ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика є основою багатьох теоретичних і прикладних наук, тому володіння математичним апаратом необхідне студентам вищих технічних навчальних закладів для успішного вивчення багатьох дисциплін (теоретичної механіки, опору матеріалів і т.д.), для засвоєння спеціальних курсів і подальшої професійної діяльності.

Представлені до Вашої уваги методичні вказівки створено з метою допомогти студентам в усвідомленні та застосуванні теоретичних фактів з векторної та лінійної алгебри, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціального числення функції однієї змінної в умовах модульно-рейтингової системи навчання і оцінювання знань.

У даний навчальний посібник включено приклади розв'язання типових задач, а також матеріали для підготовки до модульної контрольної роботи: практичні завдання і теоретичні запитання, тому він може використовуватися студентами у самостійній роботі з вищої математики, підготовці до модульної контрольної роботи.

Бажаємо успіхів!

МОДУЛЬ 1

1.1 Приклади розв’язування типових задач

Задача №1. Дана система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \tag{1.1}$$

Довести її сумісність і розв'язати трьома способами:

1) методом Гаусса;
2) методом Крамера;
3) методом оберненої матриці.

Розв'язання. Для доведення сумісності системи лінійних рівнянь (1.1) використовуємо теорему Кронекера-Капеллі: *для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці системи А (матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих) дорівнював рангу її розширеної матриці С (матриця, отримана з основної матриці системи додаванням стовпчика вільних членів). При цьому, якщо ранг матриці дорівнює числу невідомих, то система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок, а якщо менше, то система має безліч розв’язків.*

Складемо розширену матрицю системи лінійних рівнянь (1.1) і приведемо її до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Тут ми послідовно зробили наступні перетворення:

1. $c_1 \leftrightarrow c_3$;
2. $c_2 := c_2 - 3c_1$, $c_3 := c_3 - 2c_1$;
3. $c_3 := 5c_3 - 3c_2$.

Отже, східчаста матриця системи (1.1) має вигляд:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right). \tag{1.2}$$

На підставі (1.2) можемо зробити висновок, що ранг матриці системи (1.1) дорівнює 3 (вона має три ненульових рядка), ранг її розширеної матриці також дорівнює 3 ($r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$). За теоремою Кронекера-Капеллі система рівнянь (1.1) є сумісною і має єдиний розв’язок.

Розв`яжемо систему лінійних рівняння за допомогою метода Гаусса. Від матриці (1.2) перейдемо до системи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \quad 5x_2 - 8x_3 = -14, \\ \qquad -x_3 = -3, \end{cases} \tag{1.3}$$

яка рівносильна системі (1.1).

Із системи (1.3) послідовно знаходимо:

$$x_1 = 1; \ \ x_2 = 2; \ \ x_3 = 3.$$

Для перевірки підставимо отримані значення невідомих в (1.1):

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1, \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1, \\ 1 - 2 + 2 \cdot 3 = 5. \end{cases}$$

Отримали вірні рівності. Отже, отримані значення невідомих задовольняють системі (1.1).

2) Знайдемо розв'язок системи (1.1) за формулами Крамера. Визначники обчислимо за правилом трикутників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 -$$

$$-(-2) \cdot (-1) \cdot 2 = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-(-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 -$$

$$-(-2) \cdot 5 \cdot 2 = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 5 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 2 = 3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$$

3) Знайдемо розв'язок системи (1.1) засобами матричного числення за формулою

$$X = A^{-1}B, \qquad (1.4)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю A^{-1} до основної матриці A знайдемо за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{21} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

де $|A|$ – визначник (детермінант) матриці A;

A_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ – алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Алгебраїчні доповнення A_{ij} обчислимо за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}, \qquad (1.6)$$

де M_{ij} – мінори елементів a_{ij} матриці A.

Використовуючи формулу (1.6), знаходимо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{33}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Підставимо отримані значення для $|A|$ й A_{ij} у формулу (1.5), одержимо:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -8 & 5 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Із формули (1.4) отримаємо:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -8 & 5 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1-1\cdot 1+0\cdot 5\\ -8\cdot 1+5\cdot 1+1\cdot 5\\ -5\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

З отриманого матричного рівняння випливає:

$$x_1=1;\ \ x_2=2;\ \ x_3=3.$$

Відповідь: Задана система лінійних рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$.

Задача №2. Дані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;-1;1)$; $A_2(5;5;4)$; $A_3(3;2;-1)$; $A_4(4;1;2)$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$;

4) площу грані $A_1A_2A_3$;

5) об'єм піраміди;

6) рівняння прямої A_1A_2;

7) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

8) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Зробити схематичне креслення (рис. 1.1).

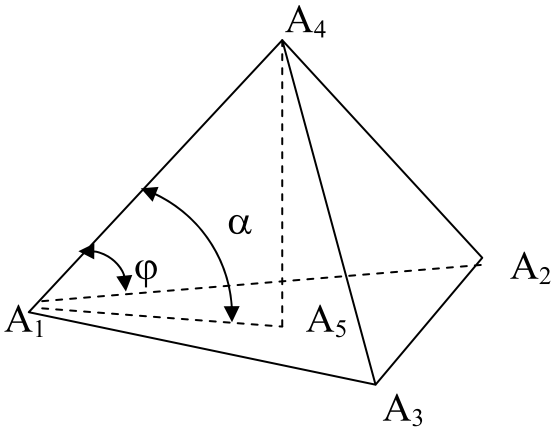

Рисунок 1.1 – Піраміда

1) Визначимо довжину ребра A_1A_2.

Розв'язання. Довжина ребра A_1A_2 дорівнює довжині вектора $\overline{A_1A_2}$, координати й довжину якого визначимо за формулами:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}, \tag{1.7}$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.8}$$

Підставивши у формули (1.7), (1.8) координати точок A_1 і A_2, одержимо:

$$A_1A_2 = \{3;6;3\}, \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}.$$

Відповідь: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = 3\sqrt{6}$ (лін.од).

2) Визначимо кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

Розв'язання. Кут між ребрами дорівнює куту між векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$. Кут φ між векторами визначимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}. \tag{1.9}$$

Координати і довжину вектора $\overline{A_1A_4}$ обчислимо за формулами (1.7), (1.8).

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{4-2; 1+1; 2-1\}, \text{ звідки } \overrightarrow{A_1A_4} = \{2; 2; 1\},$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}, \text{ звідки } \overrightarrow{A_1A_4} = 3 \text{ (лін.од).}$$

Скалярний добуток визначається формулою:

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.10}$$

Використовуючи формулу (1.10), отримаємо:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right) = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 21.$$

Підставивши отримані значення для у $\left|\overline{A_1A_2}\right|, \left|\overline{A_1A_4}\right|, \left(\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}\right)$ формулу (1.9), одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{21}{3 \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{7}{3\sqrt{6}} = 0{,}9525, \text{ звідки } \varphi \approx 17,\ 71^{\circ}.$$

Відповідь: Кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 $\varphi \approx 17,\ 71^{\circ}$.

3) Визначимо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Кут α між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ знайдемо за формулою:

$$\sin\alpha = \frac{\left(\vec{\ell} \cdot \vec{N}\right)}{\left|\vec{\ell}\right| \cdot \left|\vec{N}\right|}, \qquad (1.11)$$

де $\vec{\ell}$ - напрямний вектор прямої A_1A_2; $\vec{N}$ – нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$.

Візьмемо вектор $\overline{A_1A_4}$ у якості напрямного вектора $\vec{\ell}$ прямої A_1A_4, а вектор нормалі $\vec{N}$ площини $A_1A_2A_3$ знайдемо за формулою

$$\vec{\mathrm{N}} = \overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}$ визначимо за формулою (1.7):

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}} = \{3-2; 2+1; \text{-}1\text{-}1\},$$

звідки $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}} = \{1;3;-2\}$.

Векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Застосовуємо формулу (1.12):

$$\vec{\mathrm{N}} = \overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\left(3 \cdot 3 - (-2) \cdot 6\right) - \bar{j}\left(1 \cdot 3 - (-2) \cdot 3\right) + \bar{k}\left(1 \cdot 6 - 3 \cdot 3\right) =$$

$$= 21\bar{i} - 9\bar{j} - 3\bar{k}.$$

Довжину вектора $\vec{\mathrm{N}} = \overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2} = \{21;-9;-3\}$ визначимо за формулою (1.8):

$$\left|\vec{\mathrm{N}}\right| = \sqrt{(21)^2 + (-9)^2 + (-3)^2}, \text{ звідки } \left|\vec{\mathrm{N}}\right| = \sqrt{531} \text{ (лін.од.).}$$

Скалярний добуток $(\vec{l} \cdot \vec{N})$ обчислимо за формулою (1.10):

$$(\bar{\ell} \cdot \vec{\mathrm{N}}) = 2 \cdot 21 + 2 \cdot (-9) + 1 \cdot (-3), \text{ звідки } (\vec{l} \cdot \vec{N}) = 21.$$

Підставимо отримані значення для $(\bar{\ell} \cdot \bar{N})$, $\left|\vec{l}\right| = \left|\overrightarrow{A_1 A_4}\right|$, $\left|\vec{N}\right|$ у формулу (1.11):

$$\sin\alpha = \frac{21}{3 \cdot \sqrt{531}} = \frac{7}{\sqrt{531}} \approx 0{,}3037, \text{ звідки } \alpha \approx 17{,}68°.$$

Відповідь: Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ — $\alpha \approx 17{,}68°$.

4) Визначимо площу грані $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо за допомогою формули

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2}\right) \text{ (кв.од.).} \qquad (1.13)$$

Враховуючи, що $\left|\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2}\right| = \left|\vec{N}\right| = \sqrt{531}$ (див. попередню задачу), та, використовуючи формулу (1.13), отримаємо:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{531} \text{ (кв.од.).}$$

Відповідь: Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює $\dfrac{\sqrt{531}}{2}$ (кв.од).

5) Визначимо об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання. Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ як на ребрах, визначимо за допомогою мішаного добутку цих векторів з точністю до знака:

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right) =$$

$$= \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (1.14)$$

Підставимо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ у формулу (1.14):

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(3 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 6 -$$

$$- 2 \cdot 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 6) = \pm\frac{1}{6}(-21).$$

Оскільки визначник дорівнює від`ємному числу, у даному випадку перед формулою потрібно взяти знак мінус. Отже,

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \text{ (куб.од).}$$

Відповідь: Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює 3,5 (куб.од).

6) Складемо рівняння прямої A_1A_2.

