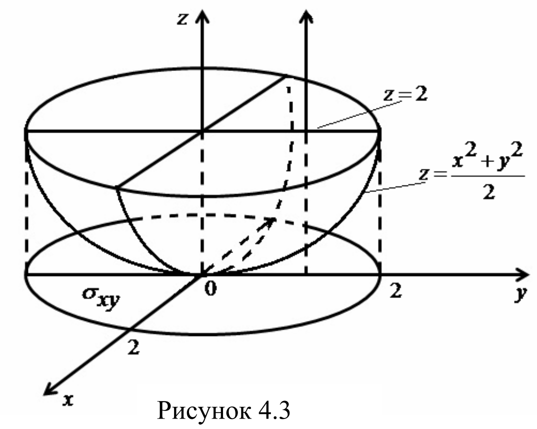

Рисунок 4.3

Інтегруючи по z, одержуємо звичайний подвійний інтеграл, що обчислюємо, переходячи до полярних координат. У результаті маємо:

$$I = \iint\limits_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2) d\sigma z \Big|_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} = \iint\limits_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2)(2 - \frac{x^2 + y^2}{2}) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} \rho^2 (2 - \frac{\rho^2}{2}) \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi (\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12}) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{3} \pi.$$

Відповідь: I = $\frac{16}{3}\pi$.

Приклал 2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 , \ \ x^2 + y^2 = 3z , \ \ z \ge 0 \ \text{(рис.4.4).}$$

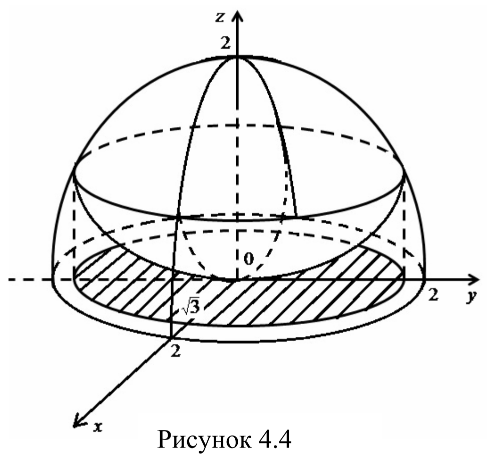

Рисунок 4.4

Розв’язання.

Область (V), обмежена зверху сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, а знизу параболоїдом $x^2 + y^2 = 3z$. Ця область проектується на площину O_{xy} в коло $x^2 + y^2 \le 3$. Записуємо об’єм даного тіла за допомогою потрійного інтеграла в декартових координатах, а потім переходимо до циліндричних (полярних) координат. Одержимо:

$$V = \iiint\limits_{v} dv = \iint\limits_{\sigma_{xy}} d\sigma \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_{\sigma_{xy}} (\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{3}) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} (\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^3}{3}) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(\rho\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right) d\rho = \frac{19}{6}\pi.$$

Відповідь: $V = \frac{19}{6}\pi$ (одиниць об'єму).

5 КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

Криволінійний інтеграл першого роду позначається:

$$\int_L f(x,y)dl \tag{5.1}$$

Інтеграл (5.1) вважається заданим, якщо відома лінія (L) у площині O_{xy} і неперервна функція $f(x,y)$, визначена в кожній точці цієї лінії.

Нехай пласка крива (L) у декартовій системі координат задана рівнянням: $y=\varphi(x)$, $a \le x \le b$ (рис.5.1).

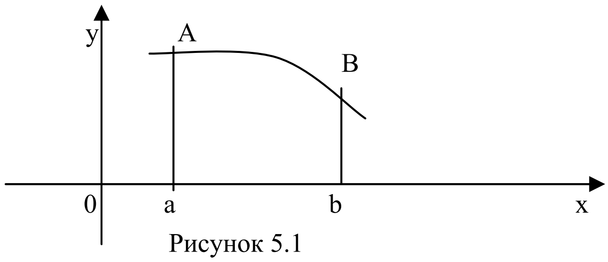

Рисунок 5.1

Щоб обчислення інтеграла (5.1) стало можливим, необхідно виконати над ним тотожні перетворення, у результаті яких підінтегральний вираз містив би тільки одну змінну.

Оскільки підінтегральна функція $f(x,y)$ розглядається тільки в точках лінії (L), то маємо очевидну рівність:

$$f(x,y) = f(x,\varphi(x)). \tag{5.2}$$

Крім того, диференціал довжини дуги, заданої рівнянням, має вигляд:

$$dl = \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx. \tag{5.3}$$

З огляду на (5.2) і (5.3), а також на те, що змінна X на кривій (L) змінюється в межах від a до b, одержимо:

$$\int_{(L)} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx. \tag{5.4}$$

Праворуч у формулі (5.4) стоїть звичайний визначений інтеграл.

Якщо крива (L) задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то, з огляду на те, що в цьому випадку:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \tag{5.5}$$

одержуємо:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (5.6)$$

Якщо крива (L) задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то, з огляду на формули переходу від декартових координат до полярних: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а також враховуючи значення диференціала дуги для цього випадку:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi \qquad (5.7)$$

одержимо:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi, \qquad (5.8)$$

де $\rho = \rho(\varphi)$.

