

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	2
1. Расчет вала на прочность и жесткость .....	3
1.1. Краткие теоретические сведения .....	3
1.2. Пример расчета вала на прочность и жесткость .....	4
1.3. Замечания по вариантам расчетных схем .....	10
1.4. Вопросы для самопроверки .....	12
2. Расчет статически определимой балки на прочность .....	13
2.1. Краткие теоретические сведения .....	13
2.2. Пример расчета двухопорной балки на прочность .....	15
2.3. Пример расчета консольной балки на прочность .....	23
2.4. Вопросы для самопроверки .....	27
3. Расчет статически определимой рамы на прочность .....	29
3.1. Краткие теоретические сведения .....	29
3.2. Пример расчета рамы на прочность .....	30
3.3. Вопросы для самопроверки .....	38
4. Пример оформления расчетной работы .....	39
Расчет вала на прочность и жесткость .....	40
Расчет двухопорной балки на прочность .....	44
Расчет консольной балки на прочность .....	48
Расчет рамы на прочность .....	52

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов является важнейшей учебной дисциплиной в инженерном образовании, которая дает не только основы знаний о расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, но и способствует формированию структурного, логического мышления будущего инженера.

В формировании такого мышления большую роль имеют расчетные работы, охватывающие все разделы курса сопротивления материалов. Решение расчетных работ позволяет студенту приобрести навыки применения стандартных отработанных схем и подходов для решения однотипных задач и, в то же время, оставляет возможность для развития творческого мышления ввиду большого разнообразия возможных вариантов расчетных схем и условий нагружения в каждом типе задач.

В данном пособии рассмотрены примеры решения расчетных работ по двум разделам курса сопротивления материалов «Кручение» и «Расчет на прочность при изгибе». В разделе «Кручение» рассмотрен пример расчета статически определимого вала, охватывающий все виды расчета на прочность и жесткость при кручении. В разделе «Расчет на прочность при изгибе» рассмотрены примеры расчета на прочность для трех типов конструкций – двухопорной балки, консольной балки и рамы.

Для всех типов задач приведены два варианта решения: один – с подробными комментариями, обзором теории и методов расчета, анализом особенностей возможных разновидностей и вариантов расчетных схем, второй – в качестве примера оформления расчетной работы, как одного из видов инженерной технической документации.

Для закрепления теоретических знаний в пособии приводятся вопросы для самопроверки по всем рассматриваемым типам задач.

В пособии используется три типа нумерации аналитических зависимостей: двойная численная нумерация для фундаментальных зависимостей, например, (1.1), одинарная численная нумерация для обозначения ключевых зависимостей при решении данной задачи и буквенное обозначение для текущих промежуточных зависимостей, например, (a). Рисунки имеют двойную нумерацию в пределах каждого раздела или примера оформления.

Пособие предназначено для студентов машиностроительных и строительных специальностей высших учебных заведений любого профиля.

## § 1. РАСЧЕТ ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Условие задачи: Для заданного стального трансмиссионного вала:

- 1) Определить уравнивающий момент  $M_0$ ;
- 2) Построить эпюру крутящих моментов;
- 3) Определить диаметр вала из условия прочности и жесткости;
- 4) Определить углы закручивания каждого участка;
- 5) Построить эпюру углов закручивания;
- 6) Определить относительные углы закручивания для каждого участка;
- 7) Проверить жесткость вала.

Цель задачи: отработка навыков расчета на прочность и жесткость статически определимого вала круглого, трубчатого и круглого тонкостенного поперечного сечения, в том числе: определения внутренних крутящих моментов, построения эпюры крутящих моментов, определения диаметра вала круглого, трубчатого и круглого тонкостенного поперечного сечения из условия прочности и жесткости, определения углов закручивания вала, построения эпюры углов закручивания.

Ключевые слова: вал, кручение, внешние и внутренние крутящие моменты, правило знаков для крутящих моментов, эпюра крутящих моментов, критерии правильности построения эпюры крутящих моментов, касательные напряжения при кручении, условие прочности при кручении, допускаемые касательные напряжения, модуль сдвига, угол закручивания, относительный угол закручивания, жесткость вала при кручении, условие жесткости при кручении, относительный угол закручивания, допускаемый относительный угол закручивания, эпюра углов закручивания, тонкостенный вал, трубчатый вал.

### § 1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Кручением называется напряженное состояние, при котором в поперечных сечениях одноосных элементов возникают только внутренний крутящий момент  $M_k$ . Одноосный элемент, работающий на кручение, называется валом. При кручении в поперечном сечении вала возникают касательные напряжения, величина которых зависит от расстояния  $\rho$  от центра тяжести и определяется зависимостью

$$\tau(\rho) = \frac{M_k}{J_p} \rho, \quad (1.1)$$

где  $J_p$  – полярный момент инерции.

Максимальные касательные напряжения возникают на поверхности вала

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (1.2)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления.

Условием прочности в заданном сечении вала является:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad (1.3)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Все виды расчета на основе зависимости (1.3) называются расчетом на прочность при кручении.

Деформацией вала при кручении является закручивание его поперечного сечения. Абсолютный угол закручивания вала длиной  $l$  определяется зависимостью

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}, \quad (1.4)$$

где  $GJ_p$  – жесткость вала при кручении,  $G$  – модуль сдвига или модуль упругости второго рода, который определяется зависимостью

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (1.5)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сжимаемость материала.

Критерием жесткости вала при кручении является относительный угол закручивания:

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{G \cdot J_p}. \quad (1.6)$$

Условием жесткости вала является:

$$\Theta_{\max} \leq [\Theta], \quad (1.7)$$

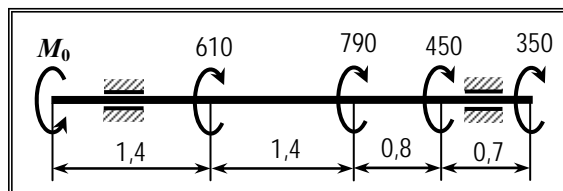
$[\Theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания.

Вычисление деформаций вала на основе зависимостей (1.4), (1.6) и (1.7) называется расчетом вала на жесткость.

## § 1.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Исходные данные:  $[\tau] = 140$  МПа,  $[\Theta] = 0,007$  рад/м,  $G = 8 \cdot 10^{10}$  МПа.

Заданная расчетная схема:



### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем величину уравновешивающего момента  $M_0$ .

Трансмиссионный вал служит для передачи крутящего момента от источников к потребителям энергии. Обычно при решении задач сопротивления ма-

териалов не акцентируется внимание на природе возникновения внешних нагрузок. Однако, при расчете трансмиссионного вала следует иметь в виду, что количество переданной и потребленной энергии должно быть одинаковым, то есть должно выполняться условие равновесия  $\sum M_x = 0$ . Записываем это условие в соответствии с данными расчетной схемы (рис.1.1а):

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow M_0 - 610 - 790 - 450 - 350 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_0 = 610 + 790 + 450 + 350 = 2200 \text{Н} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Знак «+» перед найденным значением уравнивающего момента  $M_0$  свидетельствует о том, что направление этого момента на расчетной схеме указано правильно. Если найденное значение оказалось отрицательным, то в дальнейших расчетах уравнивающий момент нужно перенаправить в противоположную сторону.

## 2. Строим эпюру крутящих моментов $M_k$ .

Эпюрой в сопротивлении материалов называется график, отражающий характер изменения какого-либо параметра вдоль оси одноосного элемента. Эпюра строится для каждого участка одноосного элемента в отдельности. Участком называется отрезок одноосного элемента, в пределах которого все основные расчетные параметры изменяются по определенному закону. Границами участков для одноосных элементов могут быть точки приложения сосредоточенной внешней нагрузки, точки начала и конца действия распределенной нагрузки и точки скачкообразного изменения поперечного сечения.

Чаще всего в сопротивлении материалов строятся эпюры внутренних усилий. При кручении это будет эпюра крутящих моментов  $M_k$ . Внутренние усилия определяются при помощи метода сечений.

### 2.1. Разбиваем вал на участки.

Для заданного вала постоянного поперечного сечения при отсутствии распределенного момента границами участков могут быть только точки приложения внешних сосредоточенных моментов. Заданный вал имеет четыре участка (рис.1.1а): I (AB), II (BC), III (CD) и IV (DE).

2.2. Составляем уравнения изменения крутящих моментов  $M_{ki}$  для каждого участка вала.

Для этого используем метод сечений и на каждом участке производим следующие действия :

- рассекаем участок в произвольной точке поперечным сечением;
- отбрасываем одну из частей (желательно большую), а оставшуюся рассматриваем под действием приложенных к ней внешних сосредоточенных моментов  $M_{kp}$ ;
- заменяем (компенсируем) действие отброшенной части крутящим моментом  $M_{ki}$ ;
- определяем этот момент из условия равновесия оставшейся части.

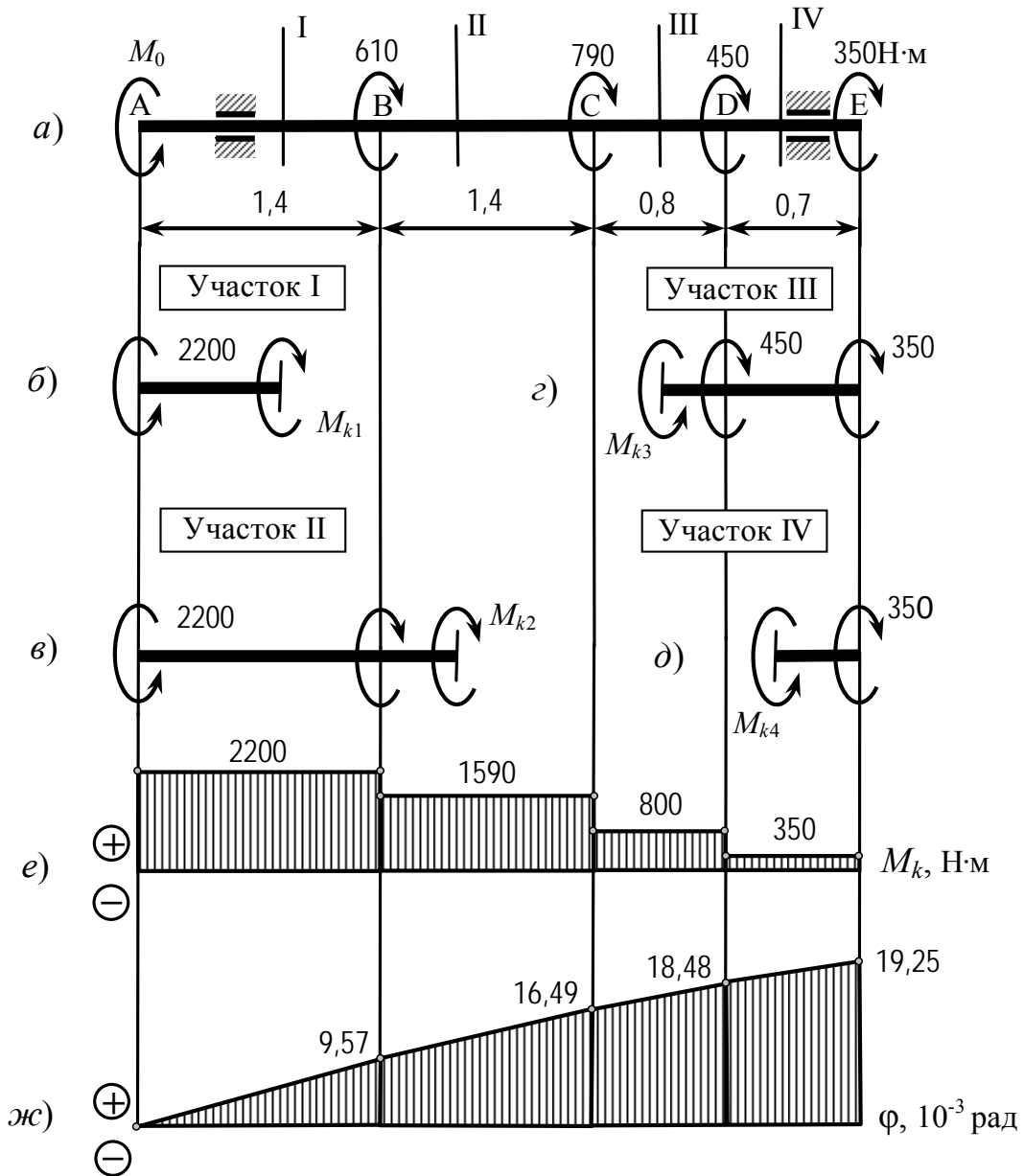


Рис.1.1. Расчетная схема заданного вала

При компенсировании действия отброшенной части на оставшуюся нужно учитывать, что крутящий момент  $M_{ki}$  считается положительным, если он стремится повернуть внешнюю нормаль к рассекающему сечению по ходу часовой стрелки (правило «буравчика»). Поэтому этот момент желательно направлять по ходу часовой стрелки по отношению к оставшейся части. В этом случае можно правильно определить не только значение внутреннего крутящего момента  $M_k$ , но и его знак. Однако, это правило по отношению к вращающимся валам является желательным, но не строгим и принципиальным. Применение правила «буравчика» затрудняется также тем, что на расчетных схемах валы показываются в аксонометрии и не всегда можно однозначно определить направление внешних крутящих моментов. Поэтому при выборе направления  $M_{ki}$  нужно придерживаться только одного правила: для рассматриваемых левых частей вала нужно направлять крутящий момент в одну сторону, а для правых – в противоположную. Для первого и второго участка заданного вала

(рис.1.1б,в) (левая часть) искомые моменты  $M_{ki}$  направим по ходу часовой стрелки, а для третьего и четвертого участков (рис.1.1з,д) (правая часть) – против хода часовой стрелки. При этом по отношению к рассматриваемой части все крутящие моменты  $M_{ki}$  будут направлены по ходу часовой стрелки!