Розв'язання. Використовуємо рівняння прямої, що проходить через точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (1.15)$$

Підставимо у формулу (1.15) координати точок A_1 і A_2, одержимо:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-(-1)}{5-(-1)}=\frac{z-1}{4-1},$$

звідки

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{3}.$$

Помноживши останнє рівняння на 3, одержимо канонічне рівняння прямої A_1A_2:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

Відповідь: рівняння прямої A_1A_2: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

7) Складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Використовуємо рівняння площини, що проходить через три дані точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ і $A_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1.16)$$

Рівняння площини, що проходить через точки $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$, відповідно до формули (1.10), запишеться наступним чином:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 5-2 & 5+1 & 4-1 \\ 3-2 & 2+1 & -1-1 \end{vmatrix}=0$$

або

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Розклавши останній визначник за елементами першого рядка, одержимо:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$-21x + 9y + 3z + 48 = 0.$$

Відповідь: рівняння площини $A_1A_2A_3$: $-7x + 3y + z + 16 = 0$.

8) Складемо рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Для складання рівняння висоти A_4A_5, яка проходить через точку $A_4(x_4, y_4, z_4)$ перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$ використовуємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_4}{m} = \frac{y-y_4}{n} = \frac{z-z_4}{p}, \qquad (1.17)$$

де *m, n, p* — координатори напрямного вектора цієї прямої.

У якості напрямного вектора висоти A_4A_5 оберемо нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$:

$$\vec{N} = \left[\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2}\right] = \{21; -9; -3\},$$

який перпендикулярний до площини $A_1A_2A_3$, тобто колінеарний до прямої A_4A_5.

Підставимо у рівняння (1.11) координати точки $A_4(4;1;2)$ і замість *m, n, p* – координати вектора $\vec{N} = \{21; -9; -3\}$, одержимо:

$$\frac{x-4}{21} = \frac{y-1}{-9} = \frac{z-2}{-3}.$$

Звідси одержимо канонічне рівняння висоти A_4A_5:

$$\frac{x-4}{7} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-1}.$$

Відповідь: рівняння висоти A_4A_5 — $\dfrac{x-4}{7} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Задача №3. Дано три вершини $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(7;11)$ трикутника. Знайти рівняння і довжини його медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини A. Зробити креслення.

Побудуємо трикутник (рис. 1.2).

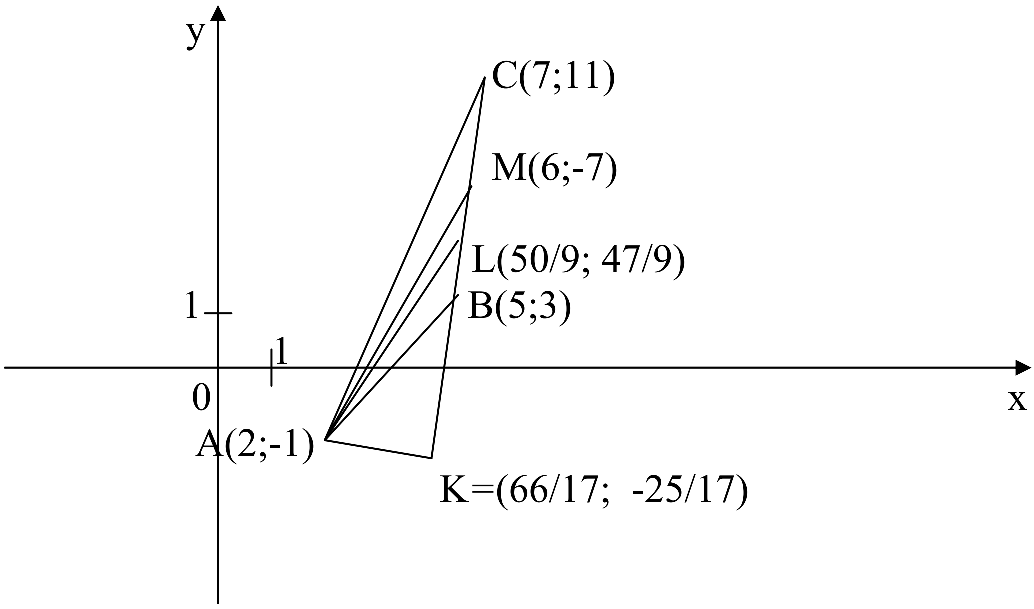

Рисунок 1.2 – Трикутник

Розв'язання.

1) Нехай точка M є серединою сторони BC. Координати точки M визначимо за формулами поділу відрізка у даному відношенні:

$$x_M = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda}. \tag{1.18}$$

Точка M є серединою відрізка BC, тому $\lambda = 1$. Формули (1.18) приймуть вигляд:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}. \tag{1.19}$$

Підставивши у формули (1.19) координати точок $B(5;3)$ і $C(7;11)$, одержимо:

$$x_M = \frac{5+7}{2} = 6; \quad y_M = \frac{3+11}{2} = 7, \; M\,(6;\,7).$$

Рівняння медіани AM одержимо за формулою (1.15):

$$\frac{y+1}{7+1} = \frac{x-2}{6-2},$$

отже, $2x\text{-}y\text{-}5=0$.

Довжина медіани — відстань між точками A і M, яку знаходимо за формулою (1.8):

$$|AM| = \sqrt{(6-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Відповідь: рівняння медіани AM : $2x\text{-}y\text{-}5=0$;
довжина медіани $|AM| = 4\sqrt{5}$.

2) Щоб знайти рівняння висоти AK, складемо рівняння сторони BC за формулою (1.15):

$$\frac{y-3}{11-3} = \frac{x-5}{7-5}, \text{ тобто } y - 3 = 4\,(x - 5)$$

або $4x - y - 17=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї сторони K_{BC} = 4. Через те що $BC \perp AK$, кутові коефіцієнти цих прямих зв'язані рівністю:

$$K_{AK} = -K_{BC}^{-1}.$$

З формули (1.19) випливає, що $K_{AK} = -\frac{1}{4}$. Рівняння висоти AK будемо шукати у вигляді:

$$y - y_A = K_{AK}(x - x_A). \tag{1.20}$$

Підставивши у формулу (1.20) координати точки $A(2;-1)$ і кутовий коефіцієнт $K_{AK} = -\frac{1}{4}$, одержимо рівняння висоти AK:

$$y + 1 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

або $x + 4y + 2=0$.

Для знаходження довжини AK спочатку знайдемо координати точки К. Ця точка є точкою перетину BC і AK, тому її координати знаходимо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x - y - 17 = 0, \\ x + 4y + 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{24}{17}, \\ x = \dfrac{66}{17}. \end{cases}$$

Отже, $K = (66/17;\ -25/17)$.

$$|AK| = \left(\frac{66}{17} - 2\right)^2 + \left(-\frac{25}{17} + 1\right)^2 = \frac{8\sqrt{17}}{17}.$$

Відповідь: рівняння висоти AK : $x + 4y + 2=0$;

довжина висоти $|AK| = \frac{8\sqrt{17}}{17}$ (лін.од).

3) Переходячи до розгляду бісектриси AL, згадаємо, що вона ділить сторону BP на частини, відповідно пропорційні двом іншим сторонам, тобто:

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

$$|AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5,\quad |AC| = \sqrt{(7-2)^2 + (11+1)^2} = 13,$$

отже, $\lambda = \dfrac{|BL|}{|LC|} = \dfrac{5}{13}$.

За формулами (1.18) маємо:

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{5 + 5/13 \cdot 7}{1 + 5/13} = \frac{50}{9}; \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{3 + 5/13 \cdot 11}{1 + 5/13} = \frac{47}{9}.$$

Рівняння прямої, проведеної через $A(2;-1)$ і $L(50/9;\, 47/9)$ має вигляд:

$$\frac{y+1}{47/9+1} = \frac{x-2}{50/9-2},$$

звідки $\dfrac{y+1}{56} = \dfrac{x-2}{32}$

або $\quad 7x - 4y - 18 = 0.$

Довжина бісектриси AL:

$$|AL| = \sqrt{\left(\frac{50}{9} - 2\right)^2 + \left(\frac{47}{9} + 1\right)^2} = \frac{8\sqrt{65}}{9}.$$

Відповідь: рівняння бісектриси AL: $7x - 4y - 18 = 0$;

довжина бісектриси $|AL| = \dfrac{8\sqrt{65}}{9}$.

Задача №4. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;5)$ і паралельна до прямої $3x - 4y + 15 = 0$.

Розв'язання. Умовою паралельності двох прямих $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ є рівність їх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2. \tag{1.21}$$

Рівняння вихідної прямої будемо шукати у вигляді:

$$y - y_a = k(x - x_a). \tag{1.22}$$

Запишемо рівняння даної прямої у формі:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт $k = \dfrac{3}{4}$. Дана пряма паралельна до шуканої, тому з умови (1.21) отримуємо, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює $\dfrac{3}{4}$. Точка $A(2;5)$ лежить на шуканій прямій, тому, підставляючи у рівняння (1.22) значення $k = \dfrac{3}{4}, x_A = 2, y_A = 5$, отримаємо:

$$y - 5 = 3/4(x - 2)$$

або

$$3x - 4y + 14 = 0.$$

Відповідь: Рівняння шуканої прямої має вигляд $3x - 4y + 14 = 0$.

Задача №5. Знайти кут між прямими:

$$2x + 5y - 15 = 0 \quad \text{і} \quad 3x - 7y + 2 = 0.$$

Розв'язання. Тангенс кута між прямими $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ визначається за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1.23}$$

Якщо $1 + k_1 k_2 = 0$, прямі перпендикулярні.

Рівняння заданих прямих запишемо у вигляді:

$$y = -\frac{2}{5}x + 3 \text{ і } y = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}.$$

Таким чином, кутові коефіцієнти даних прямих відповідно дорівнюють *2/5, 3/7*. Підставивши у формулу (1.23) значення для кутових коефіцієнтів, отримаємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3/7 - (-2/5)}{1 + 3/7 \cdot (-2/5)} = 1,$$

звідки $\varphi = 45^\circ$.

Відповідь: Кут між заданими прямими $\varphi = 45^\circ$.

Задача №6. Скласти рівняння й побудувати лінію, кожна точка якої рівновіддалена від двох заданих точок $M_1(-2; 4)$ і $M_2\ (6; 8)$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка шуканої лінії. За умовою задачі:

$$|M_1 M| = |M_2 M|. \tag{1.24}$$

З іншого боку, за формулами відстані між двома точками одержуємо:

$$|M_1 M| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}; \ |M_2 M| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (1.24), знаходимо рівняння даної лінії:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Спростимо отримане рівняння. Підносячи до квадрату обидві частини рівняння й розкриваючи дужки в підкореневих виразах, знаходимо:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64.$$

Після перенесення усіх членів в ліву частину і елементарних перетворень, одержимо рівняння:

$$2x + y - 10 = 0.$$

Це рівняння є рівнянням прямої лінії (рис.1.3).

