МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Навчально – методичний посібник

КРАСНОАРМІЙСЬК – 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З КУРСУ ВИЩА МАТЕМАТИКА ПО ТЕМІ

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

(*для студентів економічних та технічних спеціальностей*)

Розглянуто на засіданні кафедри Природничі науки
Протокол № 8 від 29 квітня 2009р.

Затверджено науково – видавничою Дон НТУ
Протокол № 2 від 29 квітня 2009р.

КРАСНОАРМІЙСЬК – 2009

УДК 330.4.

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу „Вища математика” по темі „Векторна алгебра ” (для студентів економічних та технічних спеціальностей) / Укладачі: проф. О.Д. Петренко, доц. С.О. Вірич, ст. викл. О.М. Данильчук – Красноармійськ, Дон НТУ КІІ, 2009 -38с

В методичному посібнику приведені основні теоретичні положення по темі „Векторна алгебра”, задачі для контрольної роботи, варіанти індивідуального домашнього завдання. В посібнику розв’язана достатня кількість прикладів, що допоможе студентам при самостійному виконанні домашнього завдання .

Методичні вказівки можна рекомендувати для студентів економічних та технічних спеціальностей денної та заочної форми навчання

Укладачі О.Д. Петренко, проф.д.ф.-м.н.
С.О.Вірич доц.,к.т.н.
О.М.Данильчук ст.в.

Відповідальний за випуск: Я.О. Ляшок, доц. к.т.н.

Рецензент:
Г.М. Улітін – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Вищої математики ім. В.В. Пака Донецького національного технічного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна „Вища математика" базується на програмі вищої математики для студентів вищих навчальних закладів, які спеціалізуються за економічними та технічними спеціальностями.

Мета дисципліни. Головною метою викладання даної дисципліни – надати студентам фундаментальні знання з математики, які дозволяють у подальшому засвоювати вміння та навички вищої математики, що базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається придбанню практичних навиків при розв'язанні конкретних задач, вміння застосовувати їх при дослідженні технічних та економічних процесів. Одним із факторів, що визначають рівень знань з математики, є достатньо велика кількість засвоєного і запам'ятованого матеріалу: означень, формулювань теорем, формул. Підвищити рівень математичних знань саме у цьому напрямку і запропоновані дані методичні вказівки. Для зручності матеріал пропонується у доступній для студентів формі, що сприяють кращому його запам'ятовуванню. З метою полегшення роботи основні поняття, формули, теореми виділені в тексті. Дані вказівки дають змогу отримати стислу довідку про формули, теореми, означення властивості та способи розв'язування задач. Основні теоретичні положення ілюструються багатьма прикладами розв'язку відповідних задач. Для докладнішого ознайомлення з відповідним матеріалом можна звернутися, зокрема, до джерел, список яких наведений у кінці даних методичних вказівок.

Завдання даного розділу. Після засвоєння та опрацювання курсу студенти повинні:

- уміти застосовувати теорію при розв'язанні задач;
- вміти розв'язувати задачі раціональними засобами;
- необхідно вміти будувати малюнки до задач.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ ТА САМОСТІЙНИХ РОБІТ

Самостійну або контрольну роботу потрібно виконувати, дотримуючись таких правил:

1. Роботу виконують у рукописній формі в зошиті в клітинку, або в електронному вигляді.

2. На обкладинці контрольної або самостійної роботи повинні бути розбірливо написані прізвище, ім'я та по батькові студента, номер навчальної групи та номер студентського квитка.

3. В кожному завданні необхідно вибрати свій варіант. Номер варіанту контрольної або самостійної роботи надає викладач. Робота, яка містить завдання не свого варіанта, не перевіряється.

4. Перед розв'язанням завдання необхідно переписати повністю його умову. Якщо завдання має загальне формулювання, то при переписуванні його умови потрібно загальні дані замінити конкретними зі свого варіанта.

5. Розв'язання завдань повинно супроводжуватися необхідними поясненнями і відповідними малюнками, якщо в цьому є потреба.

6. Після отримання перевіреної роботи в разі, якщо були виявлені помилки студент повинен у цьому ж зошиті виправити усі з них і повернути роботу на повторну перевірку.

Теорія без практики мертва та безплідна, прак тика без теорії неможлива чи згубна. Для теорії потрібні головним чином знання, для практики, крім того, і вміння.
Академік О. М. Крилов

§1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.

1. Поняття вектора. Основні операції над векторами.

Означення 1. Впорядковану сукупність (x_1, x_2, ... , x_n) n дійсних чисел називають ***n- вимірним вектором***, а числа x_i (i= 1, 2, ... , n) – ***компонентами***, або ***координатами*** вектора

Приклад 1. Якщо, деякий автомобільний завод повинен випустити за зміну 50 легкових автомобілів, 100 вантажних, 10 автобусів, 50 комплектів запчастин для легкових автомобілів і 150 комплектів запчастин для вантажних автомобілів і автобусів, то виробничу програму цього заводу можна записати у вигляді вектора (50, 100, 10, 50, 150), який містить п'ять компонентів.

Економічна ілюстрація. Економічна ілюстрація n – вимірного векторного простору: простір благ (товарів). Під товаром, ми будемо розуміти деяке благо або послугу, здійснюється продаж в визначений час в визначеному місці. Уявимо, що існує скінчене число наявних товарів n; якості кожного з них, придбаних споживачем, характеризуются набором товарів

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, ... , x_n)$$

де через x_i позначається кількість i-го блага, набутого споживачем. Будемо рахувати, що всі товари володіють властивістю довільної подільності, так що може бути куплена будь-яка невід'ємна кількість кожного з них. Тоді всі можливі набори товарів являються векторами простору товарів

$$C=\{ \mathbf{x}=(x_1, x_2, ... , x_n) \mid x_i \geq 0, i=1,2, …, n\}$$

Тримірну або двомірну векторну величину геометрично можна зобразити напрямленим прямолінійним відрізком – вектором, довжина якого дорівнює числовому значенню векторної величини (у вибраному масштабі) і напрям співпадає з напрямом цієї величини. Вектор визначають двома точками: перша – це початок його, друга – кінець. Вектор, початком якого є точка A, а кінцем – точка B, позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Інколи вектор позначають однією рядковою буквою латинського алфавіту $\vec{a}$.