Тогда уравнения изменения крутящих моментов  $M_{ki}$  для заданного вала будут иметь вид:

Участок I (AB) (рис.1.1б)

$$\sum M_x^I = 0 \Rightarrow M_{k1} - 2200 = 0 \Rightarrow M_{k1} = 2200;$$

Участок II (BC) (рис.1.1в)

$$\sum M_x^{II} = 0 \Rightarrow M_{k2} - 2200 + 610 = 0 \Rightarrow M_{k2} = 2200 - 610 = 1590;$$

Участок III (CD) (рис.1.1з)

$$\sum M_x^{III} = 0 \Rightarrow M_{k3} - 450 - 350 = 0 \Rightarrow M_{k3} = 450 + 350 = 800;$$

Участок IV (DE) (рис.1.1д)

$$\sum M_x^{IV} = 0 \Rightarrow M_{k4} - 350 = 0 \Rightarrow M_{k4} = 350.$$

### 2.3. Строим эпюру крутящих моментов $M_k$ (рис.1.1е).

Так как пересекающие сечения для всех рассматриваемых участков проводились в произвольной точке участка, найденные выражения для  $M_{ki}$  являются уравнениями изменения крутящего момента, а не фиксированными значениями. Для всех участков выражения  $M_{ki}$  (рис.1.1е) соответствуют функции  $y(x) = Const$ , графиком (то есть эпюрой) которой является прямая, параллельная оси  $x$  (то есть продольной оси вала).

Правильность построения эпюры  $M_k$  можно проверить по «скачкам» – резкому изменению внутреннего крутящего момента  $M_{ki}$  в одном сечении. «Скачки» должны соответствовать по координате, величине и знаку (направлению «скачка») внешним сосредоточенным крутящим моментам  $M_{kpi}$ . Для всех граничных точек построенной эпюры (рис.1.1е) это правило выполняется.

3. Определяем диаметр вала из условия прочности и жесткости (для вала сплошного круглого поперечного сечения).

#### 3.1. Определяем диаметр вала из условия прочности.

Для вала постоянного поперечного сечения согласно (1.3) условием прочности при кручении является:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k \max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (1.8)$$

где  $M_{k \max}$  – максимальный (по абсолютной величине) крутящий момент из эпюры крутящих моментов  $M_k$  (рис.1.1е).

Для сплошного круглого вала полярный момент сопротивления равен:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (1.9)$$

С учетом (1.9) и (1.8) диаметр сплошного круглого вала из условия прочности определяется зависимостью:

$$(1.9) \rightarrow (1.8) \Rightarrow d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot [\tau]}}. \quad (1.10)$$

Согласно эпюры крутящих моментов (рис.1.1e)  $M_{k \max} = 2200 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Тогда минимальное значение диаметра вала из условия прочности будет равно:

$$d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2200}{3,14 \cdot 140 \cdot 10^6}} = 4,309 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,309 \text{ см}.$$

### 3.2. Определяем диаметр вала из условия жесткости.

Для вала постоянного поперечного сечения согласно (1.6) и (1.7) условием жесткости при кручении является:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{k \max}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta]. \quad (1.11)$$

Для сплошного круглого вала полярный момент инерции равен:

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (1.12)$$

С учетом (1.11) и (1.12) диаметр сплошного круглого вала из условия жесткости определяется зависимостью:

$$(1.12) \rightarrow (1.11) \Rightarrow d \geq 4 \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{k \max}}{G \cdot \pi \cdot [\Theta]}}. \quad (1.13)$$

При  $M_{k \max} = 2200 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (рис.1.1e) минимальное значение диаметра вала из условия жесткости будет равно:

$$d \geq 4 \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2200}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,007}} = 7,954 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,954 \text{ см}.$$

### 3.3. Определяем диаметр вала.

Минимальный диаметр вала из условия прочности  $d \geq 4,309 \text{ см}$ .

Минимальный диаметр вала из условия жесткости  $d \geq 7,954 \text{ см}$ .

Минимальный диаметр вала сплошного круглого поперечного сечения из условия прочности и жесткости  $d \geq 7,954 \text{ см}$ .

Поскольку поверхность вала является базовой для различных деталей (зубчатых колес, шкивов, втулок, подшипников), посадочный диаметр которых регламентирован ГОСТ или ДСТУ необходимо определять не минимально до-



пустимое значение диаметра, а ближайшее большее стандартное значение диаметров. Как правило, это значения, кратные 5мм. Исходя из этого, принимаем окончательно диаметр заданного вала  $d = 80$  мм.

4. Определяем углы закручивания каждого участка.

Параметром деформации вала является угол закручивания, величина которого для каждого участка согласно (1.4) определяется зависимостью

$$\varphi_i = \frac{M_{ki}l_i}{GJ_p}. \quad (a)$$

Согласно (a) углы закручивания участков заданного вала будут равны:

$$\varphi_1 = \frac{M_{k1}l_1}{GJ_p} = \frac{32M_{k1}l_1}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 2200 \cdot 1,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 9,574 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{32M_{k2}l_2}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 1590 \cdot 1,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 6,920 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{32M_{k3}l_3}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 800 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 1,989 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{32M_{k4}l_4}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 350 \cdot 0,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 0,762 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

5. Строим эпюру углов закручивания.

Для этого определяем углы закручивания на границах участков вала в какой-либо фиксированной системе координат. Лучше всего для этого использовать систему координат неподвижной точки, например, жесткой опоры. Однако, для вращающихся валов такой точки нет. Поэтому в этом случае эпюру углов закручивания нужно строить в системе координат какой-либо граничной точки, лучше всего – крайней левой.

Для заданного вала будем определять углы закручивания сечений А, В, С, D, Е в системе координат крайней левой точки А, то есть относительно условно неподвижного сечения А. Угол закручивания сечений будем определять как сумму углов закручивания участков, лежащих между данным сечением и сечением А (рис.1.1а). Тогда углы закручивания сечений заданного вала будут равны:

$$\varphi_A = 0, \quad \varphi_{B-A} = \varphi_1 = 9,574 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_1 + \varphi_2 = 9,574 \cdot 10^{-3} + 6,920 \cdot 10^{-3} = 16,494 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 9,574 \cdot 10^{-3} + 6,920 \cdot 10^{-3} + 1,989 \cdot 10^{-3} = 18,483 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{E-A} &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \\ &= 9,574 \cdot 10^{-3} + 6,920 \cdot 10^{-3} + 1,989 \cdot 10^{-3} + 0,762 \cdot 10^{-3} = 19,245 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \end{aligned}$$

Согласно (1.4) между углом закручивания и длиной вала выполняется линейное соотношение. Поэтому в пределах участков найденные граничные значения углов закручивания соединяем прямой линией. Тогда эпюра углов закручивания (рис.1.1ж) принимает вид прямой ломаной линии.

6. Определяем относительный угол закручивания для каждого участка.

Согласно (1.4) относительные углы закручивания  $\Theta_i$  участков заданного вала будут равны:

$$\Theta_1 = \frac{M_{k1}}{GJ_p} = \frac{32M_{k1}}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 2200}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 0,0068 \text{ рад/м};$$

$$\Theta_2 = \frac{32M_{k2}}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 1590}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 0,0049 \text{ рад/м};$$

$$\Theta_3 = \frac{32M_{k3}}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 800}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 0,0025 \text{ рад/м};$$

$$\Theta_4 = \frac{32M_{k4}}{G\pi d^4} = \frac{32 \cdot 350}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 0,0011 \text{ рад/м}.$$

7. Делаем проверку вала на жесткость.

Согласно (1.7)  $\Theta_{\max} \leq [\Theta]$ . Для заданного вала максимальный относительный угол закручивания  $\Theta_{\max} = \Theta_1 = 0,0068 \text{ рад/м} < [\Theta] = 0,007 \text{ рад/м}$ , то есть условие жесткости выполняется.

### § 1.3. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВАРИАНТАМ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

#### 1.3.1. Расчет вала на прочность.

Поскольку для круглых валов аналитические выражения для определения  $W_p$  в (1.3) известны, можно получить практические зависимости для определения диаметра круглого вала с различной формой сечения.

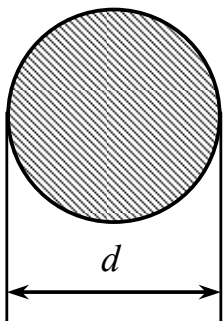


Рис.1.2

а) Круглый вал сплошного поперечного сечения (рис.1.2).

Это наиболее распространенный вид поперечного сечения вала. Момент сопротивления  $W_p$  для такого сечения определяется зависимостью (1.9). Тогда диаметр сплошного круглого вала из условия прочности будет равен

$$(1.9) \rightarrow (1.8) \Rightarrow d \geq 3 \sqrt{\frac{16 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx 3 \sqrt{\frac{M_{k \max}}{0,2 \cdot [\tau]}}.$$

б) Вал трубчатого сечения (рис.1.3).

Момент инерции трубчатого сечения можно определить как для сложного сечения, которое состоит из двух простых:

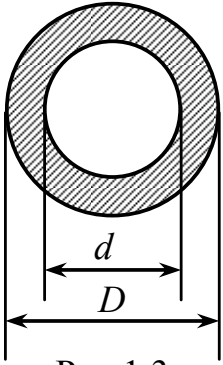


Рис.1.3

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (1.14)$$

где  $\alpha = d / D$ . Тогда момент сопротивления трубчатого сечения будет равен:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} = \frac{2 \cdot J_p}{D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (1.15)$$

С учетом (1.15) наружный диаметр трубчатого вала из условия прочности будет равен:

$$(1.15) \rightarrow (1.8) \Rightarrow D \geq 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - \alpha^4)}} \approx 3 \sqrt[3]{\frac{M_{k \max}}{0,2 \cdot [\tau] \cdot (1 - \alpha^4)}}. \quad (1.16)$$

в) Тонкостенный вал (рис.1.4).

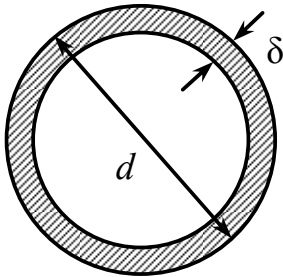


Рис.1.4

Тонкостенным считается вал, для которого  $d / \delta \geq 20$  (рис.1.5). Для такого вала момент инерции можно определить непосредственным интегрированием при  $\rho \approx d / 2$  и  $dF = \pi \cdot d \cdot \delta$ :

$$J_p = \int \rho^2 dF = \frac{\pi \cdot d^3 \delta}{4}. \quad (1.17)$$

Момент сопротивления такого вала будет равен:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} = \frac{2 \cdot J_p}{d} = \frac{\pi \cdot d^2 \delta}{2} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot d^3}{2}, \quad (1.18)$$

где  $\delta = \alpha d$ . С учетом (1.18) диаметр тонкостенного вала из условия прочности будет равен:

$$(1.18) \rightarrow (1.8) \Rightarrow d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot \alpha \cdot [\tau]}}. \quad (1.19)$$

### 1.3.1. Расчет вала на жесткость.

а) Круглый вал сплошного поперечного сечения (рис.1.2).

Момент инерции такого вала определяется зависимостью (1.12). Тогда диаметр сплошного круглого вала из условия жесткости будет равен

$$(1.12) \rightarrow (1.11) \Rightarrow d \geq 4 \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} \approx 4 \sqrt[4]{\frac{M_{k \max}}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]}}. \quad (1.20)$$

б) Вал трубчатого сечения (рис.1.3).

