МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Красноармійськ 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

АНЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів всіх форм навчання*)

Розглянуто на засіданні кафедри
Природничі науки
Протокол № 8 від 29 квітня 2009р.

Затверджено науково –видавничою
Дон НТУ
Протокол № 2 від 29 квітня 2009р.

КРАСНОАРМІЙСЬК – 2009

УДК 330.4.

Аналітична геометрія. ***Опорний конспект лекцій***. / Укладачі: ст. викл. О.М. Данильчук, ас. М.О. Бабенко – Красноармійськ, Дон НТУ КІІ, Красноармійськ., Видавництво Красноармійського індустріального інституту, 2009. – 38с.

Даний курс лекцій складений відповідно до діючої програми курсу з даної дисципліни і призначений для всіх категорій студентів вузів, як денного так і заочного відділення, які вивчають дану дисципліну в тому чи іншому об'ємі.

Даний конспект лекцій орієнтований на організацію оволодіння даного матеріалу самостійного опрацювання студентів як технічних, так і економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Теоретичний матеріал по всім темам супроводжується малюнками та розгляданням великої кількості прикладів та задач, які подані в доступній формі.

Укладачі О.М.Данильчук ст.в
М.О. Бабенко ас.

Відповідальний за випуск: Я.О. Ляшок, доц. к.т.н.

Рецензент:
О.Д.Петренко – доктор фізико – математичних наук, професор кафедри математики Донецького національного технічного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний рівень і темпи розвитку суспільства висувають потреби не тільки мати науковий потенціал в обраній діяльності, але й ефективно застосовувати здобуті знання для розв'язку проблем, що виникають в їх практичній діяльності.

Головна мета викладання вищої математики – дати студентам фундаментальні знання з математики, щоб у подальшому вони могли засвоювати спеціальні дисципліни, які базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага приділяється виробленню практичних навичок у процесі розв'язання конкретних задач, а також навчанню застосовувати математичні методи для дослідження реальних чи то економічних чи технічних процесів і прийняття оптимальних рішень розв'язку.

Метою запропонованих лекцій є стисле та послідовне подання основного курсу вищої математики по темі „Аналітична геометрія" яке адаптоване для вищих навчальних закладів економічного та технічного профілю.

Опорний конспект лекцій є наочним відображенням програмного матеріалу з дисципліни „Вища математика" і може бути використаний для вузівського супроводження лекцій з усіх тем курсу. Відомо, що новий навчальний матеріал засвоюється студентами значно легше, якщо він супроводжується достатньо великою малюнків, що ілюструють їх розв'язання.

Систематичне та якісне подання основних тем сприяє свідомому засвоєнню курсу студентами, як денної так і заочної форми навчання. Опорний конспект лекцій призначений як для самостійної роботи студентів так і для підготовки до складання заліків та іспитів(МК).

Під час роботи з опорним конспектом студентам необхідно використовувати основну і додаткову літературу, а набуті теоретичні знання закріплювати розв'язанням практичних задач і прикладів, які теж можна знайти у рекомендованих збірниках задач. Доцільно також опрацьовувати методичні розробки кафедри з даної дисципліни.

Лекція 1.
Тема: Пряма лінія на площині її рівняння та розташування.

План лекції

1. Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої. Дослідження неповного рівняння прямої.
2. Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричні і канонічні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом,
3. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих.
4. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

1.

З шкільного курсу математики вам відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об'єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції.

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними образами.

Для застосування методів алгебри до розв'язування задач геометрії встановлюється зв'язок між геометричним об'єктом та числами. Способом встановлення такого зв'язку є метод координат, який вперше використав французький математик Рене Декарт (1596-1650).

Основним методом аналітичної геометрії є метод координат.

Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об'єкта.

В аналітичній геометрії вивчають дві основні задачі:

1. Складання рівняння геометричного об'єкта, який розглядають як геометричне місце певних точок.
2. Дослідження властивостей геометричного об'єкта за його рівнянням і побудувати його.

Виділяють також дві найпростіші задачі аналітичної геометрії:

1. знаходження відстані між двома точками;
2. ділення відрізка у заданому відношенні.

Кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно вибраної системи координат; і навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі.

