Румянцев Н.В., д.э.н., профессор, зав. кафедрой ЭК,
ДонНТУ, mmme@dongu.donetsk.ua
Медведева М.И., канд. физ.-мат. наук, доцент,
кафедра МММЭ, ДонНУ, mmmek@dongu.donetsk.ua

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ С НЕНАДЕЖНЫМИ СТАНКАМИ, ПРОФИЛАКТИКОЙ И ПЕРЕНАЛАДКОЙ В НАЧАЛЕ РАБОТЫ

Аннотация. *В работе рассмотрены вопросы определения стационарных вероятностей состояний системы массового обслуживания с ненадежным прибором, переналадкой и профилактикой, описывающей функционирование, как основного, так и вспомогательного материального потока логистической системы.*

Введение. В условиях переходной экономики одним из ключевых моментов функционирования предприятия является повышение стабильности и адаптивности к быстроменяющимся внешним условиям и, как следствие, сокращение всех видов затрат на производство готовой продукции. Как правило, состояния внешней среды в будущих периодах носят не всегда закономерный, определенный характер. Часто они не полностью определены и имеют вероятностную, стохастическую природу. Поэтому в общем случае они не могут быть предсказаны точно, вследствие чего наблюдается некоторая неопределенность их значений [1]. Учитывая, что факторы внешней среды трудно поддаются прогнозированию и с их помощью сложно управлять поведением предприятия, больший интерес представляют его внутренние свойства, которые включают в себя возможности выбора правильного пути развития. Некоторые из этих характеристик закладываются в предприятие еще на стадии формирования его функциональной структуры, другие могут в определенной степени изменяться и совершенствоваться в соответствии с ожиданиями будущих периодов [2].

Внутренние свойства, которые отражают определенные аспекты функционирования предприятия, как сложной динамической системы, и не зависят от характера этого объекта, называются общесистемными характеристиками. К общесистемным характеристикам относятся устойчивость, гибкость, маневренность, чувствительность, живучесть, надежность, эффективность, и они определяют потенциал предприятия к активному противостоянию возмущающим факторам. Показатели чувствительности и живучести системы тесно связаны с показателем надежности, так как надежность означает способность предприятия сохранять в процессе функционирования бесперебойность своей работы [1].

Кроме того, для решения вопросов, связанных с оптимальным управлением предприятий, привлекают логистические концепции, а именно: концепцию точно в срок (JIT), концепции RP, MRP, DRP, LP, DDT, ROP, QR, CR, AR, направленные на решение вопросов синхронизации материальных потоков, циркулирующих в них и в конечном итоге позволяющие минимизировать запасы на всех стадиях производства, а значит и общие издержки производства. Под материальным потоком в логистике понимают находящиеся в состоянии движения материальные ресурсы, незавершенное производство и готовая продукция. В свою очередь, под материальными ресурсами понимают предметы труда: сырье, основные и вспомогательные материалы, полуфабрикаты, комплектующие изделия, сборочные единицы, топливо, запасные части, предназначенные для ремонта и обслуживания технологического оборудования и других основных фондов, отходы производства.

Все перечисленные выше концепции логистического управления предприятием не уделяют никакого внимания потоку запасных частей, предназначенных для ремонта и обслуживания технологического оборудования и других основных фондов, величина (точнее интенсивность) которого существенно зависит от надежности работы самого оборудования, от вероятностей выхода его из строя, видов и типов возможных отказов во время выполнения работ, от схемы организации ремонтных и профилактических работ. Известно, что поток запасных частей образует, так называемый, вспомогательный поток логистической системы.

Отметим и тот факт, что на современном этапе одной из основных тенденций в экономике является появление гибкого технологического оборудования, гибких автоматизированных производств, позволяющих быстро переходить, после небольшой переналадки, на выпуск новых видов продукции. Одним из видов качественной гибкости оборудования является ассортиментная гибкость [2], позволяющая оценить способность производственно-экономической системы к обновлению ассортимента выпускаемой продукции. Основными характеристиками ассортиментной гибкости являются сроки и стоимость подготовки оборудования к выпуску нового вида продукции. Поэтому при анализе живучести, надежности и эффективности производственных систем необходимо иметь количественные характеристики их функционирования. Решение этой проблемы и рассматривается в данной работе.

Вопросам анализа производственных систем с ненадежным оборудованием посвящено большое число работ. Например, в работах [3] исследуются классические системы массового обслуживания с ненадежным прибором. В [4] рассматривается система с переналадкой, в которой оборудование может выходить из строя только в свободном состоянии. В работе [5] рассмотрена система с переналадкой в начале периода занятости, ненадежным оборудованием, выходящим из строя в любой момент времени и дообслуживанием требований, находящихся на приборе, вышедшем из строя.