Момент инерции такого вала определяется зависимостью (1.14). Наружный диаметр трубчатого вала из условия жесткости будет равен

$$(1.14) \rightarrow (1.11) \Rightarrow D \geq 4 \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta] \cdot (1 - \alpha^4)}} \approx 4 \sqrt[4]{\frac{M_{k \max}}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta] \cdot (1 - \alpha^4)}}. \quad (1.21)$$

в) Тонкостенный вал (рис.1.4).

Момент инерции такого вала определяется зависимостью (1.17). Диаметр тонкостенного вала из условия жесткости будет равен

$$(1.17) \rightarrow (1.11) \Rightarrow d \geq 4 \sqrt{\frac{4 \cdot M_{k \max}}{\pi \cdot G \cdot \alpha \cdot [\Theta]}}. \quad (1.22)$$

#### § 1.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое напряженное состояние называется кручением? Какое внутреннее усилие возникает при кручении? Как называется одноосный элемент, работающий на кручение?

2. Какие крутящие моменты являются внешними и внутренними? Какая между ними взаимосвязь? Какое существует правило знаков для крутящих моментов?

3. Что такое эпюра в сопротивлении материалов? Что такое участок? Что может быть границей участков вала? В какой последовательности строится эпюра?

4. Какие существуют критерии правильности построения эпюры крутящих моментов?

5. Что такое модуль сдвига? По какой формуле определяется его величина? Что такое коэффициент Пуассона? Какой его физический смысл?

6. По какой формуле определяются касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения при кручении? По какой формуле определяются максимальные касательные напряжения при кручении?

7. Какой вид имеет условие прочности вала при кручении? Как определяются допускаемые касательные напряжения при кручении?

8. Что такое угол закручивания? По какой формуле определяется его величина? Что такое относительный угол закручивания? По какой формуле определяется его величина?

9. Что такое жесткость вала при кручении?

10. Какой вид имеет условие жесткости вала при кручении?

11. По какой формуле определяется диаметр сплошного круглого вала из условия прочности и жесткости?

12. По какой формуле определяется диаметр трубчатого вала из условия прочности и жесткости?

13. По какой формуле определяется диаметр тонкостенного вала из условия прочности и жесткости?

14. Какая форма поперечного сечения вала обеспечивает его наибольшую прочность по отношению к другим формам сечения одинаковой металлоемкости?

## § 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ

Условие задачи: Для заданной стальной балки:

- 1) Определить опорные реакции;
- 2) Составить уравнения изменения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка балки;
- 3) Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 4) Проверить правильность построения эпюр;
- 5) Подобрать поперечное сечение балки из условия прочности в форме двутавра, прямоугольника ( $h/b = k=2$ ), круга и из двух швеллеров;
- 6) Сравнить выбранные поперечные сечения по металлоемкости

Цель задачи: отработка навыков расчета на прочность статически определимых балок при плоском поперечном изгибе, в том числе: определения опорных реакций, построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, определения опасного сечения балки при изгибе, подбора поперечного сечения различной формы из условия прочности балки при изгибе, сравнения металлоемкости выбранных поперечных сечений различной формы.

Ключевые слова: балка, двухопорная балка, консольная балка, изгиб, плоский поперечный изгиб, опорные реакции, внешняя изгибная нагрузка, активная нагрузка, реактивная нагрузка, сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, распределенная нагрузка, распределенная нагрузка, распределенный момент, уравнения равновесия, внутренние усилия, поперечная сила, изгибающий момент, правило знаков, сжатые и растянутые волокна, проверка правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, расчет на прочность при изгибе, условие прочности при изгибе, нормальные напряжения при изгибе, опасное сечение, максимальный изгибающий момент, рациональная форма поперечного сечения.

### § 2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Изгибом называется напряженное состояние, при котором в поперечных сечениях одноосных элементов возникает два внутренних усилия – поперечная сила  $Q_y$  или  $Q_z$  и изгибающий момент  $M_z$  или  $M_y$ . Под изгибом обычно понимается плоский поперечный изгиб – напряженное состояние которое могут вызывать внешние сосредоточенные и распределенные изгибные нагрузки, действующие в одной из главных центральных плоскостей. Главной центральной плоскостью называется плоскость, проходящая через одну из главных центральных осей поперечного сечения и продольную ось одноосного элемента. Плоскость действия внешней нагрузки обычно называют силовой плоскостью.

Одноосный элемент, испытывающий изгиб, называется балкой. Балка имеет три степени свободы. Поэтому для обеспечения ее равновесия необходимо как минимум три внешних связи. Обычно для этого используется одна жесткая заделка или два шарнирных опоры (односвязная и двухсвязная). В первом случае балка называется консольной балкой или консолью, во втором – двухопорной балкой.

Между внутренними усилиями при изгибе всегда сохраняются определенные дифференциальные соотношения:

$$Q(x) = \pm \frac{dM(x)}{dx}, \quad (2.1)$$

$$q(x) = \pm \frac{dQ(x)}{dx}, \quad (2.2)$$

$$q(x) = \pm \frac{d^2 M(x)}{dx^2}. \quad (2.3)$$

Зависимости (2.1) и (2.2) называются первой и второй теоремами Журавского.

При изгибе в поперечных сечениях балок возникают нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения в поперечном сечении с координатой  $x$  на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя определяются зависимостью

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_z(x)}{J_z} y, \quad (2.4)$$

где  $M_z(x)$  – изгибающий момент в силовой плоскости в сечении с координатой  $x$ ,  $J_z$  – осевой момент инерции поперечного сечения. Нейтральным слоем называется продольная поверхность внутри балки, в пределах которой отсутствуют нормальные напряжения. При плоском поперечном изгибе нейтральный слой совпадает с главной центральной осью, перпендикулярной к силовой плоскости. Максимальные нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтрального слоя

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (2.5)$$

где  $W_z$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения.

Условием прочности при изгибе является:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (2.6)$$

где  $M_{\max}$  – максимальный изгибающий момент в опасном сечении.

Касательные напряжения в поперечном сечении с координатой  $x$  на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя определяются зависимостью

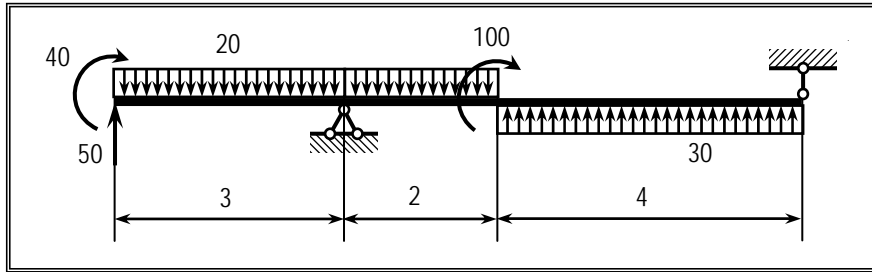
$$\tau(x, y) = \frac{Q(x) \cdot S_z^*(y)}{b(y) \cdot J_z}, \quad (2.7)$$

где  $Q(x)$  – поперечная сила в сечении с координатой  $x$ ,  $S_z^*(y)$  – статический момент части площади поперечного сечения, отсеченной на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя,  $b(y)$  – ширина поперечного сечения балки на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя. Зависимость (2.7) называется формулой Журавского.

## § 2.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ

Исходные данные:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа.

Заданная расчетная схема:



### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем опорные реакции (рис.2.1).

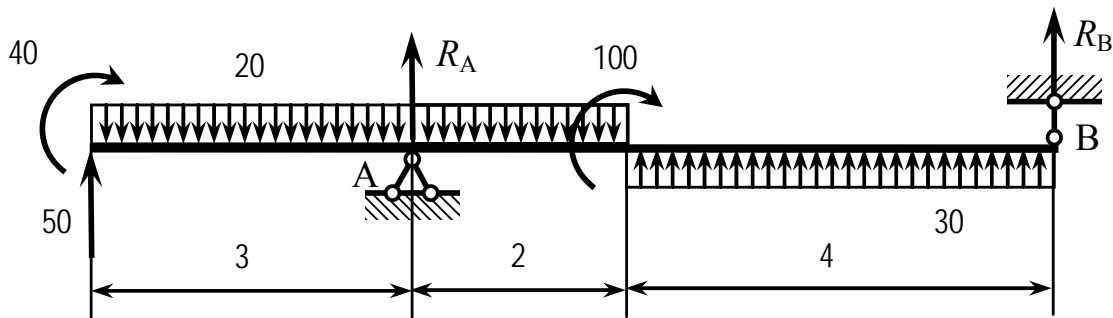


Рис.2.1. Расчетная схема балки

Рассматриваемая двухопорная балка является статически определимой. Это означает, что для определения неизвестных опорных реакций ( $H_A$ ,  $V_A$  и  $V_B$ ) в наложенным внешним связям (двухсвязный шарнир А и односвязный шарнир В) достаточно только уравнений равновесия (независимыми уравнениями для плоской системы являются  $\sum x = 0$ ,  $\sum y = 0$ ,  $\sum M = 0$ ).

Наиболее рациональной является следующая схема определения опорных реакций в двухопорных балках. Из уравнения  $\sum x = 0$  определяется горизонтальная реакция  $H_A$ . Как правило, в балках она равна нулю (при отсутствии продольной внешней нагрузки, которая не является характерной нагрузкой при изгибе). Вертикальные опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  на каждой опоре определяются из суммы моментов всей внешней нагрузки относительно противоположной опоры (соответственно  $\sum M_B = 0$  и  $\sum M_A = 0$ ).

Поскольку в этих уравнениях реакции  $V_A$  и  $V_B$  будут единственными неизвестными, при таком подходе каждая из этих реакций может быть получена в виде дроби, в знаменателе которой будет расстояние между опорами, а в числителе – сумма моментов всей внешней активной нагрузки относительно противоположной опоры, взятых со знаками, противоположными знаку выбранного

направления искомой реакции. Уравнения  $\sum M_B = 0$  и  $\sum M_A = 0$  являются зависимыми, то есть являются по сути одним и тем же уравнением. Поэтому всегда необходимо проверять правильность определения опорных реакций, используя для этого оставшееся независимое уравнение равновесия  $\sum y = 0$ .

Таким образом, рациональный алгоритм определения опорных реакций в двухопорных балках имеет следующий вид:

Порядок определения опорных реакций в двухопорных балках:

1)  $\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B$       2)  $\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A$       3) Проверка  $\sum y = 0$

1.1. Определяем опорную реакцию  $V_B$ :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 \cdot V_B - 50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 \cdot 0,5 - 40 - 100 + 30 \cdot 4 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{50 \cdot 3 - 20 \cdot 5 \cdot 0,5 + 40 + 100 - 30 \cdot 4 \cdot 4}{6} = -40 \text{ кН.}$$

1.2. Определяем опорную реакцию  $V_A$ :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 6 \cdot R_A + 50 \cdot 9 + 40 - 20 \cdot 5 \cdot 6,5 + 100 + 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{-50 \cdot 9 - 40 + 20 \cdot 5 \cdot 6,5 - 100 - 30 \cdot 4 \cdot 2}{6} = -30 \text{ кН.}$$

1.3. Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\sum y = 0 \Rightarrow 50 - 20 \cdot 5 - 30 + 30 \cdot 4 - 40 = 170 - 170 = 0.$$

Знак «-» у полученных опорных реакций показывает, что они направлены в сторону, противоположную выбранной (не вверх, а вниз).

2. Составляем уравнения изменения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка балки.

Поперечная сила и изгибающий момент являются внутренними усилиями (внутренними силовыми факторами) и, как и при других видах напряженного состояния, определяются при помощи метода сечений. Суть метода заключается в том, что балка мысленно рассекается в заданном сечении на две части, отбрасывается одна из частей (как правило, большая), для восстановления равновесия действие отброшенной части на оставшуюся заменяется (компенсируется) внутренними усилиями, которые определяются из уравнений равновесия оставшейся (рассматриваемой) части балки. Однако, в таком общем виде внутренние усилия при изгибе обычно не определяются. Как правило, для составления уравнений достаточно математических определений поперечной силы и изгибающего момента и правила знаков для учета внешней нагрузки.

Математические определений внутренних усилий при изгибе:

Поперечная сила  $Q$  в заданном поперечном сечении балки равна сумме проекций всей внешней нагрузки, действующей с одной стороны от сечения (или в рассматриваемой части балки), на вертикальную ось  $y$ .



