

УДК 517.2 + 517.3 + 517.5 (071).

МІНІМАЛЬНІ ПОВЕРХНІ

Корольов Є. О., Корольов М. Є., Кірноз І. А.

MINIMAL SURFACES

E. Korolev, M. Korolev, I. Kirnoz

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Королёв Е. А., Королёв М. Е., Кирноз И. А.

Результати роботи можуть бути покладені в основу написання інших робіт і застосовані в різних сферах діяльності. Подальше використання навичок, набутих в процесі написання даної роботи, можуть бути реалізовані в подальшому, при виконанні робіт, що стосуються побудови поверхонь.

Ключові слова: Шерк, мінімальні поверхні, рівняння Лагранжа, циліндричні поверхні, теорема, катеноїд.

Актуальность данной работы заключается в том, что результаты работы могут быть положены в основу написания других работ и применены в различных сферах деятельности. Последующее использование навыков, приобретенных в процессе написания данной работы, могут быть реализованы в дальнейшем, при выполнении работ, касающихся построения поверхностей.

Ключевые слова: Шерк, минимальные поверхности, уравнение Лагранжа, цилиндрические поверхности, теорема, катеноид.

1. Введение

Исследования, о которых идёт речь в статье, относятся к области фундаментальных и прикладных аспектов математики и кибернетики. Актуальность рассматриваемой темы нашей статьи является обоснованной и нами доказанной, так как данная работа является составляющей процесса обучения в сфере минимальных поверхностей. В процессе написания статьи будут получены навыки работы с построением минимальных, цилиндрических поверхностей, а так же поверхностей переноса. Рациональное использование полученных знаний даст возможность для дальнейшего исследования и написания других работ, касающихся построения поверхностей. Наша работа является наглядным пособием того, как знания о минимальных поверхностях из одной области могут стать надёжным помощником во многих других отраслях нашей деятельности, в случае умелого использования приобретённых навыков.

1. Определение минимальной поверхности

Пусть M^2 с R^3 - двумерная гладкая поверхность, где R^3 отнесено к декартовым координатам x, y, z . Пусть поверхность задается радиус-вектором

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\} \quad (1)$$

где параметры U и V изменяются в некоторой области D на евклидовой плоскости, причем они определяют регулярные координаты в окрестности точки $P \in M^2$. (рис. 1).

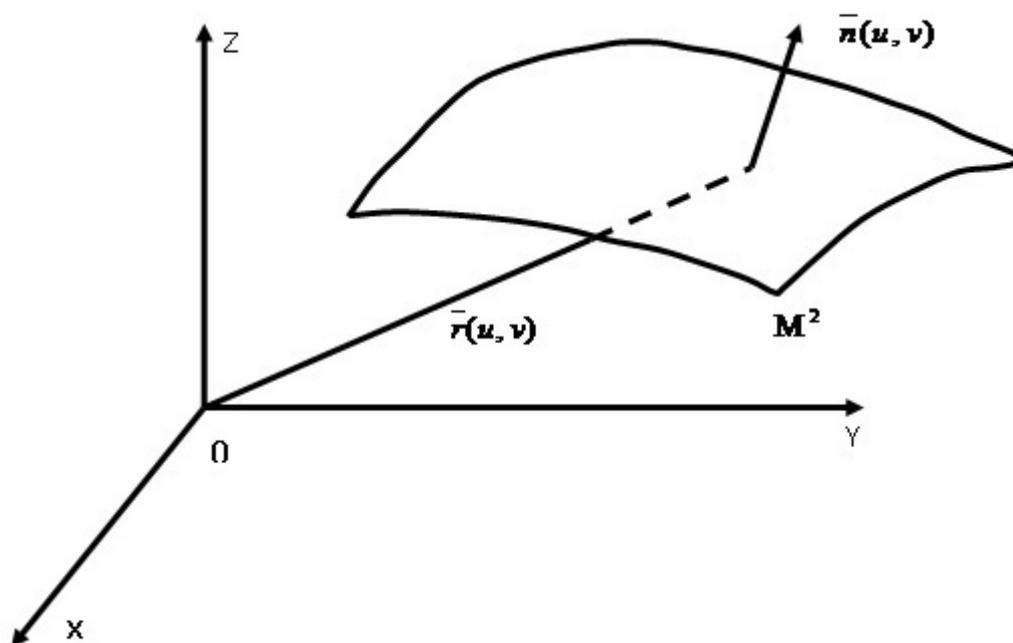


Рис. 1 - Двумерная гладкая поверхность

В этом случае первая квадратичная форма имеет вид

$$I = Edu^2 + 2Fdu + Gdv^2; \quad (2)$$

где

$$E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u), \quad F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v), \quad G = (\bar{r}_v, \bar{r}_v),$$

а площадь поверхности M^2 выражается двойным интегралом по области D задания параметров u и v по формуле:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv \quad (3)$$

Минимальная поверхность определяется следующим свойством: если на поверхности M^2 взять любую достаточно малую область с границей Γ , то

площадь этой области будет наименьшей среди всех гладких поверхностей с этой границей.

