УДК 31:336

Методы определения оптимального портфеля ценных бумаг на основе многокритериальных задач

Румянцев Н.В., профессор кафедры математики и математических методов в экономике Донецкого национального университета
Медведева М.И., доцент кафедры математики и математических методов в экономике Донецкого национального университета

АННОТАЦИЯ. В работе рассмотрены вопросы построения оптимального портфеля Марковица на основе многокритериальной задачи. Для решения данной проблемы был рассмотрен обобщенный критерий, позволяющий в определенной мере заменить двухкритериальную задачу на обычную однокритериальную.

В современной портфельной теории, которая пытается дать математически строгое, обоснованное решение о размещении своих сбережений в разные виды инвестиций. Начало современной портфельной теории было положено работой Гарри Марковица 1952г. [1]. В основу портфельной теории Марковица положена идея о том, что инвестиции оцениваются исключительно по двум параметрам: ожидаемой доходности и риску, измеряемому как величина стандартного отклонения доходности. Независимо от индивидуальных предпочтений все инвесторы стремятся сформировать эффективный портфель, который обеспечивал бы ему либо минимальную степень риска для выбранного дохода, либо максимальный доход при заданной степени риска. Этот подход и сама задача выбора эффективного портфеля в такой постановке носит название модели Марковица. Сформулируем в общем виде математическую постановку задачи выбора оптимального портфеля.

Пусть, существует n активов, каждый из которых обеспечивает случайную величину доходности ξ_i (i=1,...,n), причем μ_i - ожидаемая (средняя) доходность i-го актива (математическое ожидание случайной величины ξ_i: $\mu_i = M\xi_i$) и пусть $\sigma_i = \sqrt{D\xi}$ - стандартное отклонение доходности i-го актива, а σ_{ij} - ковариация между доходностями i-го и j-го активов - $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$, где ρ_{ij} - коэффициент корреляции случайных величин ξ_i и ξ_j.

Модель Марковица можно сформулировать следующим образом: необходимо найти такие пропорции распределения средств между доступными активами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (где x_i - доля средств, инвестируемых в i-й актив), чтобы риск портфеля при заданном уровне доходности был бы минимальным. Математически модель можно сформулировать так: найти

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu_p$$

По своей сути, модель Марковица можно отнести к классу задач многокритериальной оптимизации, так как эта модель может быть уточнена в следующем направлении: найти такое распределение инвестиций, при котором риск вложения был бы минимальным, а доходность – максимальна.

При решении задач многокритериальной оптимизации решение, как правило, находится в терминах доминирования по Парето [2]. Во-первых, следует отметить, что при решении задач многокритериальной оптимизации вводится понятие позитивного критерия. Позитивным называется критерий, если лицо принимающее решение (ЛПР) стремится к его увеличению, а негативным, если он стремится к уменьшению. При решении многокритериальной задачи оптимизации все критерии должны быть позитивными, для чего у негативного критерия меняется знак на противоположный.

Исход принятия решения называют Парето-оптимальным, если он не доминируется по Парето никаким другим исходом из множества возможных исходов. Парето-оптимальность некоторого исхода означает, что он не может быть улучшен ни по одному критерию, без ухудшения его значения по какому-нибудь другому критерию. Тем не менее, следует отметить, что кандидатом на оптимальное решение многокритериальной задачи оптимизации может быть только Парето-оптимальный исход, число которых может быть несколько, (а в непрерывном случае - бесконечное множество). Дать однозначный ответ на вопрос, какой же из Парето-оптимальных исходов следует считать оптимальным, для общего случая, не имея дополнительной информации о критериях, невозможно. Дело в том, что любые два Парето-оптимальных исхода не сравнимы относительно доминирования по Парето.

Общая методика исследования задач принятия решений на основе математического моделирования для многокритериальных ЗПР может быть реализована в рамках одного из следующих подходов.

Первый подход. Для заданной многокритериальной ЗПР находится множество ее Парето-оптимальных исходов, а выбор конкретного оптимального исхода из множества Парето-оптимальных предоставляется принимающему решение.