Изгибающий момент  $M$  в заданном поперечном сечении равен сумме моментов относительно оси  $z$  от всей внешней нагрузки, действующей с одной стороны от сечения (или в рассматриваемой части балки).

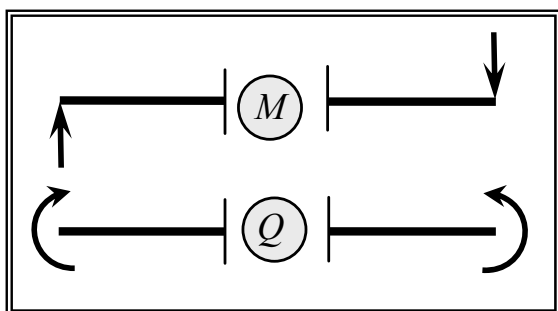


Рис.2.2. Правило знаков в балках

Правило знаков необходимо использовать для учета направлений действия внешней нагрузки в математических определениях внутренних усилий. На рис.2.2 показано правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе балок. На схемах указаны направления действия внешней нагрузки, вызывающей положительные значения внутренних усилий в указанном поперечном сечении рассматриваемой левой (правило знаков слева) или правой (правило знаков справа) части балки.

Систематизируя правило знаков слева и справа, можно сформулировать следующие общие определения правила знаков при изгибе:

Правило знаков для поперечной силы – если внешняя нагрузка стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то она вызывает в заданном поперечном сечении положительную поперечную силу.

Правило знаков для изгибающего момента – если внешняя нагрузка стремится поднять рассматриваемую часть балки вверх, то она вызывает в заданном поперечном сечении положительный изгибающийся момент.

Составление уравнений изменения внутренних усилий при изгибе для каждого участка сопровождается такими обязательными комментариями:

а) необходимо обязательно указывать номер участка на расчетной схеме, во всех уравнениях и при вычислении значений внутренних усилий в характерных точках участка;

б) так как при изгибе поперечное сечение проводится в произвольной, но фиксированной точке участка, необходимо показывать привязку этой точки к выбранному началу координат (как правило, в крайней левой или крайней правой точке балки) при помощи переменной координаты  $x_i$ ;

в) необходимо указывать интервал изменения переменной  $x_i$  в пределах каждого участка и указывать, какое правило знаков (слева или справа) используется при составлении уравнений.

Конечной целью определения внутренних усилий является построение эпюр. Для этого необходимо знать значение внутренних усилий в характерных точках участков. Такими точками являются поперечные сечения в начале и конце участка, а также сечения с возможными экстремальными значениями внутренних усилий. Экстремальные (отличные от соседних) значения могут возникать в случае, если уравнение изменения внутренних усилий имеет форму полинома второго и выше порядка.

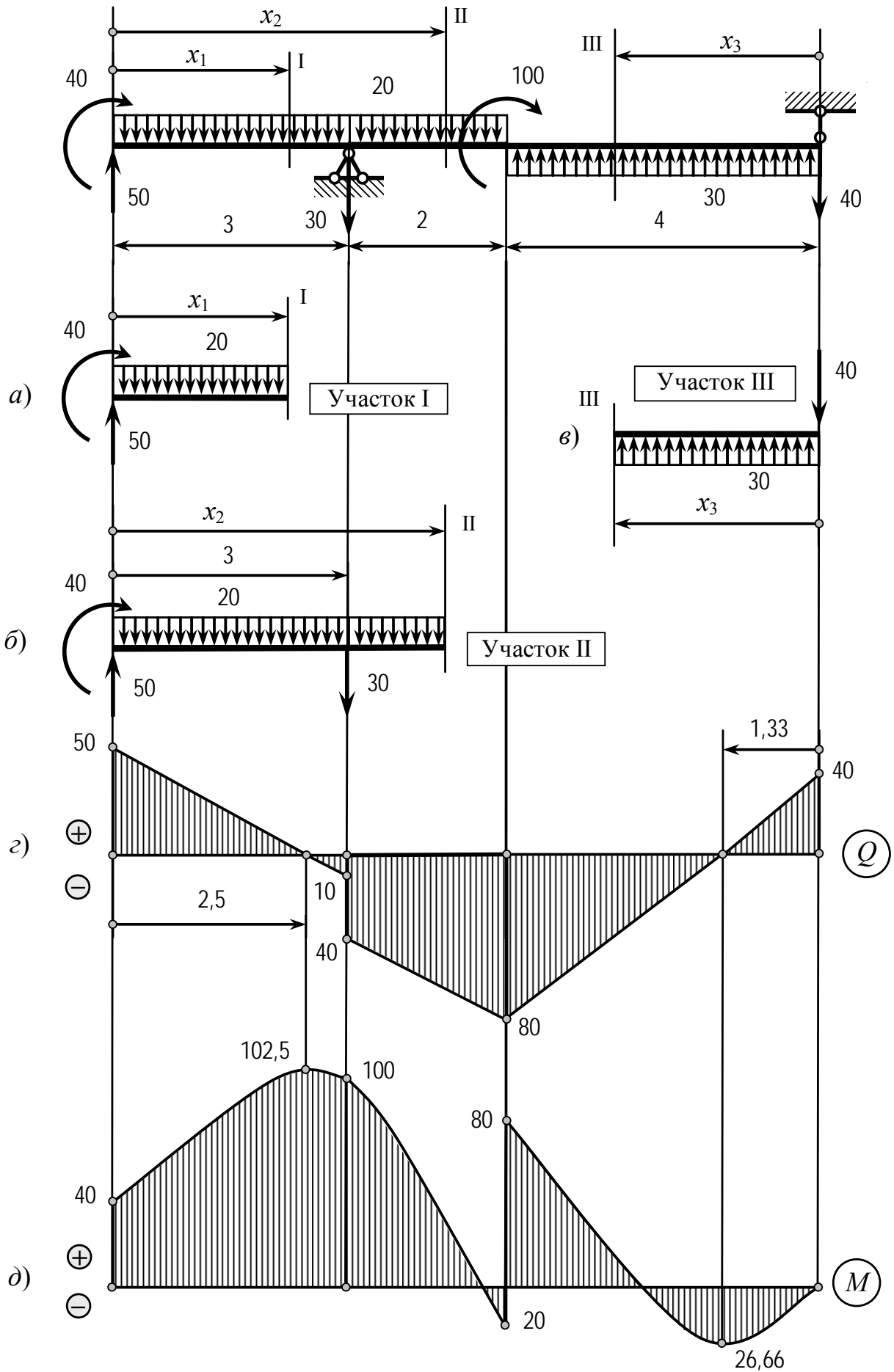


Рис.2.3. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$

Для заданной балки уравнения изменения внутренних усилий и их значения в характерных точках для трех участков имеют вид (рис.2.3):

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 3$  м, слева) (рис.2.3а)

$$Q_I(x_1) = 50 - 20 \cdot x_1; \quad Q_I(0) = 50 \text{ кН}; \quad Q_I(2) = -10 \text{ кН};$$

$$M_I(x_1) = 50 \cdot x_1 + 40 - 20 \cdot x_1^2 / 2; \quad M_I(0) = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_I(2) = 100 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Уравнение изменения изгибающего момента  $M_I(x_1)$  для первого участка имеет форму полинома второй степени и, следовательно, изгибающий момент в пределах первого участка может иметь экстремум. Координату экстремума можно определить, приравняв первую производную функции  $M_I(x_1)$  к нулю. Для этого удобно использовать первую теорему Журавского (2.1). Определяем координату экстремума

$$(2.1) \Rightarrow \frac{dM_I(x_1)}{dx_1} = Q_I(x_1) = 50 - 20 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,5 \text{ м.}$$

Определяем значение экстремального изгибающего момента

$$M_I(2,5) = 102,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок II ( $3 \leq x_2 \leq 5$  м, слева) (рис.2.3б)

$$Q_{II}(x_2) = 50 - 30 - 20 \cdot x_2; \quad Q_{II}(3) = -40 \text{ кН}; \quad Q_{II}(5) = -80 \text{ кН};$$

$$M_{II}(x_2) = 50 \cdot x_2 + 40 - 20 \cdot x_2^2 / 2 - 30 \cdot (x_2 - 3);$$

$$M_{II}(3) = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{II}(5) = -20 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Уравнение изменения изгибающего момента  $M_{II}(x_2)$  для второго участка также имеет форму полинома второй степени. Однако, поперечная сила в пределах участка не меняет свой знак, и, следовательно, ввиду линейности функции  $Q_{II}(x_2)$ , в пределах участка не может быть равной нулю. Поэтому экстремального значения изгибающего момента на втором участке не будет.

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 4$  м, справа) (рис.2.3в)

$$Q_{III}(x_3) = -30 \cdot x_3 + 40; \quad Q_{III}(0) = 40 \text{ кН}; \quad Q_{III}(3) = -80 \text{ кН};$$

$$M_{III}(x_3) = 30 \cdot x_3^2 / 2 - 40 \cdot x_3; \quad M_{III}(0) = 0; \quad M_{III}(3) = 80 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Уравнение изменения изгибающего момента  $M_{III}(x_3)$  для третьего участка имеет форму полинома второй степени, а поперечная сила  $Q_{III}(x_3)$  в пределах участка меняет свой знак. Следовательно, нужно определять положение экстремума

$$Q_{III}(x_3) = -30 \cdot x_3 + 40 = 0 \Rightarrow x_3 = 1,33 \text{ м.}$$

Определяем значение экстремального изгибающего момента

$$M_{III}(1,33) = 26,66 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

### 3. Строим эпюры поперечных сил $Q$ и изгибающих моментов $M$ .

Эпюрой в сопротивлении материалов называется график, отражающий характер изменения какого-либо параметра вдоль оси одноосного элемента. Эпюры строятся для каждого участка в отдельности. В пределах участка все расчетные параметры изменяются по определенному закону в виде неразрывной функции. Для построения эпюры на каждом участке необходимо знать характер изменения заданного параметра в пределах участка (его математическое выражение) и значения в нескольких характерных точках (как правило, в начале и конце участка и, если необходимо, в точках экстремальных значений параметра). Согласно полученных ранее уравнений, графиком эпюры поперечных сил на всех участках будет прямая наклонная линия, а графиком эпюры изгибающих моментов – квадратная парабола.

При построении эпюр необходимо соблюдать следующие правила:

а) название эпюры обычно приводится справа или сверху от нее, при этом, если все значения на эпюре поперечных сил приведены в кН, а на эпюре изгибающих моментов – в кН·м, то размерность не указывается;

б) построение эпюры не требует точного соблюдения масштаба, однако примерная видимая пропорциональность между значениями параметров должна соблюдаться;

в) знаки параметров указываются или в «теле эпюры», или слева от нее;

г) «тело эпюры» заштриховывается поперечной (перпендикулярной по отношению к продольной оси одноосного элемента) штриховкой, при этом величина каждого штриха характеризует значение расчетного параметра в соответствующем сечении.

Под «телом эпюры» понимаются плоские фигуры, ограниченные продольной осью одноосного элемента и графиком уравнений изменения расчетных параметров.

Эпюра поперечных сил  $Q$  для заданной двухопорной балки приведена на рис.2.3г, изгибающих моментов  $M$  – на рис.2.3д.

Если положительные значения изгибающих моментов на эпюре  $M$  откладываются вверх, такая эпюра называется «эпюрой по сжатым волокнам». В такой эпюре «тело» эпюры располагается с той стороны балки (вверху или внизу), волокна которой сжаты. Такая эпюра характерна для машиностроителей. Если положительные значения откладываются вниз – эпюра называется «по растянутым волокнам». Она характерна для строителей.

### 4. Проверяем правильность построения эпюр.

Для проверки правильности построения эпюр при изгибе используются дифференциальные зависимости между внутренними усилиями (2.1) – (2.3).

Правильность построения эпюр в балках проверяется по следующим общим признакам:

а) скачки (резкие изменения значений параметра в одном и том же поперечном сечении) на эпюре поперечных сил должны соответствовать по координате, величине и знаку внешним сосредоточенным силам;

б) скачки на эпюре изгибающих моментов должны соответствовать по координате, величине и знаку внешним сосредоточенным моментам;

в) в соответствии с первой теоремой Журавского (2.1) в поперечных сечениях, в которых поперечная сила  $Q$  равна нулю, изгибающий момент  $M$  принимает экстремальные значения;

г) в соответствии со второй теоремой Журавского (2.2) при  $q > 0$  графиком эпюры поперечных сил при движении слева направо будет восходящая прямая линия, справа налево – нисходящая.

д) в соответствии с (2.3) при  $q > 0$  в поперечных сечениях, в которых поперечная сила  $Q$  равна нулю, экстремумами на эпюре изгибающих моментов будут минимумы, а при  $q < 0$  – максимумы.