В данной работе исследуется модель системы массового обслуживания с переналадкой и ненадежным прибором, выходящим из строя только в рабочем состоянии и потерей требований, которые находились на обслуживании до момента выхода прибора из строя, но различным поведением его после восстановления. Ставится задача определения характеристик заданной системы, знание которых позволит оптимальным образом управлять потоками сырья, запасных частей и материалов, минимизировать издержками хранения материальных ресурсов.

Постановка задачи. Предположим, что производственно-экономическая система описывается одноканальной системой массового обслуживания разомкнутого типа с простейшим входным потоком интенсивности $\lambda > 0$. Длительность производственного цикла на изготовление каждой единицы изделий (в дальнейшем будем называть его временем обработки изделия или временем обслуживания η) имеет показательное распределение с параметром $\mu > 0$. Обрабатывающее устройство обладает особенностью, состоящей в том, что в свободном, нерабочем состоянии, т.е. когда на предприятии нет заказов, оборудование немедленно отключается. При поступлении новых заказов оно сначала производит переналадку на выпуск новой партии изделий, а затем начинает выполнять поступившие заказы. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$.

Предположим также, что оборудование может выходить из строя и восстанавливаться, причем выход из строя возможен только во время обработки деталей. Рассмотрим случай, когда система после выхода оборудования из строя и восстановления функционирует следующим образом: если оборудование выходит из строя во время работы, то изделие, находящееся на обработке, теряется. Если в момент восстановления прибора в системе нет требований, то будем предполагать, что прибор переходит в состояние свободен не готов, т.е. дополнительную профилактику прибора в данном случае производить не нужно. Будем считать, что поток отказов обрабатывающего устройства – пуассоновский, с параметром $\chi > 0$, а время ремонта или время восстановления имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_2 > 0$.

Наряду с ремонтом оборудования, выполняемым ремонтной бригадой, есть еще одна бригада, которая независимо от первой бригады, проводит профилактику оборудования, которая начинается сразу же после того, как система освобождается от требований, причем длительность профилактики имеет показательный закон распределения с параметром ψ_1.

Решение задачи. Для нахождения характеристик системы - распределения совместных вероятностей того, что оборудование находится в определенном состоянии (переналадка, профилактика, восстановление или работа) и в системе имеется определенное количество требований, рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$, описывающий состояние системы в момент времени t, фазовое пространство которого имеет вид $E=\left\{(0,k),(1,k),(2,k),k\ge 0;\left(0^*,l\right),\left(2,0^*,l\right),l\ge 1\right\}$, где состояния

$(0,k)$ – означает, что прибор вышел из строя и восстанавливается, в системе $k\ge 0$ требований;

$(1,0)$ – означает, что прибор свободен – неготов;

$(1,k)$ – означает, что прибор работает и в системе $k\ge 1$ требований;

$\left(0^*,k\right)$ – означает, что прибор находится в состоянии переналадки и в системе $k\ge 1$ требований;

$\left(2,0^*,k\right)$ – означает, что прибор одновременно проводит профилактику и переналадку и в системе $k\ge 1$ требований;

$(2,k)$ – означает, что на приборе проводится профилактика и в системе $k\ge 0$ требований.

Пусть

$P_{ik}=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=(i,k)\right\},\ i=0,1,2;\,k\ge 0,\ P_{0^*k}=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=\left(0^*,k\right)\right\},\ k\ge 1,$

$P_{20^*k}=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=\left(2\,0^*,k\right)\right\},\ k\ge 1$

стационарные вероятности состояний рассматриваемого процесса $\xi(t)$.

Граф состояний описанной системы имеет вид (см. рис. 1). Используя граф состояний, легко можно составить системы алгебраических уравнений для стационарных вероятностей P_{ik} состояний процесса $\xi(t)$. Итак, имеем следующие системы алгебраических уравнений:

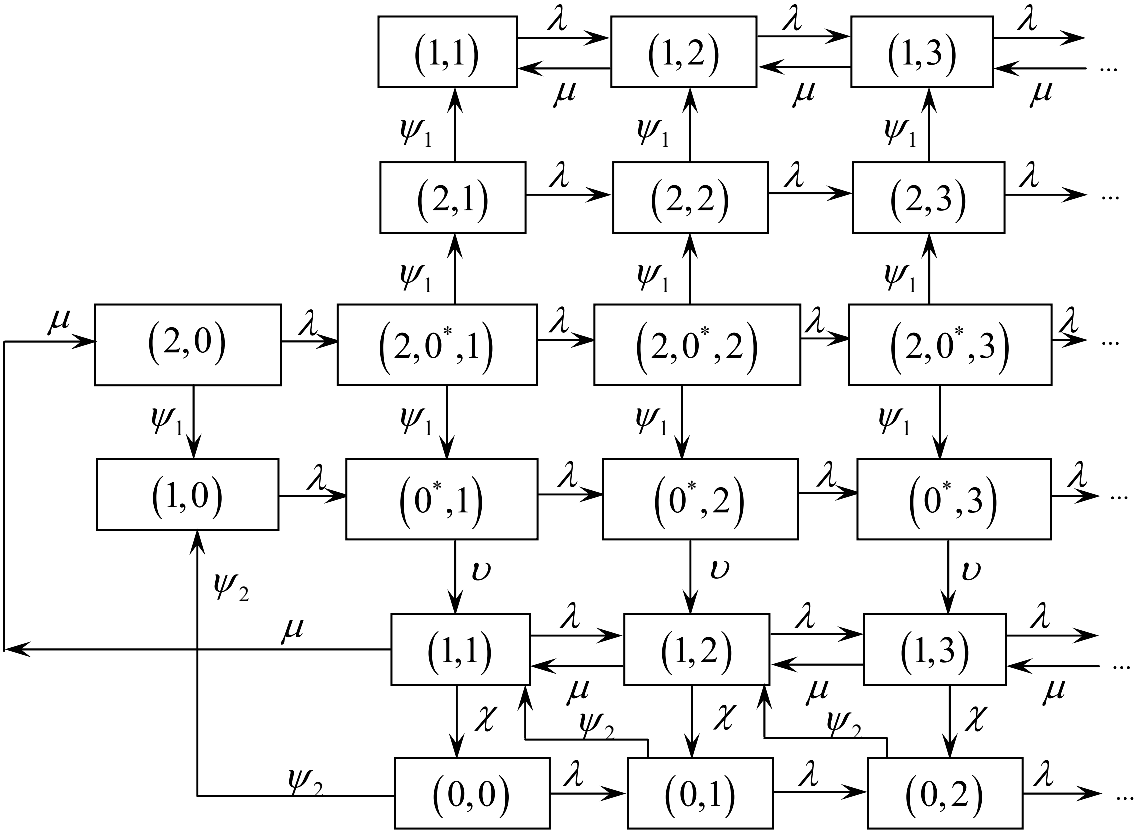

Рис. 1. Размеченный граф состояний системы

$$\begin{cases} -(\lambda+\upsilon)P_{0^*1}+\lambda P_{10}+\psi_1 P_{20^*1}=0 \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*2}+\lambda P_{0^*1}+\psi_1 P_{20^*2}=0 \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*k}+\lambda P_{0^*,k-1}+\psi_1 P_{20^*k}=0,\ k\geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_2)P_{00}+\chi P_{11}=0 \\ -(\lambda+\psi_2)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0,\ k\geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\lambda P_{10}+\chi_1 P_{20}+\chi_2 P_{00}=0 \\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{11}+\upsilon P_{0^*1}+\psi_1 P_{21}+\psi_2 P_{01}+\mu P_{12}=0 \\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{1k}+\lambda P_{1,k-1}+\upsilon P_{0^*k}+\psi_1 P_{2k}+\psi_2 P_{0k}+\mu P_{1,k+1}=0,\ k\geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_1)P_{20}+\mu P_{11}=0 \\ -(\lambda+\psi_1)P_{21}+\upsilon P_{20^*1}=0 \\ -(\lambda+\psi_1)P_{2k}+\upsilon P_{20^*k}+\lambda P_{2,k-1}=0,\ k\geq 2 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} -\left(\lambda+\psi_1+\nu\right)P_{20^*1}+\lambda P_{20}=0 \\ -\left(\lambda+\upsilon+\psi_1\right)P_{20^*2}+\lambda P_{20^*1}=0 \\ -\left(\lambda+\upsilon+\psi_1\right)P_{20^*k}+\lambda P_{20^*k-1}=0,\ k\geq 2 \end{cases} \tag{5}$$

Для решения систем (1) - (5) введем производящие функции

$a_0\left(z\right)=\sum\limits_{k\geq 0}P_{0k}z^k$, $\quad a_0^*\left(z\right)=\sum\limits_{k\geq 1}P_{0^*k}z^k$, $\quad a_1\left(z\right)=\sum\limits_{k\geq 0}P_{1k}z^k$,

$a_2\left(z\right)=\sum\limits_{k\geq 0}P_{2k}z^k$, $\quad a_2^*\left(z\right)=\sum\limits_{k\geq 1}P_{20^*k}z^k$.

Умножив уравнения системы (1) на z в соответствующих степенях, просуммировав и проведя элементарные преобразования, получаем, что

$$\left(\rho+\delta-\rho z\right)a_0^*\left(z\right)-\beta_1 a_2^*\left(z\right)=\rho z P_{10}, \tag{6}$$

где $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$, $\beta_1=\dfrac{\psi_1}{\mu}$, $\delta=\dfrac{\upsilon}{\mu}$.