Довжиною або ***модулем*** **в**ектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB і позначається символом $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор називається ***нульовим***, якщо початок і кінець його збігаються. Позначається нульовий вектор символом $\vec{0}$. Абсолютна величина нульового вектора дорівнює нулеві.

Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих. Два вектори називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і рівні модулі. Два колінеарні вектори, які мають однакову довжину і протилежні напрямки, називаються ***взаємнопротилежними***. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається як $-\vec{a}$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним***. Три і більше векторів називаються ***компланарними***, якщо вони паралельні одній площині або лежать в одній площині.

Над векторами можна виконувати певні математичні операції. Лінійними з них є додавання та множення вектора на число. Додавати вектори геометрично можна за ***правилом паралелограма*** та ***правилом трикутника***.

Правило трикутника:

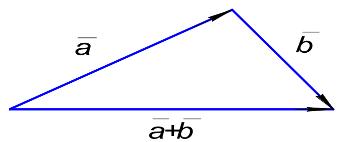

Рис.1

Правило паралелограма:

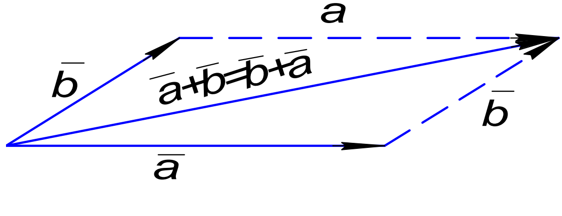

Рис.2

Властивості:

1. комутативність

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. асоціативність

$\overrightarrow{(a + b)} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$ або $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$

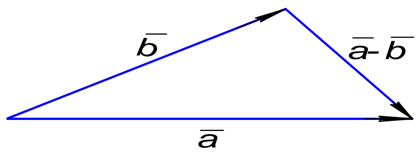

Рис.3

<u>Означення 2.</u> Добутком $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a} \neq 0$ на число $\alpha \neq 0$, $\alpha \in R$ називають вектор $\vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1) $\vec{b}$ колінеарний $\vec{a}$;

2) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

3) $\vec{b}$ і $\vec{a}$ однаково напрямлені, якщо $\alpha > 0$ і протилежно, якщо $\alpha < 0$.

Властивості множення вектора на число:

1. розподільний закон відносно скаляра:

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

2. розподільний закон відносно вектора:

$(\vec{a} + \vec{b})\alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

3. сполучний закон відносно скаляра:

$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

<u>Означення 3.</u> Вектор, довжина, якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним вектором*** або ***ортом*** вектора і позначається $\vec{a}^{\,0}$.

$$\vec{a} = \vec{a}^{\,0} \cdot |\vec{a}|$$

2. Лінійна залежність і лінійна незалежність векторів. Розклад вектора по базису.

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$.

<u>Означення 4.</u> Вектор $\vec{a}$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\overrightarrow{a_i}\,(i = \overline{1, n})$, якщо існують такі числа $\alpha_i\,(i = \overline{1, n})$, що

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{a_i} \qquad (1)$$

<u>Означення 5.</u> Вектори $\overrightarrow{a_i}\,(i = \overline{1, n})$ називаються **лінійно залежними**, якщо існують такі числа $\alpha_i\,(i = \overline{1, n})$, серед яких не всі дорівнюють нулю (тобто $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$), що справджується рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{a_i} = 0 \qquad (2)$$

<u>Означення 6.</u> Система векторів $\overrightarrow{a_i}\,(i = \overline{1, n})$ називається **лінійно незалежною**, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{a_i} = \vec{0} \qquad (3)$$

можлива лише при $\alpha_i = 0\ (i = \overline{1, n})$.

Теорема 1. Для того, щоб система векторів була лінійно залежна необхідно і достатньо, щоб один з її векторів був лінійною комбінацією інших, тобто лінійно виражався через інші вектори системи.

Геометричний зміст лінійної залежності векторів в R^3, що інтерпретуються як напрямлені відрізки, пояснюють слідуючи теореми.

Теорема 2. Система, яка складається із одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, якщо цей вектор нульовий.

Теорема 3. Для того, щоб два вектори були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарні.

Теорема 4. Для того, щоб три вектори були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб вони були компланарними.

<u>Означення 7.</u> Впорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається ***базою***, або ***базисом*** на площині.

Таке ж означення і в базисі R^3: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \overline{e_3}$

Має місце теорема:

Теорема 5. Кожен вектор $\vec{a}$ на площині єдиним способом розкладається на пару неколінеарних векторів

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 \qquad (4)$$

Співвідношення (4) називають розкладом вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Числа α_1 i α_2 називають ***координатами вектора*** вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і записують $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2\}$

Трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається **правою,** якщо спостерігач, який знаходиться в початку кінців векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у вказаному порядку рухається за часовою стрілкою. В противному випадку $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – **ліва трійка.** Всі праві

Базисом у просторі (або ліві) трійки векторів називаються **однаково орієнтованими.**

Теорема 6. Якщо в просторі задано базис то будь-яку впорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \overrightarrow{e_3}$ „ можна однозначно подати як лінійну комбінацію базисних векторів, тобто у вигляді:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \qquad (5)$$

Рівність(5) називається ***розкладом вектора*** $\vec{a}$ ***в базисі*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються ***координатами вектора*** $\vec{a}$ ***в базисі*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, і записують це: $\vec{a} = \{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3\}$

Приклад 2. Чи можуть вектори $\overline{a}_1(2;-3;1)$, $\overline{a}_2(3;-1;5)$, $\overline{a}_3(1;-4;3)$ утворювати базис? Якщо так то знайти розклад по даному базису?