Для построенных эпюр (рис.2.3) все указанные признаки выполняются.

**5.** Подбираем поперечное сечение балки из условия прочности в форме двутавра, прямоугольника ( $h/b = k=2$ ), круга и из двух швеллеров

Для заданной балки максимальный изгибающий момент в опасном сечении равен  $M_{\max} = 102,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (рис.2.3д).

Согласно (2.6) минимально допустимый осевой момент сопротивления поперечного сечения балки определяется зависимостью

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (2.8)$$

### 5.1. Двутавровое поперечное сечение.

Двутавр является стандартным прокатным профилем, все геометрические характеристики которого приводятся в справочных таблицах. Согласно (2.8) минимальное значение момента сопротивления будет равно:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{102,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 640 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 640 \text{ см}^3.$$

Из справочных таблиц (ГОСТ 8239-86) выбираем двутавр с ближайшим большим значением момента сопротивления. Это двутавр № 36, для которого  $W_z = 743 \text{ см}^3$ ,  $F_1 = 61,9 \text{ см}^2$ .

### 5.2. Поперечное сечение в форме прямоугольника.

Прямоугольник является сечением простой геометрической формы, для которого все геометрические характеристики определяются по известным аналитическим зависимостям. Осевой момент сопротивления прямоугольного сечения с соотношением высоты и основания  $h/b = k$  равен

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = k^2 \frac{b^3}{6}.$$

Тогда, согласно (2.6), минимальная ширина  $b$  прямоугольного сечения балки будет определяется зависимостью

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{z \max}}{k^2[\sigma]}}. \quad (2.9)$$

При  $k = 2$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{z \max}}{2 \cdot [\sigma]}}.$$

Для заданной балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 102,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 9,8 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 9,8 \text{ см}.$$

Площадь прямоугольника с основанием  $b = 9,8 \text{ см}$  при  $k = 2$  равна:

$$F_2 = 2 \cdot b^2 = 2 \cdot 9,8^2 = 192,1 \text{ см}^2.$$

### 5.3. Поперечное сечение в форме круга.

Круг также является сечением простой геометрической формы. Осевой момент сопротивления круга диаметром  $d$  равен:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Тогда, согласно (2.6) минимальный диаметр  $d$  круглого поперечного сечения будет определяется зависимостью

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{z \max}}{\pi[\sigma]}}. \quad (2.10)$$

Для заданной балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 102,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 18,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 18,7 \text{ см}.$$

Площадь круга диаметром  $d = 18,7 \text{ см}$  равна:

$$F_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14159 \cdot 18,7^2}{4} = 274,3 \text{ см}^2.$$

### 5.4. Поперечное сечение из двух швеллеров.

Швеллер является стандартным прокатным профилем. Поскольку выбранное сечение состоит из двух швеллеров, согласно (6) минимальное значение момента сопротивления одного швеллера будет равно

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{2[\sigma]} = \frac{102,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 320 \cdot 10^{-6} = 320 \text{ см}^2.$$

Из справочных таблиц (ГОСТ 8239-86) выбираем швеллер №30, для которого  $W_z = 387 \text{ см}^2$ ,  $F = 40,5 \text{ см}^2$ .

Площадь поперечного сечения из двух швеллеров будет равна

$$F_4 = 2 \cdot F = 2 \cdot 40,5 = 81,0 \text{ см}^2.$$

Все выбранные поперечные сечения являются равнопрочными так как способны воспринимать без разрушения одинаковую внешнюю нагрузку.

6. Сравним выбранные поперечные сечения по металлоемкости.

Поскольку балка является одноосным элементом, ее металлоемкость зависит от площади поперечного сечения. Сведем в таблицу площади выбранных поперечных сечений различной формы и сравним их с площадью двутавра  $F_1$ :

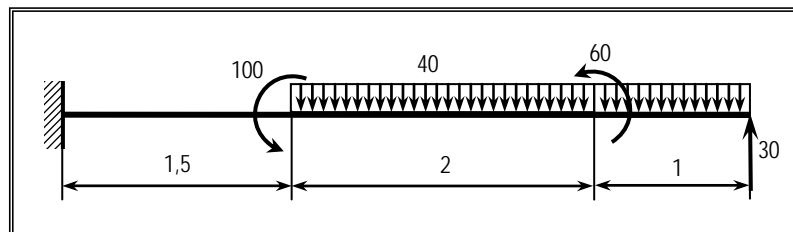
	Двутавр	Прямоугольник	Круг	Два швеллера
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$F_i, \text{см}^2$	61,9	192,1	274,3	81,0
$F_i / F_1$	1	3,103	4,431	1,308

Сравнение площадей выбранных поперечных сечений показывает, что наиболее экономичным является двутавровое сечение. Площадь, а, следовательно, погонный вес и металлоемкость прямоугольного сечения в 3,103, круглого – в 4,431, а сечения из двух швеллеров – в 1,308 раза больше площади равнопрочного двутаврового сечения. Поэтому наиболее рациональной формой поперечного сечения при изгибе является двутавровое поперечное сечение.

### § 2.3. ПРИМЕР РАСЧЕТА КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ

Исходные данные:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа.

Заданная расчетная схема:



#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем опорные реакции (рис.2.4).

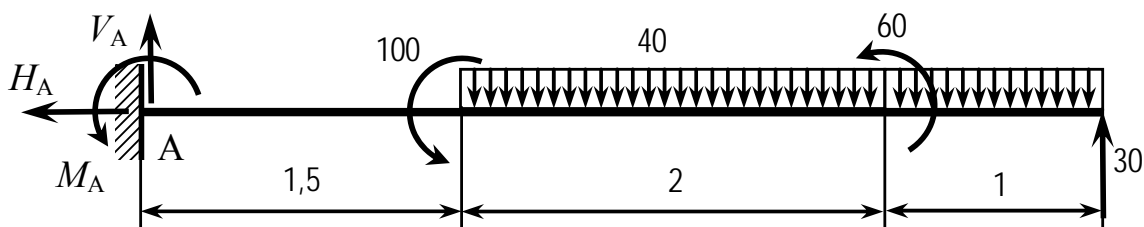


Рис.2.4. Расчетная схема балки

Основное различие расчета двухопорной и консольной балок заключается в том, что в консольной балке можно не определять опорные реакции, так как все участки можно рассматривать со стороны свободного конца балки. Это по-

звоняет несколько сократить решение. Однако при числе участков больше двух и большом количестве внешних нагрузок уравнения изменения внутренних усилий могут получиться довольно громоздкими. Поэтому для таких балок рациональней все-таки определять опорные реакции, хотя в каждом случае необходимо принимать решение о необходимости определения опорных реакций с учетом внешней нагрузки.

В жесткой заделке А консольной балки (рис.2.4) возникают три реакции:  $M_A, V_A, H_A$ . Однако, горизонтальная реакция  $H_A$  обычно равна нулю. Поэтому наиболее рациональной является следующая схема определения опорных реакций в консольных балках:

Порядок определения опорных реакций в консольных балках:

$$1) \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A \qquad 2) \sum y = 0 \Rightarrow V_A$$

1.1. Определяем опорный момент  $M_A$ :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 30 \cdot 4,5 - 40 \cdot 3 \cdot 3 + 60 + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = 40 \cdot 3 \cdot 3 - 30 \cdot 4,5 - 60 - 100 = 65 \text{ кН.}$$

1.2. Определяем опорную реакцию  $V_A$ :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A + 30 - 40 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_A = 40 \cdot 3 - 30 = 90 \text{ кН.}$$

Знак «+» у полученных опорных реакций показывает, что их направление выбрано правильно.

2. Составляем уравнения изменения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка балки.

Для заданной балки уравнения изменения внутренних усилий и их значения в характерных точках для трех участков имеют вид (рис.2.5):

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 1,5$  м, слева) (рис.2.5а)

$$Q_I(x_1) = 90; \qquad Q_I(0) = 90 \text{ кН}; \qquad Q_I(1,5) = 90 \text{ кН};$$

$$M_I(x_1) = -65 + 90 \cdot x_1; \qquad M_I(0) = -65 \text{ кН}\cdot\text{м}; \qquad M_I(1,5) = 70 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 1$  м, справа) (рис.2.5б)

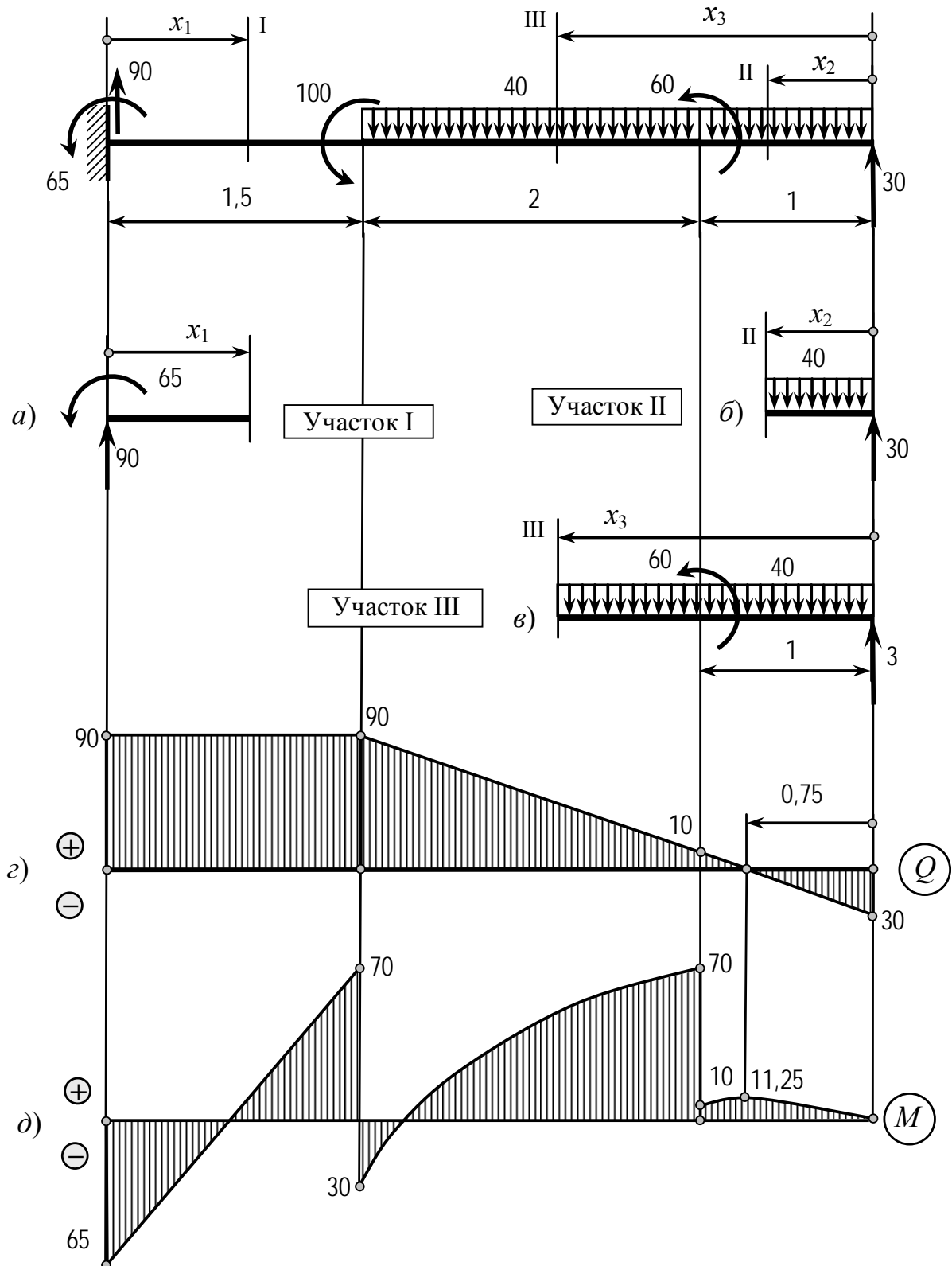
$$Q_{II}(x_2) = -30 + 40 \cdot x_2; \qquad Q_{II}(0) = -30 \text{ кН}; \qquad Q_{II}(1) = 10 \text{ кН};$$

$$M_{II}(x_2) = 30 \cdot x_2 - 40 \cdot x_2^2 / 2; \qquad M_{II}(0) = 0; \qquad M_{II}(1) = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Уравнение изменения изгибающего момента  $M_{II}(x_2)$  для второго участка также имеет форму полинома второй степени, а поперечная сила  $Q_{II}(x_2)$  в пределах участка меняет свой знак. Следовательно, нужно определять положение экстремума:

$$Q_{II}(x_2) = -30 + 40 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,75 \text{ м.}$$



Рис.2.5. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ 

Определяем значение экстремального изгибающего момента

$$M_{II}(0,75) = 11,25 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок III ( $1 \leq x_3 \leq 3$  м, справа) (рис.2.5в)

$$Q_{III}(x_3) = -30 + 40 \cdot x_3; \quad Q_{III}(1) = 10 \text{ кН}; \quad Q_{III}(3) = 90 \text{ кН};$$

$$M_{III}(x_3) = 60 + 30 \cdot x_3 - 40 \cdot x_3^2 / 2; \quad M_{III}(1) = 70; \quad M_{III}(3) = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Уравнение изменения изгибающего момента  $M_{III}(x_3)$  для третьего участка имеет форму полинома второй степени. Однако, поперечная сила в пределах участка не меняет свой знак, и, следовательно, ввиду линейности функции  $Q_{III}(x_3)$ , в пределах участка не может быть равной нулю. Поэтому экстремального значения изгибающего момента на третьем участке не будет.