Аналогично, умножая (2) на z в соответствующих степенях, суммируя полученные выражения, находим, что

$$z\left(\rho+\beta_2-\rho z\right)a_0\left(z\right)-\gamma a_1\left(z\right)=-\gamma P_{10}. \tag{7}$$

где $\beta_2=\dfrac{\psi_2}{\mu}$, $\gamma=\dfrac{\chi}{\mu}$

Из (3) легко выводим следующее соотношение

$$\begin{aligned} &\left(\rho z^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1\right)a_1\left(z\right)+\delta z a_0^*\left(z\right)+\beta_1 z a_2\left(z\right)+\beta_2 z a_0\left(z\right)= \\ &=\left(\rho z^2-z\left(1+\gamma\right)+1\right)P_{10}+zP_{11}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из системы (4) получаем уравнение вида

$$\left(\rho z-\rho-\beta_1\right)a_2\left(z\right)+\delta a_2^*\left(z\right)=\rho z P_{20}-P_{11}. \tag{9}$$

И, наконец, из системы (5) находим, что

$$a_2^*\left(z\right)=\frac{\rho z P_{20}}{\rho+\delta+\beta_1-\rho z}. \tag{10}$$

Выражения (6)-(10) содержат неизвестные вероятности P_{10}, P_{11} и P_{20}. Выразим их через только одну вероятность, например P_{10}. Для этого рассмотрим систему из первых уравнений систем (2), (3), (4):

$$\begin{cases} -(\rho+\beta_2)P_{00}+\gamma P_{11}=0 \\ -\rho P_{10}+\beta_1 P_{20}+\beta_2 P_{00}=0, \\ -(\rho+\beta_1)P_{20}+P_{11}=0 \end{cases}$$

решая которую находим, что

$$P_{20}=\frac{\rho(\rho+\beta_2)P_{10}}{\beta_1(\rho+\beta_2)+\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)}=C\cdot P_{10}, \tag{11}$$

$$P_{11}=\frac{\rho(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)P_{10}}{\beta_1(\rho+\beta_2)+\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)}=C\cdot(\rho+\beta_1)P_{10}, \tag{12}$$

где $$C=\frac{\rho(\rho+\beta_2)}{\beta_1(\rho+\beta_2)+\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)}. \tag{13}$$

Теперь с учетом полученных соотношений (11) и (12), выражения (8), (9) и (10) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}\left(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)+\beta_2 z a_0(z)= \\ =\left[\left(\rho z^2-z(1+\gamma)+1\right)+cz(\rho+\beta_1)\right]P_{10}.\end{gathered} \tag{14}$$

$$(\rho z-\rho-\beta_1)a_2(z)+\delta a_2^*(z)=\left(c\rho(z-1)-c\beta_1\right)P_{10}. \tag{15}$$

$$a_2^*(z)=\frac{c\rho z P_{10}}{\rho+\delta+\beta_1-\rho z}. \tag{16}$$

Теперь, из уравнения (6), с учетом (16) находим, что

$$a_0^*(z)=\frac{\rho(1-z)+\beta_1(1+c)+\delta}{(\rho+\delta+\beta_1-\rho z)(\rho+\delta-\rho z)}\rho z P_{10}, \tag{17}$$

а из (15) вытекает формула для $a_2(z)$ вида

$$a_2(z)=\frac{\left(c\rho(z-1)-c\beta_1\right)P_{10}-\delta a_2^*(z)}{\rho z-\rho-\beta_1}. \tag{18}$$

Для упрощения дальнейших вычислений, введем следующие обозначения:

$$d_1(z)=z(\rho+\beta_2-\rho z),\quad d_2(z)=\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1,$$

$$d_3(z)=\left[cz(\rho+\beta_1)+\rho z^2+1-z(1+\gamma)\right]P_{10}-\delta z a_0^*(z)-\beta_1 z a_2(z).$$

Тогда получаем следующую систему уравнений для определения $a_0(z)$ и $a_1(z)$:

$$\begin{cases} d_1(z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}, \\ d_2(z)a_1(z)+\beta_2 z a_0(z)=d_3(z). \end{cases} \qquad (19)$$

Решая полученную систему, находим, что:

$$a_0(z)=\frac{\gamma\left[d_3(z)-d_2(z)P_{10}\right]}{d_1(z)d_2(z)+\gamma\beta_2 z}, \qquad (20)$$

$$a_1(z)=\frac{d_1(z)d_3(z)+\gamma\beta_2 z P_{10}}{d_1(z)d_2(z)+\gamma\beta_2 z}. \qquad (21)$$