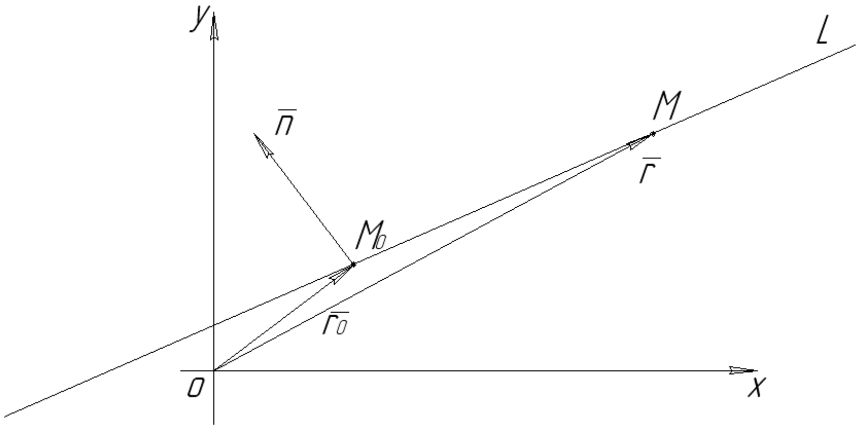

Рис. 1

***Означення* 1. Рівнянням лінії** L у декартовій системі координат на площині називається рівняння виду

$$F(x;\ y) = 0$$

яке задовольняють координати (x, y) у кожній точці цієї лінії і не задовольняють координати жодної іншої точки

Нехай на площині задано пряму L. Складемо ЇЇ рівняння відносно прямокутної системи координат (рис.1). Візьмемо на прямій точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, а на площині вектор $\overline{n} = \overline{i} \cdot A + \overline{j} \cdot B$, перпендикулярний до L.

Позначимо довільну точку L через *M(x, y).* Вектори $\overline{M_0M}$ і $\overline{n}$ взаємно перпендикулярні. Отже, скалярний добуток їх дорівнює нулеві: $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$. або в координатах:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (1.1)$$

Це і є рівняння прямої L. Воно лінійне.

Розглянемо тепер довільне лінійне рівняння:

$$Ax+By+C=0 \qquad (1.2)$$

і нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ є одна з точок, що лежить на цій лінії.

Підставляючи її координати в рівняння (1.2), дістанемо тотожність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

Коли віднімемо цю тотожність, від рівняння (1.2), то отримаємо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C = 0$$

що виражає ту саму лінію, що і рівняння (1.2), і співпадає з рівнянням (1.1). Але це можливо лише тоді, коли лінія (1.2) пряма. Рівняння (1.2)

$$Ax+By+C=0$$

називають **загальним рівнянням прямої на площині.** Вектор $\overline{n}$, перпендикулярний до прямої L**,** називають вектором її нормалі.

Дослідимо, як розміщена пряма відносно системи координат *Oxy,* якщо рівняння (1.2) неповне, тобто коли деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Лінію, яка лежить в площині, називається **плоскою**.

Можливі такі випадки:

1) Якщо коефіцієнт *C=0,* то пряма проходить через початок координат. Дійсно, в цьому випадку координати точки O(0; 0) задовольняють рівняння (3.2).
2) Якщо *B=0,* то пряма *Ax+C*=0 паралельна вісі *Oy.* Справді, вектор її нормалі $\overline{n} = \overline{i} \cdot A + \overline{j} \cdot 0$ перпендикулярний до цієї вісі.
3) Аналогічно, якщо *A*=0, то пряма паралельна вісі *Ox,* а вектор її нормалі $\overline{n} = \overline{i} \cdot 0 + \overline{j} \cdot B$ перпендикулярний до цієї вісі.
4) Якщо *B*=C=0, то пряма *Ax*=0 співпадає з віссю *Oy.* Отже, *x*= 0 є рівняння вісі *Oy.*
5) Якщо *A* = *C*= 0, то пряма *By* = 0 співпадає з віссю *Ox.* Отже, *y* = 0 є рівняння вісі Ox.

Лінії на площині поділяються на алгебраїчні та трансцендентні. Лінія L, яка задана рівнянням $F(x;\, y) = 0$ називається **алгебраїчною,** якщо $F(x;\, y) = 0$ **є** є многочленом від (x; *y*). Лінії, які не є алгебраїчними, називаються **трансцендентними**.

Зауваження Іноді замість виразу „***задано рівняння лінії***” будемо вживати вираз „***задана лінія***”.