<u>Розв'язання:</u>

Нехай дано вектор $\overline{d}(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$. Перевіримо, чи утворюють вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ базис. Нехай лінійна комбінація цих векторів дорівнює нулю тобто $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{a_i} = \vec{0}$ отримаємо:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \overline{a_3} = \overline{0},$$

Через координати ця рівність має вигляд:

$$\alpha_1\{2;-3;1\} + \alpha_2\{3;-1;5\} + \alpha_3\{1;-4;3\} = \overline{0}, \text{ або}$$

$$\{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3; -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3; \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3\} = \{0;0;0\}$$

Для знаходження $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta \neq 0$. Значить, дана однорідна система має тільки нульові розв'язки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ -лінійно незалежні, а тому утворюють базис.

Відповідь: $\overline{d}(0;0;0)$.

Якщо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно перпендикулярні і довжина кожного із них дорівнює одиниці то базис називається **ортонормованим**, а координати x_1, x_2, x_3 – **прямокутними**. Базисні вектори ортонормованого базису будемо позначати $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

3. Лінійні операції над векторами, що задані своїми координатами.

При додаванні векторів їх відповідні координати додаються, а при множенні на число їх координати множаться на це число.

Нехай $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$.

Тоді
$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1;\alpha_2 + \beta_2;\alpha_3 + \beta_3) \qquad (6)$$
$$\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2;\lambda\alpha_3) \qquad (7)$$

Аналогічно знаходимо різницю векторів $\vec{a} - \vec{b}$ тобто $\vec{a} - \vec{b} = (\alpha_1 - \beta_1;\alpha_2 - \beta_2;\alpha_3 - \beta_3)$.

Співвідношення (1) та (2) випливають із (5) та із визначення лінійних операцій над векторами .

Якщо вектори $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ та $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ колінеарні, то справедливе співвідношення $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ і враховуючи (7) отримаємо
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} \qquad (8)$$
Тобто, якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні, і навпаки.

4. Проекція вектора на вісь.

<u>Означення 8.</u>* Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь *l називається число, що дорівнює довжині відрізка осі *l*, який міститься між проекцією початкової точки і кінцевої, взятій зі знаком „+”, якщо напрямки вектора $\vec{a}$ та осі *l* збігаються, і зі знаком „-”, якщо напрямки протилежні.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь *l* позначається $Пр_l\,\vec{a}$.

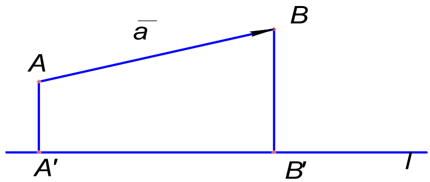

Рис.4

Використовуючи основні властивості проекції вектора на вісь полягають у тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, а саме:

$$Пр_l(\beta \vec{a}) = \beta \cdot Пр_l \overline{a}. \qquad Пр_l(\vec{a} + \overline{b}) = Пр_l \overline{a} + Пр_l \overline{b}.$$

$$Пр_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \tag{9}$$

де $\left(\widehat{\vec{a}, l}\right) = \varphi$

5. Прямокутна система координат.

Означення 9. Сукупність точки О і базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ називається ***впорядкованою системою координат на площині.***

Якщо базисні вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ перпендикулярні і $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = 1$, то такий базис називається ***прямокутним декартовим***. У цьому випадку базисні вектори позначають $\overline{i}$ та $\overline{j}$.

Означення 10. Сукупність точки О і базису $\overline{i}$, $\overline{j}$ називається ***декартовою прямокутною системою координат на площині.***

Означення 11. Сукупність точки О і базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ називається ***системою координат у просторі.***

Якщо базисні вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ взаємно перпендикулярні і $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = |\overline{e_3}| = 1$, то такий базис називається ***прямокутним декартовим***.

У цьому випадку базисні вектори позначають $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{K}$.

Означення 12. Сукупність точки О і базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, K називається ***декартовою прямокутною системою координат у просторі.***

Якщо точка в базисі $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{K}$ має координати x, y, z, то перша координата називається ***абсцисою***, друга-***ординатою,*** третя-***аплікатою.***

6. Розклад векторів по базисних векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Розглянемо вектор $\vec{a}$. Розмістимо його початок у початку координат. Згідно з правилом додавання векторів

$$\overline{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}.$$

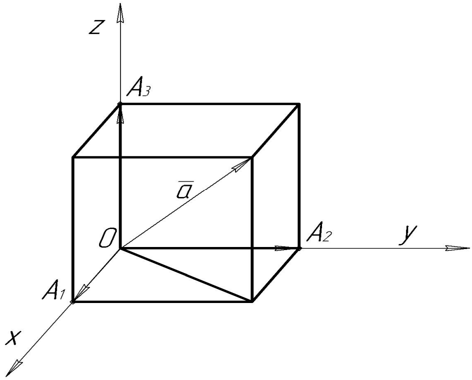

Рис.5

Вектори $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$. колінеарні відповідно векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. маємо:

$\overrightarrow{OA_1} = a_x \cdot \vec{i}, \overrightarrow{OA_2} = a_y \cdot \vec{j}, \overrightarrow{OA_3} = a_z \cdot \vec{k},$

де, відповідно до співвідношення (9)

$a_x = Пр_{Ox}\, \vec{a}, a_y = Пр_{Oy}\, \vec{a}, a_z = Пр_{Oz}\, \vec{a}.$

Отже,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{i} + a_z \vec{k} = \{a_x; a_y; a_z\} \quad (10)$$

Співвідношення (10) – це **розклад вектора** $\vec{a}$ **по базисних векторах** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.$; $a_x; a_y; a_z$ - координати або проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Вектор $\vec{a}$ з даного малюнка є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$.

Тому

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2} \text{ або}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}. \qquad (11)$$

Приклад 3. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = \vec{a_1} - \frac{1}{5}\vec{a_2}$, якщо $\vec{a_1} = \{1;2;1\}, \vec{a_2} = \{4;8;3\}$.