2. Эксперименты Плато с мыльными пленками

Когда бельгийский физик Плато (1801-1883 г.г.) начал опыты по изучению конфигурации мыльных пленок, он вряд ли предполагал, что они послужат толчком к возникновению значительного научного направления, бурно развивающегося до настоящего времени и известного сегодня под общим названием проблема Плато. В 1866 году Плато установил, что если погрузить в мыльный раствор замкнутый контур Γ (например, из проволоки), то после его извлечения оттуда образуется поверхность M^2 минимальной площади по сравнению с любой другой поверхностью, которую можно натянуть на этот контур, т.е. минимальная поверхность.

3. Вторая квадратичная форма поверхности и средняя кривизна

Граница раздела двух сред, находящихся в равновесии, является поверхностью постоянной средней кривизны.

Для поверхности (1) вторая квадратичная форма записывается обычно в виде:

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Vdv^2 \quad (4)$$

где

$$L = -(\overline{r_{uu}}, \overline{n}), \quad M = -(\overline{r_{uv}}, \overline{n}), \quad N = -(\overline{r_{vv}}, \overline{n})$$

$\overline{n} = \overline{n}(u, v)$ - единичный вектор нормали к поверхности (рис. 1).

Обозначим матрицы I и II квадратичных форм соответственно

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Тогда следующие две скалярные функции

$$K = \det A^{-1}B \quad H = \text{Spur} A^{-1}B \quad (5)$$

являются инвариантами относительно преобразования координат и являются важными геометрическими характеристиками и называются гауссовой и средней кривизнами соответственно. В данный момент особый интерес представляет для нас средняя кривизна

$$H = \text{Spur} A^{-1}B = \text{Spur} \frac{1}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} =$$

$$Spur \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL & -FM & GM & -FM \\ -FL & +EM & -FM & +EN \end{pmatrix} = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} \quad (6)$$

Важный шаг в понимании внутренней геометрии поверхностей раздела сред был сделан Пуассоном, который в 1828 году показал, что поверхность раздела двух сред, находящаяся в равновесии (при условии, что мы пренебрегаем силой тяжести), является поверхностью постоянной средней кривизны.

Пуассон доказал, что если двумерная гладкая поверхность M^2 с R^3 является границей раздела двух сред, находящихся в равновесии, то средняя кривизна H поверхности постоянна и равна

$$H = h(P_1 - P_2) \quad (7)$$

где постоянная $\lambda = \frac{1}{h}$ называется коэффициентом поверхностного натяжения, P_1 и P_2 - давления в средах, а $P_1 - P_2$ - разность давления в средах.

Особый интерес представляет случай мыльной пленки, натянутой на проволочный контур L . Здесь разности давлений с обеих сторон пленки нет. Следовательно, давление на одну сторону пленки совпадает с давлением на противоположную её сторону в окрестности каждой точки на поверхности. Здесь $H = h(P_1 - P_2) = const = 0$. Итак, равнодействующая сил равна нулю, а поэтому средняя кривизна пленки, как минимальной поверхности, равна нулю.

Равенство нулю средней кривизны H для минимальных поверхностей доказал Менье еще в 1776 году в мемуаре "О кривизне поверхности". В большинстве работ XIX века и в настоящее время минимальные поверхности определялись и изучались именно исходя из равенства $H = 0$. Мы также будем иметь в виду именно это определение.

4. Уравнение Лагранжа

Рассмотрим минимальные поверхности вида

$$Z = Z(x, y) \quad (8)$$

т.е. поверхности, для которых $H = 0$.

Перейдем к параметрическому заданию поверхности (8). Для этого положим $X = X(u) = u$, $Y = Y(v) = v$ тогда $Z = Z(x(u), y(v)) = Z(u, v)$ и поверхность (8) можно задать в следующем параметрическом виде вектор – функцией

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \{u, v, z, (u, v)\} \quad (9)$$

Вычислим коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности (9)

Т.к.

$$\bar{r}_u = \{1 \ 0 \ Z_u\}, \quad \bar{r}_v = \{0 \ 1 \ Z_v\},$$

$$\bar{r}_{uu} = \{0 \ 0 \ Z_{uu}\}, \quad \bar{r}_{vv} = \{0 \ 0 \ Z_{vv}\}, \quad Z_{uv} = \{0 \ 0 \ Z_{uv}\},$$

то

$$E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u) = 1 + Z_u^2, \quad F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v) = Z_u Z_v,$$

$$G = (\bar{r}_v, \bar{r}_v) = 1 + Z_v^2$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u + \bar{r}_v}{|\bar{r}_u + \bar{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & Z_u \\ 0 & 1 & Z_v \end{vmatrix}}{Z_u + Z_v} = \frac{-Z_u \bar{i} - Z_v \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{(-Z_u)^2 - (-Z_v)^2 + 1}} = \frac{-Z_u \bar{i} - Z_v \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}}$$

$$L = -(\bar{r}_{uu}, \bar{n}) = -\frac{Z_{uu}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}}; \quad M = -(\bar{r}_{uv}, \bar{n}) = -\frac{Z_{uv}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}};$$

$$N = -(\bar{r}_{vv}, \bar{n}) = -\frac{Z_{vv}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}}$$