2. Запишемо тепер **рівняння прямої у відрізках на осях.**

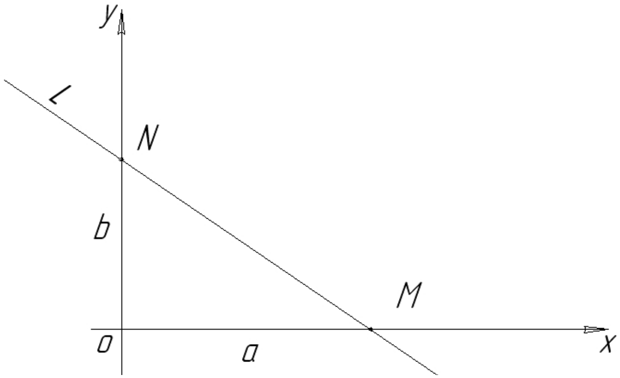

Рис. 2

Нехай пряма L, перетинає вісь Ох у точці М, а вісь Оу - у точці *N*. Відрізок *OM* дорівнює а, а відрізок *ON – b* , тобто точка *M* має координати *х*=а*,y=0,* а точка *N-x=0,y = Ь.* Ці точки лежать на прямій *Ax+ By+C=0,* Це означає, що координати точок *M* і *N* задовольняють рівняння прямої.

Підставимо координати точки *M* у рівняння прямої. Отримаємо

$$A \cdot a + C = 0$$

Звідси

$$A = -\frac{C}{a}$$

Аналогічно для точки *N*:

$$B \cdot b + C = 0, \ B = -\frac{C}{b}$$

Тепер **підставимо** значення *A* і *B* у рівняння прямої

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0$$

Звідси отримаємо **рівняння прямої у відрізках на осях**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1.3)$$

Далі розглянемо **параметричні і канонічні рівняння прямої.**

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\overline{u} = \overline{i} \cdot l + \overline{j} \cdot m$

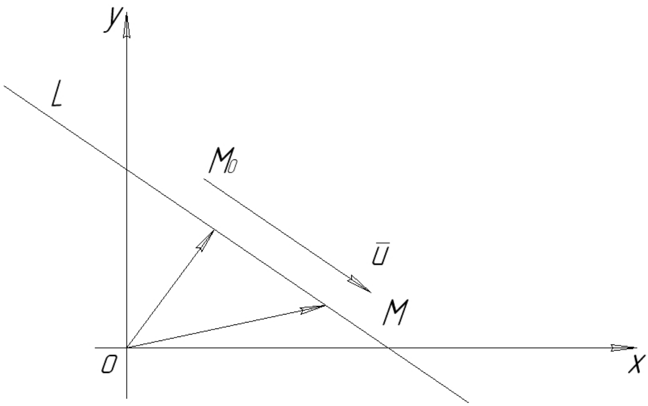

Рис. 3

Позначимо радіус - вектор точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - через $\overline{r_0}$, а радіус - вектор довільної точки $M(x;y)$ -через $\overline{r}$. Вектори $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ і $\overline{u}$ колінеарні (рис.3)

$$\overline{r} - \overline{r_0} = t \cdot \overline{u} \qquad (1.4)$$

Отже, їх координати пропорційні

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (1.5)$$

Звідси, згідно з (3.4)

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases} \qquad (1.6)$$

Рівняння (3.4) є векторне рівняння прямої L, **яку задано точкою і напрямним вектором** $\overline{u}$.

Рівняння (1.5) називають канонічним рівнянням прямої, а рівняння (1.6)- її параметричними рівняннями.

У рівняння (1.6) входить змінний параметр прямої t. Коли точка *M* рухається вздовж прямої L, t змінюється як за абсолютною величиною, так і за знаком.

Знак t залежить від того, чи однаковий, чи протилежний напрям мають вектори $\overline{M_0M}$ і $\overline{u}$. Абсолютна величина t пропорційна відстані точки M від точки M_0. В окремому випадку, коли вектор $\overline{u}$ є орт, $|t|$ дорівнює відстані між точками M_0 і M. Отже, якщо $|\overline{u}|=1$, то $|\overline{r}-\overline{r_0}|=|t|$. Крім того, в цьому випадку, де φ - *кут* між вектором $\overline{u}$ і віссю Ох.

Найчастіше пряму на площині задають **двома своїми точками.** Покажемо, як у цьому випадку скласти її рівняння.