Для нахождения вероятности P_{10} воспользуемся условием нормировки $a_0(1)+a_0^*(1)+a_1(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1$. Непосредственной подстановкой значения $z=1$ в равенства (16)-(18) получаем, что

$$a_0^*(1)=\frac{\delta+\beta_1(1+c)}{(\delta+\beta_1)\delta}\rho P_{10};\quad a_2(1)=\frac{\delta c(\rho+\beta_1)+c\beta_1^2}{\beta_1(\delta+\beta_1)}P_{10};\quad a_2^*(1)=\frac{c\rho P_{10}}{\delta+\beta_1}.$$

Из первого уравнения системы (19) находим, что

$$a_1(z)=P_{10}+\frac{d_1(z)}{\gamma}a_0(z).$$

Следовательно, условие нормировки принимает вид

$$P_{10}+\frac{\gamma+\beta_2}{\gamma}a_0(1)+a_0^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1.$$

И задача сводится к вычислению величины $a_0(1)$. Нетрудно показать, что

$$a_0(1)=\frac{\gamma\left[\delta a_0^{*\prime}(1)+\beta_1 a_2'(1)\right]}{\beta_2(\gamma+1-\rho)-\rho\gamma} \qquad (22)$$

Из равенства (22) следует необходимое условие существования стационарных вероятностей состояний системы, а именно: $\beta_2(\gamma+1-\rho)-\rho\gamma>0$ или

$$\rho<\frac{\beta_2(1+\gamma)}{\beta_2+\gamma}. \tag{23}$$

Вычислив производные функций $a_0^*(z)$ и $a_2(z)$, а также их значения в точке $z=1$, после несложных преобразований, получаем соотношение

$$\delta a_0^{*\prime}(1)+\beta_1 a_2'(1)=\rho(P_{10}+a_0^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)).$$

Тогда условие нормировки принимает вид

$$P_{10}+\frac{\rho}{\beta_2(\gamma+1-\rho)-\rho\gamma}\left[P_0+P_{10}+a_0^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)\right]+\left[P_{10}+a_0^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)\right]=1,$$

где $a_0^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=\dfrac{\beta_1(\delta+\beta_1)(\rho+\delta C)+C\rho(\delta^2+\delta\beta_1+\beta_1^2}{\delta\beta_1+(\delta+\beta_1)}P_{10}$.

Обозначим через

$$K=\frac{(\gamma+\beta_2)\rho}{\beta_2(1+\gamma-\rho)-\rho z},$$

$$B=\frac{\beta_1(\delta+\beta_1)(\rho+\delta C)+C\rho(\delta^2+\delta\beta_1+\beta_1^2}{\delta\beta_1+(\delta+\beta_1)}.$$

Тогда условие нормировки можно представить в виде

$$P_{10}+K(1+B)P_{10}+BP_{10}=1.$$

Отсюда находим, что

$$P_{10}=\frac{1}{(1+K)(1+B)}.$$

Итак, нами найдены производящие функции вероятностей состояний системы и необходимое условие (23) существования стационарного распределения вероятностей состояний описанной системы.

Рассмотрим другой вариант поведения прибора после восстановления, а именно: после восстановления прибор переходит не в состояние (1,0), а в состояние (2,0). Граф состояний данной системы почти совпадает с предыдущим случаем и имеет вид, представленный на рис. 2.

Для состояний, представленных на размеченном графе (см. рис. 2), составляем бесконечные системы алгебраических уравнений следующего вида:

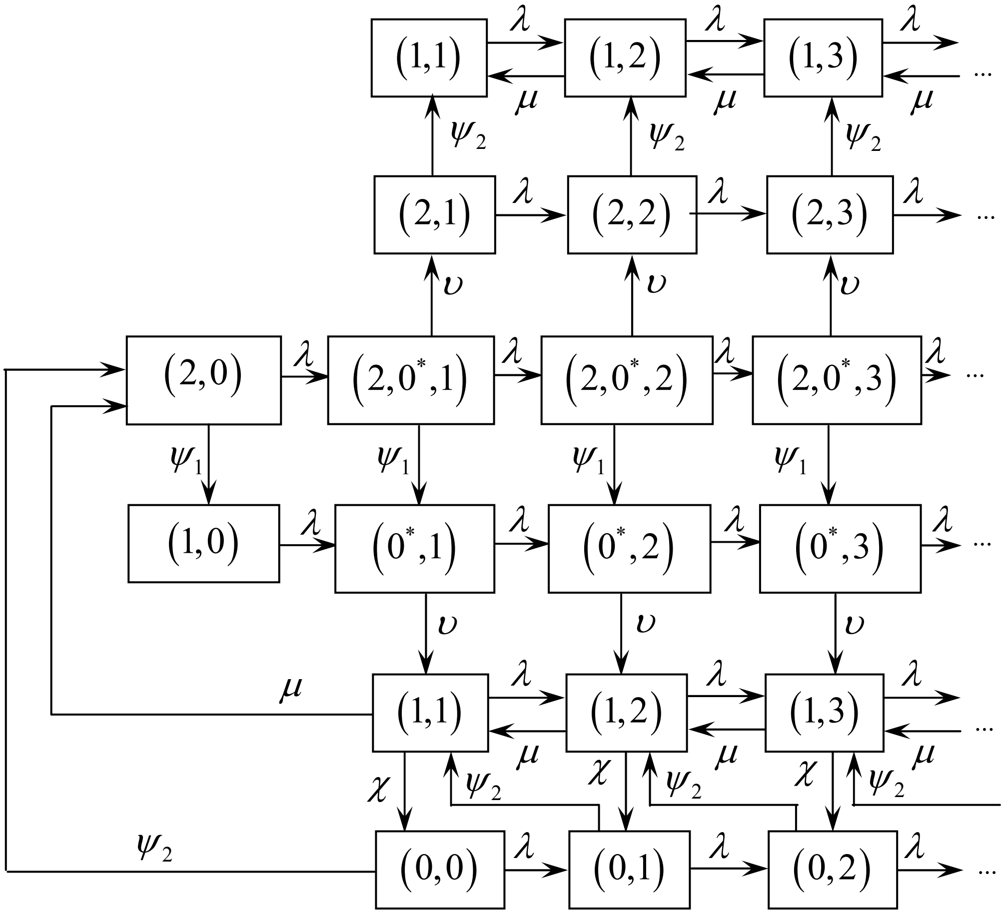

Рис. 2. Размеченный граф состояний системы с профилактикой

$$\begin{cases} -(\lambda+\upsilon)P_{0^*1}+\lambda P_{10}+\psi_1 P_{20^*1}=0, \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*2}+\lambda P_{0^*1}+\psi_1 P_{20^*2}=0, \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*k}+\lambda P_{0^*k}+\psi_1 P_{20^*k}=0, \quad k\geq 3. \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_2)P_{00}+\chi P_{11}=0, \\ -(\lambda+\psi_2)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0, \quad k\geq 1. \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} -\lambda P_{10}+\psi_1 P_{20}=0, \\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{11}+vP_{0^*1}+\psi_1 P_{21}+\psi_2 P_{01}+\mu P_{12}=0, \\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{1k}+vP_{0^*k}+\psi_1 P_{2k}+\psi_2 P_{0k}+\mu P_{1,k+1}+\lambda P_{1,k-1}=0,\ \ k\geq 2. \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_1)P_{20}+\mu P_{11}+\psi_2 P_{00}=0, \\ -(\lambda+\psi_1)P_{21}+vP_{20^*1}=0, \\ -(\lambda+\psi_1)P_{2k}+vP_{20^*k}+\lambda P_{2,k-1}=0, \quad k\geq 2. \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+v+\psi_1)P_{20^*1}+\lambda P_{20}=0, \\ -(\lambda+v+\psi_1)P_{20^*2}+\lambda P_{20^*1}=0, \\ -(\lambda+v+\psi_1)P_{20^*k}+\lambda P_{20^*,k-1}=0, \quad k\geq 3. \end{cases} \tag{28}$$

Для решения систем уравнений (24)-(28) введем следующие производящие функции:

$$a_0(z)=\sum_{k\geq 0}P_{1k}z^k, \qquad a_0^*(z)=\sum_{k\geq 1}P_{0^*k}z^k, \qquad a_1(z)=\sum_{k\geq 1}P_{1k}z^k,$$

$$a_2(z)=\sum_{k\geq 0}P_{2k}z^k, \qquad a_2^*(z)=\sum_{k\geq 1}P_{20^*k}z^k$$

Система уравнений (24) позволяет найти уравнение для производящих функций $a_0^*(z)$ и $a_2^*(z)$, а именно:

$$(\rho+\delta-\rho z)\, a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)=\rho z P_{10}. \tag{29}$$

Из системы (25) находим уравнение для производящих функций $a_0(z)$ и $a_1(z)$:

$$z(\rho+\beta_2-\rho z)\, a_0(z)-\gamma a_1(z)=0. \tag{30}$$

Система (26) дает уравнение, связывающее производящие функции, $a_0(z)$, $a_1(z)$, $a_0^*(z)$ и $a_2(z)$ вида

$$\left(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1\right) a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)+\beta_2 z a_0(z)=z(\beta_1 P_{20}+P_{11}+\beta_2 P_{00}). \tag{31}$$