З елементарної геометрії відомо, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох заданих точок M_1 і M_2, є пряма, що проходить через його середину, перпендикулярна до відрізку M_1M_2.

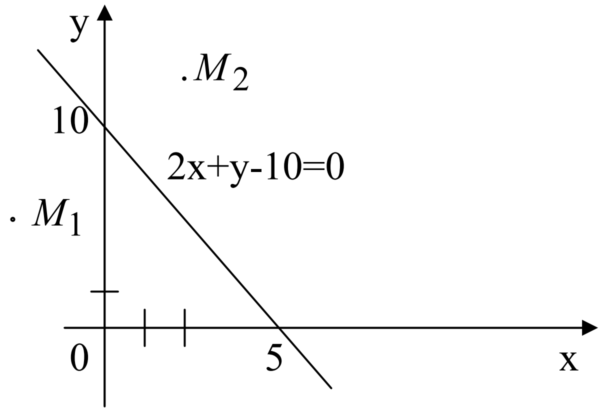

Рисунок 1.3 – Пряма

Задача №7. Точка M рухається так, що в будь-який момент часу її відстань до точки $A(6;0)$ вдвічі більша за відстань до точки $B(\frac{2}{3};0)$. Знайти рівняння траєкторії прямування точки M.

Розв'язання. Поточні координати точки M позначимо через *x, y,* тобто $M(x, y)$. За умовою задачі $|MA| = 3 \cdot |MB|$.

Знайдемо відстані $|MA|$ і $|MB|$ за формулою (1.8):

$$|\mathrm{MA}| = \sqrt{(\mathrm{x}-6)^2 + (\mathrm{y}-0)^2};$$

$$|\mathrm{MB}| = \sqrt{(\mathrm{x}-2/3)^2 + (\mathrm{y}-0)^2}.$$

Підставляючи ці вирази в попередню рівність, одержимо рівняння траєкторії прямування точки M:

$$\sqrt{(\mathrm{x}-6)^2 + \mathrm{y}^2} = 3\sqrt{(\mathrm{x}-2/3)^2 + \mathrm{y}^2}.$$

Спрощуючи це рівняння, знаходимо:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 4.$$

Отримали рівняння кола з радіусом $R = 2$ з центром у початку координат.

Задача №8. Скласти рівняння й побудувати лінію, кожна точка якої рівновіддалена від точки *F(0; 3)* і прямої $y = -5$.

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої лінії. За умовою:

$$|MF| = |MN|, \tag{1.25}$$

де N – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $y = -5$.

$$|\mathrm{MF}| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + (\mathrm{y}-3)^2} \text{ і } |\mathrm{MN}| = \sqrt{(\mathrm{y}-(-5))^2}.$$

Підставивши отримані довжини в (1.25), отримаємо:

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y+5)^2}\,.$$

Звідси $x^2+y^2-6y+9=y^2+10y+25.$

Після перетворень отримаємо рівняння

$$x^2=16y+16,$$

яке визначає параболу (рис 1.4).

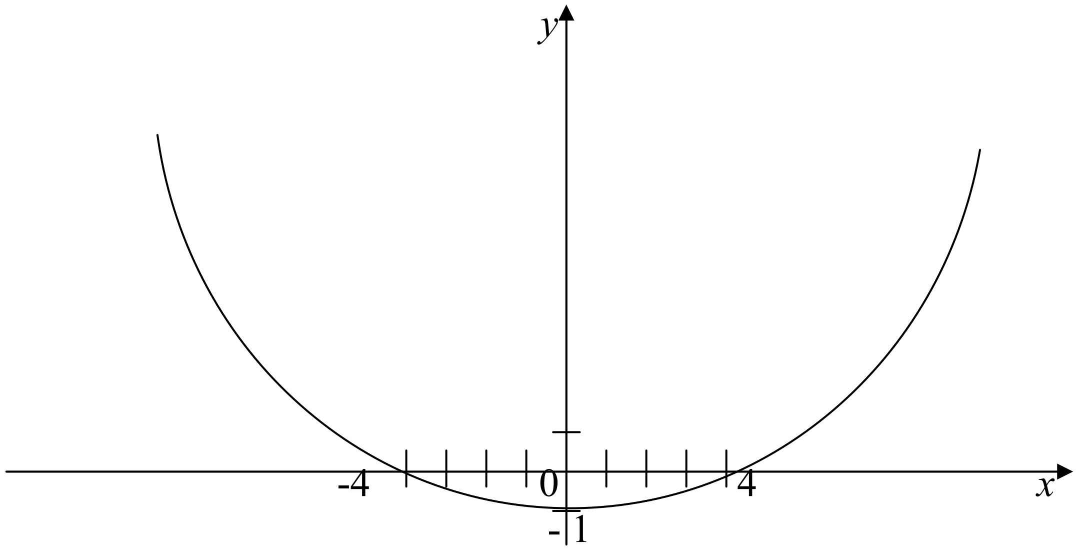

Рисунок 1.4 – Парабола

Задача №9. Яке геометричне місце точок визначає рівняння:

$$3x^2+3y^2-4x+9y+4=0\,.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 3 і, доповнюючи до повних квадратів, отримаємо:

$$\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)+\left(y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)-\frac{4}{9}-\frac{9}{4}+\frac{4}{3}=0$$

або $$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{36}.$$

Порівнявши отримане рівняння з рівнянням

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^{\,2},$$

яке визначає коло з центром у точці *C (a; в)* і радіусом *R*, отримаємо висновок:

$$a=\frac{2}{3};\quad b=-\frac{3}{2};\quad R=\frac{7}{6},$$

тобто вихідне рівняння визначає коло з центром у точці $C\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ і радіусом $R=\frac{7}{6}$.

Задача №10. Визначити вид і розташування на площині лінії

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівняння, виділяючи повні квадрати:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) - 4 + 36 - 68 = 0$$

або $4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = 36.$

Розділимо обидві частини рівняння на 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Порівнявши отримане рівняння з рівнянням

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1,$$

яке визначає гіперболу (центр у точці $C(x_1; y_1)$, піввісі *a* і *b*), отримаємо висновок, що шукане рівняння визначає гіперболу з центром у точці $C(1;-2)$ і піввісями *a*=3*, b*=2.

Задача №11. Визначити вид кривої і її розташування на площині за рівнянням

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0.$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки із змінними *x* та *y* і доповнимо одержені вирази до повних квадратів:

$$9(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 36.$$

Розділимо обидві частини рівняння на 36:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

Порівнявши отримане рівняння з рівнянням

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1,$$

яке визначає еліпс із центром у точці $C(x_1; y_1)$ і піввісями *a* і *b*, робимо висновок, що шукане рівняння визначає еліпс із центром у точці *C*(3; 4) і піввісями *a*=2*, b*=3.

Задача №12. Лінія задана рівнянням $r = r(\varphi)$ у полярній системі координат:

$$r = \frac{r}{1 - zin\,\varphi}.$$

Потрібно:

а) побудувати лінію за точками, починаючи від $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ і надаючи значення φ через проміжок $\frac{\pi}{8}$;

б) знайти рівняння даної лінії в декартовій прямокутній системі координат, початок якої збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис – із полярною віссю;

в) за рівнянням в декартовій прямокутній системі координат визначити, яка це лінія.

Розв'язання.

1) Побудуємо лінію за її рівнянням. Надаючи значення φ і визначаючи відповідне значення *r*, складемо таблицю 2.1:

Таблиця 2.1 – Значення полярного радіуса залежно від кута

Номер	Кут, рад	Кут, градуси	Полярний радіус	Позначення точки
1	0	0	2	A_1
2	π/8	22,5	2,94	A_2
3	π/4	45	6,9	A_3
4	3π/8	67,5	25	A_4 за межами рис.1.5
5	π/2	90	∞	A_5
6	5π/8	112,5	25	A_6 за межами рис.1.5
7	3π/4	135	6,9	A_7
8	7π/4	157,5	2,94	A_8
9	π	180	2	A_9
10	9π/8	202,5	1,45	A_{10}
11	5π/4	225	1,17	A_{11}
12	11π/4	247,5	1,04	A_{12}
13	3π/2	270	1	A_{13}
14	13π/8	292,5	1,04	A_{14}

Продовження табл. 2.1

15	7π/4	315	1,17	A_{15}
16	15π/4	337,5	1,45	A_{16}
17	2	360	2	A_{17}

Побудувавши відповідні точки, одержимо шукану лінію (рис. 1.5).

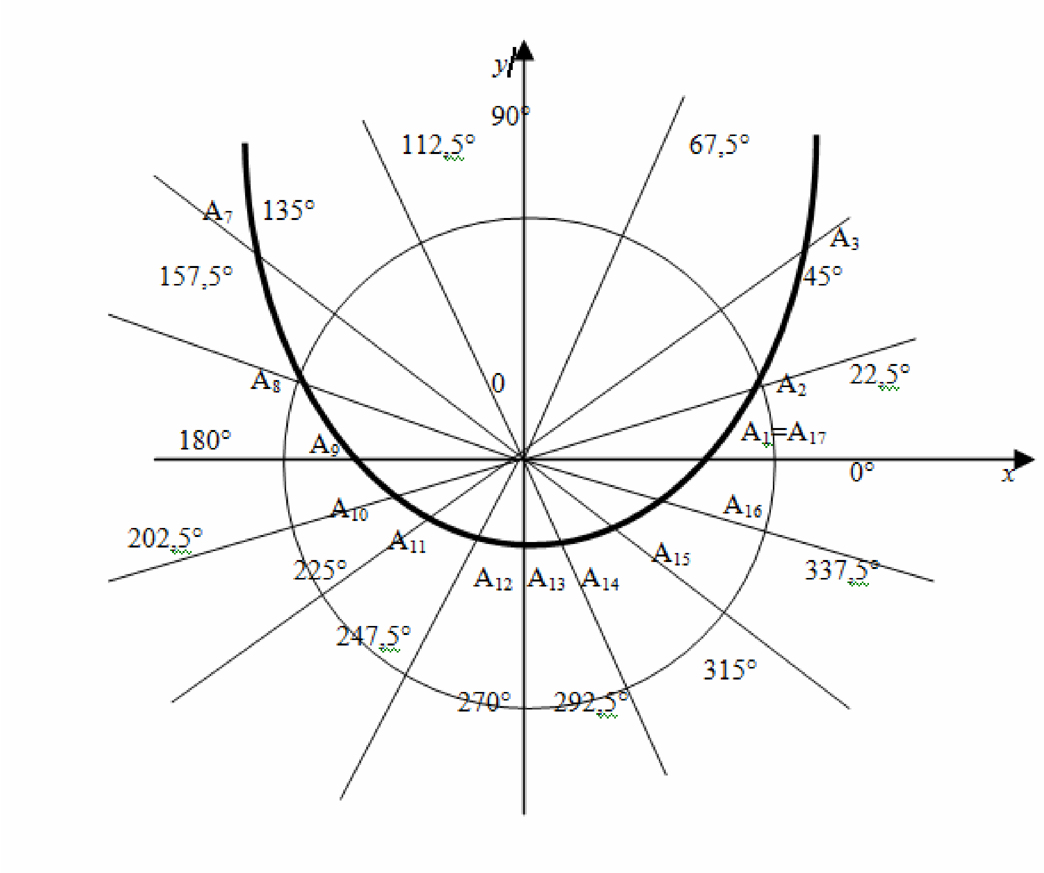

Рисунок 1.5 – Лінія у полярній системі координат

2) Знайдемо рівняння даної лінії в декартовій прямокутній системі координат, у якої початок збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис – із полярною віссю. Для цього у даному рівнянні полярні координати замінимо на прямокутні, використовуючи формулу:

$$x = r \cdot \cos\varphi; \; y = r \cdot \sin\varphi; \; r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отримаємо:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}},$$

звідки $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 2.$

Це рівняння лінії в прямокутній системі координат.