Розв'язання:

Вектор $\vec{a_1} = \{1;2;1\} - \frac{1}{5}\{4;8;3\} = \left\{\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right\}$. Згідно з (11)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

Відповідь: $\left|\vec{a}\right| = \frac{3}{5}$.

Приклад 4. Знайти орт $\overrightarrow{a^o}$ вектора $\vec{a} = \{3;4;-12\}$.

Розв'язання:

Згідно з (10) маємо $\overrightarrow{a^o} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$. Знайдемо довжину вектора $\vec{a}$:

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$. Тоді орт $\overrightarrow{a^o} = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right\}$.

Відповідь: $\overrightarrow{a^o} = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right\}$.

7. Напрямні косинуса вектора.

Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями кути α, β, γ. Тоді відповідно до (9) маємо:

$$a_x = Пр_{Ox}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\alpha, a_y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta, a_z = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma, \text{ або}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}. \qquad (12)$$

Косинуси кутів, які утворюють вектор з осями координат, називають його ***напрямними косинусами.***

Знайдемо суму квадратів напрямних косинусів вектора $\vec{a}$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2}+\frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2}+\frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2}=1$$

Отже,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (13)$$

Із співвідношення (13) випливає, що вектор $\overrightarrow{a^o}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ є одиничним вектором і має напрям вектора $\vec{a}$.

Отже, в прямокутній системі координати будь-якого одиничного вектора є його напрямними косинусами.

Приклад 5. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}=\left\{\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right\}$.

Розв’язання:

Знайдемо довжину вектора $\vec{a}:|\vec{a}|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{3}{5}.$ Тому згідно з (12)

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3}.$

8. Координати вектора, що заданий координатами двох точок.

Нехай у деякій прямокутній системі координат дано дві точки A (x_1,y_1z_1), $B(x_2,y_2,z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$.Отже,

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}, \qquad (14)$$

Знайдемо відстань між точками A (x_1,y_1,z_1) і $B(x_2,y_2,z_2)$.

Шукана відстань $|AB|$ - це довжина вектора $\overrightarrow{AB}$. Отже,

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (15)$$

Приклад 6. Дано дві точки A (1,1,3), B (2,3,1). Знайти довжину та напрям вектора $\overline{AB}$.

Розв’язання:

Згідно з (14) $\overline{AB}=\{2-1;3-1;1-3\}=\{1;2;-2\}$

Тоді, $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3, \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$

Відповідь: $\left|\overline{AB}\right| = 3, \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$

9. Поділ відрізка в заданому відношенні.

Кажуть, що точка M ділить відрізок [AB] у відношенні λ ,тобто $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$,

тому $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$ Нехай A (x_1,$y_1$$z_1$), B($x_2$,$y_2$,$z_2$). Тоді координати токи M (x; y; z) обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \qquad (16)$$

Якщо точка M є серединою відрізка [AB], тобто $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$, то $\lambda = 1$ і формула (16) набуває вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad (17)$$

Приклад 7. Відрізок з кінцями в точках A (3,-2)і B (6,4) розділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

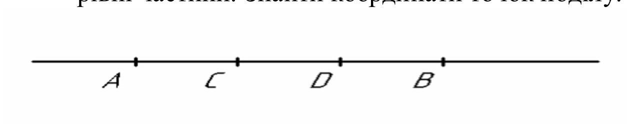

Рис.6

Розв'язання:

Нехай C, D – точки поділу відрізка [AB] на три рівні частини (малюнок дано). Зрозуміло, що $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CB}$. Тому точка C ділить відрізок [AB] у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$. Використовуючи формули (16), знаходимо координати точки C:

$$x_c = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = 4, y_c = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = 0$$, тобто C (4,0).

Із рівності $\overline{AD} = 2\overline{DB}$ випливає, що точка D ділить відрізок [AB] у відношенні $\lambda = 2$. Тому координати точки D: $x_D = \dfrac{3+2\cdot 6}{1+2} = 5, y_D = \dfrac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2$

D (5; 2).

Відповідь: Координати точки D (5;2), C (4,0).

Приклад 8. Знайти координати центра мас однорідної пластини, яка представлена у вигляді трикутника ABC, якщо A (5; 1; 13), B (11; 3; 8), C(2; 5; 0).

Розв'язання:

Центром мас трикутника є точка перетину медіан. Медіана – це відрізок прямої, який сполучає будь-яку вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

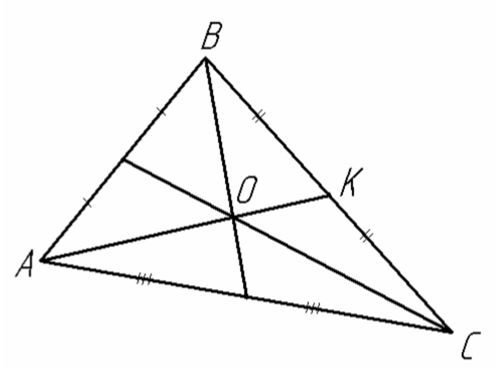

Рис.7

Тоді точка K є серединою відрізка BC і її координати знаходимо за формулою (16):

$$x_K = \frac{11+2}{2} = \frac{13}{2}, \quad y_K = \frac{3+5}{2} = 4, \quad z_K = \frac{8+0}{2} = 4$$

Медіани трикутника перетинаються в точці, яка ділить їх у відношенні 2:1, починаючи від його вершини. Якщо O – точка перетину медіан, то $\overline{OA} = 2\overline{OK}$, тобто λ=2 і за формулою (16) отримаємо:

$$x_O = \frac{x_A + 2\cdot x_B}{1+2} = \frac{5+13}{3} = 6, \quad y_O = 3, \quad z_O = 7.$$

Отже, O(6; 3; 7).

Відповідь: Координати точки O(6; 3; 7).

§2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ.

1. Скалярний добуток і його властивості.

