Румянцев Н.В., д.э.н., проф.,
Донецкий национальный технический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ В СЛУЧАЕ ИХ ВЫХОДА ИЗ СТРОЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ

АННОТАЦИЯ. *В работе рассматривается транспортно-логистическая система по обслуживанию потребителей, причем для обработки (или обслуживания) каждого заказа выделяется ровно два транспортных средства. Каждое транспортное средство в случайный момент времени может выйти из строя и восстанавливаться. Восстановление транспортного средства производится водителями данного транспортного средства. Найдены основные характеристики данной системы.*

SUMMARY. *In work the transport-logistical system serving consumers is considered, and for its service to it is allocated exactly two cars which in the course of movement to the consumer can fail and be restored by forces of drivers. Two classes of systems of the mass service, describing functioning of transportno-logistical system are considered: system with refusals and expectation. The basic characteristics of the given system are found: throughput, probabilities of risk of default of the order.*

ВВЕДЕНИЕ. Простейшие задачи оптимизации грузоперевозок ставились ранее как транспортная задача математического программирования без ограничений на количество транспортных средств. Однако на практике оперативное управление поставками осуществляется в условиях дефицита транспортных средств. Поэтому одной из основных проблем распределительной логистики является проблема планирования, организации и управления транспортно-перемещающими процессами в логистической системе, а также, связанная с ней проблема управления доставкой товара потребителю и контроль за выполнением транспортно-перемещающих операций в логистических цепях поставки [3, 4]..

Первая задача тесно связана с проблемой определения оптимального числа транспортных средств. Решение данной проблемы в условиях надежной работы транспортных средств рассмотрено в работе [2]. Решение второй проблемы (задача маршрутизации) тесно связано с мониторингом процесса доставки товара, с анализом ситуаций, возникающих во время движения транспортного средства, в том числе с проблемами, возникающими при выходе транспортного средства из строя и его восстановления, с созданием необходимого для ремонта запасного оборудования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ. Модели массового обслуживания описывают системы, процессы в которых многократно повторяются. Система массового обслуживания в зависимости от числа каналов и их производительности обладает определенной пропускной способностью, позволяющей ей более или менее справляться с потоком заявок. Задачей любой системы массового обслуживания является установление зависимости между характером потока заявок, производительностью каналов, их числом и эффективностью обслуживания. Особенно полезно применение теории массового обслуживания при управлении транспортными потоками и управлении запасами.

Итак, предположим, что имеется транспортная логистическая система по обслуживанию потребителей, на вход которой поступает случайный поток заказов, распределенный по пуассоновскому закону, с интенсивностью $\lambda > 0$. Будем считать, что для обработки (или обслуживания) каждого заказа выделяется ровно два транспортных средства, каждый из которых обслуживает заказ случайное время, распределенное по показательному закону с интенсивностью $\mu > 0$. Каждое транспортное средство в случайный момент времени может выйти из строя, причем будем считать, что время безотказной работы транспортного средства распределено по показательному закону с параметром $\theta > 0$. Предполагается восстановление транспортного средства, которое производится водителями данного транспортного средства, причем время восстановления всех транспортных средств всеми водителями имеет одинаковую длительность, распределенную по экспоненциальному закону с параметром $\eta > 0$.

Будем предполагать, что в транспортно-логистической системе находится $2m$ транспортных средств и, если клиент, поступивший в систему, застает все транспортные средства занятыми, то он немедленно уходит из нее необслуженным, т.е. получает отказ.

Для оценки состояний системы и принятия перспективных и оперативных решений, необходимо иметь ее вероятностные характеристики. С целью определения характеристик описанной системы представим ее в виде модели системы массового обслуживания.

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, описывающий поведение нашей системы, который характеризуется следующими состояниями:

(0) – система свободна, т.е. в транспортно-логистической системе нет заявок от клиентов на их обслуживание;

$(0,1)$ – в системе имеется один заказ, который принят к обслуживанию двумя транспортными средствами;

$(0,k)$ – в системе имеется k заказов $(k=2,3,...,m)$, которые приняты к обслуживанию транспортно-логистической системой;

$(1,k)$ – одно транспортное средство, выполняющее заказ вышло из строя, а в системе находится k заказов $(k=1,2,...,m)$;

$(2,k)$ – оба транспортных средства, выполняющих k-ый заказ вышли из строя, $k=1,2,...,m$.