3) Звільнившись від радикалу, останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$x^2 + y^2 = (2 + y)^2$$

або $y = \frac{1}{4}x^2 - 1.$

Звідси видно, що задана лінія – парабола.

1.2 Завдання для самостійної підготовки студентів до модульного контролю

Завдання №1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, методом Гаусса і за допомогою оберненої матриці. Визначити розв'язок відповідної однорідної системи.

1.1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 12. \end{cases}$

1.2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

1.3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

1.5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

1.6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

1.8) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

1.9) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -13, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

1.10) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

1.11) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

1.12) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

1.13) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

1.14) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

1.15) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

1.16) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 8, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 19. \end{cases}$

1.17) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.18) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

1.19) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

1.20) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

1.21) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

1.22) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

1.23) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

1.24) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

1.25) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.26) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

1.27) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

1.28) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -8, \\ 4x_1 + 11x_3 = 48, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 27. \end{cases}$

1.29) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$

1.30) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 23, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 16, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

Завдання №2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса. Визначити розв'язок відповідної однорідної системи.

2.1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$

2.4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

$$2.5)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -13, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$2.6)\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$2.7)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - x_3 = -3, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$2.8)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ 6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.9)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2.10)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.11)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$2.12)\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$$

$$2.13)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$2.14)\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 21x_1 - 15x_2 + 3x_3 = -20. \end{cases}$$

$$2.15)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2.16)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 9. \end{cases}$$

$$2.17)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

$$2.18)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$2.19)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$2.20)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$2.21)\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 12x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 18. \end{cases}$$

$$2.22)\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 8, \\ 8x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$2.23)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

$$2.24)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8. \end{cases}$$

2.25) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$ 2.26) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.27) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$ 2.28) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = -8, \\ 4x_1 + x_2 + 11x_3 = 48, \\ 8x_1 + 2x_2 + 22x_3 = 27. \end{cases}$

2.29) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 10, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$ 2.30) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 23, \\ 5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 16, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

Завдання №3. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:

1) довжину ребра A_2A_3;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) кут між ребром A_1A_3 і гранню $A_2A_3A_4$;

4) площу грані $A_2A_3A_4$;

5) об'єм піраміди;

6) рівняння прямої A_1A_2;

7) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

8) рівняння висоти, опущеної з вершини A_1 на грань $A_2A_3A_4$. Зробити схематичне креслення.

3.1) $A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$

3.2) $A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;4)$

3.3) $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$

3.4) $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$

3.5) $A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3)$

3.6) $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$

3.7) $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$

3.8) $A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7)$

3.9) $A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;10;7)$

3.10) $A_1(7;7;3), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1)$

3.11) $A_1(0;7;2), A_2(4;2;5), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$

3.12) $A_1(4;10;2), A_2(4;4;10), A_3(2;8;4), A_4(9;6;4)$

3.13) $A_1(7;5;9), A_2(6;9;4), A_3(4;6;5), A_4(2;10;10)$

3.14) $A_1(4;7;8), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(3;5;4)$

3.15) $A_1(7;10;3), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(10;6;6)$

3.16) $A_1(4;10;9), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(1;8;2)$

3.17) $A_1(6;9;3), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;6;5)$

3.18) $A_1(2;3;7), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(7;2;2)$

3.19) $A_1(8;10;7), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;6;4)$

3.20) $A_1(8;4;1), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(7;7;3)$

3.21) $A_1(0;7;2), A_2(4;2;5), A_3(1;5;0), A_4(0;2;7)$

3.22) $A_1(4;10;2), A_2(4;4;10), A_3(9;6;4), A_4(2;8;4)$

3.23) $A_1(7;5;9), A_2(2;10;10), A_3(4;6;5), A_4(6;9;4)$

3.24) $A_1(4;7;8), A_2(5;10;4), A_3(8;7;4), A_4(3;5;4)$

3.25) $A_1(7;10;3), A_2(6;8;9), A_3(-2;8;2), A_4(10;6;6)$

3.26) $A_1(4;10;9), A_2(5;7;4), A_3(5;2;6), A_4(1;8;2)$

3.27) $A_1(6;9;3), A_2(4;6;11), A_3(4;9;5), A_4(6;6;5)$

3.28) $A_1(2;3;7), A_2(5;3;1), A_3(5;7;7), A_4(7;2;2)$

3.29) $A_1(8;10;7), A_2(5;6;8), A_3(10;5;5), A_4(8;6;4)$

3.30) $A_1(8;4;1), A_2(3;5;8), A_3(6;5;8), A_4(7;7;3)$

Завдання №4.

4.1) Рівняння однієї зі сторін квадрата $x+3y-5=0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо Р (-1;0) – точка перетину його діагоналей. Зробити креслення.

4.2) Дані рівняння однієї зі сторін ромба $x-3y+10=0$ і однієї з його діагоналей $x+4y-4=0$; діагоналі ромба перетинаються в точці Р (0; 1). Знайти рівняння інших сторін ромба. Зробити креслення.

4.3) Рівняння двох сторін паралелограма $x + 2y + 2=0$ і $x + y - 4=0$, а рівняння однієї з його діагоналей $x - 2 = 0$. Знайти координати вершин паралелограма. Зробити креслення.

4.4) Дано дві вершини *A (-3; 3)* і *B (5; -1)* трикутника і точка *D(4;3)* перетину висот трикутника. Скласти рівняння його сторін. Зробити креслення.

4.5) Дано вершини *A (-3; -2), B (4; -1), C (1; 3)* трапеції ABCD (AD||BC). Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати вершини D цієї трапеції. Зробити креслення.

4.6) Дано рівняння двох сторін трикутника $5x-4y+15=0$ і $4x+y-9=$ $=0$. Його медіани перетинаються в точці *P (0; 2)*. Скласти рівняння третьої сторони трикутника. Зробити креслення.

4.7) Дано дві вершини *A (2; -2)* і *B (3; -1)* і точка *P (1; 0)* перетину медіан трикутника ABC. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину C. Зробити креслення.

4.8) Дано рівняння двох висот трикутника $x+y=4$ і $y=2x$ і одна з його вершин *A (0; 2)*. Скласти рівняння сторін трикутника. Зробити креслення.

4.9) Дано рівняння двох медіан трикутника $x–2y+1=0$ і $y–1=0$ і одна з його вершин $A\ (1;\ 3)$. Скласти рівняння сторін трикутника. Зробити креслення.

4.10) Дві сторони трикутника задано рівняннями $5x–2–8=0$ і $3x–2y–-8=0$, а середина третьої сторони збігається з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони.

4.11) Дві непаралельні сторони паралелограма задаються рівняннями $x+y-7=0$ і $x-5y+23=0$, а його діагоналі перетинаються в точці (5;5). Знайти рівняння двох інших його сторін.

4.12) Дві паралельні сторони ромба задано рівняннями $2x-y+4=0$ і $2x-y-4=0$, а одна з діагоналей — рівнянням $x+y-1=0$. Скласти рівняння двох інших сторін.

4.13) Дві протилежні вершини ромба знаходяться у точках $A(3;4)$ і $C(1;–2)$. Сторона AB нахилена до осі абсцис під кутом 45°. Знайти рівняння всіх сторін ромба.

4.14) Точки перетину прямої $3x+4y=24$ з осями координат і центр кола $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ є вершинами трикутника. Знайти координати перетину двох його медіан і показати, що третя медіана проходить через цю саму точку.

4.15) Сторони трикутника задано рівняннями $2x+3y=1$, $3x-4y=2$ і $12x-5y=1$. На першій стороні знайти координати точки, рівновіддаленої від двох інших сторін.

4.16) Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку (12;4), якщо відомо, що різниця відстаней цієї прямої від точок (8;-9) і (-7;7) дорівнює 9.

4.17) Визначити координати точки, віддаленої від прямої $5x+12y+56=0$ на відстані, що дорівнює 5, і рівновіддаленої від точок (3;-2) і (-5;4).

4.18) На прямій $3x-3y-7=0$ знайти точку, рівновіддалену від точок (3;-4) і (7;2).

4.19) Вершинами трикутника є точки $A(1;2)$, $B(-1;1)$ і $C(-2;3)$. Знайти рівняння перпендикуляра, проведеного із середини сторони AC, і точку перетину його з прямою, що проходить через вершину A паралельно стороні BC.

4.20) Координати кінців однієї зі сторін квадрата: (-3;-3) і (5;3). Знайти рівняння його сторін.

4.21) Скласти рівняння й побудувати лінію, відстані кожної точки якої від початку координат і від точки $A\ (5;\ 0)$ відносяться як 2:1.

4.22) Скласти рівняння й побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки *A (-1; 0)* удвічі менше відстані її від прямої $x = -4$.

4.23) Скласти рівняння і побудувати лінію, відстані кожної точки якої від точки *A (2; 0)* і від прямої $5x + 8 = 0$ відносяться як 5:4.

4.24) Скласти рівняння й побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки *A (4; 0)* вдвічі більше відстані від точки *B (1; 0)*.

4.25) Скласти рівняння і побудувати лінію, відстані кожної точки якої від точки *A (2; 0)* і від прямої $2x + 5 = 0$ відносяться як 4:5.

4.26) Скласти рівняння й побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки *A (3; 0)* вдвічі менша за відстань від точки *B (26; 0)*.

4.27) Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої однаково віддалена від точки *A (0; 2)* і від прямої $y - 4 = 0$.