и так как $H = 0$, то из (6) следует, что

$$GL - 2FM + EN = 0 \quad (10)$$

Подставим в (10) выражения для E, F, G, L, M, N получим

$$(1 + Z_v^2) \left(-\frac{Z_{uu}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}} \right) - 2Z_u Z_v \left(-\frac{Z_{uv}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}} \right) + (1 + Z_u^2) \left(-\frac{Z_{vv}}{\sqrt{Z_u^2 + Z_v^2 + 1}} \right) = 0$$

Откуда

$$(1 + Z_v^2)Z_{uu} - 2Z_u Z_v Z_{uv} + (1 + Z_u^2)Z_{vv} = 0$$

Учитывая, что $u = x, v = \varphi$, последнее уравнение примет вид

$$(1 + Z_\varphi^2)Z_{xx} - 2Z_x Z_\varphi Z_{x\varphi} + (1 + Z_x^2)Z_{\varphi\varphi} = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) называется уравнением Лагранжа. Это нелинейное уравнение второго порядка в частных производных было получено Лагранжем

в 1760 году при минимизации площади поверхности $z = z(x, y)$

Используем уравнение Лагранжа для нахождения отдельных минимальных поверхностей.

5. Минимальные поверхности вращения

Пусть кривая $X = x(u), Z = z(u)$, принадлежащая плоскости XOZ вращается вокруг оси OZ. Тогда уравнение полученной поверхности вращения будет иметь вид

$$\begin{cases} x = x(u) \cos v \\ y = x(u) \sin v \\ z = z(u) \end{cases} \quad (12)$$

Исключая параметры u и v из (12), получим

$$Z = Z(x^2 + y^2) \quad (13)$$

Воспользуемся полярными координатами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (14)$$

Легко найти следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi, & r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \varphi_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} * \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \\ \varphi_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} * \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как функция $Z = Z(r^2)$ не зависит от φ , то

$$Z_\varphi = 0 \quad (16)$$

С учетом (15) и (16) имеем:

$$\begin{aligned} Z_x &= Z_r r_x + Z_\varphi \varphi_x = Z_r \cos \varphi, \\ Z_y &= Z_r r_y + Z_\varphi \varphi_y = Z_r \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{xx} &= (Z_x)_x = (Z_r \cos \varphi)_x = (Z_r \cos \varphi)_r r_x + (Z_r \cos \varphi)_\varphi \varphi_x = \\
&= Z_{rr} \cos^2 \varphi + Z_r \frac{\sin^2 \varphi}{r}, \\
Z_{xy} &= (Z_x)_\varphi = (Z_r \cos \varphi)_{r\varphi} + (Z_r \cos \varphi)_\varphi \varphi_\varphi = \\
&= Z_{rr} \cos \varphi \sin \varphi - Z_r \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}, \\
Z_{yy} &= (Z_\varphi)_\varphi = (Z_r \cos \varphi)_\varphi = (Z_r \cos \varphi)_r r_\varphi + (Z_r \cos \varphi)_\varphi \varphi_\varphi = \\
&= Z_{rr} \sin^2 \varphi + Z_r \frac{\cos^2 \varphi}{r},
\end{aligned} \tag{17}$$

Используя соотношение (17), уравнение Лагранжа (11) примет вид

$$\begin{aligned}
&(Z_{rr} \cos^2 \varphi + Z_r \frac{\sin^2 \varphi}{r})(1 + Z_r^2 \sin^2 \varphi) - 2(Z_{rr} \cos \varphi \sin \varphi - Z_r \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}) * \\
&* (1 + Z_r \cos \varphi)(1 + Z_r \sin \varphi) + (Z_{rr} \sin^2 \varphi + Z_r \frac{\cos^2 \varphi}{r}) * (1 + Z_r^2 \cos^2 \varphi) = 0
\end{aligned}$$

После несложных преобразований, получим

$$Z_{rr} + (Z_r + Z_r^3) * \frac{1}{r} = 0$$

Найдем решение этого уравнения. Имеем

$$\frac{Z_{rr}}{Z_r + Z_r^3} = -\frac{1}{r} \tag{18}$$

Положим $Z_r = P$, тогда $Z_{rr} = P_r = \frac{dP}{dr}$ и уравнение (18) примет вид

$$\frac{dP}{P(1+P^2)} = -\frac{dr}{r}; \quad \int \frac{dP}{P(1+P^2)} = -\int \frac{dr}{r}.$$

Так как $\frac{1}{P(1+P^2)} = \frac{1}{P} - \frac{P}{1+P^2}$, то

$$\int (\frac{1}{P} - \frac{P}{1+P^2}) dP = -\int \frac{dr}{r},$$

$$\ln P - \frac{1}{2} \ln(1+P^2) = -\ln r - \ln c,$$

где C – постоянная.