Нехай $M_1(x_1;y_1)\,M_2(x_2;y_2)$ - дві точки прямої L. Неважко побачити, що дві точки прямої визначають її напрямлений вектор, який в цьому випадку лежить на прямій $L:\overline{u}=\overline{M_1M_2}$. Тому координати вектора $\overline{u}$ визначимо за формулами: $l=x_2-x_1,\quad m=y_2-y_1$. Підставляючи значення у рівняння (3.5), дістанемо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (1.7)$$

Це - **рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.**

Нехай тепер пряму задано точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і кутом φ, який вона утворює з додатним напрямом вісі *Ох.*

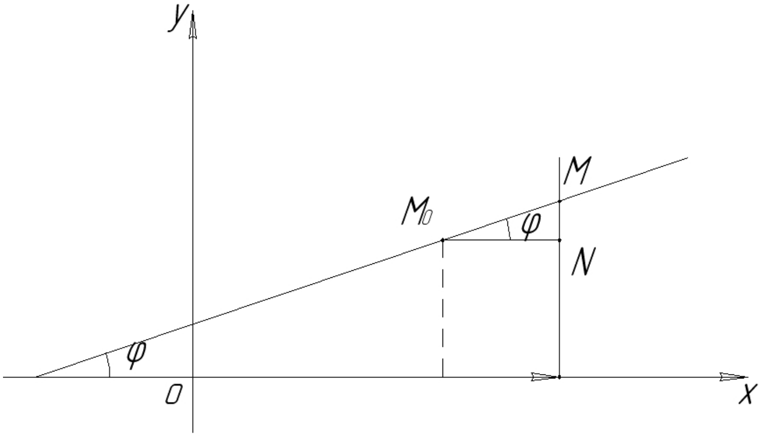

Рис. 4

Позначимо через M(x; y) довільну точку прямої L. З трикутника M_0MN (рис. 4) знайдемо:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=tg\varphi\,,$$

або

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (1.8)$$

$k=tg\varphi$ - кутовий коефіцієнт прямої.

Рівняння (1.8) називають рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі.

Часто пряму на площині задають кутом φ і відрізком *b,* який вона відтинає на вісі *Oy* (рис. 4). Легко бачити, що такий спосіб задання прямої зводиться до попереднього. Справді, у цьому випадку точка $M_0(0;\ b)$ є точка перетину прямої L з віссю *Oy*. Підставляючи координати точки M_o у рівняння (3.8) дістанемо:

$$y-b=kx$$

або остаточно

$$y=kx+b \qquad (1.9)$$

Рівняння (1.9) називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Якщо пряму задано загальним рівнянням $Ax+By+C=0$

то її кутовий коефіцієнт $k=-\dfrac{A}{B}$. Дійсно, з (1.2) маємо:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\,.$$

Звідси:

$$\kappa=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}.$$

Якщо позначити кут між вектором нормалі $\bar{n}$ та додатним вектором вісі *Ox* через *a,* то дістанемо: $tg\varphi=\dfrac{B}{A}$, тобто $k=tg\varphi=-ctg\alpha$ (рис. 5).

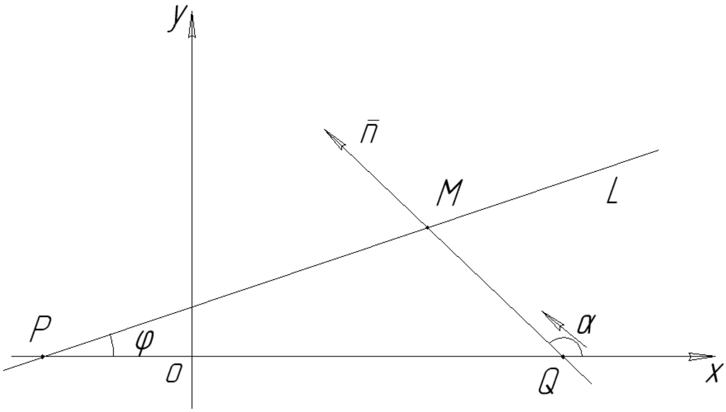

Рис. 5

Якщо пряма L паралельна вісі *Oy.* то $\kappa = tg\dfrac{\pi}{2} = \infty$. Отже рівняння прямої, що паралельна вісі *Oy,* не може бути записане у вигляді (1.9).