Якщо крива (L) просторова і задана рівнянням:

$$x = x(t)\ ,\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ \alpha \le t \le \beta,$$

то вираз для dl має вигляд:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt \qquad (5.9)$$

тому,

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt. \qquad (5.10)$$

Зведення криволінійного інтеграла до визначеного інтеграла (5.4), (5.6), (5.8), (5.10) за ідеєю дуже наближине до заміни змінної у визначеному інтегралі. При цьому варто враховувати, що при обчисленні криволінійного інтеграла нижня межа повинна бути завжди менше верхньої. Це викликано тим, що завжди $dl>0$. Тоді з (5.3), (5.5), (5.7) і (5.9) випливає необхідність умов: $dx>0$, $dt>0$ і $d\varphi>0$. А це значить, що змінна в отриманому визначеному інтегралі повинна пробігати інтервал своєї зміни убік зростання.

Приклад 1. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди

$$x = a(t-\sin t),\ \ y = a(1-\cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Розв'язання.

$$L = \int_L 1dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin t dt} =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Відповідь: L = 8*a* (одиниць довжини).

Приклад 2. Знайти масу околу $x^2 + y^2 = 2x$, якщо щільність у кожній його точці пропорційна відстані від цієї точки до початку координат.

Розв'язання.

Нехай P(x, y) – довільна точка околу (рис.5.2), тоді його щільність $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, де *k* – коефіцієнт пропорційності.

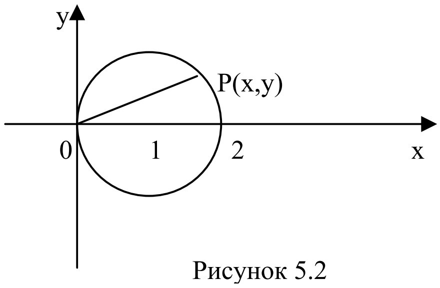

Рисунок 5.2

Маємо: $m_{(L)} = \int_L \delta(x, y)dl = \int_L k\sqrt{x^2 + y^2}\,dl$.

Переходимо до полярних координат. Рівняння даного околу прийме вигляд: $\rho = 2\cos\varphi$.

Отже,

$$m_L = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi d\varphi} = 2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho d\varphi =$$

$$= 2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi d\varphi = 8k.$$

Відповідь: $m_L = 8k$ (одиниць маси).

6 СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА. ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ

Векторним полем називається область простору або площини, кожній точці якої поставлений у відповідність вектор:

$$\overline{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}. \qquad (6.1)$$

Зокрема, якщо поле задане на площині, то

$$\overline{F} = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}. \qquad (6.2)$$

Нехай компоненти вектора $\overline{F}$ — неперервні функції координат. Тоді робота векторного поля (6.2) при переміщенні уздовж кривої L:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

визначається приблизно інтегральною сумою, а її межа називається криволінійним інтегралом другого роду по дузі L:

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i, \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right].$$

Криволінійний інтеграл можна обчислити, зводячи його до визначеного інтеграла, якщо всі змінні і диференціали під знаком інтеграла виразити через одну змінну і її диференціал з рівняння кривої.

Якщо крива задана в параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$ і

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2}\left\{P\left[\varphi(t), \psi(t)\right]\varphi'(t) + Q\left[\varphi(t), \psi(t)\right]\psi'(t)\right\}dt, \qquad (6.3)$$

де t_1 і t_2 — значення параметра, що відповідають початковій і кінцевій точкам руху уздовж кривої.

Якщо лінія задана рівнянням $y = f(x)$, $x_1 \le x \le x_2$, то $dy = f'(x)dx$ і

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2}\left\{P\left[x, f(x)\right] + Q\left[x, f'(x)\right]\right\}dx. \qquad (6.4)$$

Подвійний інтеграл по області σ пов'язаний із криволінійним інтегралом по замкнутій кривій L, що обмежує область σ, за допомогою формули Гріна:

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Передбачається, що контур обходиться в додатньому (проти годинникової стрілки) напрямку.

Якщо вираження $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то криволінійний інтеграл між точками A і B не залежить від форми шляху інтегрування. Необхідною і достатньою умовою цього є:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (6.5)$$

У цьому випадку інтегруванням можна знайти функцію по її повному диференціалу:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (6.6)$$

Приклад 1. Поле утворене силою $\overline{F}=(x+y)\bar{i}+2x\bar{j}$. Обчислити роботу з переміщення одиниці маси по околу $x^2+y^2=a^2$ під дією цієї сили.

Розв’язання.

Використовуючи вираження роботи через криволінійний інтеграл другого роду і записуючи рівняння кола в параметричному вигляді, отримаємо:

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi .$$

З формули (6.3) знаходимо:

$$A=\oint_{L}(x+y)dx+2xdy=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left[(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)+2a\cos t\cdot a\cos t\right]dt=$$

$$=a^2\int_{0}^{2\pi}\left[-\cos t\sin t-\sin^2 t+2\cos^2 t\right]dt=$$

$$= a^2\left[\int\limits_0^{2\pi} \cos t d(\cos t) + \int\limits_0^{2\pi} \cos 2t dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt\right] =$$

$$= a^2\left[\frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\pi - 0) = a^2\pi.$$

Відповідь: $A = a^2\pi$ (одиниць роботи).

Приклад 2. Обчислити роботу з переміщення одиниці маси в полі сили $\overline{F} = \left(x^4 + 4y^3x\right)\bar{i} + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)\bar{j}$ від точки M(-2, -1) до точки N(3, 0).

Розв'язання.