3. Строим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .

Эпюра поперечных сил  $Q$  для заданной консольной балки приведена на рис.2.5г, изгибающих моментов  $M$  – на рис.2.5д.

4. Проверяем правильность построения эпюр.

Для построенных эпюр (рис.2.5) все признаки правильности выполняются.

5. Подбираем поперечное сечение балки из условия прочности в форме двутавра, прямоугольника ( $h/b = k = 2$ ), круга и из двух швеллеров

Для заданной балки максимальный изгибающий момент в опасном сечении равен  $M_{\max} = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (рис.2.3д).

5.1. Двутавровое поперечное сечение.

Минимальное значение момента сопротивления будет равно

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 437,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 437,5 \text{ см}^3.$$

Из справочных таблиц (ГОСТ 8239-86) выбираем двутавр с ближайшим большим значением момента сопротивления. Это двутавр № 30, для которого  $W_z = 472 \text{ см}^3$ ,  $F_1 = 46,5 \text{ см}^2$ .

5.2. Поперечное сечение в форме прямоугольника.

$$\text{Для заданной балки} \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 70 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,69 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8,69 \text{ см}.$$

Площадь прямоугольника с основанием  $b = 8,69 \text{ см}$  при  $k = 2$  равна

$$F_2 = 2 \cdot b^2 = 2 \cdot 8,69^2 = 151,03 \text{ см}^2.$$

5.3. Поперечное сечение в форме круга.

$$\text{Для заданной балки} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 70 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 16,46 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 16,46 \text{ см}.$$

Площадь круга диаметром  $d = 16,46 \text{ см}$  равна

$$F_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14159 \cdot 16,46^2}{4} = 212,69 \text{ см}^2.$$

#### 5.4. Поперечное сечение из двух швеллеров.

Минимальное значение момента сопротивления одного швеллера равно

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{2[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 218,75 \cdot 10^{-6} = 219,75 \text{ см}^2.$$

Из справочных таблиц (ГОСТ 8239-86) выбираем швеллер №24, для которого  $W_z = 242 \text{ см}^3$ ,  $F = 30,6 \text{ см}^2$ .

Площадь поперечного сечения из двух швеллеров будет равна

$$F_4 = 2 \cdot F = 2 \cdot 30,6 = 61,2 \text{ см}^2.$$

Все выбранные поперечные сечения являются равнопрочными, так как способны воспринимать без разрушения одинаковую внешнюю нагрузку.

#### 6. Сравним выбранные поперечные сечения по металлоемкости.

Сведем в таблицу площади выбранных поперечных сечений различной формы и сравним их с площадью двутавра  $F_1$ :

	Двутавр	Прямоугольник	Круг	Два швеллера
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$F_i, \text{ см}^2$	46,5	151,03	212,69	61,2
$F_i / F_1$	1	3,248	4,574	1,316

Сравнение площадей выбранных поперечных сечений показывает, что наиболее экономичным является двутавровое сечение. Площадь, а, следовательно, металлоемкость прямоугольного сечения в 3,248, круглого – в 4,574, а сечения из двух швеллеров – в 1,316 раза больше площади равнопрочного двутаврового сечения.

### § 2.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое напряженное состояние называется изгибом? Плоским поперечным изгибом? Чем он отличается от других видов изгиба? Какие внешние нагрузки могут вызвать плоский поперечный изгиб? Какие внутренние усилия возникают при плоском поперечном изгибе?

2. Как называется одноосный элемент, работающий на изгиб? Какие существуют типы статически неопределимых балок? Какое отличие в расчете двухопорной балки от консольной?

3. Как обозначаются на расчетных схемах сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, распределенная нагрузка и распределенный момент? Какова размерность этих нагрузок?

4. К каким нагрузкам относятся опорные реакции? Как определяются неизвестные опорные реакции? Какие существуют условия равновесия для балки?

Какие нагрузки относятся к реактивным нагрузкам? В какой последовательности определяются опорные реакции двухопорной и консольной балки?

5. Чему равна поперечная сила в заданном поперечном сечении? Какое существует правило знаков для определения поперечной силы при изгибе?

6. Чему равен изгибающий момент в заданном поперечном сечении балки? Какое существует правило знаков для определения изгибающего момента при изгибе?

7. Что называется эпюрой в сопротивлении материалов? Что такое участок? Что может быть границей участков балки? Какие существуют правила оформления эпюр? В какой последовательности строится эпюра?

8. Что означает определение «эпюра изгибающих моментов по сжатым волокнам»? «По растянутым волокнам»? В чем их особенность и различие?

9. Какие существуют критерии правильности построения эпюр при изгибе балок? Какие существуют критерии правильности построения эпюры поперечных сил? Какие существуют критерии правильности построения эпюры изгибающих моментов?

10. Какие существуют дифференциальные зависимости между внутренними усилиями при изгибе? Какие существуют дифференциальные зависимости между внутренними усилиями и внешней нагрузкой при изгибе?

11. Какой вид имеют теоремы Журавского? Какие зависимости они отражают? Какая связь теорем Журавского с правилом знаков при изгибе? Какие существуют критерии правильности построения эпюр при изгибе на основе дифференциальных зависимостей?

12. По какой формуле определяются нормальные напряжения при изгибе? Чему равны максимальные нормальные напряжения в заданном поперечном сечении? В какой точке сечения они возникают?

13. Какие допущения принимаются при расчете на прочность при изгибе? Какой вид имеет условие прочности балки в заданном поперечном сечении? Какой вид имеет условие прочности балки при изгибе? Какое сечение балки называется опасным?

14. Как определяются размеры поперечных сечений различной формы из условия прочности при изгибе? Какая форма поперечного сечения является наиболее рациональной для балки?

15. Как определяются экстремальные значения на эпюрах при изгибе? В каких случаях можно не определять экстремумы?

16. Какое сечение балки называется опасным? Как записывается условие прочности при изгибе? Какая форма поперечного сечения является наиболее рациональной для одноосных элементов, испытывающих изгиб? Какие виды поперечных сечений не рекомендуется использовать для изгибных элементов?

### § 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Условие задачи: Для заданной стальной плоской рамы:

- 1) Определить опорные реакции;
- 2) Составить уравнения изменения поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов для каждого участка рамы;
- 3) Построить эпюры поперечных, продольных сил и изгибающих моментов;
- 4) Сделать проверку правильности построения эпюр;
- 5) Подобрать двутавровое поперечное сечение рамы из условия прочности;
- 6) Сделать полную проверку выбранного поперечного сечения с учетом касательных и расчетных напряжений.

Цель задачи: отработка навыков расчета на прочность статически определимых плоских рам при изгибе, в том числе: определения опорных реакций двух и трехопорных рам, построения эпюр поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов, проверки равновесия узловых точек, определения опасного сечения рамы при изгибе, подбора поперечного сечения из условия прочности, полной проверки на прочность при изгибе с учетом касательных и главных напряжений.

Ключевые слова: плоская рама, эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов в рамах, правило знаков для продольных, поперечных сил и изгибающих моментов в рамах, сжатые и растянутые волокна, проверка правильности построения эпюр в рамах, уравнения равновесия, равновесие узловых точек, расчетное сечение, полная проверка на прочность при изгибе, расчетные напряжения при изгибе по третьей и четвертой теории прочности, опасная точка двутаврового поперечного сечения.

#### § 3.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рамой называется плоская или пространственная конструкция, все элементы которой работают на изгиб.

По типу закрепления плоские статически определимые рамы делятся на консольные, двухопорные и трехопорные. По очертанию рамы условно делятся на простые и сложные. К простым плоским рамам относятся рамы, имеющие не более четырех участков. К таким рамам можно отнести плоские конструкции, имеющие очертания в виде букв русского алфавита «Г», «Т», «С», «К», «П», «Ч» или другие подобные очертания.

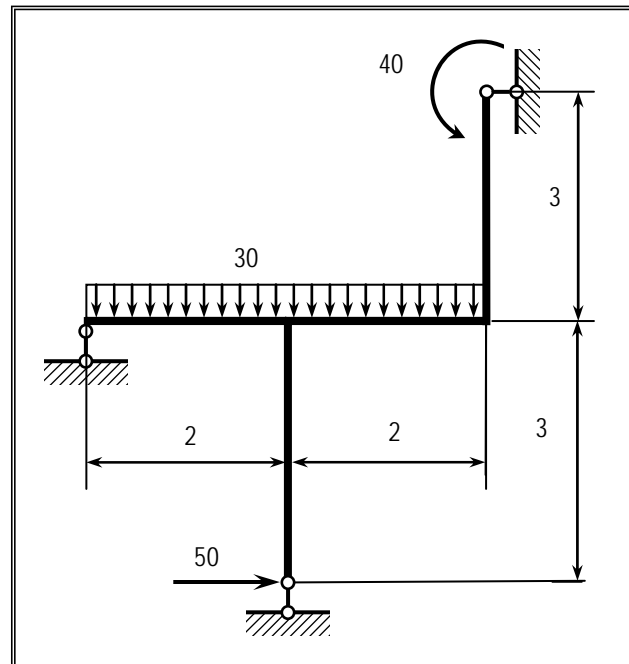
Для рам сохраняются все приведенные ранее соотношения при изгибе балок. Однако, в отличие от балок, в поперечных сечениях рам, помимо поперечных сил и изгибающих моментов могут возникать также продольные силы. Кроме того, границами участков в рамах, в отличие от балок, могут быть также точки излома продольной оси, то есть узловые точки.

Для рам эпюры внутренних усилий, в отличие от балок, строятся не по расчетной схемой, а на любом свободном месте.

### § 3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Исходные данные:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 100$  МПа.

Заданная расчетная схема:



#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

##### 1. Определяем опорные реакции.

В отличие от балок, для рам не существует единого алгоритма определения опорных реакций. Это связано с наличием большого количества разнообразных конструкций плоских рам. Поэтому алгоритм определения опорных реакций для каждой рамы нужно выбирать отдельно. При этом желательно одно из независимых уравнений равновесия (как правило, то, в которое входят две неизвестные опорные реакции) оставлять для проверки, а взамен этого использовать дополнительное уравнение моментов. Для заданной рамы (рис.3.1) для проверки правильности определения опорных реакций удобно использовать уравнение  $\sum y = 0$ . Тогда алгоритм определения опорных реакций будет иметь следующий вид:

$$\sum x = 0 \Rightarrow 50 - H_B = 0 \Rightarrow H_B = 50 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 40 + 50 \cdot 6 - 2V_A = 0 \Rightarrow V_A = 170 \text{ кН};$$

$$\sum M_S = 0 \Rightarrow -40 - 2V_K + 30 \cdot 4 \cdot 2 - 50 \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_K = -50 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0 \Rightarrow V_A + V_K - 30 \cdot 4 = -50 + 170 - 30 \cdot 4 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции найдены правильно.

2. Составляем уравнения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для каждого участка рамы.