3. Розглянемо дві прямі, що не паралельні вісі *Oy.* Точку перетину цих прямих позначимо через *M,* точки перетину їх з віссю

Ox - через *K* і *M, а* кути нахилу до вісі *Ox* - через φ_1 і φ_2 . З трикутника KMN (рис.6) дістанемо $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ Отже

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}$$

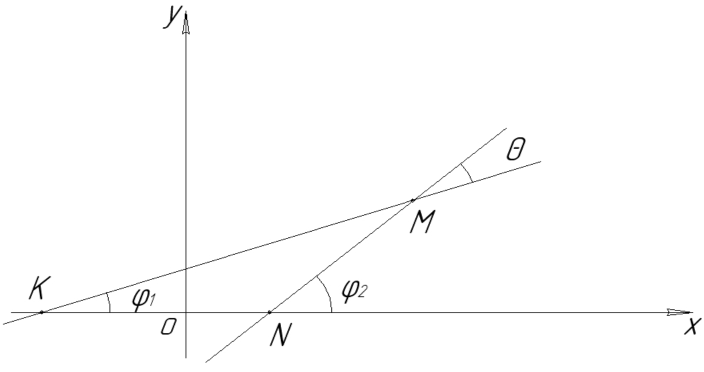

Рис. 6

Але

$$tg\varphi_1 = k_1, \quad tg\varphi_2 = k_2$$

Тому

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (1.10)$$

Ця **формула і дає можливість визначати кут між двома прямими.** Тут $к_1$ і $к_2$ - кутові коефіцієнти даних прямих.

Якщо дві прямі, між якими потрібно визначити кут, задано загальними рівняннями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то краще користуватись формулою

$$\cos\theta = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (1.11)$$

Цю формулу легко отримати, враховуючи, що кут між двома прямими дорівнює куту між векторами їх нормалей $\overline{n_1} = \{A_1; B_1\}$ та $\overline{n_2} = \{A_2; B_2\}$.

Розглянемо тепер умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Якщо прямі паралельні, то кут θ=0. Тоді з (1.10) витікає, що $к_2 - к_1 = 0$, тобто

$$к_2 = к_1 \qquad (1.12)$$

Або $\overline{n_1} = \{A_1; B_1\}$ та $\overline{n_2} = \{A_2; B_2\}$ - колінеарні, а саме виконується рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Умова (3.12) і є умовою паралельності двох прямих.

З формули (3.10) також легко отримати умову перпендикулярності двох прямих. Справді, якщо $\theta = \frac{\pi}{2}$, то

$$1 + k_1 k_2 = 0$$

Звідси, якщо **прямі перпендикулярні**, то

$$k_1 k_2 = -1 \qquad \text{або} \qquad k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (1.13)$$

У випадку, коли прямі задано загальними рівняннями, то для виведення умови перпендикулярності краще використати формулу (3.11). Дві прямі перпендикулярні $\theta = \frac{\pi}{2}$, якщо

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (1.14)$$

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1} \text{ та } \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}$$

тоді їх умовою **перпендикулярності** буде:

$$l_1l_2+m_1m_2=0$$

а умовою **паралельності** буде:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

Кут між двома прямими, що задані канонічно:

$$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

4. Нехай задано пряму L. Через початок *O* системи координат проведемо нормаль до прямої і позначимо кут нахилу нормалі до вісі *Ox* через α, точку її перетину з прямою L - через M_o. а довжину відрізка OM_0 - через *p*. Напрям прямої від *O* до M_o будемо вважати додатним. Величини α і *p* цілком визначають положення прямої L на площині.

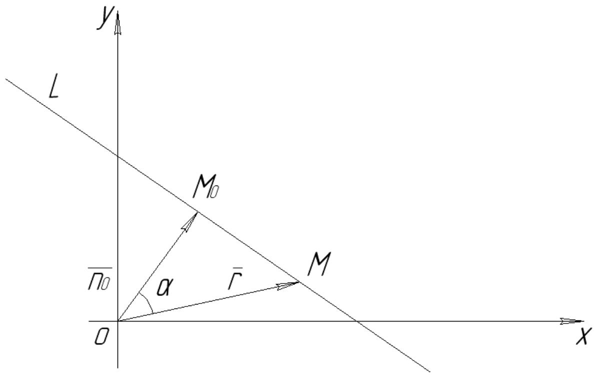

Рис. 7

Позначимо через *M* довільну точку прямої L, орт нормалі – через $\overline{n_0}=\bar{i}\cdot\cos\alpha+\bar{j}\cdot\sin\alpha$. Спроектуємо радіус - вектор $\bar{r}$ точки *M* на нормаль.

$$np_{\overline{n_0}}\bar{r}=\bar{r}\cdot\overline{n_0}\ ,$$

Але $np_{\overline{n_0}}\bar{r}=p$. Отже,

$$\bar{r} \cdot \overline{n_0} = p \qquad (1.15)$$

Виразимо скалярний добуток (1.15) двох векторів через їх координати. Дістанемо рівняння

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0 \qquad (1.16)$$

Рівняння (1.16) називають **нормальним рівнянням прямої.** Нехай задано рівняння прямої у загальному вигляді

$$Ax+By+C=0. \qquad (1.17)$$

Потрібно звести це рівняння до нормального.