Перевіримо, чи є ця сила потенційною, тобто чи виконується умова (6.5):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12y^2x\,; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2.$$

Умова виконується, значить криволінійний інтеграл, тобто робота сили, не залежить від форми шляху між точками M та N. Виберемо шлях по лініях MT і TN (рис. 6.1), рівнобіжним осям координат.

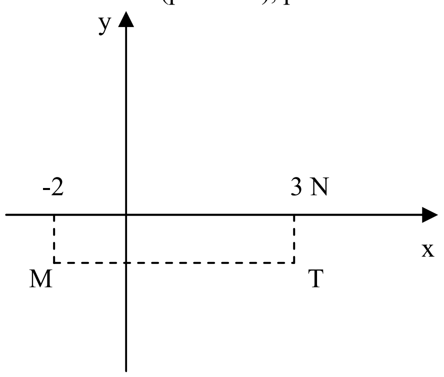

Рисунок 6.1

Лінія MT: y=-1, dy=0
Лінія NT: x=3, dx=0

Малюнок 20.

Тоді

$$A = \int\limits_M^N \left(x^4 + 4y^3 x\right)dx + \int\limits_{-1}^{0}\left(6x^2 y^2 - 5y^4\right)dy = \int\limits_{-2}^{3}\left(x^4 + 4(-1)^3 x\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{0}\left(6 \cdot 3^2 \cdot y^2 - 5y^4\right)dy = \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{3} - 4\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3} + 54\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{0} - 5\frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(243 + 32\right) - 2\left(9 - 4\right) + 18\left(0 + 1\right) - \left(0 + 1\right) = 62.$$

Відповідь: A=62 (одиниць роботи).

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \int\limits_L 2xydx + x^2 dy,$$

узятий по шляху (L), що з'єднує точки O (0,0) і A (1,1), якщо шлях (L): а) пряма $y = x$;

б) кубічна парабола $y = x^3$ (рис.6.2).

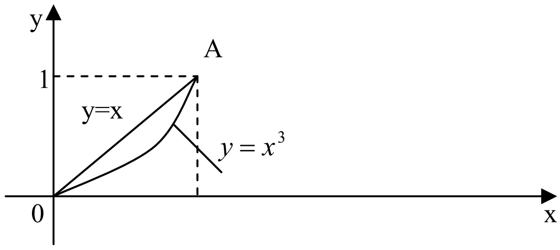

Рисунок 6.2

Розв’язання.

а) через те, що $dy = dx$, отримаємо:

$$I = \int\limits_L 2xydx + x^2 dy = \int\limits_0^1 (2x \cdot x + x^2)dx = \int\limits_0^1 3x^2 dx = 1;$$

б) на кривій $y = x^3$ — $dy = 3x^2 dx$, тоді

$$I = \int\limits_0^1 (2x \cdot x^3 + x^2 3x^2)dx = \int\limits_0^1 5x^4 dx = 1.$$

Відповідь: а) $I = 1$.

б) $I = 1$.

7 ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

Поверхневий інтеграл першого роду позначається:

$$\iint_S f(x, y, z)ds. \qquad (7.1)$$

Інтеграл (7.1) вважається заданим, якщо відомі поверхня (S) у просторі O_{xyz} і неперервна функція $f(x, y, z)$, визначена у кожній точці цієї поверхні.

Припустимо, що поверхня (S) така, що будь-яка пряма, рівнобіжна осі OZ, перетинає її не більш, ніж в одній крапці.

Рівняння цієї поверхні, в якому змінна z виражена через x і y, запишемо у вигляді $z = z(x, y)$.

Для обчислення інтеграла (7.1) його варто перетворити так, щоб підінтегральний вираз містив дві змінні.

Зважаючи, що підінтегральна функція $f(x, y, z)$ розглядається тільки в точках поверхні (S), маємо:

$$f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y)). \qquad (7.2)$$

Перетворимо елемент поверхні *d*.

Нехай (σ_{xy}) — область у площині *OXY*, в яку проектується поверхня (S) (рис.7.1). Розіб'ємо поверхню (S) на часткові площадки ΔS. Проекцією кожної з площадок ΔS на площину *OXY* є часткова область $\Delta\sigma_{xy}$, що належить (σ_{xy}).

Установимо зв'язок між площами елементів ΔS і $\Delta\sigma_{xy}$.

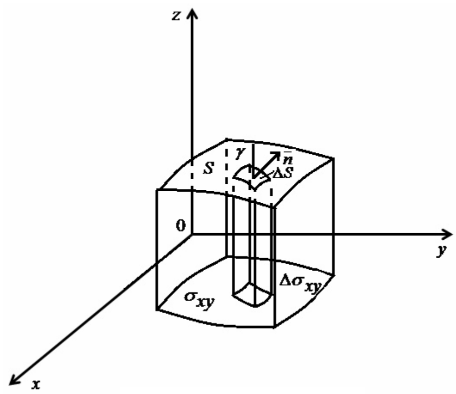

Рисунок 7.1

Проведемо нормаль $\bar{n}$ до площадки ΔS так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz. Будемо вважати, що в межах площадки напрямок нормалі $\bar{n}$ не змінюється. Це значить, що площадка ΔS розглядається як частина площини, дотичної до поверхні в точці проведення нормалі. А тому що площа проекції плаской фігури дорівнює площі проектованої фігури, помноженої на косинус двогранного кута між площинами (кута між нормалями площин), то

$$\Delta\sigma_{xy} = \Delta S\cos\gamma.$$

Як відомо, нормаль до поверхні $z = z(x, y)$ має координати $\bar{n} = \left(-z'_x, -z'_y, +1\right)$. Тому косинус гострого кута між нормаллю $\bar{n}$ і віссю Oz виражається наступним чином:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}},$$