Граф описанной системы имеет вид

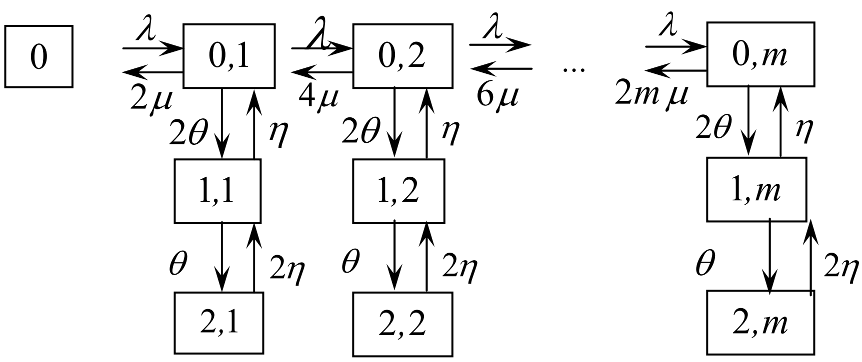

Рис. 1 Размеченный граф состояний, описывающий работу транспортно-логистической системы

Опираясь на размеченный граф состояний (рис. 1) составим систему алгебраических уравнений для стационарных вероятностей системы

$$P_{00} = \mathbb{P}\left\{\xi(t) = 0\right\},\ P_{ik} = \mathbb{P}\left\{\xi(t) = (i,k)\right\}, \quad i = 0, 1, 2;\ k = 1, 2, ..., m.$$

Имеем следующие соотношения для стационарных вероятностей транспортно-логистической системы

$$-\lambda P_0 + 2\mu P_{01} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} -(\lambda + 2\mu + 2\theta)P_{01} + \lambda P_0 + \eta P_{11} + 2\mu P_{02} = 0 \\ -(\eta + \theta)P_{11} + 2\theta P_{01} + 2\eta P_{21} = 0 \\ -2\eta P_{21} + \theta P_{11} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -(\lambda + 2\mu k + 2\theta)P_{0k} + \lambda P_{0,k-1} + \eta P_{1k} + 2(k+1)\mu P_{0,k+1} = 0 \\ -(\eta + \theta)P_{1k} + 2\theta P_{0k} + 2\eta P_{2k} = 0 \\ -2\eta P_{2k} + \theta P_{1k} = 0, \qquad\qquad k = 2, 3, ..., m-1. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -(2m\mu + 2\theta)P_{0m} + \lambda P_{0,m-1} + \eta P_{1m} = 0 \\ -(\eta + \theta)P_{1m} + 2\theta P_{0m} + 2\eta P_{2m} = 0 \\ -2\eta P_{2m} + \theta P_{1m} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Сложив все уравнения систем (2)-(4) получим, что

$$\begin{cases} -(\lambda + 2\mu)P_{01} + \lambda P_0 + 4\mu P_{02} = 0 \\ -(\lambda + 4\mu)P_{02} + \lambda P_{01} + 6\mu P_{03} = 0 \\ \vdots \\ -(\lambda + 2k\mu)P_{0k} + \lambda P_{0,k-1} + 2\mu(k+1)P_{0,k+1} = 0,\ k = 1, 2, ..., m-1 \\ -2m\mu P_{0m} + \lambda P_{0,m-1} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $\rho = \lambda / 2\mu$, тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} -(\rho + 1)P_{01} + \rho P_0 + 2P_{02} = 0 \\ -(\rho + k)P_{0k} + \rho P_{0,k-1} + (k+1)P_{0,k+1} = 0,\ k = 2, 3, ..., m-1 \\ -mP_{0m} + \rho P_{0,m-1} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

С учетом уравнения (1)

$$-\rho P_0 + P_{01} = 0 \tag{7}$$

решение системы (6) даст следующие выражения для вероятностей P_{0k}:

$$\begin{aligned} &P_{01} = \rho P_0, \\ &P_{0k} = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \ k = 2, 3, \ldots, m, \end{aligned} \tag{8}$$

т.е. получаем обычные формулы Эрланга для n-канальной системы массового обслуживания типа $M/M/n/0$ с отказами [4].

Вычислим вероятности P_{1k} и P_{2k}, учитывая, что состояния $(1, k)$ и $(2, k)$ образуют процесс гибели и размножения. Очевидно, что

$$\begin{cases} P_{11} = 2\beta\rho P_0, & P_{21} = \beta^2 \rho P_0, \\ P_{12} = \beta\rho^2 P_0, & P_{22} = \beta^2 \dfrac{\rho^2}{2!} P_0, \\ P_{1k} = 2\beta \dfrac{\rho^k}{k!} P_0, & P_{1k} = \beta^2 \dfrac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k = 2, 3, \ldots, m, \end{cases} \tag{9}$$

где $\beta = \theta / \eta$.

Для нахождения вероятности P_0 воспользуемся условием нормировки

$$P_0 + \sum_{k=1}^{m} P_{1k} + \sum_{k=1}^{m} P_{2k} + \sum_{k=1}^{m} P_{0k} = 1. \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражения из (8) и (9) получаем, что

$$P_0 = \left(1 + \left(1 + \beta\right)^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Определим пропускную способность транспортно-логистической системы. Существуют две величины, позволяющие это сделать:

- относительная пропускная способность;

- абсолютная пропускная способность.

Относительная пропускная способность $A_{o\,t\,n}$ определяет вероятность того, что клиент будет обслужен. В нашем случае она равна величине

$$A_{o\,t\,n} = 1 - \frac{\rho^m}{m!} P_0 .$$

Абсолютная пропускная способность транспортно-логистической системы равна $A_{abs} = \lambda A_{otn}$.