Разрешим это уравнение относительно P .

$$\begin{aligned} \ln \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} &= \ln \frac{1}{cr}; & \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} &= \frac{1}{cr}; & \frac{\sqrt{1+P^2}}{P} &= cr, \\ \frac{1+P^2}{P^2} &= c^2 r^2; & \frac{1}{P^2} + 1 &= c^2 r^2; & \frac{1}{P^2} &= c^2 r^2 - 1; \\ P^2 &= \frac{1}{c^2 r^2 - 1}; & P &= \pm \sqrt{\frac{1}{c^2 r^2 - 1}} \end{aligned}$$

Поверхность симметрична относительно плоскости $Z = 0$, поэтому возьмем верхнюю часть, для которой

$$P = \sqrt{\frac{1}{c^2 r^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 r^2 - 1}}$$

Так как $P = \frac{dz}{dr}$, то

$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\sqrt{c^2 r^2 - 1}}; \quad dz = \frac{dr}{\sqrt{c^2 r^2 - 1}} = \frac{1}{c} \frac{d(cr)}{\sqrt{(cr)^2 - 1}} \quad (19)$$

$$\int dz = \frac{1}{c} \int \frac{d(cr)}{\sqrt{(cr)^2 - 1}}; \quad Z = \frac{1}{c} \ln \left| cr + \sqrt{c^2 r^2 - 1} \right| + c_1$$

где c_1 - постоянная, которую можно положить равную нулю, т.к. этого всегда можно добиться сдвигом на постоянную величину всей поверхности вдоль оси OZ .

Из уравнения (19) следует

$$e^{cz} = cz + \sqrt{c^2 r^2 - 1}, \quad e^{-cz} = \frac{1}{cr + \sqrt{c^2 r^2 - 1}}$$

Складывая полученные уравнения, имеем

$$\begin{aligned} e^{cz} + e^{-cz} &= cz + \sqrt{c^2 r^2 - 1} + \frac{1}{cr + \sqrt{c^2 r^2 - 1}} = \\ &= \frac{c^2 r^2 + 2cr\sqrt{c^2 r^2 - 1} + c^2 r^2 - 1 + 1}{cr + \sqrt{c^2 r^2 - 1}} = 2cr. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{e^{cz} + e^{-cz}}{2} = cr$$

откуда

$$chcz = cr \quad \text{или} \quad chcz = c\sqrt{x^2 + y^2} \quad (20)$$

Уравнение (20) является уравнением катеноида, т.е. поверхности, полученной вращением цепной линии

$$x = \frac{1}{c} chcz \quad (21)$$

вокруг оси OZ, (рис. 2).

Действительно, уравнение (21) можно записать в следующем виде

$$ch = chcz$$

откуда

$$z = \frac{1}{c} archcz$$

Или в параметрическом виде

$$\begin{cases} z \\ z = \frac{1}{c} archcz \end{cases} \quad (22)$$

где C - параметр.

Вращая кривую (22) вокруг OZ, получим уравнение катеноида в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = \frac{1}{c} archcr \end{cases} \quad (23)$$

Исключая параметры z и y, получим уравнение катеноида

$$z = \frac{1}{c} archcr \sqrt{x^2 + y^2} -$$

в явном виде, или

$$chcz = c\sqrt{x^2 + y^2} -$$

в неявном виде.