Второй подход. Производится сужение множества Парето-оптимальных исходов (в идеале - до одного элемента) с помощью некоторых формализованных процедур, что облегчает окончательный выбор исхода для принимающего решение. Отметим, что такое сужение может быть произведено только при наличии дополнительной информации о критериях или о свойствах оптимального решения.

Рассмотрим некоторые простейшие способы сужения Парето-оптимального множества, акцентируя при этом внимание на необходимой дополнительной информации.

а) *Указание нижних границ критериев.* Отметим, что указание нижних границ по критериям не может быть «извлечено» из математической модели задачи принятия решений (ЗПР). При указании нижних границ критериев, оптимальным может считаться только такой Парето-оптимальный исход, для которого оценка по каждому из критериев не ниже назначенной оценки. Таким образом, происходит сужение Парето-оптимального множества. Ясно, что при увеличении значений нижних границ критериев, Парето-оптимальное множество «сокращается».

При использовании этого метода окончательный выбор Парето-оп-тимального исхода производится из суженного Парето-оптимального множества принимающим решение (на основе субъективных соображений).

Основной недостаток этого метода состоит в том, что оптимальное решение становится здесь субъективным, так как зависит, во-первых, от величин назначаемых нижних границ критериев и, во-вторых, от окончательного выбора, совершаемого принимающим решение.

б) ***Субоптимизация.*** В данном случае выделяют один из критериев, а по всем остальным критериям назначают нижние границы. Оптимальным при этом считается исход, максимизирующий выделенный критерий на множестве исходов, оценки которых по остальным критериям не ниже назначенных.

С помощью метода субоптимизации задача многокритериальной оптимизации превращается в задачу «обычной» (скалярной) оптимизации на суженном допустимом множестве. Выделение одного из критериев, а также указание нижних границ для остальных критериев основано на дополнительной информации, получаемой от лица, принимающего решение. Следовательно, окончательное решение здесь также имеет субъективный характер. *Модель Марковица относится как раз к данному методу решения многокритериальной задачи оптимизации*.

в) Лексикографическая оптимизация основана на упорядочении критериев по их относительной важности. После этого процедуру нахождения оптимального решения проводят следующим образом. На первом шаге отбирают исходы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такой исход единственный, то его и считают оптимальным. Если же таких исходов несколько, то среди них отбирают те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерием и т. д. В результате такой процедуры всегда остается (по крайней мере, в случае конечного множества исходов) единственный исход — он и будет оптимальным.

Основными недостатками метода лексикографической оптимизации являются следующие:

1. При практическом применении данного метода возникают содержательные трудности в установлении полной упорядоченности критериев по их относительной важности.
2. Фактически при использовании этого метода принимается во внимание только первый - важнейший критерий. Например, следующий за ним по важности критерий учитывается только тогда, когда важнейший критерий достигает максимума на нескольких исходах.
3. Решение задачи нахождения оптимального портфеля в данном случае также представляет определенный интерес.
4. Решение многокритериальной задачи оптимизации может быть решена заданием обобщенного критерия оптимальности. Задание обобщенного критерия превращает задачу многокритериальной оптимизации в задачу однокритериальной оптимизации. Первоначально кажется, что это наиболее естественный способ. Однако, на пути построения итоговой «синтетической» оценки имеются весьма существенные, а подчас и непреодолимые препятствия. Принципиальная сложность построения обобщенного критерия заключена в том, что приходится «соотносить» друг с другом критерии, характеризующие объект с разных сторон; эти критерии имеют часто совершенно различную природу, в силу чего оценки по ним даются *в* разных шкалах. Построение итоговой («интегральной») оценки невозможно без соизмерения критериев между собой, что требует большой дополнительной информации об относительной важности этих критериев для лица, принимающего решение. В качестве такой дополнительной информации предлагается рассматривать локальный коэффициент замещения.