Найденные вероятности (8), (9), (11) позволяют определить степень риска или вероятность P_{11} невыполнения заказа в срок, связанного с поломкой транспортного средства во время его движения к заказчику, которая равна сумме вероятностей P_{1k} и P_{2k}, а именно

$$\mathbb{P}_{n\,j\,t} = \sum_{k=1}^{m} \left(P_{1k} + P_k \right) = \beta \left(2 + \beta \right) \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{k\,!} P_0 . \qquad (12)$$

Отметим, что величина

$$\sum_{k=1}^{m} P_{1k} = 2\beta \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{k!} P_0 \qquad (13)$$

определяет вероятность частичного выполнения заказа, т.е. выполнения заказа только одним транспортным средством транспортно-логистической системы.

Знание вероятности $\mathbb{P}_{n\,j\,t}$ из формулы (12) позволяет определить степень риска всей транспортно-логистической системы по обслуживанию потребителей.

Но знание вероятностей P_{1k} и P_{2k}, кроме того, позволит проводить и мониторинг транспортно-логистической системы, определяя при каждом значении k $(k = 1, 2, ...m)$ - числе обслуживаемых потребителей, вероятность невыполнения взятых на себя обязательств по перевозке конкретного груза потребителю, причем только лишь по причине выхода одного или двух транспортных средств из строя во время их движения. Для любого фиксированного числа k, обслуживаемых системой потребителей сумма вероятностей $P_{1k} + P_{2k}$ как раз и определяет степень риска, т.е. вероятность невыполнения k-го заказа в срок.

Полученные в (8) формулы для вероятностей P_{0k}, как уже отмечалось выше, совпадают с формулами Эрланга, справедливыми для систем массового обслуживания с отказами. Этот результат позволяет сделать предположение о том, что если отказаться от предположения о том, что транспортно-логистическая система работает в режиме чистой системы с отказами, то формулы Эрланга будут справедливы и для более сложных моделей организации транспортно-логистического обслуживания потребителей. Покажем справедливость данного результата.

Рассмотрим вначале случай, когда клиенты, поступившие в транспортно-логистическую систему, ожидают окончания своего обслуживания независимо от длительности времени нахождения в очереди. В данном случае транспортно-логистическая система моделируется m- канальной системой массового обслуживания с ожиданием. Состояния данной системы почти полностью совпадают с состояниями рассмотренной ранее системы с отказами, но к ним добавляются еще следующие состояния:

$(0, m+1)$ - в системе имеется $m+1$ заказ, причем m заказов обрабатываются, а один находится в очереди;

$(0, m+k)$- в системе имеется $m+k$ заказов, причем m заказов обрабатываются, а k заказов находится в очереди ($k = 1, 2, \ldots$).

Тогда, учитывая, что заказы, находящиеся в очереди, не влияют на вероятности состояний системы до момента, пока все транспортные средства заняты, т.е. когда система находится в состояниях (0), $(1, k)$, $(2, k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то для системы с ожиданием справедливы соотношения (1), (2-4), к которым добавляется следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + 2\mu m) P_{0,m+1} + \lambda P_{0,m} + 2m\,\mu P_{0,m+2} = 0, \\ -(\lambda + 2\mu m) P_{0,m+k} + \lambda P_{0,m+k-1} + 2m\,\mu P_{0,m+k+1} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases} \qquad (14)$$

Решение системы (14) дает формулы Эрланга для указанных вероятностей

$$P_{m+k} = \frac{\rho^{m+k}}{m!m^k} P_0,\ k \geq 1. \qquad (15)$$

В данном случае вероятность P_0, определяемая из условия нормировки, будет равна

$$P_0 = \left(1 + (1+\beta)^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right)^{-1}.$$

Отметим тот факт, что вероятности невыполнения заказа и вероятность частичного выполнения заказа имеют тот же вид, что и выражения (12), (13), полученные для транспортно-логистической системы с отказами.

Наиболее практичной можно считать ситуацию, при которой транспортно-логистическая система работает в условиях, когда имеются нетерпеливые клиенты, т.е. клиенты, которые могут ожидать ограниченное время, а затем уходить из данной системы необслуженными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Итак, в работе рассмотрена простейшая система массового обслуживания с ненадежным оборудованием, описывающая функционирование транспортно-логистической системы. В дальнейшем можно рассмотреть систему, в которой обслуживание осуществляется переменным числом или случайным числом транспортно-логистической системы. Кроме того, можно рассмотреть случай, когда за один рейс осуществляется поставка товара сразу нескольким потребителям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николайчук В.Е. Логистика / В.Е. Николайчук. – СПб: Питер, 2001. – 160 с.
2. Николайчук В.Е. Теория и практика управления материальными потоками (логистическая концепция): монография / В.Е. Николайчук, В.Г. Кузнецов. – Донецк: ДонГУ, «КИТИС», 1999. – 413 с.
3. Мизевич Р.С. Модель определения основных характеристик распределительной логистической системы /Н.В.Румянцев, Р.С. Мизевич // Міжнародний науковий журнал "Єкономічна кібернетика".– Донецьк:

ДонНУ. - 2009. - № 3-4 (57-58).- С. 77-82.

4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: Наука, Наука, 1987. – 336 с.