а тому

$$\Delta S = \sqrt{\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}\cdot\Delta\sigma_{xy}.$$

Отже,

$$dS = \sqrt{\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}\cdot d\sigma_{xy}. \tag{7.3}$$

З огляду на (7.2) і (7.3), одержимо:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dg = \iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} \cdot d\sigma_{xy}. \qquad (7.4)$$

Формула (7.4) зводить обчислення поверхневого інтеграла по поверхні (S) до обчислення подвійного інтеграла по пласкій області (σ_{xy}).

Якщо поверхня (S) задана рівнянням $y = y(x,z)$ або $x = x(y,z)$, то, повторюючи міркування, одержимо:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dg = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f(x,y(x,z),z)\sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1} \cdot d\sigma_{xz}. \qquad (7.5)$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dg = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f(x(y,z),y,z)\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1} \cdot d\sigma_{yz}. \qquad (7.6)$$

Приклад 1. Обчислити площу частини поверхні $x^2 + y^2 = z$, вирізаної поверхнями $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 6$ (рис. 7.2).

Розв'язання.

Рівняння поверхні розв'язане відносно змінної z. Проекцією заданої частини поверхні на площину O_{xy} є кільце. У силу симетрії поверхні в першому октанті міститься четверта частина шуканої площі. Тому:

$$S = 4S_1 = 4\iint\limits_{(s_1)} ds = 4\iint\limits_{(\sigma_1)} \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}d\sigma = 4\iint\limits_{(\sigma_1)} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}d\sigma.$$

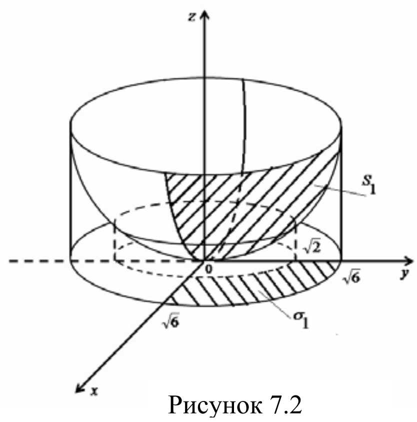

Рисунок 7.2

Переходимо до полярних координат і, інтегруючи, одержимо:

$$S = 4\iint\limits_{(D_1)} \sqrt{4\rho^2 + 1}\rho d\rho d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4\rho^2 + 1}\rho d\rho = \frac{49\pi}{3}.$$

Відповідь: $S = \dfrac{49\pi}{3}$ (одиниць площі).

Визначимо поняття потоку векторного поля (6.1) через поверхню S. При цьому, припустимо, що в кожній точці цієї поверхні визначений одиничний нормальний вектор

$$\overline{n} = \cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k},$$

і направляючі косинуси якого є неперервними функціями координат точки поверхні.

Потоком векторного поля $\overline{F}$ (або потоком вектора $\overline{F}$) через поверхню S називається наступний інтеграл по поверхні:

$$\Pi = \iint\limits_S \overline{F}\overline{n}ds = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds. \qquad (7.7)$$

Обчислення цього інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла за формулами (7.4) – (7.6), де $f(x, y, z) = \overline{F}\overline{n}$.

Зокрема, якщо поверхня S задана рівняннями $z = \varphi(x, y)$ і $\overline{F} = R(x, y, z)\overline{k}$, то

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\cos\gamma ds = \iint\limits_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y))d\sigma. \qquad (7.8)$$

Якщо одинична нормаль з віссю Oz утворить тупий кут $(\cos\gamma < 0)$, то

$$\iint_S R(x,t,z)\cos\gamma dS = -\iint_{\sigma x,z} R(x,y,\varphi(x,e))d\sigma. \qquad (7.9)$$

Якщо рівняння поверхні $S - y = \omega(x,z)$, то

$$\iint_S Q(x,y,z)\cos\beta dS = \iint_{\sigma xz} Q(x,\omega(x,z),z)d\sigma. \qquad (7.10)$$

Нарешті, у випадку, якщо поверхня S задана рівнянням $x = g(y,z)$, то

$$\iint_S P(sx,e,z)\cos\alpha dS = \iint_{\sigma yz} P(g(y,z),y,z)d\sigma. \qquad (7.11)$$

З огляду на формули:

$$dS\cos\alpha = d\sigma_{yz} = dydz\ ,$$

$$dS\cos\beta = d\sigma_{xz} = dxdz\ ,$$

$$dS\cos\gamma = dxdy\ ,$$

потік векторного поля $\overline{F}$ через поверхню S можна переписати у вигляді:

$$\varPi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \quad (7.12)$$

у зв'язку з чим його можна трактувати як інтеграл по координатах і за аналогією з криволінійними інтегралами називати поверхневим інтегралом другого роду.

8 ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСЬКОГО—ГАУСА. ФОРМУЛА СТОКСА

Якщо функції P(x,y,z,), Q(x,y,z,), R(x,y,z) неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в обмеженій замкненій області, що має об’єм V, то має місце формула:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV, \qquad (8.1)$$

де S – границя області (V), причому потік береться по зовнішній стороні цієї поверхні.