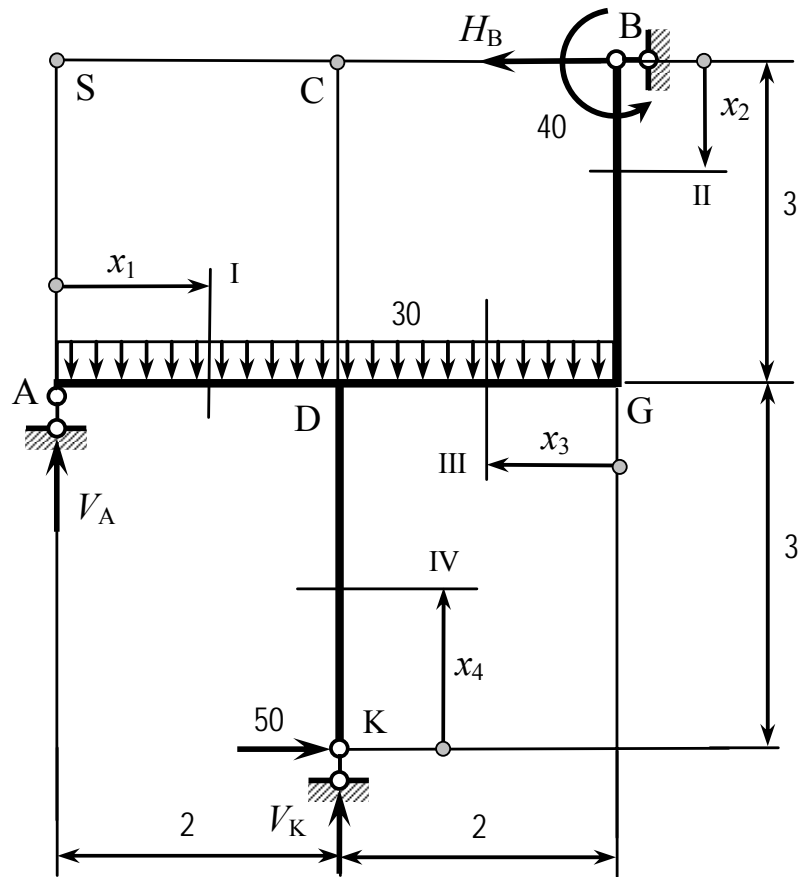


Рис.3.1. Расчетная схема рамы

По сравнению с балками, составление уравнений внутренних усилий в рамах имеет две особенности.

Во-первых, в поперечных сечениях рам возникают три внутренних силовых фактора – изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольная сила  $N$ .

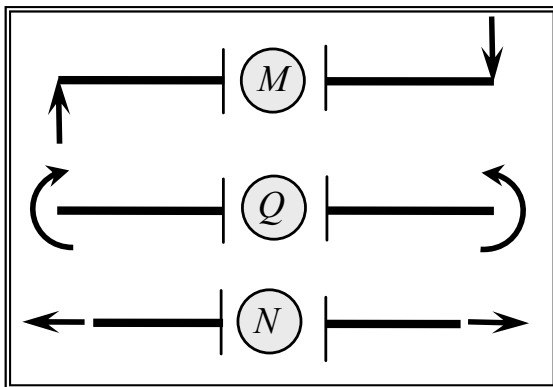


Рис.3.2. Правило знаков в рамах

На рис.3.2 показано «правило знаков» для рам – на схемах указаны направления действия внешней нагрузки, вызывающей в заданном поперечном сечении положительные значения внутренних усилий. Во-вторых, в рамах имеются не только горизонтальные, но и вертикальные участки, для которых не существует «правила знаков». Для таких участков можно использовать «правило знаков» «слева» или «справа», но только для составления уравнений.

Для четырех участков заданной рамы уравнения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил будут иметь вид:

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ , слева) (рис.3.3)

$$Q_I(x_1) = 170 - 30 \cdot x_1, \quad M_I(x_1) = 170 \cdot x_1 - 30 \cdot x_1^2 / 2, \quad N_I(x_1) = 0.$$

Уравнением изменения изгибающих моментов  $M_I(x_1)$  для первого участка является полином второй степени. Однако, поперечная сила  $Q_I(x_1)$  в пределах участка свой знак не меняет. Поэтому экстремального значения изгибающего момента на первом участке не будет.

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 3\text{м}$ , сверху  $\Rightarrow$  справа) (рис.3.4)

Поскольку второй участок является вертикальным, для составления уравнений изменения внутренних усилий для этого участка используем правило знаков «справа»:

$$Q_{II}(x_2) = -50, \quad M_{II}(x_2) = 40 + 50 \cdot x_2, \quad N_{II}(x_2) = 0.$$

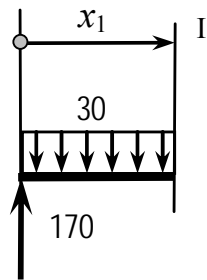


Рис.3.3.

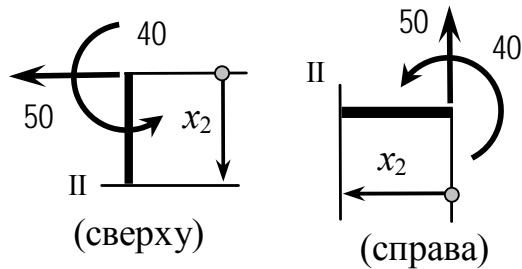


Рис.3.4

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 2\text{м}$ , справа) (рис.3.5)

$$Q_{III}(x_3) = 30 \cdot x_3, \quad M_{III}(x_3) = 40 + 50 \cdot 3 - 30 \cdot x_3^2/2, \quad N_{III}(x_3) = -50.$$

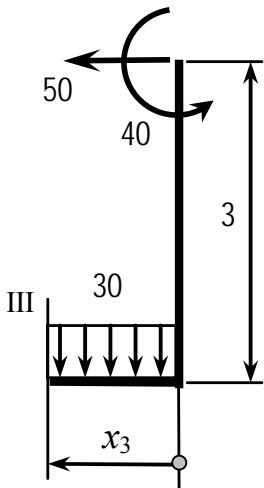


Рис.3.5

Уравнением изменения изгибающих моментов  $M_{III}(x_3)$  для третьего участка является полином второй степени. Однако, поперечная сила  $Q_{III}(x_3)$  в пределах участка свой знак не меняет. Поэтому экстремального значения изгибающего момента на третьем участке не будет.

Участок IV ( $0 \leq x_4 \leq 3\text{м}$ , снизу  $\Rightarrow$  слева) (рис.3.6)

Поскольку четвертый участок является вертикальным, для составления уравнений изменения внутренних усилий для этого участка используем правило знаков «слева»:

$$Q_{IV}(x_4) = -50, \quad M_{IV}(x_4) = -50 \cdot x_4, \quad N_{IV}(x_4) = 50.$$

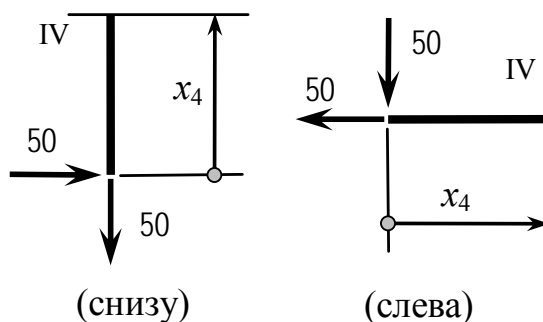


Рис.3.6



### 3. Строим эпюры поперечных, продольных сил и изгибающих моментов.

Построение эпюр внутренних усилий в рамах имеет такие особенности.

Во-первых, уравнения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в раме, как правило, значительно проще, чем в балке. Поэтому значения внутренних усилий в начале и конце участков при построении эпюр обычно вычисляются устно. Исключение составляет обычно лишь участки с возможными локальными экстремумами.

Во-вторых, допускается произвольный выбор положительного направления при построении эпюр поперечных и продольных сил. При этом знак усилия показывается в «теле» эпюры. Это позволяет избежать нежелательно наложения поперечной штриховки эпюр на двух взаимно перпендикулярных участках.

В-третьих, при построении эпюры изгибающих моментов используется правило «сжатых волокон». Известно, что в плоскости изгиба противоположные продольные волокна изгибного элемента имеют различные знаки деформации – с одной стороны происходит растяжение, с противоположной – сжатие. Суть правила «сжатых волокон» заключается в том, что эпюра изгибающих моментов (ее заштрихованная часть) всегда располагается с той стороны изгибного элемента, волокна которой испытывают сжатие. Это правило выполняется автоматически для горизонтальных балок (для которых положительные значения изгибающего момента откладываются вверх). Для вертикальных участков рам при построении эпюры изгибающих моментов необходимо анализировать характер деформации в начале и конце участка, определять положение сжатых волокон и откладывать значения изгибающих моментов со стороны сжатых волокон независимо от их знака (!).

Эпюры внутренних усилий для заданной рамы показаны на рис.3.7 – 3.9.

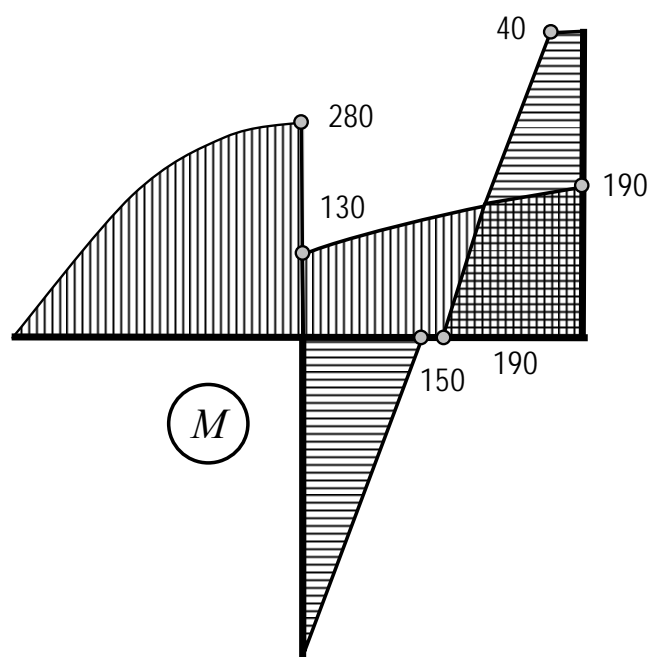
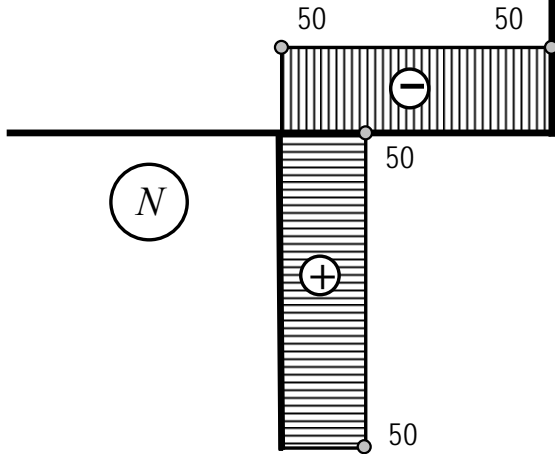
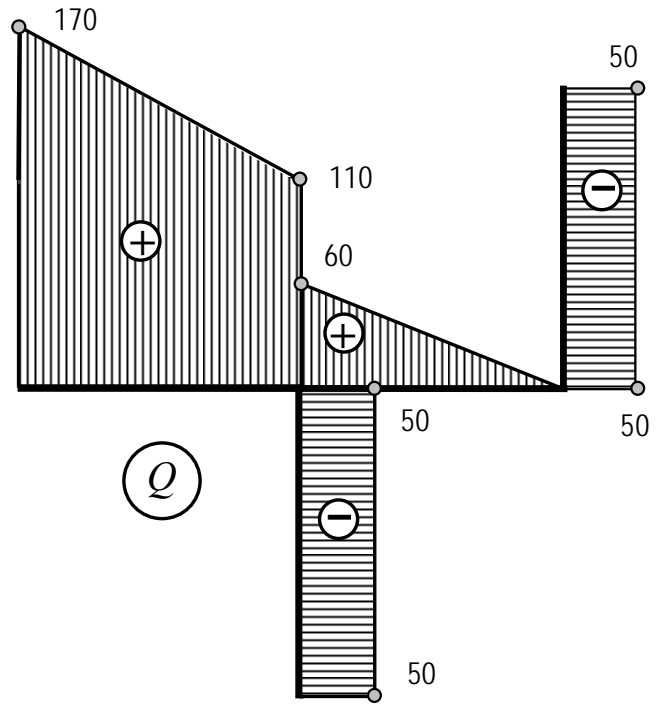


Рис.3.7. Эпюра изгибающих моментов  $M$

Рис.3.8. Эпюра продольных сил  $N$ Рис.3.9. Эпюра поперечных сил  $Q$ 

#### 4. Делаем проверку правильности построения эпюр.

Правильность построения эпюр в рамах проверяется по равновесию узловых точек и осуществляется в следующей последовательности:

а) вырезается узел из расчетной схемы рамы поперечными сечениями, бесконечно близкими к узловой точке. Вместе с узлом вырезаются сосредоточенные силы и изгибающие моменты, действующие в этой точке;

б) определяются значения внутренних силовых факторов в проведенных поперечных сечениях в окрестностях узла из эпюр поперечных сил  $N$ , продольных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ ;

в) в поперечных сечениях в соответствии с правилом знаков (положительное направление продольной силы – от сечения, поперечной силы – по часовой стрелке, изгибающий момент – по направлению к сжатым волокнам) прикладываются найденные значения внутренних силовых факторов.