У зв'язку з тим, що рівняння (1.16) і (1.17) є дві різні форми рівняння тієї самої прямої, то випливає

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = -\frac{p}{c} = \mu$$

Звідси

$$\cos\alpha = A\mu, \quad \sin\alpha = B\mu, \quad -p = C\mu$$

Знайдемо коефіцієнт пропорційності μ :

$$A^2 \cdot \mu^2 + B^2\mu^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (1.18)$$

Знак μ із-за умови $C \cdot \mu = -p$ має бути протилежний знаку С.

Отже, помноживши загальне рівняння прямої (1.17) на μ отримаємо її нормальне рівняння:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (1.19)$$

Тепер, використовуючи рівняння (1.16) прямої у нормальному вигляді, знайдемо відстань від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до заданої прямої (рис. 8).

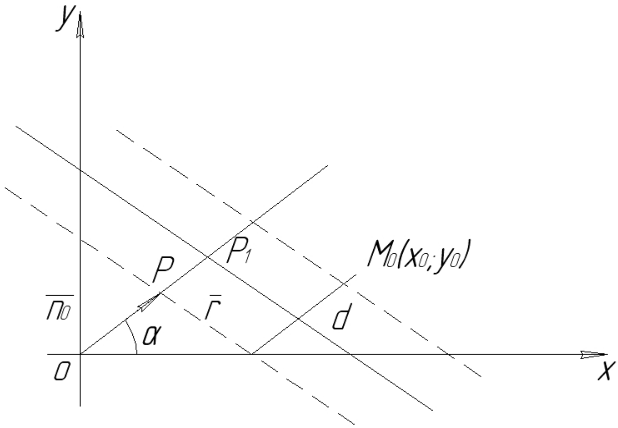

Рис. 8

Нехай пряму L задано нормальним рівнянням

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$$

Проведемо через точку $M_0(x_0; y_0)$ прямої, що паралельна L. Її рівняння запишемо у нормальному вигляді; знаючи, що обидві прямі відрізняються тільки відстанню від початку координат:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p_1 = 0 \qquad (1.19)$$

Але, $p_1 = p + d$. Тому, враховуючи, що пряма (3.19) проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, отримаємо

$$d = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - p \,.$$

Якщо точка $M_1(x_1; y_1)$ лежить між початком координат і прямою, то $p_1 = p - d$. Тоді

$$d = \left| x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \right|.$$

У загальному випадку відстань точки від прямої записуємо так:

$$d = \left| x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha - p \right| \qquad (1.20)$$

Якщо рівняння прямої задано у загальному вигляді, то

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (1.21)$$

Контрольні питання

1. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора?

2. Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині?
3. Як записати рівняння прямої, що проходить через початок координат?
4. Як записати рівняння прямої, що паралельна вісі Ох? вісі *О*у?
5. Як записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
6. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі?
7. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
8. Який вигляд має канонічне рівняння прямої?
9. Як знайти кут між двома прямими?
10 Які умови перпендикулярності і паралельності двох прямих?
11. Який вигляд має нормальне рівняння прямої?
12. Як звести загальне рівняння прямої до нормального?
13. Як знайти відстань від точки до прямої?

Лекція 2.
Тема: Площина у просторі. Пряма у просторі

План лекції

1. Загальне рівняння площини. Дослідження неповного рівняння площини. Рівняння площини у відрізках на осях. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.
2. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.
3. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.
4. Параметричні і канонічні рівняння прямої у просторі. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
5. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
6. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

1. Нехай у просторі задано довільну площину *P*. Позначимо одну з її точок через M_0, а перпендикулярний до площини вектор - через $\bar{n}$. Легко бачити, що точка M_0 і вектор $\bar{n}$ цілком визначають площину *P*. Дійсно, через точку M_0 проходить тільки одна площина, що перпендикулярна до вектора $\bar{n}$.