Определение. Пусть имеются два критерия u и v. Локальным коэффициентом замещения (ЛКЗ) называется число

$$k = \lim_{\Delta u \to 0}\left(-\frac{\Delta v}{\Delta u}\right).$$

Если ЛКЗ константа, то обобщенный критерий представим в виде взвешенной суммы частных критериев. В общем случае, когда локальный коэффициент замещения $k = k(u,v)$, является функцией от u и v, то он находится как решение дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{du} = -k(u,v) \qquad (2)$$

Каждая интегральная кривая уравнения (2) представляет собой кривую безразличия, а однопараметрическое семейство всех интегральных кривых, рассматриваемых в некоторой области *Q,* составляет карту безразличий. Таким образом, при заданном в аналитической форме ЛКЗ задача построения карты безразличий сводится к задаче интегрирования диференциалъного уравнения (2).

Применим вышеизложенное к решению задачи выбора оптимального портфеля при помощи построения обобщенного критерия. Постановка задачи Марковица относится к классу задач принятия решений в условиях риска.

Наиболее заманчивым является «соединение» указанных двух критериев в единый (обобщенный) критерий. Возьмем в качестве обобщенного критерия функцию

$$f(\lambda, M\xi, \sigma) = M\xi - \lambda\sigma\,. \qquad (3)$$

где λ - некоторая постоянная величина. Фактически критерий (2) представляет собой взвешенную сумму частных критериев:

1) Математического ожидания $M\xi$, значение которого должно стремиться к максимуму;

2) среднего квадратического отклонения σ, значение которого должно стремиться к минимуму

с весовыми коэффициентами 1 и - λ. При $\lambda > 0$ оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия (3) меньше, чем ее среднее значение, что характерно для осторожного человека, т.е. человека, не склонного к риску. Напротив, при $\lambda < 0$ оценка (3) больше, чем ее среднее значение, что характеризует человека, склонного к риску. Наконец, при $\lambda = 0$ оценка (3) случайной величины совпадает с ее средним значением (т.е. возможные отклонения случайной величины от ее среднего значения игнорируются) - это характеризует человека, безразличного к риску. В качестве основного будем далее рассматривать случай, когда принимающий решение не склонен к риску, т.е. $\lambda > 0$.

Содержательный смысл обобщенного критерия (3) при $\lambda > 0$ состоит в том, что увеличение критерия $f(\lambda, M\xi, \sigma)$ может происходить как за счет увеличения $M\xi$, так и за счет уменьшения σ. Таким образом, для человека, не склонного к риску, критерий (3) отражает стремление к увеличению ожидаемого выигрыша и уменьшению риска отклонения от него. При этом показатель λ характеризует субъективное отношение принимающего решение к риску: чем больше λ, тем в большей степени он не склонен рисковать; таким образом, λ можно рассматривать как субъективный показатель меры несклонности ЛПР к риску (субъективный показатель осторожности).

При использовании критерия (3) учет риска отклонения от ожидаемого значения выигрыша производится следующим образом. Ожидаемый выигрыш уменьшается или увеличивается (в зависимости от того, имеется «несклонность» или склонность к риску) на величину, равную произведению показателя риска σ (представляющего собой объективную характеристику меры риска), на субъективный показатель λ, характеризующий отношение принимающего решение к риску.

Что можно сказать о мере склонности или несклонности к риску по величине показателя λ? Например, большая ли несклонность к риску у человека, для которого $\lambda = 3$? Для ответа на этот вопрос воспользуемся известным в теории вероятностей неравенством Чебышева. Пусть принимающий решение не склонен к риску. Так как оценкой случайной величины ξ служит число $M\xi - \lambda\sigma$, то «неприятность» для принимающего решение наступает тогда, когда $\xi < M\xi - \lambda\sigma$. Оценим вероятность этого события. В этом случае выполняется неравенство $M\xi - \xi > \lambda\sigma$, следовательно, $|\xi - M\xi| > \lambda\sigma$. В силу неравенства Чебышёва, вероятность последнего соотношения меньше, чем $\dfrac{D\xi}{(\lambda\sigma)^2} = \dfrac{\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Итак, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее ее оценки $M\xi - \lambda\sigma$ не превосходит $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Итак, если $\lambda = 3$, то вероятность того, что случайная величина «не опустится» ниже оценки $M\xi - 3\sigma$, будет не менее $\dfrac{8}{9}$, т.е. почти 90%. Такую степень риска можно считать невысокой, т.е. значение $\lambda = 3$ соответствует «достаточно большой степени осторожности» (или «достаточно высокой несклонности к риску»).