<u>Означення 13.</u>* *Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначається символом ($\overline{a}$, $\overline{b}$) або $\overline{a} \cdot \overline{b}$

Отже, на основі означення отримаємо формулу:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi \qquad (18)$$

де φ - кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Оскільки $Пр_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi, \quad Пр_{\overline{b}}\overline{b} = |\overline{b}|\cos\varphi$,

то

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot Пр_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot Пр_{\overline{b}}\overline{a}$$

$$Пр_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|} \qquad (19)$$

Основні властивості скалярного добутку

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a}).$
2. $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{b}, \overline{a}).$
3. $(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c}).$
4. $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$, *звідки* $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}.$
5. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$ або серед них є хоча б один ненульовий вектор.

Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота А цієї сили визначається рівністю

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) \qquad (20)$$

2. Обчислення скалярного добутку через координати.

Якщо $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то отримаємо формулу для знаходження скалярного добутку:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \qquad (21)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

3. Кут між двома векторами.

Якщо відомі координати векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (22)$$

Приклад 9. Обчислити ($\bar{a}, \bar{b}$), якщо $\bar{a} = \{4; -2; -4\}$, $\bar{b} = \{6; -3; 2\}$.

Розв'язання:

Користуючись формулою (21) знаходимо

$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22$.

Відповідь: $(\bar{a}, \bar{b}) = 22$.

Приклад 10. При якому значенні m вектори

$\bar{a} = \{m; 3; 4\}$, $\bar{b} = \{4; m; -7\}$ будуть перпендикулярними?

Розв'язання:

Два вектори перпендикулярні, якщо скалярний добуток дорівнює нулеві, тобто користуючись формулою (21) знаходимо скалярний добуток векторів тобто $(\bar{a}, \bar{b}) = 4 \cdot m + 3 \cdot m + 4 \cdot (-7) = 7m - 28$. Оскільки вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ перпендикулярні, то $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Отже, $7m - 28 = 0$. Звідси отримаємо, що $m = 4$.

Відповідь: При $m = 4$ вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні.

Приклад 11. Обчислити роботу, яку виконує сила $\bar{F} = \{3; -2; -5\}$, коли її точка прикладання рухається прямолінійно, переміщуючись із положення A(2; -3; 5) в положення B(3; -2; -1).

Розв'язання:

Згідно з формулою (20) робота $A = (\overline{F}, \overline{AB})$. Вектор переміщення $\overline{AB} = \{1; 1; -6\}$.

Тоді $\overline{F} \cdot \overline{AB} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-5) \cdot (-6) = 31$.

Відповідь: робота дорівнює 31од.

Приклад 12. Точки A(-1; 2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1) є вершинами ΔABC. Знайти його внутрішній кут при вершині B.

Розв’язання:

Кут φ – це кут між векторами $\overline{BA}$ *і* $\overline{BC}$ $\overline{BA} = \{3; 0; 4\}, \overline{BC} = \{7; 0; 1\}$. Тоді використовуючи формулу (22) отримаємо:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{BA}, \overline{BC})}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{25}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Отже, $\varphi = 45^0$.

Відповідь: Кут при вершині B дорівнює 45^0.

Приклад 13. Дано вектори $\overline{a} = \{1; -3; 4\}$, $\overline{b} = \{3; -4; 2\}$, $\overline{c} = \{-1; 1; 4\}$. Знайти проекцію вектора $\overline{a}$ на вектор $2\overline{b} + 3\overline{c}$.

Розв’язання:

Користуючись формулою (19)

знаходимо $2\overline{b} = \{6; -8; 4\}$, $3\overline{c} = \{-3; 3; 12\}$ $2\overline{b} + 3\overline{c} = \{3; -5; 16\}$. Далі знаходимо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ *та* $2\overline{b} + 3\overline{c}$.

$$\overline{a} \cdot (2\overline{b} + 3\overline{c}) = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 16 = 3 - 15 + 64 = 52.$$

$$|2\overline{b} + 3\overline{c}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 16^2} = \sqrt{9 + 25 + 256} = \sqrt{290}$$

$$Пр_{2\overline{b}+3\overline{c}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot (2\overline{b} \cdot 3\overline{c})}{|2\overline{b} + 3\overline{c}|} = \frac{52}{290} = \frac{26}{145}.$$

Відповідь: Проекція вектора $\overline{a}$ *на* $2\overline{b} + 3\overline{c}$ дорівнює $\frac{26}{145}$.

§3. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ.

1. Векторний добуток і його властивості.

Означення 14. Три вектори називаються ***впорядкованою трійкою*** (або просто трійкою), якщо вказано, який з цих векторів являється першим, який – другим, і який – третій.

Означення 15. Трійка некомпланарних векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називається ***правою*** (***лівою***), якщо виконується одна із наступних трьох умов:

1. якщо, вектори зведені до спільного початку, і вони розміщені так, що можуть бути розташовані відповідно великий, не зігнутий вказівний і середній пальці правої (лівої) руки;
2. якщо після зведення до спільного початку вектор $\overline{c}$ розташований по ту сторону від площини, яка визначається векторами $\overline{a}\ i\ \overline{b}$, звідки найкоротший поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ здійснюється проти часової стрілки (за часовою стрілкою);
3. якщо знаходячись всередині внутрішнього кута, утвореного приведеним до спільного початку векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, ми бачимо поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ і від нього до $\overline{c}$ здійснюється проти часової стрілки (за часовою стрілкою)

Означення 16. ***Афінна*** або ***Декартові система координат*** називається ***правою*** (***лівою***), якщо три базисних вектора утворюють праву(ліву) трійку

Означення 17. ***Векторним добутком*** векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається $\overline{a} \times \overline{b}$, який задовольняє умовам:

1) вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;
2) довжина $|\overline{a} \times \overline{b}|$ вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi \quad де \quad \varphi = \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \qquad (23)$$

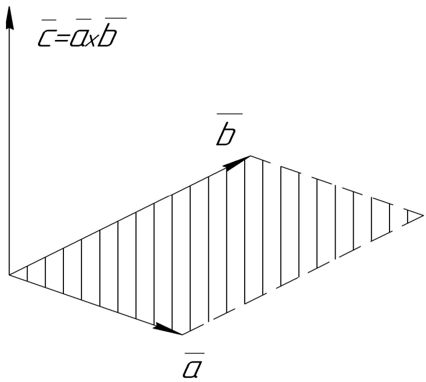

Рис.8

Основні властивості векторного добутку

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}.$ (векторний добуток залежить від послідовності співмножників)
2. $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\bar{a})\times(\lambda\bar{b}).$
3. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}.$
4. векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні (паралельні) або хоча б один з них нульовий тобто $\bar{a}\times\bar{b}=0$.