Вираз, що стоїть під інтегралом у правій частині формули (8.1), називають дивергенцією векторного поля (6.1) і позначають:

$$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (8.2)$$

Використовуючи поняття дивергенції, формулу Остроградського – Гауса (8.1) можна записати у векторній формі:

$$\iint\limits_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,dS = \iiint\limits_V div\overline{F}\cdot dV. \qquad (8.3)$$

Циркуляцією векторного поля (6.1) по замкненому контуру L називається криволінійний інтеграл:

$$\Phi = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (8.4)$$

Теорема. Якщо функції P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) і їх частинні похідні першого порядку неперервні на поверхні S, що обмежена замкненим контуром L, то має місце формула:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \\ + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \end{bmatrix} dS. \qquad (8.5)$$

Формула (8.5) називається формулою Стокса.

Вектор

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} = rot\overline{F} \qquad (8.6)$$

називається ротором (або вихром) векторного поля.

Іноді записують цей вираз у вигляді наступного символічного визначника:

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (8.7)$$

Приклад 1. Дано векторне поле $\overline{F} = (x+y)\overline{k}$ і площина $p:\ x+y+z=1$, що разом з координатними площинами утворюють піраміду V. Нехай σ — основа піраміди, що належить площині (P); λ — контур, що обмежує σ; $\overline{n}$ — нормаль до σ, спрямована поза пірамідою V (рис.8.1).

Потрібно обчислити:

1. Потік векторного поля $\overline{F}$ через поверхню σ в напрямку нормалі $\overline{n}$;

2. Циркуляцію векторного поля $\overline{F}$ по замкненому контору λ й обмеженої їм поверхні σ з нормаллю $\overline{n}$;

3. Потік векторного поля $\overline{F}$ через повну поверхню піраміди V у напрямку зовнішньої нормалі до її поверхні – безпосередньо і застосувавши теорему Остроградського. Зробити креслення.

Розв'язання.

Будуємо по трьом точкам площину (Р). З рівняння площини знаходимо:

при $x = y = 0 \quad z = 1$;

при $x = z = 0 \quad y = 1$;

при $y = z = 0 \quad z = 1$.

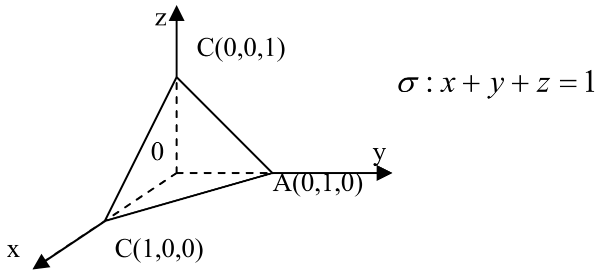

Рисунок 8.1

1. Потік векторного поля через поверхню (рис.8.2)

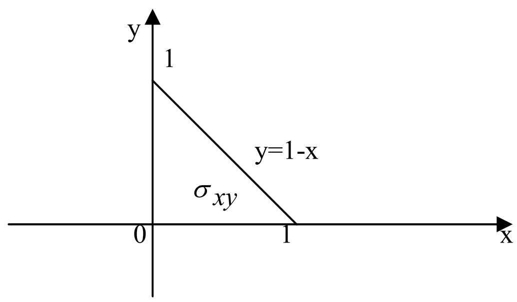

Рисунок 8.2

$$\Pi_{\sigma} = \overline{F}\cdot\overline{n}dS = \iint_{\omega}(x+y)\cos\gamma dS = \iint_{\sigma}(x+y)dxde = \iint_{\sigma xy}(x+y)d\sigma_{xy} =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy = \int_0^1 dx(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x}\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[\cancel{x}-x+\frac{1}{2}-\cancel{x}+\frac{x^2}{2}\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2. Циркуляція векторного поля $\overline{F}$ по замкненому контуру λ.

а) Безпосередньо.

$$\Phi = \oint\overline{F}\cdot d\overline{r} = \oint(x+y)dz = \int_{BA}(x+y)dz + \int_{AC}(x+y)dz + \int_{CB}(x+y)dz.$$

На прямій ВА $dz = 0$

$$\int_{BA}(x+y)dz = 0.$$

Пряма АС описується рівняннями:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0 \end{cases}.$$

Отже, на прямій $AC: X = 0$; $y = 1 - Z$, тому

$$\int_{AC}(x+y)dz = \int_0^1(0+1-z)dz = z\Big|_0^1 - \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пряма СВ описується рівняннями:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0 \end{cases}$$

тому на цій прямій $y = 0$; $x = 1 - z$, тобто

$$\int_{CB}(x+y)dz = \int_0^1(1-z+0)dz = -\int_0^1(1-z)dz = -\frac{1}{2}.$$

Остаточно:

$$\Phi = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (одиниця циркуляції)}.$$

б) За допомогою формули Стокса.