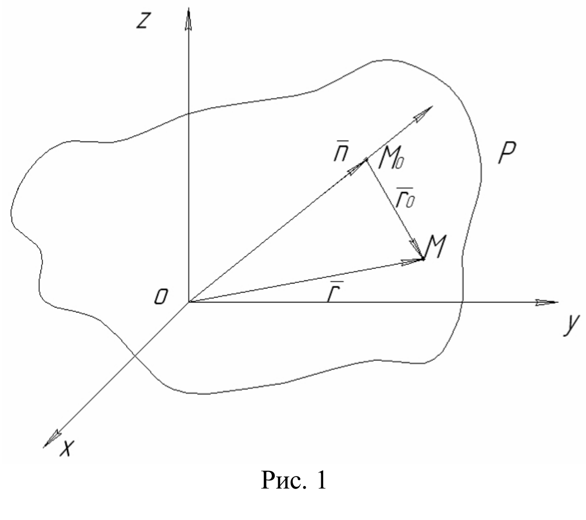

Рис. 1

Найпростішою поверхнею являється площина. Площину в просторі Oxyz можна задати різними способами.

Введемо у просторі прямокутну систему координат і позначимо через $(x_0; y_0; z_0)$ координати точки *M_0,* а через $(x; y; z)$ - координати довільної точки *М* площини. Радіуси-вектори точок M_o і *М* позначимо відповідно через $\overline{r_0}$ і $\overline{r}$*,* а координати вектора $\overline{n}$ - через *{А, В,С }* (рис, 1).

Вектор *M_0M* для будь-якого положення точки М перпендикулярний до вектора $\overline{n}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві:

$$\left(\overline{r} - \overline{r_0}\right)\cdot \overline{n} = 0 \qquad (2.1)$$

Рівняння {4.1) є векторне рівняння площини *Р.* Виразимо його ліву частину через координати векторів $\overline{r} - \overline{r_0}$ і $\overline{n}$*,* внаслідок чого отримаємо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.2)$$

Це - рівняння площини, що проходить через задану точку.

Рівняння (2.2) - лінійне. Покажемо, що довільне лінійне рівняння є рівняння площини.

Нехай задано довільне лінійне рівняння:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.3)$$

Щоб встановити, який геометричний зміст має це рівняння, підставимо координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ у рівняння (2.3)

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

і віднімемо почленно добуту тотожність від рівняння (2.3). Отримаємо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Як бачимо, отримане рівняння співпадає з рівнянням (2.2) і є рівнянням площини, що проходить через задану точку.

Координати будь-якої точки площини Q задовольняють рівняння (2.2).

Вектор $\overline{n} = (A; B; C)$ називають **нормальним вектором площини.**

Надаючи коефіцієнтам А, В, С рівняння (2.2) різні значення можна отримати рівняння будь-якої площини, яка проходить через точку M_0. сукупність площин, які проходять через дану точку називається **пучком площин**, а рівняння (2.2) **рівнянням пучка площин.**

Рівняння (2.3) називають **загальним рівнянням площини.** Різні випадки неповного рівняння площини характеризують особливості розміщення площини (2.3) відносно системи координат, а саме:

1) Якщо у рівнянні (2.3) коефіцієнт *D* дорівнює нулю, то площина проходить через початок координат. Справді, координати точки O(0;0;0) задовольняють рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$

2) Якщо в рівнянні (2.3) *C*= 0. то площина паралельна вісі *Oz.* Дійсно, вектор нормалі $\overline{n} = (A;\, B;\, 0)$ площини $Ax + By + Cz + D = 0$ перпендикулярний до вісі *Oz.*

3) Якщо в рівнянні (2.3) *B*= 0. то площина паралельна вісі *Oy.*

4) Якщо в рівнянні (2.3) *A*= 0. то площина паралельна вісі *Ox.*

5)Якщо в рівнянні (2.3) *C*= *D*= 0, то площина проходить через вісь *Oz.* Дійсно, для площини *Ax+By = 0* поєднуються умови перша і друга.

Аналогічно, площина *Ax+Cz = 0* проходить через вісь *Oy,* а площина *By+Cz=O* проходить через вісь *Ox.*

6) Якщо в рівнянні (2.3) B=C=0, то площина паралельна координатній площині *Oyz.* Дійсно, оскільки площина Ax+D=0 паралельна осям *Oy* і Oz, то вона паралельна площині *Oyz.*

Аналогічно, площина *By+D=0* паралельна координатній площині Oxz, а площина Cz+D=0 – координатній площині *Oxy,*

7) Якщо в рівнянні (4.3) *B*= C=D=0. то площина *Ax*=0 суміщається з координатною площиною x=0. тобто з площиною *Oyz.*

Аналогічно площина *By=0* суміщається з координатною площиною *Oxz,* а площина *Cz*= 0 - з площиною *Oxy.*

Найбільш загальним є випадок, коли рівняння (4.3) є повне. Тоді площина перетинає всі три координатні вісі. Позначимо відрізки, які вона перетинає від осей, через $a,\, b,\, c$ і запишемо рівняння площини у відрізках на осях.