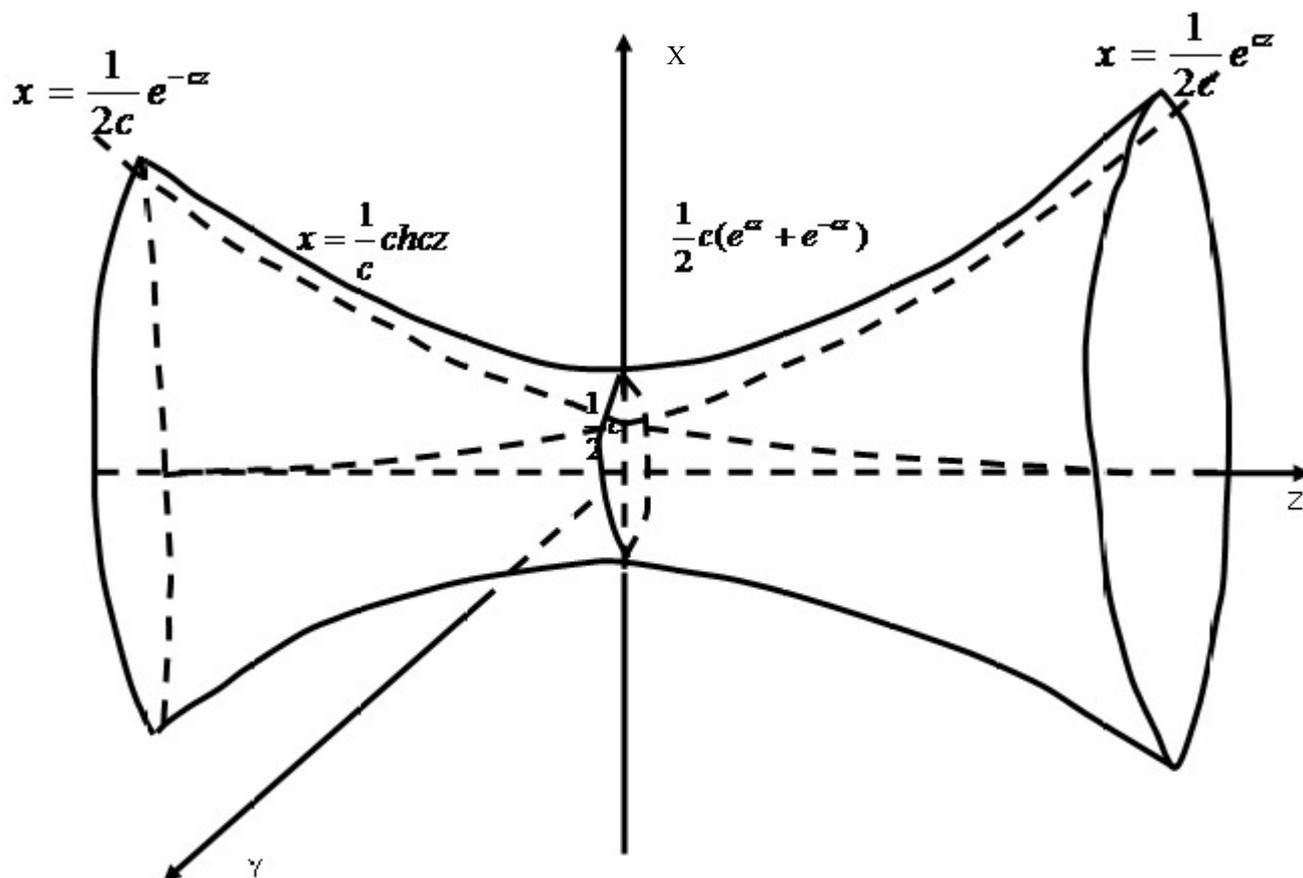


Рис. 2 - Поверхность, полученная вращением цепной линии

Так как при $z=0$ функция $x = \frac{1}{c} \operatorname{ch} cz$ равна $\frac{1}{c}$, то радиус окружности пересечения катеноида с плоскостью $z=0$ равен $\frac{1}{c}$.

Таким образом, единственной поверхностью вращения, удовлетворяющей уравнению Лагранжа, т.е. являющейся минимальной поверхностью вращения, есть катеноид (20).

6. Минимальные поверхности в классе поверхностей вида

$$Z = Z(\varphi)$$

Рассмотрим класс поверхностей вида

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z(\varphi) \end{cases} \quad (24)$$

где криволинейными координатами φ и r служат полярные координаты.

Выделим из этого класса минимальные поверхности, т.е. те поверхности, которые удовлетворяют уравнению Лагранжа (11).

Используя (14), для поверхностей вида (24) запишем

$$\begin{aligned} Z_x &= -Z_\varphi \frac{\sin \varphi}{r} ; & Z_y &= Z_\varphi \frac{\cos \varphi}{r} ; \\ Z_{xx} &= Z_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + 2Z_\varphi \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} ; \\ Z_{xy} &= -Z_{\varphi\varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - Z_\varphi \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} - Z_\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} ; \\ Z_{yy} &= Z_{\varphi\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} - 2Z_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} . \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, находим, что уравнение Лагранжа (11) приобретает для таких поверхностей особенно простой вид

$$Z_{\varphi\varphi} = 0$$

Дважды интегрируя это уравнение, получим

$$Z = k\varphi + c, \quad (25)$$

где k и c - постоянные.

Константу C можно положить равную нулю, т.к. этого всегда можно добиться сдвигом на эту постоянную величину всей поверхности вдоль оси OZ .

Учитывая (25), поверхность (24) примет вид

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = r\varphi \end{cases} \quad (26)$$

Исключая параметры φ и r , получим уравнение поверхности в явном виде

$$z = k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (27)$$

которая называется геликоидом - поверхность, образованная прямой

линией, которая вращается вокруг оси OZ и одновременно движется параллельно ей (винтовая поверхность).

Таким образом, единственной минимальной поверхностью класса (24) является геликоид (27) (винтовая поверхность).

7. Минимальные поверхности переноса

Поверхностью переноса называют поверхность, полученную в результате движения кривой $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u)$ без деформации вдоль другой кривой $\bar{r}_2 = \bar{r}_2(v)$.