4.28) Скласти рівняння й побудувати лінію, кожна точка якої рівновіддалена від осі ординат і від околу $x^2 + y^2 = 4x$.

Зауваження. Нагадаємо, що відстань від точки А до фігури Ф — найменша з відстаней між точкою А і точками фігури Ф.

4.29) Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої рівновіддалена від точки *A (2; 6)* і від прямої $y + 2 = 0$.

4.30) Скласти рівняння й побудувати лінію, відстань від кожної точки якої до точки *A (-4; 0)* відноситься до відстані до початку координат як 3:1.

1.3 Теоретичні запитання до модуля 1

1. Визначники другого порядку та їх властивості.
2. Визначники третього порядку та їх властивості.
3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.
4. Поняття про визначники вищих порядків.
5. Матриці, основні означення та дії над ними.
6. Обернена матриця, теорема про існування оберненої матриці.
7. Ранг матриці та методи його обчислення.
8. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, основні означення.
9. Розв`язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.
10. Матричний запис системи лінійних рівнянь.
11. Метод оберненої матриці розв`язування систем лінійних рівнянь.
12. Розв`язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.
13. Критерій Кронекера-Капеллі сумісності системи лінійних рівнянь.

14. Вектори і лінійні дії над ними.
15. Проекція вектора на вісь.
16. Напрямні косинуси вектора.
17. Довжина вектора.
18. Розклад вектора за базисом.
19. Поділ відрізка в даному відношенні.
20. Скалярний добуток векторів, формули обчислення і застосування.
21. Властивості скалярного добутку векторів.
22. Векторний добуток векторів, формули обчислення і застосування.
23. Властивості векторного добутку векторів.
24. Мішаний добуток векторів, його властивості, формули обчислення і застосування.
25. Властивості мішаного добутку векторів.
26. Умови колінеарності векторів.
27. Умови перпендикулярності векторів.
28. Умови компланарності векторів.
29. Декартова прямокутна система координат.
30. Полярна система координат.
31. Лінії на площині та їх рівняння.
32. Знаходження рівняння лінії за її геометричними властивостями.
33. Криві у полярних координатах.
34. Параметричне задання кривих.
35. Векторне задання кривих.
36. Пряма на площині, різні види її рівнянь.
37. Загальне рівняння прямої та його дослідження.
38. Неповне рівняння прямої та його дослідження.
39. Кут між двома прямими.
40. Умови паралельності двох прямих.
41. Умови перпендикулярності двох прямих.
42. Відстань від точки до прямої.
43. Відстань від точки до площини.
44. Поняття про лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.
45. Канонічне рівняння кола і його графік.
46. Канонічне рівняння еліпсу і його графік.
47. Канонічне рівняння гіперболи і її графік.
48. Канонічне рівняння параболи і її графік.
49. Рівняння лінії у просторі. Загальне рівняння прямої у просторі.

50. Напрямний вектор. Канонічне рівняння прямої у просторі.
51. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки у просторі.
52. Кут між двома прямими у просторі.
53. Умови паралельності двох прямих у просторі.
54. Умови перпендикулярності двох прямих у просторі.
55. Поверхня у просторі. Рівняння площини у просторі, нормальний вектор.
56. Загальне рівняння площини та його дослідження.
57. Неповні рівняння площини і їх дослідження.
58. Рівняння площини, що проходить через три дані точки.
59. Кут між площинами.
60. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.
61. Кут між прямою і площиною.
62. Умови паралельності прямої і площини.
63. Умови перпендикулярності прямої і площини.
64. Поняття поверхні другого порядку.
65. Циліндричні поверхні та їх рівняння.
66. Еліптичний циліндр.
67. Гіперболічний циліндр.
68. Параболічний циліндр.
69. Конічні поверхні та їх рівняння.
70. Сфера та її рівняння.
71. Еліпсоїд і його рівняння.
72. Однопорожнинний гіперболоїд і його рівняння.
73. Двопорожнинний гіперболоїд і його рівняння.
74. Еліптичний параболоїд і його рівняння.
75. Гіперболічний параболоїд і його рівняння.

МОДУЛЬ 2

2.1 Приклади розв’язування типових задач

Задача №1. Знайти: $Y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^3+6x-1}{6x^3-3x^2+5x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $[\frac{\infty}{\infty}]$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3.

$$Y = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3+6x-1}{6x^3-3x^2+5x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{6-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}}.$$

Тепер можна застосувати теорему про границю дробу:

Теорема 2.1. Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)=c,\ c\neq 0,$ то функція $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ має границю при $x\to+\infty$, причому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}$, тобто границя відношення функцій дорівнює відношенню границь, якщо границя знаменника не дорівнює нулеві.

Зважаючи на те, що при $x\to\infty$ $\dfrac{6}{x^2},\dfrac{1}{x^3},\dots,\dfrac{4}{x^3}$ – нескінченно малі величини, маємо $Y=\dfrac{7}{6}$.

Відповідь: $Y=\dfrac{7}{6}$.

Застосований прийом є загальним: *щоб розкрити невизначеність виду* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$*, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник поділити на* x^k*, де* k *— найвищий ступінь зазначених многочленів. Тоді границя частки двох многочленів дорівнює:*

- *відношенню коефіцієнтів при старших ступенях x, якщо ступені чисельника і знаменника однакові;*
- *нулю, якщо ступінь знаменника більше ступеня чисельника;*
- *нескінченості, якщо ступінь знаменника менше ступеня чисельника.*

Наприклад,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-7x^4+3x^3-4x^2+8x-9}{3x^5+5x^4-6x^3+7x^2-11x-2}=\frac{6}{3}=2;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-7x+12}{5x^2+9x^5-8x^3-5x-2}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x^2+1x-18}{3x^2-9x+24}=\infty.$$

Задача №2. Знайти $Y=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Розв'язання. При $x=3$ чисельник і знаменник дробу обертаються в нуль. Знаменник містить ірраціональний вираз $\sqrt{x+1}-2$. Позбудемося ірраціональності у знаменнику. Для цього помножимо чисельник і знаменник на спряжений знаменнику вираз $\sqrt{x+1}+2$, який не дорівнює нулеві для $x\ge -1, x\ne 3$. Маємо:

$$Y=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=$$

$$=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

Відповідь: Y=24.

Таким чином, щоб розкрити невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в якій чисельник або знаменник містить ірраціональність, треба позбутися ірраціональності.

Деякі невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ розкриваються за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \tag{2.1}$$

Задача №3. Знайти $Y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$.

Розв'язання. Використовуємо (2.1):

$$Y = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{x} \right)^2 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \frac{1}{3} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Відповідь. $Y = \dfrac{1}{9}$.

Наслідки першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Задача №4. Знайти $Y = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos a - \cos x}{x^2 - a^2}$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що при $x \to a$ виконується: $\dfrac{x-a}{2} \to 0$, а тому:

$$\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \to 1.$$

Маємо:

$$Y = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x+a}{2} \sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)(x-a)} = \lim_{x\to a} \left[\left(\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a} \right) \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a} = \frac{\sin a}{2a}.$$

Відповідь: $Y = \dfrac{\sin a}{2a}$.

Такі ж результати можна отримати й за допомогою наступної теореми.

Теорема 2.2. При розкритті невизначеностей виду [0/0] можна чисельник і знаменник заміняти величинами, їм еквівалентними.

Задача №5. Знайти $Y = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання. Синус нескінченно малого кута еквівалентний самому цьому куту (точніше, його величині в радіанах), тому:

$$Y = \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-1} = 3.$$

Відповідь: Y=3.

Перейдемо до задач, пов'язаних з розкриттям невизначеностей виду $[1^\infty]$. При цьому можуть бути застосовані наступні формули (друга важлива границя):

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \\ &\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \\ &\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \\ &\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Задача №6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\mathrm{tg}^2 x)^{3\mathrm{ctg}^2 x}$.

Розв'язання. Для того щоб розв'язання цієї задачі звести до формул (2.2), зробимо заміну змінної:

$$tg^2 x = z.$$

Тоді:

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{z}.$$

Оскільки,

$$\lim_{x\to 0} z = \lim_{x\to 0} \mathrm{tg}^2 x = 0,$$

то нова змінна $z \to 0$, коли $x \to 0$.

Маємо:

$$\lim_{x\to 0}(1+5\mathrm{tg}^2x)^{3\mathrm{ctg}^2x} = \lim_{z\to 0}(1+5z)^{3\frac{1}{z}} = \left[\lim_{z\to 0}(1+5z)^{\frac{1}{z}}\right]^3 = e^{15}.$$

Відповідь: $Y = e^{15}$.

Задача №7. Знайти $Y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

Розв'язання.

Теорема 2.3. Якщо існують кінцеві границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, має місце формула:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Згідно з теоремою 2.3:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 0; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1,$$

тому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 0^1 = 0.$$

Відповідь. Y=0.

Задача №8. Знайти $Y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Розв'язання. Розділимо чисельник і знаменник дробу на x і скористаємося формулами (2.2):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}} = \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}\right]^2 1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}\right]^2 1} =$$

$$= \frac{(e^7)^2}{(e^5)^2} = \frac{e^{14}}{e^{10}} = e^4.$$

Відповідь: $Y = e^4$.

Задача №9. Знайти похідну функції:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Розв'язання. За формулою похідної дробу:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad (2.3)$$

У даному випадку $u = x$, $v = \sqrt{1+x^2}$, тому

$$y' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - \left(\sqrt{1+x^2}\right)' x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}.$$

Виконавши диференціювання, отримаємо:

$$y' = \frac{1\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2xx}{1+x^2}.$$

Після спрощень одержимо:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Задача №10. Знайти похідну функції $y = \cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$.

Розв'язання. Для функції $y = \cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$ останньою операцією є обчислення косинусу, тому проміжним аргументом є $u = \sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$. Проміжним аргументом виразу $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$ є $v = \dfrac{1}{x+1}$.Тому дана функція має вигляд:

$$y = \cos u; \quad u = \sqrt{v}; \quad v = \frac{1}{1+x}.$$

Застосувавши формулу:

$$y_x' = (\cos u)_u' \cdot (\sqrt{v})_v' \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)_x',$$

отримаємо:

$$y' = -\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right].$$

Остаточно:

$$y' = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача №11. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,(x > 0)$.

Розв'язання. Спочатку введемо проміжну функцію *u*, а потім безпосередньо продиференцюємо вихідну функцію.

Переформулюємо задачу:

$$y = arcctg\,u; \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\left(-\frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Оскільки $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $u^2 = \frac{1}{x}$, тому

$$y' = -\frac{1}{1+x^{-1}}\left(-\frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Остаточно:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Відповідь: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

Задача №12. Знайти похідну функції $y = e^{\sqrt{x^2+x+e}}$.