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x+y \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot 1 - \bar{j} \cdot 1 + 0 \cdot \bar{k}$$

$$rot\overline{F} = \bar{i} - \bar{j}$$

$$\Phi = \iint_{\sigma} rot\overline{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_{\sigma} dydz - dxdz = \Pi\Lambda\sigma_{yz} - \Pi\Lambda\sigma_{xz} .$$

Як видно з рис. 8.3, 8.4 площі проекцій σ_{yz} і σ_{xz} рівні площі

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

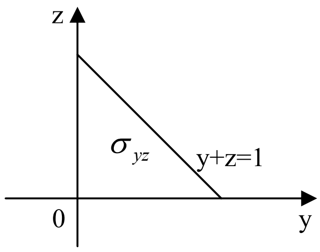

Рисунок 8.3

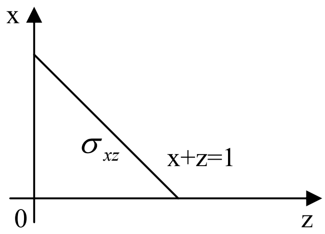

Рисунок 8.4

Отже,

$$\Phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (одиниць циркуляції)}.$$

3. Потік векторного поля $\overline{F}$ через повну поверхню піраміди.

а) Безпосередньо.

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F} \cdot \bar{n} dS + \iint_{\sigma_{yz}} \overline{F} \cdot \bar{n} dS + \iint_{\sigma_{xz}} \overline{F} \cdot \bar{n} dS + \iint_{\sigma_{xy}} \overline{F} \cdot \bar{n} dS$$

$$\iint_{\sigma} \overline{F} \cdot \bar{n} dS = \Pi_{\sigma} = \frac{1}{3} \text{ (див. п 1)}$$

$$\iint_{\sigma_{xy}} \overline{F}\cdot\overline{n}dS = -\iint_{\sigma_{xy}} \left(x+y\right)dxdy = -\iint_{\sigma_{xy}} \left(x+y\right)d\sigma dy = -\Pi_{\sigma} = -\frac{1}{3}$$

(див. п 1)

$\iint_{\sigma_{yz}} \overline{F}\cdot\overline{n}dS = \iint_{\sigma_{xz}} \overline{F}\cdot\overline{n}dS = 0$, тому що на площині σ_{yz} і σ_{xz} вектори $\overline{F}$ і $\overline{n}$ ортогональні, тобто $\overline{F}\cdot\overline{n} = 0$.

Таким чином, $\Pi = \frac{1}{3} + 0 + 0 - \frac{1}{3} = 0$ (одиниць потоку).

б) За допомогою формули Остроградського – Гауса.

$$div\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(0\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x+y\right) = 0.$$

Таким чином, $\Pi = \iiint_{V} dsv\overline{F}dV = 0$ (одиниць потоку).

Результати збігаються.

Відповідь:

1. $\Pi_{\sigma} = \frac{1}{3}$ (од. потоку);
2. $\Phi = 0$ (од. циркуляції);
3. $\Pi = 0$ (од. потоку).

Векторне поле $\overline{F}$, у кожній точці якого $div\overline{F} = 0$, називається соленоїдальним.

Векторне поле $\overline{F}$ називається безвихровим, якщо у всіх його точках $rot\overline{F} = 0$.

Безвихрове поле є полем градієнта деякої функції.

$$\overline{F} = gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}.$$

9 ПОТЕНЦІАЛ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Функція $V = U(x, e, z)$, градієнт якої дорівнює вектору $\overline{F}$, називається потенціалом поля $\overline{F}$.

Таким чином, кожне безвихрове поле є потенційним, і навпаки.

При знаходженні потенціалу:

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz \qquad (9.1)$$

можна взяти будь-яку лінію, що з'єднує точки (x_0, y_0, z_0) і (x, y, z), тому що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Для того, щоб не змішувати координати точки (x, y, z) зі змінними інтегрування, позначимо останні буквами ξ, η, ζ. Тоді

$$U(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x,y,z)} P(\xi, \eta, \zeta)d\xi + Q(\xi, \eta, \zeta) + R(\xi, \eta, \zeta)d\zeta. \quad (9.2)$$

Для зручності обчислень доцільно в якості шляху інтегрування взяти ламану OABC зі сторонами OA, AB і BC, відповідно паралельними координатним осям.

Приклад 1. Переконатися, що поле

$\overline{F} = 2xy^3 z\bar{i} + 3x^2 y^2 z\bar{j} + x^2 y^3 \bar{k}$ є потенційним, і знайти його потенціал.

Розв'язання.

Знаходимо ротор даного векторного поля :

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3 z & 3x^2 y^2 z & x^2 y^3 \end{vmatrix} = \left(3x^2 y^2 - 3x^2 y^2\right)\bar{i} + \left(2xy^3 - 2xy^3\right) +$$

$$+ \left(6xy^2 z - 6xy^2 z\right)\bar{k}$$

$$rot\overline{F} = 0 .$$

Отже, дане поле є потенційним.

За формулою (9.2) одержимо:

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} 2\xi\eta^3 \zeta d\xi + 3\xi^2 \eta^2 \zeta d\eta + \xi^2 \eta^3 d\zeta .$$

Нехай початкова точка збігається з початком координат $\left(x_0 = y_0 = z_0 = 0\right)$. В якості шляху інтегрування візьмемо ламану OABC із ланками, відповідно паралельними осям координат (рис.9.1).