Из системы (27) определяем соотношение для производящих функций $a_2^*(z)$ и $a_2(z)$ вида

$$\left(\beta_1+\rho-\rho z\right)a_2(z)-\delta a_2^*(z)=\beta_2 P_{00}+P_{11}-\rho z P_{20}. \tag{32}$$

Наконец, из системы уравнений (28) находим, что:

$$a_2^*(z)=\frac{\rho z P_{20}}{\delta+\beta_1+\rho-\rho z}. \tag{33}$$

Все выражения (29)-(33) содержат неизвестные вероятности P_{00}, P_{10}, P_{11}, P_{20}. Выразим вероятности P_{00}, P_{11} и P_{20} через одну вероятность P_{10}. Для этого составим новую систему, состоящую из первых уравнений систем (25), (26) и (27). Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -\left(\rho+\beta_2\right)P_{00}+\gamma P_{11}=0, \\ -\rho P_{10}+\beta_1 P_{20}=0, \\ -\left(\rho+\beta_1\right)P_{20}+P_{11}=0. \end{cases}$$

Решение последней системы (относительно P_{00}, P_{11} и P_{20}) может быть представлено в следующем виде:

$$P_{00}=\frac{\rho\gamma\left(\beta_1+\rho\right)}{\beta_1\left(\beta_2+\rho\right)}P_{10}, \tag{34}$$

$$P_{11}=\frac{\rho\left(\beta_1+\rho\right)}{\beta_1}P_{10}, \tag{35}$$

$$P_{20}=\frac{\rho}{\beta_1}P_{10}. \tag{36}$$

Подставив выражение (36) в равенство (33), получаем, что

$$a_2^*(z)=\frac{\rho^2 z}{\beta_1\left(\delta+\beta_1+\rho-\rho z\right)}P_{10}. \tag{37}$$

Тогда из (29) и (37) находим выражение для $a_0^*(z)$

$$a_0^*(z)=\rho z\left[\frac{1}{\delta+\rho-\rho z}+\frac{\rho}{\delta+\beta_1+\rho-\rho z}\right]P_{10}. \qquad (38)$$

Несложно показать, что $\beta_1 P_{20}+P_{11}+\beta_2 P_{10}=\rho\left[1+\frac{\rho+\beta_1}{\beta_1}\left(1+\frac{\gamma\beta_2}{\rho+\beta_2}\right)\right]P_{10}$.

Тогда равенство (31) принимает вид

$$\left(pz^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1\right)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)+\beta_2 z a_0(z)=\left(1+C_1\right)zP_{10}, \qquad (39)$$

где

$$C_1=\frac{\rho\left(\rho+\beta_1\right)}{\beta_1}\left(1+\frac{\gamma\beta_2}{\rho+\beta_2}\right).$$

Аналогично, уравнение (32) можно записать следующим образом

$$\left(\rho+\beta_1-\rho z\right)a_2(z)-\delta a_2^*(z)=\left(C_1-\frac{\rho^2 z}{\beta_1}\right)P_{10}.$$

Тогда из последнего равенства вытекает, что

$$a_2(z)=\frac{\delta a_2^*(z)+\left(C_1-\frac{\rho^2 z}{\beta_1}\right)P_{10}}{\rho+\beta_1-\rho z}$$

или

$$a_2(z)=\frac{\delta\beta_1 a_2^*(z)+\left(C_1\beta_1-\rho^2 z\right)P_{10}}{\left(\rho+\beta_1-\rho z\right)\beta_1}. \qquad (40)$$

Для того чтобы найти производящие функции $a_0(z)$ и $a_1(z)$ необходимо решить систему уравнений, составленную из выражений (30) и (39)

$$\begin{cases} z\left(\rho+\beta_2-\rho z\right)a_0(z)-\gamma a_1(z)=0, \\ \beta_2 z a_0(z)+\left(\rho z^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1\right)a_1(z)=\left(1+C_1\right)zP_{10}-\delta z a_0^*(z)-\beta_1 z a_2(z). \end{cases} \qquad (41)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений, введем следующие обозначения

$d_1(z)=z\left(\rho+\beta_2-\rho z\right)$, $d_2(z)=\rho z^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1$,

$$d_3(z)=(1+C_1)zP_{10}-\delta z a_0^*(z)-\beta_1 z a_2(z).$$

Тогда, с учетом введенных обозначений, система (41) принимает вид

$$\begin{cases} d_1(z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=0, \\ \beta_2 z a_0(z)+d_2(z)a_1(z)=d_3(z). \end{cases} \tag{42}$$