Покажем, как устанавливается предпочтение альтернатив по обобщенному критерию (3). Будем считать, что принимающий решение не склонен к риску ($\lambda > 0$.). Как установлено выше, в этом случае он стремится увеличить ожидаемый выигрыш и уменьшить риск, т.е. критерий $M\xi$ будет здесь позитивным, а критерий σ — негативным. Пусть (b_i) - некоторое множество альтернатив, каждая из которых характеризуется парой показателей $(M\xi_i, \sigma_i)$. Зафиксируем какие-то две альтернативы $a_{i1} = (M\xi_{i1}, \sigma_{i1})$ и $a_{i2} = (M\xi_{i2}, \sigma_{i2})$, для которых можно определить значения критерия (3) $f(a_{i1}) = M\xi_{i1} - \lambda\sigma_{i1}$ и $f(a_{i2}) = M\xi_{i2} - \lambda\sigma_{i2}$. Возможны два случая:

а) Альтернативы a_{i1} и a_{i2} сравнимы по Парето. Пусть, например, $a_{i1} \overset{Par}{>} a_{i2}$. Тогда $M\xi_{i1} \geq M\xi_{i2}$ и $\sigma_{i1} \leq \sigma_{i2}$ (причем хотя бы одно неравенство строгое), значит, $M\xi_{i1} - \lambda\sigma_{i1} > M\xi_{i2} - \lambda\sigma_{i2}$. Таким образом, в этом случае независимо от меры несклонности принимающего решение к риску (т.е. от значения показателя $\lambda > 0$) альтернатива a_{i1} более предпочтительна, чем альтернатива a_{i2} (этот факт записывается в виде $a_{i1} \succ a_{i2}$.

б) Альтернативы a_{i1} и a_{i2} несравнимы по Парето. Пусть, например, $M\xi_{i1} > M\xi_{i2}$, а $\sigma_{i1} > \sigma_{i2}$ (т.е. больший ожидаемый выигрыш здесь всегда сопровождается большим риском). Условие $M\xi_{i1} - \lambda\sigma_{i1} > M\xi_{i2} - \lambda\sigma_{i2}$ равносильно тому, что $\lambda < \dfrac{M\xi_{i1} - M\xi_{i2}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}}$. На основании чего, в этом случае имеем, что

$$a_{i1} \succ a_{i2} \text{ если } \lambda < \frac{M\xi_{i1} - M\xi_{i2}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}};$$

$$a_{i1} \prec a_{i2}, \text{ если } \lambda > \frac{M\xi_{i1} - M\xi_{i2}}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}}.$$

Таким образом, решение многокритериальной ЗПР в основном сводится к проблеме определения показателя несклонности или склонности ЛПР к риску. В дальнейшем из двух альтернатив выбирается та, для которой значение функционала (2) максимально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мертенс А.В. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории / А.В.Мертенс. – К.: Киевское инвестиционное агентство, 1997. – 416с.
2. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике / В.В.Розен. – М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002. – 288с.

Румянцев Н.В., Медведева М.И Методы определения оптимального портфеля ценных бумаг на основе многокритериальных задач

РЕЗЮМЕ.

В работе рассматривается классическая модель Марковица и предлагается несколько методов ее решения как многокритериальной задачи оптимизации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Модель Марковица, многокритериальная оптимизация, портфель ценных бумаг, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение.

Румянцев М.В., Медведєва М.І. Методи визначення оптимального портфеля цінних паперів на основі багатокритерійних задач

РЕЗЮМЕ.

У роботі розглядається класична модель Марковіца і пропонується декілька методів її рішення як багатокритерійної задачі оптимізації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Модель Марковіца, багатокритерійна оптимізація, портфель цінних паперів, математичне очікування, середнє квадратичне відхилення.

Rumyantsev N.V., Medvedeva M.I. Methods of determination of optimal portfolio of securities on the basis of multicriterion tasks

KEYWORDS: The Markovytsa Model, multicriterion optimization, brief-case of securities, expected value, mean quadratic deviation.

SUMMARY.
In work the classic model Markovytsa is examined and a few methods of its decision as multicriterion task of optimization are offered.