Поверхности переноса можно задать в следующем векторном виде

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{r}_1(u) + \bar{r}_2(v) \quad (28)$$

Известна следующая теорема

Теорема. Единственной минимальной поверхностью переноса является поверхность Шерке

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \frac{1}{a} \left\{ \arccos u, \arccos v, \ln \frac{u}{v} \right\} \quad (29)$$

То, что поверхность (29) является поверхностью переноса, следует из того, что ее можно представить в виде (28), где

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(u) &= \frac{1}{a} \{ \arccos u, 0, \ln u \} \\ \bar{r}_2(v) &= \frac{1}{a} \{ 0, \arccos v, -\ln v \} \end{aligned}$$

или в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a} \arccos u \\ y = \frac{1}{a} \arccos v \\ z = \frac{1}{a} \ln \frac{u}{v} \end{cases} \quad (30)$$

Исключая параметры u и v в уравнении (30), приходим к явному заданию поверхности Шерке

$$z = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos ax}{\cos ay} \quad (31)$$

Покажем, что поверхность (31) удовлетворяет уравнению Лагранжа (11), т.е. является минимальной поверхностью.

Действительно, из уравнения (31) следует

$$Z_x = \frac{1}{a} \frac{\cos ax}{\cos ay} \left(-\frac{a \sin ax}{\cos ay} \right) = -tgax$$

$$Z_y = \frac{1}{a} \frac{\cos ax}{\cos ay} \left(-\frac{\cos ax}{\cos^2 ay} (-a \sin ay) \right) = tgay$$

$$Z_{xx} = -\frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$Z_{yy} = -\frac{a}{\cos^2 ay}; \quad Z_{xy} = 0$$

Подставим полученные значения в уравнение Лагранжа (11), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{\cos^2 ax} (1 + tg^2 ay) - 2 * 0 (-tgax) tgay + \frac{a}{\cos^2 ay} (1 + tg^2 ax) = \\ & = -\frac{a}{\cos^2 ax} * \frac{1}{\cos^2 ay} - \frac{a}{\cos^2 ax} * \frac{1}{\cos^2 ax} \equiv 0 \end{aligned}$$

8. Минимальные цилиндрические поверхности

Поверхность, образованная прямыми, параллельными заданной прямой l и пересекающими заданную кривую L , называется цилиндрической поверхностью (или цилиндром) (рис. 3).

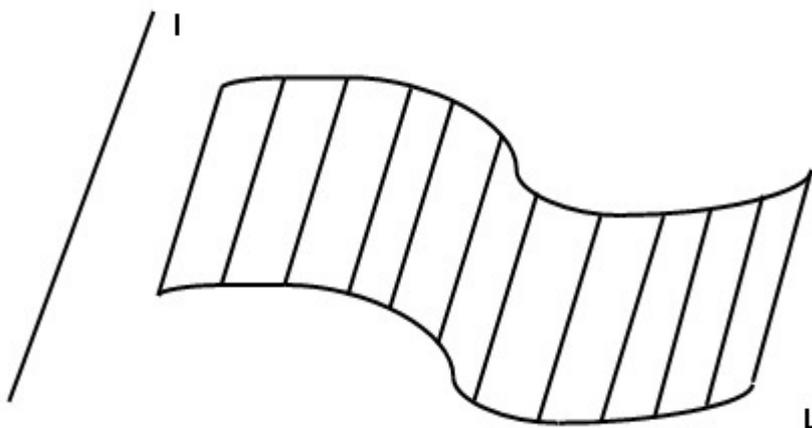


Рис. 3 – Цилиндрическая поверхность

Кривую L называют направляющей цилиндра. Прямые, которые образуют цилиндр, называют образующими цилиндра.

Теорема. Единственной минимальной цилиндрической поверхностью является плоскость.

Доказательство. То, что плоскость

$$z = ax + by + c \quad (32)$$

является минимальной поверхностью следует из того, что функция (32) удовлетворяет уравнению Лагранжа (11).

Так как любую цилиндрическую поверхность можно получить перемещением направляющей L вдоль любой ее образующей, то цилиндрические поверхности являются поверхностями переноса. А так как единственной минимальной поверхностью переноса является поверхность Шерке (рис. 4), которая не есть цилиндрическая поверхность, то из этого следует справедливость теоремы.