Решая систему (42) находим величины

$$a_0(z)=\frac{\gamma d_3(z)}{d_1(z)d_2(z)+\gamma\beta_2 z}, \tag{43}$$

$$a_1(z)=\frac{d_1(z)d_3(z)}{d_1(z)d_2(z)+\gamma\beta_2 z}. \tag{44}$$

Теперь во всех выражениях (37), (38), (40), (43), (44) присутствует только одна неизвестная вероятность P_{10}, которую определяем из условия нормировки

$$P_{10}+a_0(1)+a_0^*(1)+a_1(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1. \tag{45}$$

Несложно показать, что

$$a_0^*(1)=\frac{\rho(\rho+\delta+\beta_1)}{\delta(\delta+\beta_1)}P_{10}, \tag{46}$$

$$a_2^*(1)=\frac{\rho^2}{\beta_1(\delta+\beta_1)}P_{10}, \tag{47}$$

$$a_2(1)=\left[\frac{\delta\rho^2}{\beta_1^2(\delta+\beta_1)}+\frac{C_1\beta_1-\rho^2}{\beta_1^2}\right]P_{10}. \tag{48}$$

Кроме того, из первого уравнения системы (42) следует, что

$$a_1(z)=\frac{d_1(z)}{\gamma}a_0(z).$$

Следовательно,

$$a_0(1)+a_1(1)=\frac{d+\beta_2}{\gamma}a_0(1). \tag{49}$$

Таким образом, задача сведена к вычислению значения $a_0(1)$. Можно показать, что

$$a_0(1)=\frac{\gamma\left(\delta a_0^{*\prime}(1)+\beta_1 a_2'(1)\right)}{\beta_2(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma}. \tag{50}$$

Из равенства (47) следует необходимое условие существования стационарных вероятностей состояний системы

$$\beta_2(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma>0 \text{ или } \rho<\frac{\beta_2(1+\gamma)}{\beta_2+\gamma}.$$

Из (46)-(48), после преобразований, получаем

$$a_0^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=\left[\frac{\rho}{\delta}+\frac{\rho^2}{\delta(\delta+\beta_1)}+\frac{C_1}{\beta_1}\right]P_{10}. \tag{51}$$

Можно показать, что

$$\delta a_0^{*\prime}(1)+\beta_1 a_2{}'(1)=\rho\left[1+\frac{\rho}{\delta}+\frac{\rho^2}{\delta(\delta+\beta_1)}+\frac{C_1}{\beta_1}\right]P_{10}. \tag{52}$$

Обозначим

$$K_1=\frac{(\gamma+\beta_2)\rho}{\beta_2(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma} \text{ и } K_2=\frac{\rho}{\delta}+\frac{\rho^2}{\delta(\delta+\beta_1)}+\frac{C_1}{\beta_1}.$$

Тогда, с учетом равенств (49)-(52), условие нормировки принимает вид $P_{10}+K_1(1+K_2)P_{10}+K_2P_{10}=1$ или $(1+K_1)(1+K_2)P_{10}=1$. Отсюда получаем, что

$$P_{10}=\frac{1}{(1+K_1)(1+K_2)}$$

или

$$P_{10} = \frac{\beta_2\left(1-\rho+\gamma\right)}{\beta_2\left(1+\gamma\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\delta} + \frac{\rho^2}{\delta\left(\delta+\beta_1\right)} + \frac{\rho\left(\rho+\beta_1\right)}{\beta_1^2}\left(1+\frac{\gamma\beta_2}{\rho+\beta_2}\right)\right)}.$$

Итак, нами найдены все основные характеристики системы обслуживания с ненадежным прибором, переналадкой и профилактическим обслуживанием, которые позволят при необходимости определить экономические показатели функционирования такого варианта построения эксплуатации и обслуживания производственной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комплексные оценки в системе рейтингового управления предприятием /Белый А.П., Лысенко Ю.Г., Мадых А.А., Макаров К.Г.; под общ. ред. Ю.Г. Лысенко. – Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд». 2003. – 120 с.
2. Омельченко В.Я., Омельченко А.П., Кузнецов В.Г. Управление материальными потоками в микроэкономике. – Севастополь: Вебер, 2003. – 263с.
3. Демьянчук В.С., Броди С.М. Надежность обслуживаемых радиоэлектронных систем. – Киев: Вища школа, 1976. – 160 с.
4. Румянцев Н.В. Медведева М.И. Об одном подходе к определению оптимальной партии товара с учетом ненадежности оборудования// Вісн. Донец. національного ун-ту. Сер. В. – Економіка і право. Спецвипуск. – Т. 2. – Донецьк: 2006. – С. 24-31.
5. Румянцев Н.В. Медведева М.И. Об одном подходе к определению оптимальной партии товара с учетом ненадежности оборудования // Вісн. Хмельницького національного ун-ту. – № 3. – Том 1(92). – Економічні науки. Хмельницький: 2007. – С. 27-32.