ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2008. Вып. 16

УДК 517.5

©2008. **Н.П. Волчкова**

АНАЛОГ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА БЕССЕЛЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ФЕРРЕРСА

Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса.

Хорошо известно [1, глава 2, § 29, (29.4)], что функция Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ имеет при $z\to\infty$, $|\arg z|\le\pi-\varepsilon$ ($\varepsilon\in(0,\pi)$) асимптотическое разложение

$$J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu,2k)(2z)^{-2k}-\right.$$

$$\left.\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu,2k+1)(2z)^{-2k-1}\right], \qquad (1)$$

где

$$(\nu,m)=\frac{\Gamma\left(\frac12+\nu+m\right)}{m!\Gamma\left(\frac12+\nu-m\right)},\quad \Gamma\ -\text{гамма-функция.}$$

Цель данной работы – получить аналог разложения (1) для функций Ферререса (см. [2, глава 3, § 3, п. 57]). Функции Ферререса $T_\nu^\mu(x)$ ($\mu,\nu\in\mathbb{C}$, $x\in(-1,1)$) определяются равенством

$$T_\nu^\mu(x)=\frac{e^{i\pi\mu}}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right),$$

где F - гипергеометрическая функция Гаусса. Они тесно связаны с функциями Лежандра первого рода и играют важную роль в различных вопросах анализа. В частности, с точностью до постоянного множителя, функция

$$(\sin\theta)^{1-\frac{n}{2}}T_{l+\frac{n}{2}-1}^{1-\frac{n}{2}}(\cos\theta),\quad (l\in\mathbb{Z}_+,\quad n\in\mathbb{N}\backslash\{1\})$$

является зональной сферической функцией на стандартной n -мерной сфере $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$.

Для $k\in\mathbb{Z}_+$, $p\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$ и $r\in(0,\pi)$ положим

$$d_k(r)=\begin{cases}\frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1}\,\mathrm{ctg}r, & \text{если } k \text{ нечетно},\\ \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно, } k\neq0,\\ 0, & \text{если } k=0,\end{cases}$$

$$A_0=(\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

$$A_p=(\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{p}\frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_m}{m!}\sum_{k_1+\ldots+k_m=p}\frac{p!}{k_1!\ldots k_m!}d_{k_1}(r)\ldots d_{k_m}(r),$$

где $(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon\in(0,\pi)$. Тогда при $\lambda\to\infty$, $|\arg\lambda|\le\pi-\varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение*

$$T^{\mu}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos r)\sim\frac{2e^{i\pi\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)(\sin r)^{-\mu}}\times$$

$$\left(\cos\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!}\frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}}+\right. \tag{2}$$

$$\left.\sin\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!}\frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}\right).$$

Частные случаи теоремы 1 были известны ранее. Например, в [3, лемма 4.2] было получено два члена асимптотического разложения (2). Этот результат затем использовался для изучения некоторых вопросов интегральной геометрии на $\mathbb{S}^n$. Относительно других частных случаев теоремы 1 и близких вопросов см. [2, глава 6, § 3], [4, часть 1], [5, часть 2].

Доказательство теоремы 1.

Пусть сначала $\mathrm{Re}\mu<\frac{1}{2}$. Тогда по формуле Мелера-Дирихле (см. [6, 3.7 (27)])

$$T^{\mu}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos r)=\frac{e^{i\pi\mu}(\sin r)^{\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}\int_{-r}^{r}e^{i\lambda t}(\cos t-\cos r)^{-\mu-\frac{1}{2}}dt. \tag{3}$$

Обозначим

$$I(\lambda)=\int_{-r}^{r}e^{i\lambda t}(\cos t-\cos r)^{-\mu-\frac{1}{2}}dt.$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [7, глава 2, § 10, пункт 10.3, теорема 10.2]) имеем

$$I(\lambda)\sim e^{i\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\mu\right)-\lambda r\right)}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\Gamma\left(p-\mu+\frac{1}{2}\right)}{p!}\frac{A_p}{(i\lambda)^{p-\mu+\frac{1}{2}}}+$$

$$e^{i\lambda r}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(p-\mu+\frac{1}{2}\right)}{p!}\frac{A_p}{(i\lambda)^{p-\mu+\frac{1}{2}}},$$