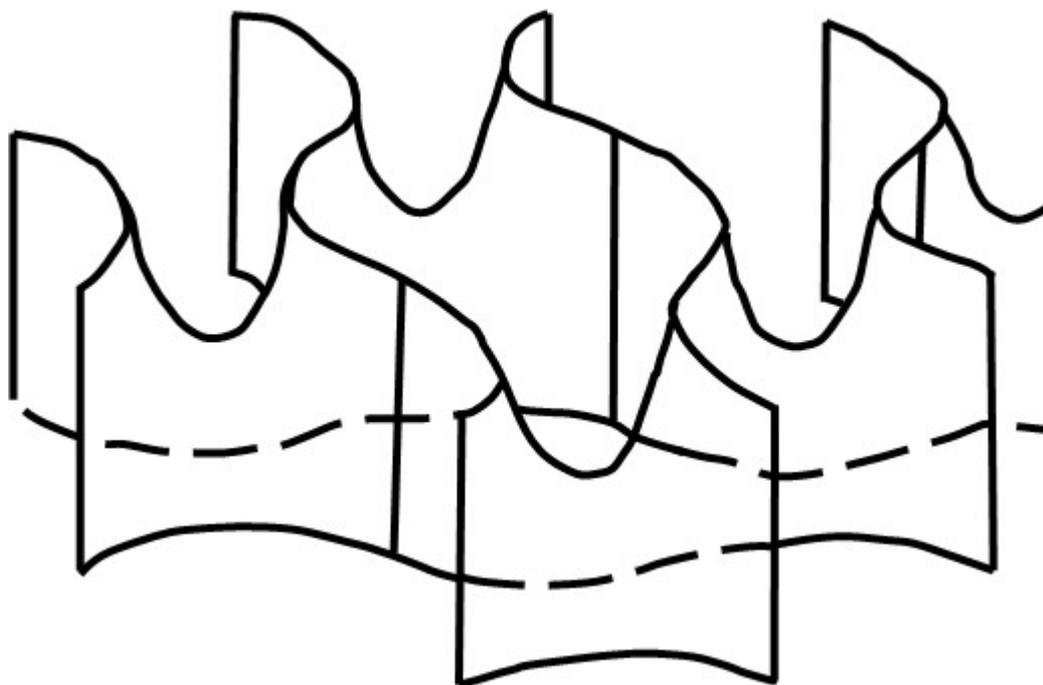


Рис. 4 - Поверхность Шерка

Выводы

Данная работа является составляющей процесса обучения. В процессе выполнения работы были получены навыки работы с построением минимальных, цилиндрических поверхностей, а так же поверхностей переноса. Рациональное использование полученных знаний дает возможность для дальнейшего исследования и написания других работ, касающихся построения поверхностей. Наша работа является наглядным пособием того, как знания о минимальных поверхностях из одной области могут стать надёжным помощником во многих других отраслях нашей деятельности, в случае умелого использования приобретённых навыков.

Abstract

Exploring in this study *minimal surfaces*, we can gain the *skills to build*, that is the *main goal* of our work. *The objects of study*, itself, are *surfaces and graphics*. *Relevance of the work* lies in the fact that *the results* can be the *basis for writing* other works and applied in various fields. This article *first analyzes the experiments Plateau*, the board with soap films, which somehow or other connected with minimal surfaces. *Conclusion* of the experiments, based on the presented model graphs *were the impetus* for the emergence of a *significant research area*, thriving to this day and known today under the title - *the Plateau problem*. Subsequent *use of the skills* acquired during the writing of this article, can be *implemented in the future*, while working on building surfaces. Our work *is the visual aid* of how the knowledge of the minimal surfaces in one area can become a *reliable assistant* in many other areas of our business, in the case of the skillful use of acquired skills.

Keywords: Sherk, minimal surfaces, the Lagrange equation, the cylindrical surface of the theorem, the catenoid.

Литература

1. Минимальные поверхности [Текст] : довідник / Г. Кархер, Л. Саймон, Х. Фудзимото, С. Хильдебрандт, Д. Хоффман, 2003. – 352 с.
2. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике [Текст] / Ю.Г. Павленко, 2002.
3. Перельман Я. И. Занимательная физика [Текст] / Я. И. Перельман. – Книга 1 : ЛитРес, 2009.
4. Элементы большой науки [Электронный ресурс]. — Режим доступа: \www/ URL: <http://elementy.ru/news/430564/> — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.
5. Большая Советская Энциклопедия, БСЭ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: \www/ URL: <http://bse.sci-lib.com/article076681.html/> — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.
6. Литературный интернет-журнал «Русский переплёт» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros /910.html/> — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.
7. Академик [Электронный ресурс]. – Режим доступа: \www/ URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1157413/> — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.
8. Большая Советская Энциклопедия, БСЭ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: \www/ URL: <http://bse.sci-lib.com/article068272.html/> — 10.03.2013 г. —

Загл. с экрана.

9. NAUKOVED.RU [Электронный ресурс]. – Режим доступа: \www/ URL: <http://naukoved.ru/content/view/890/44/> — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.

10. Астронет [Электронный ресурс]. – Режим доступа: \www/ URL: www.math.msu.ru/content_root/programs/kaf/special/.../minpov-fom.doc/ — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.

11. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями [Электронный ресурс]. – Режим доступа: \www/ URL: <http://www.pm298.ru/spec29.php/> — 10.03.2013 г. — Загл. с экрана.

References

1. Karkher, H., Symon, L., Fudzymoto, Kh., Khyldbrandt, S., Khoffman, D. (2003). Minimal surfaces. – 352.

2. Pavlenko, Yu. (2002). Lectures on Theoretical Mechanics.

3. Perelman, Ya. (2009). Entertaining physics. Book 1, LitRes.

4. Elements of great science [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://elementy.ru/news/430564> — 10.03.2013. — The title from the screen.