Розв'язання:

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x+e}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}(2x+1).$$

Відповідь: $y' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x+e}}}{2\sqrt{x^2+x+2}}(2x+1)$.

Задача №13. Знайти похідну функції $y = ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x > 0$.

Розв'язання. Перепишемо функцію у вигляді:

$$y = ln\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Тоді

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}2x = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Відповідь: $y' = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Задача №14. Знайти похідну функції, заданої неявно: $y^5 - 5axy + x^5 = 0$.

Розв'язання. Продиференцюємо обидві частини рівності:

$$5y^4y' - 5ay - 5axy' + 5x^4 = 0.$$

Згрупуємо доданки:

$$y'(y^4 - ax) = ay - x^4.$$

Остаточно одержуємо:

$$y' = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}.$$

Відповідь: $y' = (ay - x^4)/(y^4 - ax)$.

Задача №15. Визначити похідну степенево-показникової функції:

$$y = (\sin x)^{\cos x} \quad (0 < x < \pi).$$

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівності:

$$\ln y = \cos x \ln \sin x.$$

Тепер продиференцюємо обидві частини останньої рівності, враховуючи, що *ln y* – складна функція змінної *x*:

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на *y*, що за умовою задачі дорівнює $(\sin x)^{\cos x}$. Остаточно одержимо:

$$y' = y\left[-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right] = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Відповідь:

$$y' = y\left[-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right] = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Задача №16. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t; \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$$

Розв`язання.

Якщо функція *y* від незалежної змінної *x* задана через допоміжну змінну (параметр) *t*:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то похідні від *y* по *x* визначаються формулами:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2.4)$$

$$y''_{x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \qquad (2.5)$$

Знаходимо похідні від x і від y за параметром t:

$$\frac{dx}{dt} = x'_t = 2t + 2;$$

$$\frac{dy}{dt} = y'_t = \frac{1}{t+1}.$$

Шукану похідну від y по x знаходимо за формулою (2.4):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{(t+1)(2t+2)} = \frac{1}{2(t+1)^2} = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}.$$

Далі знаходимо похідну від y'_x за параметром *t,* а потім шукану другу похідну за формулою (2.5):

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{dy'_x}{dt} = -(t+1)^{-3};$$

$$y''_{x^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-(t+1)^{-3}}{2(t+1)}.$$

Відповідь: $y'_x = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}$; $y''_{x^2} = -\frac{1}{2}(t+1)^{-4}$.

Переходимо до розв'язання задач про найбільші або найменші значення величин. Для розв'язання таких задач потрібно, виходячи з умови, вибрати незалежну змінну й виразити досліджувану величину через цю змінну, а потім знайти шукане найбільше або найменше значення отриманої функції. При цьому інтервал зміни незалежної змінної, який може бути кінцевим або нескінченним, також визначається з умови задачі.

Задача №17. Машина доставляє зерно на елеватор по степовій дорозі, а потім по шосе. Під яким кутом до шосе повинна проходити степова дорога, щоб машини витрачали найменший час на весь шлях, якщо по степовій дорозі швидкість машини у k разів менша, ніж по шосе?

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі:

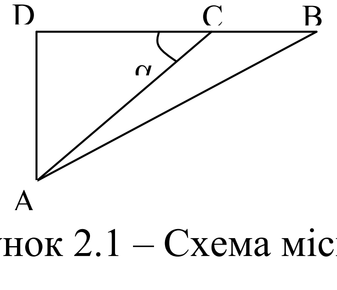

Рисунок 2.1 – Схема місцевості

Нехай машина доставляє зерно з пункту *A* в пункт *B*. Відрізок AC зображує степову дорогу, а відрізок CB – шосе (рис. 2.1). Час, витрачений на перевезення зерна, складається із часу проїзду по дорогах AC і CB. Позначимо швидкість руху по дорозі AC через *v*, тоді, згідно з умовою, швидкість руху по шосе дорівнює $k{\cdot}v$.

Позначимо кут, під яким степова дорога проходить до шосе, α; величину відрізка $AD \perp DB$ через ℓ, а величину відрізка DB через a.

Розглянемо ΔADC:

$$\mathrm{AC} = \frac{\ell}{\sin\alpha},\ \mathrm{CB} = \mathrm{a} - \ell\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Час руху машини розглянемо як функцію кута α:

$$\mathrm{t}(\alpha) = \frac{\ell}{\mathrm{v}\sin\alpha} + \frac{\mathrm{a} - \ell\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{kv}} = \frac{\ell}{\mathrm{v}\sin\alpha} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{kv}} - \frac{\ell}{\mathrm{kv}}\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Визначимо критичну точку. Для цього обчислимо першу похідну:

$$\mathrm{t}'(\alpha) = \frac{\ell}{\mathrm{v}}\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 0 + \frac{1}{\mathrm{k}}\frac{1}{\sin^2\alpha}\right);$$

$$\mathrm{t}'(\alpha) = 0;\ -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 0 + \frac{1}{\mathrm{k}}\frac{1}{\sin^2\alpha} = 0;$$

$$k\cos\alpha = 1;\quad \cos\alpha = \frac{1}{\mathrm{k}}.$$

Для дослідження критичної точки обчислимо другу похідну:

$$\mathrm{t}''(\alpha) = \frac{\ell}{v}\left(-\frac{\sin^3\alpha - 2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} - \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{k}\sin^4\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\ell}{\mathrm{v}}\left(\frac{\sin\alpha(1+\cos^2\alpha)}{\sin^4\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{\mathrm{k}\sin^3\alpha}\right) = \frac{\ell}{\mathrm{v}}\left(\frac{\mathrm{k} + \mathrm{k}\cos^2\alpha - 2\cos\alpha}{\mathrm{k}\sin^3\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\ell}{\mathrm{kv}}\frac{\mathrm{k} + \mathrm{k}\cos^2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Обчислимо значення другої похідної при $\cos\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{k}}$:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{k}^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{k}^2 - 1}{\mathrm{k}^2}};$$

$$\mathrm{t}'' = \frac{\ell}{\mathrm{kv}}\frac{\mathrm{k} + \mathrm{k}\frac{1}{\mathrm{k}^2} - 2\frac{1}{\mathrm{k}}}{\left(\frac{\sqrt{\mathrm{k}^2 - 1}}{\mathrm{k}}\right)^3} = \frac{\ell}{\mathrm{kv}}\frac{\mathrm{k}^3\left(\mathrm{k} - \frac{1}{\mathrm{k}}\right)}{(\mathrm{k}^2 - 1)\sqrt{\mathrm{k}^2 - 1}} = \frac{\ell k}{v\sqrt{k^2 - 1}} > 0.$$

З рис. 2.1 видно, що $\cos\alpha = \dfrac{1}{k} \le \dfrac{a}{AB}$.

На вказаному проміжку функція *t(α)* має єдиний екстремум-мінімум. Отже, з ним збігається найменше значення функції.

Відповідь. Якщо швидкість по шосе в *k* раз більша за швидкість по степовій дорозі, то степова дорога має проходити до шосе під кутом, що визначається співвідношенням $\cos\alpha = \dfrac{1}{k}$.

Задача №18. Дослідити функцію методами диференціального числення та побудувати її графік, використовуючи дані дослідження.

$$y = \frac{x^3 - 6x^2 + 25x - 28}{2(x-2)^2}.$$

Розв'язання.

Дослідження функції проведемо за планом:

1) Знайти область існування функції.

2) Знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з осями координат.

3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.

4) Знайти точки розриву, дослідити їх.

5) Визначити інтервали монотонності, точки локальних максимумів і мінімумів графіка функції.

6) Встановити області опуклості та вгнутості, а також точки перегину графіка функції.

7) Знайти асимптоти кривої.

8)Побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження.

Реалізація плану

1. Функція існує для всіх значень *x*, за винятком *x=2.*

2. Знаходимо точку перетину з віссю *Oy*. Для цього покладемо в рівнянні *x=0*, тоді *y=-3,5*. Отже, графік даної функції перетинає вісь О*y* у точці (0;-3,5).

Знаходимо точку перетинання з віссю *Ox*. Покладемо *y=0*, тоді одержимо рівняння:

$$x^3 - 6x^2 + 25x - 28 = 0.$$

Оскільки даний многочлен є зведеним і має цілі коефіцієнти, то, якщо він має раціональні корені, вони є цілими і знаходяться серед дільників вільного члена. Підставимо у рівняння $x = \pm1; \pm2; \pm4; \pm7; \pm14; \pm28$. Жодне з цих значень не є коренем, тому дане рівняння не має раціональних коренів.

3. Функція не періодична, загального типу, тобто її графік не є симетричним по відношенню до координатних осей.

4. Функція в точці x=2 має розрив другого роду:

$$\lim_{x\to 2\pm 0} \frac{x^3-6x^2+25x-28}{2(x-2)^2}=\infty .$$

5. Знаходимо першу похідну, дорівнюємо її до нуля і нескінченності. Одержуємо:

$$y'=\frac{(3x^2-12x+25)2(x-2)^2-4(x-2)(x^3-6x^2+25x-28)}{4(x-2)^4}=$$

$$=\frac{x^3-6x^2-x+6}{2(x-2)^3}.$$

Звідки:

$$x^3-6x^2-x+6=0.$$

Корені цього рівняння: *-1; 1; 6.*

Прирівнюючи до нескінченності, знаходимо:

$$\frac{x^3-6x^2-x+6}{2(x-2)^3}=\infty,$$

звідки *x-2=0*, тобто *x=2*.

Для дослідження на максимум і мінімум у стаціонарних точках (коріння рівняння $y'=0$) знаходимо другу похідну даної функції:

$$y''=\frac{13\left(x-\frac{8}{13}\right)}{(x-2)^4}.$$

Визначаємо знак другої похідної в отриманих стаціонарних точках:

$$y''(-1)<0;\ y''(1)>0;\ y''(6)>0.$$

Отже, при $x_1=-1$ функція досягає максимуму, при $x_2=1$ і $x_3=6$ – мінімуму. Значення функції *x* при цих значеннях *x*:

$$y(-1)=-3{,}3;\quad y(1)=\text{-}4;\quad y(6)=3{,}8.$$

Знаючи точки екстремуму, легко встановити області зростання й спадання функції:

для -∞ <*x*<*-1* функція зростає;
для *-1*<*x*<*1* функція спадає;
для *1*<*x*<*2* функція зростає;
для *2*<*x*<*6* функція спадає;
для *6*<*x*<∞ функція зростає.

6. Встановлення областей опуклості і вгнутості, а також точок перегину. Для знаходження точок перегину дорівнюємо другу похідну до нуля. Одержуємо $y'' = 0$, тобто $x - \frac{8}{13} = 0$, звідки $x = \frac{8}{13}$.