Формула вираження векторного добутку через координати співмножників має вигляд:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (24)$$

Приклад 14. Дано точки A(2; -1; 2) , B(1; 2; -1), C(3; 2; 1). Знайти векторний добуток векторів $\overline{AB}\times\overline{BC}$.

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ *та* $\overline{BC}$ $\overline{AB}=\{-1;3;-4\},\overline{BC}=\{2;0;2\}.$

$$\overline{AB}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\bar{i}-4\bar{j}-6\bar{k}.$$

Отже, $\overline{AB} \times \overline{BC} = \{\,6; -4; -6\}$.

Відповідь: Векторний добуток векторів $\overline{AB}$ *та* $\overline{BC}$ дорівнює $\{\,6; -4; -6\}$.

2. Застосування векторного добутку векторів.

Розглянемо задачі в яких при їх розв'язанні застосовується векторний добуток векторів.

<u>**Задача 1.**</u> **Обчислення площі паралелограма**: згідно з властивостей площа паралелограма дорівнює добуткові його суміжних сторін на синус кута між ними, тобто $S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$ тому можна вивести формулу для обчислення площі паралелограма:

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \qquad (25)$$

Формула (25) є формулою для ***обчислення площі паралелограма***.

З обчислення площі паралелограма знаходимо формулу обчислення площі трикутника вона буде дорівнювати половині площі паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \qquad (26)$$

Формула (26) є формулою для ***обчислення площі трикутника.***

Приклад 15. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\overline{a} = \left\{1; 0; -\frac{1}{4}\right\}, \quad \overline{b} = \{4; -12; -5\}.$$

<u>Розв'язання:</u>

Застосовуючи формулу (25) отримаємо

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 4\overline{j} - 12\overline{k}.$$

$\overline{a} \times \overline{b} = \{\,-3; 4; -12\,\}$. Тому площа дорівнює:

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13\ (\text{кв.од.})$$

Відповідь: Площа паралелограма дорівнює $13\ (\text{кв.од.})$

Приклад 16. Знайти площу трикутника з вершинами у точках A(1; 2; 1), B(4; 3; 2), C(2; 4; 4).

Розв'язання:

Нехай $\overline{a} = \overline{AB} = \{3; 1; 1\}$, $\overline{b} = \overline{AC} = \{1; 2; 3\}$. Знаходимо $\overline{a} \times \overline{b}$:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i} - 8\overline{j} + 5\overline{k}$$

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 64 + 25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Площа трикутника ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10}\ (кв.од.)$$

Відповідь: Площа ΔABC дорівнює $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ *(кв.од.)*

Задача 2. Обчислення моменту сили. Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, прикладену до точки M, а вектор $\overline{a} = \overline{OM}$, то вектор $\overline{a} \times \overline{F}$ є моментом сили $\overline{F}$ відносно точки O, тобто

$$mom_o \overline{F} = \overline{a} \times \overline{F} \qquad (27)$$

Формула (27) є формулою для ***обчислення моменту сил.***

Приклад 17. Сила $\overline{F} = \{1; -2; 4\}$ прикладена до точки M(1; 2; 3). Знайти момент цієї сили відносно точки A(3; 2; -1).

Розв'язання:

Знаходимо координати вектора $\overline{AM} = \{-2; 0; 4\}$ і застосовуючи формулу (26) отримаємо

$$mom_A \overline{F} = \overline{AM} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 12\overline{j} + 4\overline{k}.$$

$$mom_A \overline{F} = (8; 12; 4).$$

Відповідь: Момент сили дорівнює $mom_A \overline{F} = (8; 12; 4)$.

§4. МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ.

1. Визначення мішаного добутку трьох векторів і його властивості.

Нехай дані три довільні вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Якщо вектор $\overline{a}$ векторно помножити на вектор $\overline{b}$, а потім вектор, який отримаємо при цьому $\overline{a} \times \overline{b}$ скалярно помножити на вектор $\overline{c}$, то в результаті отримаємо число $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$, яке називається ***мішаним добутком векторів*** $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Геометричне тлумачення мішаного добутку векторів вказує наступна теорема.

Теорема 6. Мішаний добуток $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, взятих зі знаком „+”, якщо трійка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права і зі знаком „–”, якщо трійка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ ліва. Якщо ж вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні то $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ дорівнює нулеві**.**

Припустимо, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні. Тоді $Пр_{\overline{a}} \overline{c} = h$ з точністю до знака, дорівнює висоті h паралелепіпеда побудованого на зведених до спільного початку векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ при умові, що основою служить паралелограм, побудований на векторах $\overline{a}, \overline{b}$.

Отже його **об'єм паралелепіпеда** обчислюється за формулою

$$V = S \cdot h = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} \qquad (28)$$

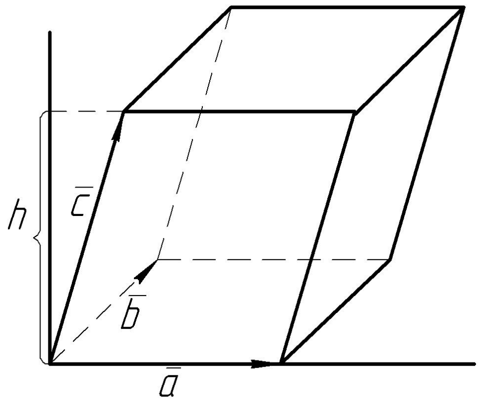

Рис.9

Основні властивості мішаного добутку

1. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$
2. якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вектори компланарні.
3. мішаний добуток трьох векторів, два з яких співпадають, дорівнює нулеві.