5. Great Soviet Encyclopedia, GSE [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://bse.sci-lib.com/article076681.html> — 10.03.2013. — The title from the screen.

6. Online Literary Journal "Russian hardcover" [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/910.html> — 10.03.2013. — The title from the screen.

7. Academician [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1157413> — 10.03.2013. — The title from the screen.

8. Great Soviet Encyclopedia, GSE [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://bse.sci-lib.com/article068272.html> — 10.03.2013. — The title from the screen.

9. NAUKOVED.RU [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://naukoved.ru/content/view/890/44/> — 10.03.2013. — The title from the screen.

10. Астронет [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: www.math.msu.ru/content_root/programs/kaf/special/.../minpov-fom.doc — 10.03.2013. — The title from the screen.

11. Applied Mathematics. Handbook of mathematical formulas. Examples and problems with solutions [Electronic resource]. – Mode of access: \www/ URL: <http://www.pm298.ru/spec29.php> — 10.03.2013. — The title from the screen.

Корольов Євген Олександрович

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кафедра вищої математики

Автомобільно-дорожній інститут

ДВНЗ “Донецький Національний Технічний Університет”

Україна, м. Горлівка, 84624, вул. Кірова, 51

E-mail: inst@adidonntu.org.ua

Коло наукових інтересів: процеси та системи управління, математичне моделювання та оптимізація технологічних процесів
Контактний тел.: (8-06242)-4-64-97

Evgeny Korolev
Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor
Department of High Mathematics
Automobile and Road Institute
SHEE "Donetsk National Technical University"
Ukraine, Gorlovka, 84624, st. Kirova, 51
E-mail: inst@adidonntu.org.ua
Research interests: processes and management systems, mathematical modeling and optimization of technological processes
Contact tel.: (8-06242)-4-64-97

Королёв Евгений Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент
Кафедра высшей математики
Автомобильно-дорожный институт
ГВУЗ "Донецкий Национальный Технический Университет"
Украина, г. Горловка, 84624, ул. Кирова, 51
E-mail: inst@adidonntu.org.ua
Круг научных интересов: процессы и системы управления, математическое моделирование и оптимизация технологических процессов
Контактный тел.: (8-06242)-4-64-97

Корольов Марк Євгенович
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кафедра прикладної математики і інформатики
Автомобільно-дорожній інститут
ДВНЗ “ Донецький Національний Технічний Університет ”
Україна, м. Горлівка, 84624, вул. Кірова, 51
E-mail: inst@adidonntu.org.ua
Коло наукових інтересів: процеси та системи управління, математичне моделювання та оптимізація технологічних процесів
Контактний тел.: (8-06242) - 4-64-97

Mark Korolev
Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor
Department of Applied Mathematics and Informatics
Automobile and Road Institute
SHEE "Donetsk National Technical University"
Ukraine, Gorlovka, 84624, st. Kirova, 51
E-mail: inst@adidonntu.org.ua

Research interests: processes and management systems, mathematical modeling and optimization of technological processes

Contact tel.: (8-06242)-4-64-97

Королёв Марк Евгеньевич

Кандидат физико-математических наук, доцент

Кафедра прикладной математики и информатики

Автомобильно-дорожный институт

ГВУЗ "Донецкий Национальный Технический Университет"

Украина, г. Горловка, 84624, ул. Кирова, 51

E-mail: inst@adidonntu.org.ua

Круг научных интересов: процессы и системы управления, математическое моделирование и оптимизация технологических процессов

Контактный тел.: (8-06242)-4-64-97

Кірнос Ірина Анатоліївна

Студентка III курсу гр. ОДР – 10

Факультет "Транспортні технології "

Автомобільно-дорожній інститут

ДВНЗ "Донецький Національний Технічний Університет "

Україна, м. Горлівка, 84624, вул. Кірова, 51

E-mail: inst@adidonntu.org.ua

Коло наукових інтересів: процеси та системи управління, математичне моделювання та оптимізація технологічних процесів

Контактний тел.: (8-06242)-4-34-62

Kirnoz Irina

Student III rate g. RTO - 10

Faculty "Transport Technologies"

Automobile and Road Institute

SHEE "Donetsk National Technical University"

Ukraine, Gorlovka, 84624, st. Kirova, 51

E-mail: inst@adidonntu.org.ua

Research interests: processes and management systems, mathematical modeling and optimization of technological processes

Contact tel.: (8-06242)-4-34-62

Кирноз Ирина Анатольевна

Студентка III курса гр. ОДД - 10

Факультет "Транспортные технологии"

Автомобильно-дорожный институт

ГВУЗ "Донецкий Национальный Технический Университет "

Украина, г. Горловка, 84624, ул. Кирова, 51

E-mail: inst@adidonntu.org.ua

Круг научных интересов: процессы и системы управления, математическое

моделирование и оптимизация технологических процессов
Контактный тел.: (8-06242)-4-34-62