г) проверяется выполнение условий равновесия узла от действия внешних и внутренних усилий  $\sum x = 0$ ,  $\sum y = 0$  и  $\sum M = 0$ .

Узловыми в рамах являются точки излома продольной оси. В заданной раме две таких точки – D и G (рис.3.1).

##### 4.1. Проверим равновесие узла D (рис.3.10):

$$\sum x_D = 0 \Rightarrow 50 - 50 = 0,$$

$$\sum y_D = 0 \Rightarrow 110 - 50 - 60 = 0,$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 280 - 130 - 150 = 0.$$

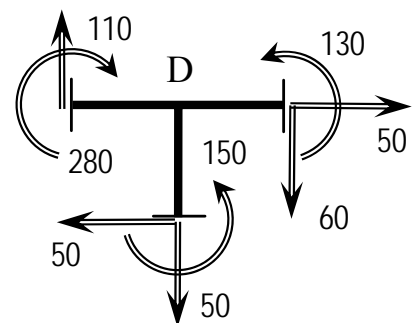


Рис.3.10. Равновесие узла D

Равновесие узла D выполняется.

4.2. Проверяем равновесие узла G

(рис.3.11):

$$\begin{aligned}\sum x_G = 0 &\Rightarrow 50 - 50 = 0, \\ \sum y_G = 0 &\Rightarrow \text{нет нагрузок}, \\ \sum M_G = 0 &\Rightarrow 190 - 190 = 0.\end{aligned}$$

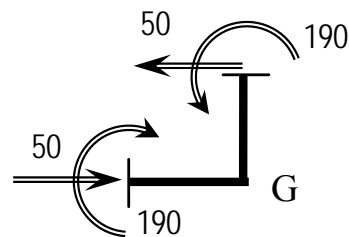


Рис.3.11. Равновесие узла G

Равновесие узла G выполняется.

5. Подбираем двутавровое поперечное сечение из условия прочности.

Для заданной рамы максимальный изгибающий момент в опасном сечении равен  $M_{\max} = 280 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (рис.3.7).

Определяем минимально допустимый осевой момент сопротивления поперечного сечения рамы согласно (2.8)

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{280 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1750 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 1750 \text{ см}^3.$$

Согласно ГОСТ 8239 –86 выбираем двутавр №55, для которого (рис.3.12):

$$h = 55 \text{ см}, \quad b = 18 \text{ см}, \quad d = 1,1 \text{ см}, \quad t = 1,65 \text{ см}, \quad F = 118 \text{ см}^2, \quad W_z = 2035 \text{ см}^3, \\ J_z = 55962 \text{ см}^4, \quad S_z = 1181 \text{ см}^3.$$

6. Делаем полную проверку выбранного поперечного сечения с учетом касательных и расчетных напряжений.

Нормальные и касательные напряжения являются разнородными и поэтому учесть одновременно их влияние при расчете на прочность невозможно. Преобладающими напряжениями при изгибе обычно являются нормальные напряжения. Поэтому именно по максимальным нормальным напряжениям подбирается поперечное сечение при изгибе. Однако, часто запаса прочности при выборе ближайшего большего поперечного сечения оказывается недостаточно, чтобы компенсировать влияние касательных напряжений. Особенно это характерно для коротких балок. Поэтому при расчете на прочность при изгибе рекомендуется делать полную проверку на прочность с учетом касательных и расчетных напряжений по одной из теорий прочности.

Подбор поперечного сечения при изгибе и его полная проверка на прочность производится в следующей последовательности:

а) подбирается поперечное сечение из условия прочности по максимальным нормальным напряжениям в опасном сечении из эпюры изгибающих моментов (поперечном сечении, в котором действует максимальный изгибающий момент  $M_{\max}$ ) согласно (2.8).

б) делается проверка выбранного сечения на прочность по максимальным касательным напряжениям в опасном сечении из эпюры поперечных сил (попе-

речном сечении, в котором действует максимальная поперечная сила  $Q_{\max}$ ) из условия:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{b(0) \cdot J_z} \leq [\tau], \quad (3.1)$$

где  $S_z$  - статический момент площади половины сечения,  $b(0)$  - ширина поперечного сечения в нейтральном слое.

в) делается проверка выбранного сечения по расчетным напряжениям по одной из теорий прочности в расчетном сечении (поперечном сечении, в котором действует значительные, но не обязательно максимальные по величине, изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила) из условия:

$$\sigma_{расч} \leq [\sigma].$$

6.1. Проверяем выбранное поперечное сечение по максимальным касательным напряжениям

Максимальные касательные напряжения  $Q_{\max} = 170$  кН действуют в точке А (рис.3.9). Статический момент половины сечения для двутавра является табличной величиной и равен  $S_z = 1181$  см<sup>3</sup>, ширина сечения  $b(0) = d = 1,1$  см.

Тогда согласно (3.1):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z d} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 1181 \cdot 10^{-6}}{55962 \cdot 10^{-8} \cdot 0,011} = 32,61 \cdot 10^6 \text{ Па} = 32,61 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности по максимальным касательным напряжениям выполняется.

6.2. Проверяем выбранное сечение по расчетным напряжениям.

Для оценки прочности при изгибе обычно используются третья или четвертая теории прочности, поскольку сталь, из которой изготавливаются стандартные прокатные профили является пластичным материалом.

Согласно третьей теории прочности расчетные напряжения равны:

$$\sigma_{расч}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (3.2)$$

Согласно четвертой теории прочности расчетные напряжения равны:

$$\sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (3.3)$$

Расчетным сечением, то есть поперечным сечением, в котором действует значительные изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила, для заданной балки будет сечение в точке А (рис.3.2), для которого:

$$M_{расч} = 280 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_{расч} = 110 \text{ кН}, \quad N_{расч} = 0.$$

В двутавровом поперечном сечении наиболее опасной является точка  $S$  (рис.3.12) сопряжения стойки и полки.

Определим расчетные напряжения в расчетном сечении в точке  $S$  по третьей теории прочности. Согласно (3.2) расчетные напряжения будут равны:

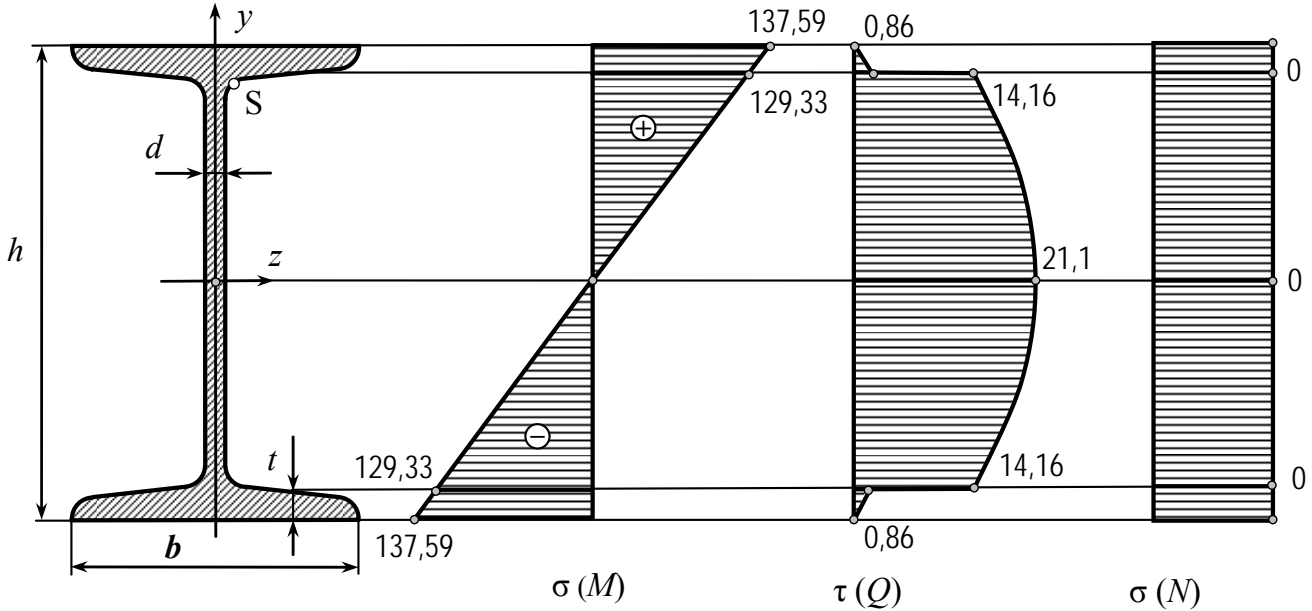


Рис.3.12. Эпюры напряжений по высоте балки в опасном сечении

$$\sigma_{расч}^{III} = \sqrt{\sigma_S^2 + 4 \cdot \tau_S^2} = \sqrt{(\sigma_S(M_{расч}) + \sigma_S(N_{расч}))^2 + 4 \cdot \tau_S^2(Q_{расч})}, \quad (3.4)$$

где  $\sigma_S(M_{расч})$  – нормальные напряжения в точке  $S$  от действия изгибающего момента,  $\tau_S(Q_{расч})$  – касательные напряжения в точке  $S$  от действия поперечной силы,  $\sigma_S(N_{расч})$  – нормальные напряжения в точке  $S$  от действия продольной силы.

С учетом геометрии двутаврового сечения (рис.3.12) эти напряжения будут определяться зависимостями:

$$\sigma_S(M_{расч}) = \sigma \left( \frac{h}{2} - t \right) = \frac{M_{расч} (h/2 - t)}{J_z}, \quad (3.5)$$

$$\tau_S(Q_{расч}) = \tau \left( \frac{h}{2} - t \right) = \frac{Q_{расч} \cdot b \cdot t \cdot (h - t)}{2 \cdot J_z \cdot d}, \quad (3.6)$$

$$\sigma_S(N_{расч}) = \frac{N_{расч}}{F}. \quad (3.7)$$

С учетом (3.5) – (3.7) компоненты напряжений в точке  $S$  будут равны:

$$\sigma_S(M_{расч}) = \frac{280 \cdot 10^3 (0,55/2 - 0,0165)}{55962 \cdot 10^{-8}} = 129,33 \cdot 10^6 \text{ Па} = 129,33 \text{ МПа};$$

$$\tau_S(Q_{расч}) = \frac{110 \cdot 10^3 \cdot 0,18 \cdot 0,0165 \cdot (0,55 - 0,0165)}{2 \cdot 55962 \cdot 10^{-8} \cdot 0,011} = 14,16 \cdot 10^6 \text{ Па} = 14,16 \text{ МПа};$$

$$\sigma_S(N) = 0.$$

Эпюры изменения напряжений по высоте поперечного сечения рамы в расчетном сечении приведены на рис.3.12.

Согласно (3.4) расчетное напряжение в точке  $S$  в расчетном сечении заданной рамы по третьей теории прочности будет равно:

$$\sigma_{расч}^{III} = \sqrt{(129,33 + 0)^2 + 4 \cdot 14,16^2} = 132,39 \cdot 10^6 \text{ МПа} = 132,39 \text{ МПа}.$$

Поскольку  $\sigma_{расч}^{III} = 132,39 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ , условие прочности заданной рамы по расчетным напряжениям по третьей теории прочности выполняется.

### § 3.3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое рама? Какие существуют виды плоских статически определимых рам?
2. Какие особенности определения опорных реакций в рамах? Какие особенности составления уравнений внутренних усилий в рамах?
3. Какие особенности построения эпюр продольных и поперечных сил в рамах? Что такое «правило сжатых волокон»? Как проверяется правильность построения эпюр в рамах?
4. Какое правило знаков применяется при составлении уравнений поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов в рамах?
5. В какой последовательности делается полная проверка на прочность при изгибе? Что такое опасное сечение? Расчетное сечение?
6. По какой формуле определяются касательные напряжения при изгибе?
7. В какой точке поперечного сечения балки возникают максимальные касательные напряжения?
8. По какой формуле определяются расчетные напряжения при изгибе по третьей и четвертой теориям прочности?
9. Какая точка поперечного сечения двутавровой балки считается наиболее опасной с точки зрения прочности?
10. Какое сечение называется расчетным? Что такое расчетный изгибающий момент и расчетная поперечная сила?
11. В какой последовательности делается полная проверка на прочность при изгибе?