2. Обчислення мішаного добутку через координати векторів.

Нехай дані координати векторів

$$\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \overline{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$$

то мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (29)$$

формула (29) – **формула мішаного добутку, який заданий своїми координатами.**

3. Умова компланарності трьох векторів.

Якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$, тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (30)$$

Приклад 18. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a} = \{3; 2; 1\}, \bar{b} = \{1; 4; 1\}, \bar{c} = \{1; 1; 3\}$.

Розв'язання:

Застосовуючи формулу (28) отримаємо

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 1 - 4 - 6 - 3 = 26$$

Відповідь: Мішаний добуток векторів $\bar{a}, \quad \bar{b}, \quad \bar{c}$ дорівнює 26.

Приклад 19. Перевірити, чи точки A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежать в одній площині.

Розв'язання:

Умова, чи знаходяться точки в одній площині – це є умова компланарності векторів.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB} = \{-1; -1; 6\}, \overline{AC} = \{-2; 0; 2\}, \overline{AD} = \{1; -1; 4\}$ і обчислимо їх мішаний добуток. Отримаємо:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 12 - 0 - 8 - 2 = 0$$

Отже, дані вектори компланарні, тобто лежать в одній площині.

Відповідь: Точки A, B, C, D лежать в одній площині.

4. Застосування мішаного добутку векторів.

Розглянемо задачі які при їх розв'язанні застосовується мішаного добутку векторів.

<u>Задача 1.</u> Обчислення об'єму тетраедра (трикутної піраміди) Об'єм трикутної піраміди ABCD становить одну шосту об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $\overline{AB}, \ \overline{AC}\ i\ \overline{AD}$, тобто

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right| \qquad (31)$$

Приклад 20. Знайти об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3).

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = \{3; 6; 3\}, \overline{AC} = \{1; 3; -2\}, \overline{AD} = \{2; 2; 2\}$ далі обчислюємо їх мішаний добуток

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + (-24) + 6 - 18 - 12 - (-12) = -18$$

Використовуючи формулу (30) отримаємо $V_{nip} = \frac{1}{6}\left|-18\right| = 3\ (куб.од.)$

Відповідь: Об'єм піраміди дорівнює $3\ (куб.од.)$

Приклад 21. Дано вершини тетраедра: A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(9; -4; 8). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D на площину ABC.

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами тетраедра

$\overline{AB} = \{2; -2; -3\}, \overline{AC} = \{4; 0; 6\}, \overline{AD} = \{7; -7; 7\}$ далі обчислюємо їх мішаний добуток

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 + (-84) + 84 - 0 - (-56) - (-84) = 140$$

Використовуючи формулу (30) отримаємо $V_{nip} = \frac{1}{6}\left|140\right| = \frac{70}{3}\ (куб.од.)$

З іншого боку

$$V_{nip} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot h. \qquad (32)$$

де h – висота піраміди.

Використовуючи формулу (25) то площа ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, тобто

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\overline{i}-24\overline{j}+8\overline{k}$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28$$

Площа трикутника ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}\ i\ \overline{AC}$:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 28=14\ (кв.од.)$$

$$\frac{70}{3}=\frac{1}{3}\cdot 14\cdot h,\quad 14h=70,\quad h=5.$$

Відповідь: Довжина висоти, опущеної з вершини D дорівнює 5 *од*.

ПИТАННЯ ПО ТЕМІ „*ВЕКТОРНА АЛГЕБРА*”

1. Означення, геометричне зображення та позначення вектора. Модуль вектора.
2. Нульові, одиничні, рівні, колінеарні, компланарні, протилежні вектори.
3. Лінійні операції над векторами: сума та різниця двох векторів (правила трикутника та паралелограма), добуток вектора на число.
4. Означення проекції вектора на вісь.
5. Прямокутна Декартові система координат на площині та у просторі.
6. Координати вектора.
7. Розклад вектора по ортам (базису) прямокутної системи координат.
8. Знаходження алгебраїчної суми векторів, заданих у координатній формі.
9. Правило множення вектора на число, який заданий своїми координатами.
10. Обчислення модуля вектора, який заданий своїми координатами.
11. Означення скалярного добутку двох векторів, його фізичний зміст.
12. Властивості скалярного добутку двох векторів.
13. Знаходження скалярного добутку двох векторів, заданих у координатній формі.
14. Умова ортогональності векторів.
15. Означення векторного добутку векторів.
16. Поняття правої трійки векторів.
17. Властивості векторного добутку векторів.
18. Умова колінеарності двох векторів.
19. Знаходження векторного добутку векторів, що задані у координатній формі.
20. Обчислення площі трикутника і паралелограма за допомогою векторного добутку.
21. Поняття мішаного добутку векторів. Його геометричний зміст.
22. Властивості мішаного добутку векторів.
23. Умова компланарності трьох векторів.

Індивідуальне завдання 1.

Завдання 1. Задані вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Знайти :

1) довжину векторів $|\overline{a}|$ ma $|\overline{b}|$;
2) скалярний та векторний добутки векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та $\overline{a}$ і $\overline{c}$;
3) кут між векторами $\overline{b}$ та $\overline{c}$;
4) мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.
5) встановити, які з векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ паралельні між собою.