где

$$A_p = \frac{d^p}{dt^p}\left(\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t}\right)^{-\mu-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{t=0}, \quad p \geq 0.$$

Отсюда

$$I(\lambda) \sim 2\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} +$$

$$2\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Вычислим A_p. По формуле Тейлора

$$\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} = \frac{(\cos t-1)\cos r + \sin t \sin r}{t} =$$

$$\frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}\cos r + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \sin r\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} b_k(r), \tag{5}$$

где

$$b_k(r) = \begin{cases} \cos r, & k \ - \text{нечетно}, \\ \sin r, & k \ - \text{четно}, \ k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

Перепишем (5) в виде

$$\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} = \sin r\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_k(r)\right) = \sin r(1+\tau(t)), \tag{6}$$

где

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!(k+1)}(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} c_k(r), \quad c_k(r) = \begin{cases} \mathrm{ctg}\, \mathrm{r}, & k \ - \text{нечетно}, \\ 1, & k \ - \text{четно}, \ k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots$.

Положим $F(x) = (1+x)^{-\mu-\frac{1}{2}}$. Тогда (см. (6))

$$A_p = (\sin r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{d^p}{dt^p}\left((1+\tau(t))^{-\mu-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t=0} = (\sin r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{d^p}{dt^p}\left(F(\tau(t))\right)\Big|_{t=0}.$$

Используем формулу

$$(F(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^{p} \frac{F^{(m)}(\tau(t))}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (\tau(t))^k (\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p \geq 0$$

(см. [8, доказательство теоремы 2.11]). Поскольку $\tau(0) = 0$,

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} (\tau^m)^{(p)}(0), \quad p \geq 1. \tag{7}$$

Положив в формуле

$$(f_1 \dots f_m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} f_1^{(k_1)} \dots f_m^{(k_m)}$$

$f_1 = \ldots = f_m = \tau$, получим

$$(\tau^m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)} \dots \tau^{(k_m)}, \quad m \geq 1. \tag{8}$$

Из (7) и (8) находим

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1.$$

Таким образом,

$$A_p = (\sin r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \tau^{(k_1)}(0) \dots \tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1.$$

Учитывая, что

$$F^{(m)}(0) = (-1)^m \left(\frac{1}{2} + \mu\right)_m$$

и

$$\tau^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}}{k+1} c_k(r) = d_k(r),$$

из (3) и (4) получаем (2) для $\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{2}$. Общий случай следует отсюда стандартным методом продолжения по параметру (см. [6, 2.8 (30)] и [7, глава 2, § 10, пункт 10.3, доказательство формулы (10.61)]). Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М: Наука, 1971. – 288 с.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций – М: ИЛ, 1952. – 476 с.

3. *Волчков Вит.В.* Локальная теорема о двух радиусах на сфере // Алгебра и анализ. – 2004. – Т. 16. – Вып. 3. – С. 24-55.
4. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
7. *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. – Рига: Зинатне, 1974. – 272 с.
8. *Nessel R.J., Wickeren E.* Local Multiplier Criteria in Banach Spaces // Mathematica Balkanica. New Series. – 1988. – V. 2. – Fasc. 2-3. – P. 114-132.

Донецкий национальный технический университет
`v.volchkov@mail.donnu.edu.ua`

Получено 31.05.10

Аннотация

Н.П. Волчкова

Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса

Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса

Ключевые слова: функции Лежандра, функции Ферререса, асимптотический ряд

Abstract

N.P. Volchkova

An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Ferrers functions

An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Ferrers functions is obtained

Key words: the Legendre functions, the Ferrers functions, asymptotic expansion

Анотація

Н.П. Волчкова

Аналог асимптотичного ряду Бесселя для функцій Феррерса

Одержано аналог асимптотичного ряду Бесселя для функцій Феррерса

Ключові слова: функції Лежандра, функції Феррерса, асимптотичний ряд