При переході через значення $x = \frac{8}{13}$ друга похідна змінює знак:

$$y''\left(\frac{8}{13} - h\right) < 0; \quad y''\left(\frac{8}{13} + h\right) > 0.$$

Щоб встановити області опуклості й вгнутості, розглянемо знак другої похідної у наступних проміжках:

$$(-\infty, \frac{8}{13}), (\frac{8}{13}, 2), (2, +\infty).$$

Маємо:

для $-\infty < x < \frac{8}{13}$, $y'' < 0$ - крива опукла;

для $\frac{8}{13} < x < 2$, $y'' > 0$ - крива вгнута;

для $2 < x < +\infty$, $y'' > 0$ - крива вгнута.

7. Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді:

$$y = kx + b, \tag{2.6}$$

де

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{2.7}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]. \tag{2.8}$$

За формулами (2.7) і (2.8) знаходимо *k* і *b*:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 25x - 28}{2x(x-2)^2} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 - 6x^2 + 25x - 28}{2x(x-2)^2} - \frac{1}{2}x \right] = -1.$$

Згідно з (2.6) маємо $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Знайдемо вертикальні асимптоти. Для цього розв`язуємо рівняння $\frac{1}{y} = 0$, тобто $x - 2 = 0$, звідки $x=2$.

Тому графік буде необмежено наближатися до вертикальної асимптоти у верхній її частині, оскільки $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} y = +\infty$.

Тепер установимо взаємне розташування кривої й асимптоти $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Для цього складемо різницю ординат кривої і асимптоти:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 25x - 28}{2(x-2)^2} - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{13x - 20}{2(x-2)^2}.$$

Ця різниця дорівнює нулеві при $x = \frac{20}{13}$, тобто графік кривої перетинає асимптоту в точці $\left[\frac{20}{13}, -\frac{3}{13}\right]$. На проміжку $\left(-\infty, \frac{20}{13}\right)$ ця різниця від`ємна, отже, графік кривої знаходиться під асимптотою, а на проміжку $\left(\frac{20}{13}; +\infty\right)$ вона додатна, отже, графік знаходиться над асимптотою.

Тепер переходимо до побудови графіка. Насамперед, наносимо координатну площину, асимптоти, потім точки максимуму і мінімуму і точку перегину. Знаючи проміжки зростання й спадання функції, а також проміжки опуклості й вгнутості, ми порівняно легко будуємо графік даної функції (рис. 2.2).

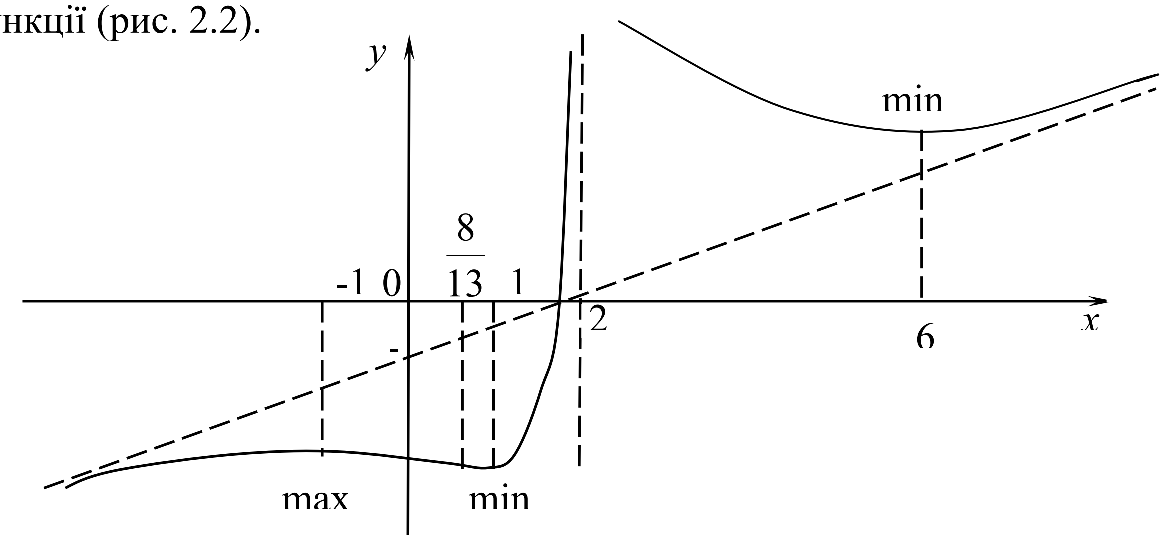

Рисунок 2.2 – Графік функції

2.2 Завдання для самостійної підготовки студентів до модульного контролю

У завданнях №1-№7 необхідно знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя.

Завдання №1.

1.1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^5-4}$

1.2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^3+12}{x^3-4x+3}$

1.3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4-2x^3+10}{x^3-4x+1}$

1.4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^2+1}{-2x^6-4}$

1.5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^2+1}{3x^5-4}$

1.6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-2x^3+12}{11x^4-4x^3+3}$

1.7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^6-4x+12}$

1.8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^3+2}{x^3-7x+8}$

1.9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^8-2x^5+1}{x^7-4}$

1.10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{x^3-4x+3}$

1.11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{4x^3-4}$

1.12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+13}{3x^3-4x+3}$

1.13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-11x^3+1}{x^4-4x+6}$

1.14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+12x^4+1}{x^5-4x+3}$

1.15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-4x-5}$

1.16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^4+12}{x^{13}-4x^8+3}$

1.17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-11x^3+1}{7x^5-4}$

1.18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+12}{8x^3-4x+3}$

1.19) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-2x^3+x-3}{x^4-12}$

1.20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$

1.21) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{x^5-4x+7}$

1.22) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^3+4x-5}$

1.23) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+1}{-5x^4-4}$

1.24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x+1}{3x^2+5x-5}$

1.25) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^7-3x^5+1}{3x^2+9x-5}$

1.26) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x+17}{3x^2+x-5}$

1.27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^7+9x-5}$

1.28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^8+x^7-15}$

1.29) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2-3x+1}{18x^2+x-5}$

1.30) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$

Завдання №2.

2.1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

2.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-4x^4-x^3}{x^6-x^3}$

2.3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2.4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2+x}{x^5-x^2-x}$

2.5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$

2.6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^3-x^2}{x^3-2x^2}$

2.7) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}$

2.8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-2x^3+x}{x^8+x^7-x}$

2.9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

2.10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

2.11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

2.12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

2.13) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$

2.14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

2.15) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+2x-35}{x^2-25}$

2.16) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

2.17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

2.18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$

2.19) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

2.20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$

2.21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-2x^3+x^2}{x^3+x^2}$

2.22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

2.23) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$

2.24) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-12x+36}{x-6}$

2.25) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

2.26) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+16x+64}{x+8}$

2.27) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^2-10x+25}$

2.28) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-12x+20}{x-10}$

2.29) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$

2.30) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

Завдання №3.

3.1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$

3.2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-8}{7x+9}\right)^{x}$

3.3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$

3.4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-15}{x+16}\right)^{x}$

3.5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{x}$

3.6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+11}\right)^{x}$

3.7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{x}$

3.8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{4x}$

3.9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^{x}$

3.10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$

3.11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+11}{5x+1}\right)^{x}$

3.12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-4}$

3.13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{21x-10}{21x+1}\right)^{x}$

3.14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x-5}$

3.15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x}$

3.16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{3x+2}$

3.17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

3.18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{5x-7}$

3.19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{x}$

3.20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^{3x-7}$

3.21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+11}{5x+1}\right)^{x+4}$

3.22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-8}{7x+9}\right)^{4x}$

3.23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{21x-10}{21x+1}\right)^{3x-7}$

3.24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-15}{x+16}\right)^{3x+15}$

3.25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-8}$

3.26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+11}\right)^{7x-1}$

3.27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{3x+5}$

3.28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3x+2}$

3.29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{-2x-7}$

3.30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{x-4}$

Завдання №4.

4.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$

4.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 8x-\sin 3x}$

4.3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$

4.4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\arcsin 3x}$

4.5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3 x}{4x^3}$

4.6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$

4.7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 16x}$

4.8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos 16x}$

4.9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4\pi x}{\sin 12\pi x}$

4.10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+x}{x}$

4.11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin 4\pi x}{arc\sin 24\pi x}$

4.12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

4.13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{\sin^2 12x}$

4.14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{tg^2 2x}$

4.15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 \pi x}{x^2}$

4.16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{10x}$

4.17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 4x}{2x}$

4.18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 5x}{10x^3}$

4.19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 5x}{x^4}$

4.20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x tg x}$

4.21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 2x}{\sin 3x}$

4.22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2x}{2x}$

4.23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin x}{\sin 7x}$

4.24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-arc\sin 2x}{\sin 3x}$

4.25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-\cos x}$

4.26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x-tg2x}{x}$

4.27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

4.28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x^2)}{\sin(9x^2)}$

4.29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x^2)}{2x^4}$

4.30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos 6x}$

Завдання №5.

5.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3-2n)(n-1)!}{(n+1)!}$

5.2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3-2)(n+2)!(n+3)}{(n+3)!(5n^3+1)}$

5.3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)n!}{(n+3)!}$

5.4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-2)(n+2)!}{(n+1)!(n^4+3)}$

5.5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-4)(n-1)!}{(n+3)!}$

5.6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)(n+4)!}{(n+1)!(2n^4+6)}$

5.7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3-2n)(n-1)!}{(n+1)!(2n+1)}$

5.8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)(n-2)!}{(n-1)!(5n+1)}$

5.9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)!(n-1)}{(n+1)!}$

5.10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-8)(n-1)!}{4n!}$

5.11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-5)(n+4)!}{(n+3)!(2n^2+1)}$

5.12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)(n+2)!}{(n+1)!(2n^4+6)}$

5.13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-5)(n+2)!}{n!(n^2+1)}$

5.14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+12)(n+2)!}{(n+1)!(n^4+5)}$

5.15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2-4)n!}{(n+2)!}$

5.16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-5)(n+2)!}{n!(n^4+6)}$

5.17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}n!}{2^n(n+2)!}$

5.18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)(n+3)!}{(n+2)!(n^4+5)}$

5.19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}(n+5)!}{3^n(n+4)!(n+2)}$

5.20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)n!}{(n+1)!(2n^5+1)}$

5.21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)(n+4)!}{(n+3)!(2n^4+6)}$

5.22) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)(n+3)!}{(n+4)!(2n^2+9)}$

5.23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-2n)(n-1)!}{(n+1)!}$

5.24) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n-2)(n-4)!}{(n-1)!(n+6)}$

5.25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-12)(n-1)!}{(n+1)!(n^2+6)}$

5.26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3-2)(n+2)!}{(n+1)!(2n^4+6)}$

5.27) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-2)(n+2)!}{(n+1)!(2n+5)}$

5.28) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7n-2)(n+3)!}{(n+1)!(2n^2+3)}$

5.29) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n(3n-7)(n+4)!}{3^{n+1}(n+3)!(n^4+6)}$

5.30) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^4-2)(n+5)!}{(n+7)!(n+3)}$

Завдання №6.