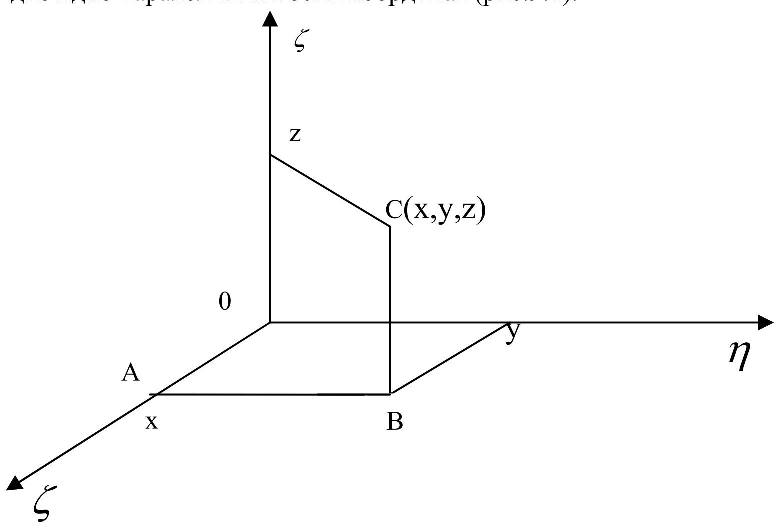

Рисунок 9.1

Тоді:

$$U\left(x, y, z\right) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BC} \qquad (9.3)$$

На відрізку $OA : \eta = \zeta = 0$, $d\eta = d\zeta = 0$, тому

$$\int_{OA} 2\xi\eta^{30} d\xi + 3\xi^2\eta^2\zeta d\eta + \xi^2\eta^3 d = \int_0^x 2\xi \cdot 0^3 \cdot 0 d\xi = 0 .$$

На відрізку $AB : \xi = x$, $\zeta = 0$, $d\xi = d\zeta = 0$.

Отже,

$$\int_{AB} = \int_0^y 3x^2\eta^2 0 d\eta = 0 .$$

На відрізку $BC : \xi = x$, $\eta = 0$, $d\xi = d\eta = 0$, тому:

$$\int_{BC} = \int_0^z x^2 y^3 d\zeta = x^2 y^3 \zeta \Big|_0^z = x^2 y^3 z .$$

Отже, $U\left(x, y, z\right) = x^2 y^3 z + C$, де C – будь-яке число.

10 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Розв'язати відповідно до шифру п'ять завдань. Дані для вибору конкретних номерів узяти з таблиці, наведеної нижче.

Обирати номери завдань необхідно у відповідності з номером залікової книжки. Для цього кожній з трьох останніх цифр номеру залікової книжки потрібно поставити у відповідність три перші букви українського алфавіту. Далі з кожного стовпчика таблиці 10.1 обрати номер завдання у відповідності із буквою, що знаходиться в останньому рядку.

Наприклад, якщо останні цифри залікової книжки студента 025, то він виконує наступні завдання: №1, 15, 23, 36, 48.

0	2	5
А	Б	В

Таблиця 10.1.

Номер рядка	Контрольні завдання				
	1	2	3	4	5
1	10	19	21	34	50
2	8	15	29	35	49
3	6	11	22	39	48
4	4	18	28	32	47
5	2	14	23	36	46
6	9	20	27	40	45
7	7	17	24	33	44
8	5	13	30	37	43
9	3	16	25	31	42
0	1	12	26	38	41
	А	$\lvert Б - А \rvert$	$\lvert В - А \rvert$	В	$\lvert Б - В \rvert$

Завдання

1-10. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла у полярних координатах площу фігури, що обмежена кривою, яка задана рівнянням у полярних координатах (a>0).

1. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2 x^2 y^2$.

2. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2(4x^2+y^2)$.

3. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2(4x^2+3y^2)$.

4. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2(3x^2+2y^2)$.

5. $x^4=a^2(3x^2-y^2)$.

6. $x^6=a^2(x^4-y^4)$.

7. $x^4=a^2(x^2-3y^2)$.

8. $y^6=a^2(y^4-x^4)$.

9. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(2x^2+3y^2\right)$.

10. $y^6=a^2\left(x^2+y^2\right)\left(3y^2-x^2\right)$.

11-20. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, що обмежене заданими поверхнями. Зробити креслення даного тіла і його проекції на площину xOy.

11. $z=0, \mathrm{z}=\mathrm{x}, \mathrm{y}=0, \mathrm{y}=4, \mathrm{x}=\sqrt{25-\mathrm{y}^2}$.

12. $z=0, \mathrm{z}=9-\mathrm{y}^2, \mathrm{x}^2+y^2=9$.

13. $z=0, \mathrm{z}=\mathrm{y}^2, \mathrm{x}^2+y^2=9$.

14. $z=0, \mathrm{z}=4-\mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{x}^2+y^2=4$.

15. $z=0, \mathrm{y}+\mathrm{z}=2, \mathrm{x}^2+y^2=4$.

16. $z=0, 4\mathrm{z}=\mathrm{y}^2, 2\mathrm{x}-\mathrm{y}=0, \mathrm{x}+\mathrm{y}=9$.

17. $z=0, \mathrm{x}^2+y^2=z, \mathrm{x}^2+y^2=4$.

18. $z=0, \mathrm{z}=1-\mathrm{y}^2, \mathrm{x}=\mathrm{y}^2, \mathrm{x}=2\mathrm{y}^2+1$.

19. $z=0, \mathrm{z}=1-\mathrm{x}^2, \mathrm{y}=0, \mathrm{y}=3-\mathrm{x}$.

20. $z=0, \mathrm{z}=4\sqrt{\mathrm{y}}, \mathrm{x}=0, \mathrm{x}+\mathrm{y}=4$.

21. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L \left(x^2 - y\right)dx - \left(x - y^2\right)dy$$

уздовж дуги L околу x=5cost, y=5sint, обходячи її проти годинникової стрілки від точки A(5;0) до точки B(0;5). Зробити креслення.

22. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L \left(x + y\right)dx - \left(x - y\right)dy$$

уздовж ламаної L=OAB, де O(0;0), A(2;0), B(4;5). Зробити креслення.

23. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

уздовж границі L трикутника ABC, обходячи її проти годинникової стрілки, якщо A(1;0), B(1;1), C(0;1). Зробити креслення.

24. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$$

уздовж дуги L параболи $y = x^2$ від точки A(-1;1) до точки B(1;1). Зробити креслення.

25. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L \left(x^2 y - 3x\right)dx + \left(y^2 x + 2y\right)dy$$

уздовж верхньої половини L еліпса x=3cost, y=2sint ($0 \le t \le \pi$). Зробити креслення.

26. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx - \left(y^2 - x\right)dy$$

уздовж ламаної L=ABC, де A(1;2), B(1;5), C(3;5). Зробити креслення.

27. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L ydx + \frac{x}{y}dy$$

уздовж дуги L кривої $y = e^{-x}$ від точки A(0;1) до точки B(-1;e). Зробити креслення.

28. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L \frac{y^2+1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

уздовж відрізка L=AB прямої від точки A(1;2) до точки B(2;4). Зробити креслення.

29. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L \left(xy - x^2\right) dx + xdy$$

уздовж дуги L параболи $y = 2x^2$ від точки O(0;0) до точки A(1;2). Зробити креслення.

30. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L \frac{y}{x} dx + xdy$$

уздовж дуги L кривої y=lnx від точки A(1;0) до точки B(e;1). Зробити креслення.

31-40. Дано векторне поле $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ і площина p: Ax+By+Cz+D=0, яка спільно з координатними площинами утворює піраміду V. Нехай σ — основа піраміди, що належить площині (p); λ — контур, що обмежує σ; n – нормаль до σ, що спрямована поза пірамідою V.

Потрібно обчислити:

1) потік векторного поля F через поверхню σ у напрямку нормалі n;
2) циркуляцію векторного поля F по замкнутому контуру λ безпосередньо і застосувавши теорему Стокса до контура λ і поверхні σ з нормаллю n, що обмежена ним;
3) потік векторного поля F через повну поверхню піраміди V у напрямку зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо і застосувавши теорему Остроградського. Зробити креслення.

31. $\overline{F} = (x + z)\overline{i}$; x + y + z - 2 = 0 .

32. $\overline{F}=(y-x+z)\overline{j}$; $2x-y+2z-2=0$.

33. $\overline{F}=(x+7z)\overline{k}$; $2x+y+z-4=0$.

34. $\overline{F}=(x+2y-z)\overline{i}$; $-x+2y+2z-4=0$.

35. $\overline{F}=(2x+3y-3z)\overline{j}$; $2x-3y+2z-6=0$.

36. $\overline{F}=(2x+4y+3z)\overline{k}$; $3x+2y+3z-6=0$.

37. $\overline{F}=(x-y+z)\overline{i}$; $-x+2y+z-4=0$.

38. $\overline{F}=(3x+4y+2z)\overline{j}$; $x+y+2z-4=0$.

39. $\overline{F}=(5x+2y+3z)\overline{k}$; $x+y+3z-3=0$.

40. $\overline{F}=(x-3y+6z)\overline{i}$; $-x+y+2z-4=0$.

41-50. Перевірити, чи є поле $\overline{F}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ потенціальним і соленоїдальним. У випадку потенціальності поля F знайти його потенціал.

41. $\overline{F}=(6x+7yz)\overline{i}+(6y+7xz)\overline{j}+(6z+7xy)\overline{k}$.

42. $\overline{F}=(8x-5yz)\overline{i}+(8y-5xz)\overline{j}+(8z-5xy)\overline{k}$.

43. $\overline{F}=(10x-3yz)\overline{i}+(10y-3xz)\overline{j}+(10z-3xy)\overline{k}$.

44. $\overline{F}=(12x+yz)\overline{i}+(12y+xz)\overline{j}+(12z+xy)\overline{k}$.

45. $\overline{F}=(4x-7yz)\overline{i}+(4y-7xz)\overline{j}+(4z-7xy)\overline{k}$.

46. $\overline{F}=(x+2yz)\overline{i}+(y+2xz)\overline{j}+(z+2xy)\overline{k}$.

47. $\overline{F}=(5x+4yz)\overline{i}+(5y+4xz)\overline{j}+(5z+4xy)\overline{k}$.

48. $\overline{F}=(7x-2yz)\overline{i}+(7y-2xz)\overline{j}+(7z-2xy)\overline{k}$.

49. $\overline{F}=(3x-yz)\overline{i}+(3y-xz)\overline{j}+(3z-xy)\overline{k}$.

50. $\overline{F}=(9x+yz)\overline{i}+(9y+xz)\overline{j}+(9z+xy)\overline{k}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Арутюнов Ю.С. Высшая математика; под ред. Ю.С. Арутюнова./ Ю.С. Арутюнов, А.П. Полозков., Д.П. Полозков. – М.: Высш. шк., 1985. – 144 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: АСК., 2001. – 480 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т./ Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. Т.2. – 575с.
4. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного/ Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу/ Г.И. Запорожец. – М.: Высш. шк., 1964. – 479 с.