Варіанти завдань:

№ з/п	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$
1	(1;1;2)	(2;2;4)	(3;0;1)
2	(0;4;2)	(3;1;7)	(-1;0;2)
3	(4;-1;-2)	(5;0;1)	(2;1;7)
4	(6;1;5)	(3;5;4)	(10;6;8)
5	(6;6;5)	(4;9;6)	(1;0;1)
6	(2;3;5)	(3;5;2)	(5;2;3)
7	(0;1;1)	(2;3;8)	(1;0;5)
8	(3;2;1)	(1;2;3)	(3;1;2)
9	(7;0;6)	(0;6;7)	(6;0;7)
10	(1;2;3)	(3;2;1)	(5;4;2)
11	(0;1;0)	(2;1;2)	(3;0;1)
12	(2;5;4)	(4;7;8)	(8;7;4)
13	(3;2;2)	(2;4;3)	(1;2;1,5)
14	(2;3;3)	(5;6;1)	(5;1;6)
15	(1;0;6)	(2;8;9)	(9;8;2)
16	(2;3;7)	(3;0;2)	(6;0;4)
17	(3;7;2)	(2;1;4)	(4;1;2)
18	(4;0;2)	(3;2;1)	(6;4;1)
19	(1;3;4)	(2;1;3)	(4;0;0)
20	(0;2;4)	(0;4;8)	(2;2;2)
21	(4;0;-1)	(-2;1;3)	(-2;-2;-2)
22	(0;4;-1)	(8; 6;3)	(3;5;7)
23	(2;1;0)	(7;5;8)	(8;0;2)
24	(-1;4;2)	(4;8;0)	(2;-1;3)
25	(4;3;-1)	(2;0;1)	(-3;4;1)

26	(6;0;2)	(0;-4;2)	(7;2;1)
27	(2;-3;4)	(0;0;4)	(-7;2;3)
28	(7;2;0)	(2;-1;3)	(2;-6;4)
29	(-1;0;3)	(-2;2;1)	(7;-1;1)
30	(4;-1;-3)	(0;3;7)	(-1;4;-3)

Індивідуальне завдання 2.

Завдання 2.

1. Побудувати трикутник ABC: A(к; к+1), B(к-2; к+7), C(к-3; к) та знайти внутрішні кути.
2. Знайти проекцію вектора $2\overline{AC}$ на вектор $3\overline{BC} - 4\overline{AB}$ (координати точок взяти з першого завдання.)
3. A(к+2; к+4; к+5), B(к-4; к+4; к-4), C(к+1; к; к+3), S(к+1; к+2; к). Знайти об'єм піраміди SABC і висоту SK, проведену з вершини S на основу ABC.
4. A(3-2к; 1-5к; 5-4к), B(3-к; 5-к; 7-к), C(4-к; 3-3к; 7-2к). Знайти координати векторів $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$, векторний і скалярний добуток цих векторів; напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$; площу трикутника ABC, висоту $\left|\overline{BK}\right|$ і медіану $\left|\overline{CM}\right|$.
5. У паралелограмі ABCD вектори $\overline{AB} = \overline{a},\quad \overline{AD} = \overline{b}.$ Виразити через вектори $\overline{a}\ i\ \overline{b}$ вектори $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD},$ де M-точка перетину діагоналей паралелограма.
6. Вектори $\overline{AB} = \overline{c}, \overline{BC} = \overline{a}, \overline{CA} = \overline{b}$ - сторони трикутника ABC. Знайти $\overline{AM}, \overline{BD}, \overline{CP},$ які збігаються з медіанами трикутника.

к-номер варіанту

Додаток № 1.
Варіант тесту по темі „Векторна алгебра"

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
Факультет технологій і організації виробництва
Кафедра Природничих наук
Вища математика (І-й семестр)

Тест № 1

1. **Продовжить формулювання:**
   Лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається …
2. **Задана піраміда *ABCD,* координати вершин якої:**
   $A(1,2,3), B(-2,4,5), C(3,-4,2), D(5,1,4)$

   Визначте правильний варіант обчислення об'єму цієї піраміди:

1) $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{29}{6} \approx 4{,}83(куб.од.)$	**2)** $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = = \frac{54}{6} = 9(куб.од.)$
3) $V = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 29(куб.од.)$	**4)** $V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 54(куб.од.)$

3. **Обчислити площу паралелограма *ABDC*, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, для якого $A(1,2,3), B(-2,4,5), C(3,-4,2), D(5,1,4)$ за формулою $S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.**

1) 297	**2)** $\frac{1}{2}\sqrt{297}$
3) $\sqrt{297}$	**4) 15**

4. Записати рівняння пучка площин та скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(2,1,-1) та пряму $\begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$**:**

1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 - \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ $6x - 3y + z + 16 = 0$	**2)** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $2x - 5y + 7z + 8 = 0$
3) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ $2x - 5y + 7z + 8 = 0$	**4)** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 +$ $+ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $3x + 0y - 2z + 7 = 0$

Викладач **О.М. Данильчук**
Зав.кафедрою **В.Б. Гого**

Список використаної та рекомендованої літератури

1. М.І.Шкіль, Т.В.Колеснік, В.М.Котлова Вища математика. Книга 1. - К.: "Либідь", - 1994. 279с.
2. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев Геометрия. - М.: " Наука", - 1990. 671с.
3. К.Г.Валєєв, І.А.Джалладова Вища математика. Частина 1. - К.: - 2001. 546с.
4. В.П.Дубовик, І.І.Юрик Вища математика. - К.: - 2001. 648с.
5. В.Е.Шнейдер, А.И.Слуцкий, А.С.Шумов Краткий курс высшей математики. - М.: " Высшая школа", - 1972. 640с.
6. И.И.Привалов Аналитическая геометрия. Издание тридцатое. - М.: " Наука",-1966. 372с.
7. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. - М.: " Высшая школа", - 1986. 304с.
8. В.Ю.Клепко, В.Л.Голець „Вища математика в прикладах і задачах" К. 2006.
9. Под редакцией Н.И.Кремера «Высшая математика для экономистов.» М. 2000.
10. Под редакцией В.И.Ермакова «Общий курс высшей математики для экономистов» М. 2000.
11. Под редакцией В.И.Ермакова «Сборник задач по высшей математики для экономистов» М. 2002.
12. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів" (теорія) К. 2005.
13. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів" (практика) К. 2005

Данильчук Оксана Миколаївна
Бабенко Марина Олегівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З КУРСУ ВИЩА МАТЕМАТИКА ПО ТЕМІ

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

(*для студентів економічних та технічних спеціальностей*)

Підписано до друку 26.04.2012. Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 2,375.
Друк лазерний. Замовлення № 20/12. Тираж 50 прим.

Надруковано в Видавничому центрі КІІ ДВНЗ „ДонНТУ”