6.1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-4}-\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$

6.2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-4}-\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$

6.3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2+11}{x^2-4}-\dfrac{x^2+5}{x}\right)$

6.4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-5x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

6.5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-4}-\dfrac{2x^2-1}{2x}\right)$

6.6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x^2+1}{2x-5}-\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$

6.7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2+2}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{3x}\right)$

6.8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-4}-\dfrac{x^2+4}{x}\right)$

6.15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2+1}{x^2-3}-\dfrac{x^2+3}{2x}\right)$

6.16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x+4}-\dfrac{x^2-1}{7x}\right)$

6.17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-6}-\sqrt{x^2+1}\right)$

6.18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+8}\right)$

6.19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-5}\right)$

6.20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+6}\right)$

6.21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-3}\right)$

6.22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-12}-\sqrt{x-18}\right)$

6.23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)$

6.24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-10}\right)$

6.25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3-2x^2+1}{x^2}-\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$

6.9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{x-4}-\dfrac{x+4}{5x}\right)$

6.10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+1}{x-6}-\dfrac{x^2+6}{x}\right)$

6.11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x}\right)$

6.12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)$

6.13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-4}\right)$

6.14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}\right)$

6.26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-11}\right)$

6.27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-14}-\sqrt{x^2-15}\right)$

6.28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-1}\right)$

6.29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+14}-\sqrt{x^2-13}\right)$

6.30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-11}\right)$

Завдання №7.

7.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8-x}}{4x}$

7.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{7-x}}{4x}$

7.3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{1-6x}}{11x}$

7.4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7x+12}-\sqrt{12-7x}}{7x}$

7.5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{13x+10}-\sqrt{10+3x}}{5x}$

7.6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7x+15}-\sqrt{15-6x}}{x}$

7.7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+19}-\sqrt{19-6x}}{11x}$

7.8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+21}-\sqrt{21-x}}{3x}$

7.9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{x+8}-\sqrt{8-x}}$

7.10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{7-x}}$

7.17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11x}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{1-6x}}$

7.18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sqrt{7x+12}-\sqrt{12-7x}}$

7.19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{13x+10}-\sqrt{10+3x}}$

7.20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{12x+19}-\sqrt{19-12x}}{12x}$

7.21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5x+21}-\sqrt{21-x}}$

7.22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}{12x^2-x}$

7.23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{8x}$

7.24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{10x}$

7.25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{4x}$

7.26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}{24x}$

7.11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+5x}-\sqrt{4-5x}}{10x}$

7.12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-7x}}{20x}$

7.13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$

7.14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}}{8x}$

7.15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$

7.16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$

7.27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x^2-x}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}$

7.28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{24x}{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}$

7.29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\sqrt{4+5x}-\sqrt{4-5x}}$

7.30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}}$

Завдання №8. Знайти границі за допомогою правила Лопіталя

8.1) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

8.2) а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot\sin\dfrac{2}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

8.3) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctgx}-\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+2^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

8.4) а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{3/x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$.

8.5) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$.

8.6) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot ctgx$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$.

8.7) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot ctg\pi(x-1)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

8.8) а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{tgx}$.

8.9) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\,\dfrac{\pi x}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{1/\ln x}$.

8.10) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

8.11) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{arctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

8.12) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x}}{\ln\dfrac{x-1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-tgx\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

8.13) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)-x}{tg\dfrac{\pi}{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\cdot ctgx$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

8.14) а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$.

8.15) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot tg\dfrac{x}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

8.16) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\arcsin\dfrac{x-2}{2}\cdot ctg(x-2)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tgx}$.

8.17) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$.

8.18) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln(1+\dfrac{1}{x})$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$.

8.19) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-4x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg^2 x$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

8.20) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\ln(x+2)/\ln(2-x)}$.

8.21) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

8.22) а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2arctgx^2-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(2x+3)}{\ln(2-x)}}$.

8.23) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(ctg\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

8.24) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

8.25) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(3^2-x^2\right)\cdot tg\dfrac{\pi x}{6}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{13\sin x/ctgx}$.

8.26) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}x(\ln(x+2)-\ln x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}$.

8.27) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} xctg^2 2x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

8.28) а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\cdot\ln\dfrac{x+1}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$.

8.29) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$; б) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(x-2\pi)^2\cdot ctg(\cos x-1)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos^2 x}\right)^{ctg^2 x}$.

8.30) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{1-\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+3)\cdot\ln\dfrac{x+3}{x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Завдання №9. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці, що відповідає значенню параметру $t=t_0$.

9.1) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t),\ \mathrm{t}_0=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

9.2) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3,\ \mathrm{t}_0=1 \end{cases}$

9.3) $\begin{cases} x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{2t-t^3}{1+t^3},\ \mathrm{t}_0=1 \end{cases}$

9.4) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t,\ \mathrm{t}_0=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

9.5) $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

9.6) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2}, \mathrm{t}_0 = 2 \end{cases}$

9.7) $\begin{cases} x = 2\ln ctgt + 1, \\ y = tgt + ctgt, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

9.8) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t^4, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3, \mathrm{t}_0 = 0 \end{cases}$

9.9) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

9.10) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

9.11) $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}, \mathrm{t}_0 = 1 \end{cases}$

9.12) $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}, \mathrm{t}_0 = 1 \end{cases}$

9.13) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}, \mathrm{t}_0 = 2 \end{cases}$

9.14) $\begin{cases} x = 7\sin^3 t, \\ y = 7\cos^3 t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

9.15) $\begin{cases} x = 2(t\sin t + \cos t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

9.16) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \mathrm{t}_0 = 1 \end{cases}$

9.17) $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \mathrm{t}_0 = 2 \end{cases}$

9.18) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - arctgt, \mathrm{t}_0 = 1 \end{cases}$

9.19) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t, \mathrm{t}_0 = 0 \end{cases}$

9.20) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}, \mathrm{t}_0 = 2 \end{cases}$

9.21) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

9.22) $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \mathrm{t}_0 = 1 \end{cases}$

9.23) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \mathrm{t}_0 = 1 \end{cases}$

9.24) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

9.25) $\begin{cases} x = 2tgt, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

9.26) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \mathrm{t}_0 = -2 \end{cases}$

9.27) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2^t, \mathrm{t}_0 = 0 \end{cases}$

9.28) $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \mathrm{t}_0 = 0 \end{cases}$

9.29) $\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

9.30) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

2.3 Теоретичні запитання до модуля 2

1. Поняття функції та способи її завдання.
2. Класифікація елементарних функцій.
3. Основні тригонометричні функції: властивості, графіки.
4. Показникові функції: властивості, графіки.
5. Логарифмічні функції: властивості, графіки.
6. Функції, обернені до тригонометричних: властивості, графіки.
7. Монотонні, парні та непарні функції.
8. Періодичні функції.
9. Обернені функції.
10. Неявно задані функції.
11. Параметрично задані функції.
12. Границя функції однієї змінної.
13. Границя числової послідовності.
14. Теорема існування границь.
15. Границя функції в точці та при $x \to \infty$.

16. Нескінченно малі величини.
17. Властивості нескінченно малих величин.
18. Теорема про зв'язок функції з її границею.
19. Основні теореми про границі.
20. Перша важлива границя.
21. Друга важлива границя.
22. Порівняння нескінченно малих функцій.
23. Еквівалентні нескінченно малі функції.
24. Типи невизначеностей.
25. Розкриття основних типів невизначеностей.
26. Неперервність функції у точці.
27. Точки розриву, їх класифікація.
28. Властивості функцій, неперервних у точці і на відрізку.
29. Означення похідної функції.
30. Властивості похідної.
31. Геометричний зміст похідної.
32. Механічний зміст похідної.
33. Основні правила диференціювання функції.
34. Похідна степеневої функції.
35. Похідна показникової функції.
36. Похідна функції $y = \sin x$.
37. Похідна функції $y = \cos x$.
38. Похідна функції $y = tgx$.
39. Похідна функції $y = ctgx$.
40. Похідна логарифмічної функції.
41. Похідна функції $y = \arccos x$.
42. Похідна функції $y = \arcsin x$.
43. Похідна функції $y = arctgx$.
44. Похідна функції $y = arcctgx$.
45. Обчислення похідної складної функції.
46. Похідна функції, заданої параметрично.
47. Похідна неявно заданої функції.
48. Похідна оберненої функції.
49. Похідна показниково-степеневої функції.
50. Диференціал.
51. Властивості диференціала.
52. Похідні та диференціали вищих порядків.
53. Теорема Ролля.
54. Теорема Лагранжа.
55. Правило Лопіталя.

56. Формула Тейлора.
57. Означення та умови монотонності функції. Теорема: необхідна умова зростання (спадання) функції.
58. Теорема: достатня умова зростання (спадання) функції.
59. Означення екстремуму функції.
60. Необхідна умова екстремуму функції.
61. Достатня умова екстремуму функції.
62. Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку.
63. Означення та умови опуклості і вгнутості кривих.
64. Необхідна умова перегину функції в точці.
65. Достатня умова перегину функції в точці.
66. Вертикальні асимптоти кривої.
67. Горизонтальні асимптоти кривої.
68. Похилі асимптоти.
69. Застосування похідної для дослідження функцій та побудови їх графіків.
70. Кривина плоскої кривої. Еволюта та евольвента.
71. Вектор-функція скалярного аргументу та її застосування.
72. Поняття комплексного числа.
73. Різні форми комплексного числа.
    Модуль комплексного числа.
74. Дії над комплексними числами.
75. Піднесення комплексного числа до степеня.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемышев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемышев. — М.:Наука, 1987. – 330 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1967. – 416 с.
3. Бугров Я.С., Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — М.: Наука, 1988. – 431с.
4. Бугров Я.С., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — М.: Наука, 1983. – 228 с.
5. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб./ В.П Дубовик, І.І. Юрик. — К.: Вища шк., 1993. – 648 с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожець. — М.: Высш. шк., 1964. – 479 с.
7. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
8. Мантуров О.В. Курс высшей математики / О.В. Мантуров. – М.: Высш. шк., 1991. – 448 с.
9. Математика для інженерів / [Рудавський Ю.К., Костровій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В.]. — Львів: «Бескид Біт», 2002. – 262 с.