Точки перетину площини з осями координат *Ox, Oy, Oz* мають такі координати (рис. 2) $M_1(a;\, 0;\, 0)$, $M_2(0;\, b;\, 0)$, $M_3(0;\, 0;\, c)$. Координати цих точок задовольняють рівняння площині. Отже, маємо:

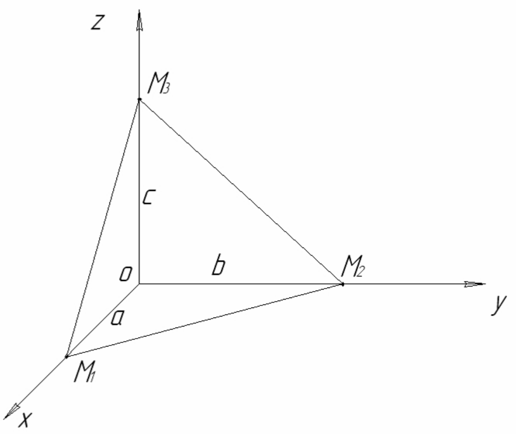

Рис. 2

$$Aa + D = 0 \quad A = -\frac{D}{a}$$

$$Bb + D = 0 \quad B = -\frac{D}{b}$$

$$Cc + D = 0 \quad C = -\frac{D}{c}$$

Підставимо значення коефіцієнтів A,B,C у рівняння площини (2.3) і скоротимо на D. Отримаємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2.4)$$

Це - рівняння площини у відрізках на осях.

Запишемо тепер рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$ Позначимо через $M(x; y; z)$ довільну точку площини *P*. Три вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_2M}$, $\overline{M_3M}$ лежать у заданій площині. Запишемо умову компланарності цих векторів:

$$(\overline{M_1M} \times \overline{M_2M}) \cdot \overline{M_3M} = 0 \qquad (2.5)$$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів, що стоїть у лівій частині рівняння (4.5), через координати цих векторів. Отримаємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6)$$

Це є рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки A(1; 2; 0), B(2; 1; 1), C(3; 0; 1)

Відповідь: x+y-3=0.

2. Нехай задано дві площини загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

Потрібно знайти кут між цими площинами.

Двогранний кут між цими площинами вимірюється лінійним кутом. На підставі теореми елементарної геометрії про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами лінійний кут дорівнює куту між векторами нормалей $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$ двох заданих площин. Кут між векторами $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$ знайдемо за формулою:

$$\cos\theta = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}$$

Взявши до уваги, що $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ визначимо **косинус кута між двома площинами через коефіцієнти їх загальних рівнянь:**

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2.7)$$

Якщо $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ то $\cos\theta = 0$. Отже співвідношення

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (2.8)$$

є умова перпендикулярності двох площин у просторі.

Умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (2.9)$$

3. Нехай у просторі задано площину *P*. Через початок координат проведемо перпендикуляр до площини *P* і позначимо точку його перетину з площиною через M_o. Відстань від початку *O* до площини, тобто довжину відрізка OM_0, позначимо через *p*. За додатний напрям

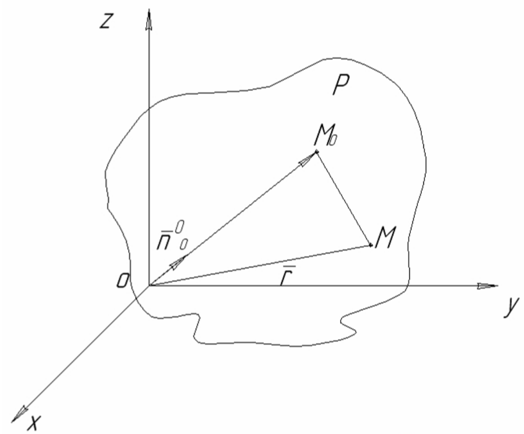

Рис. 3

вектора нормалі $\overline{n^0}$ до площини приймемо напрям від *O* до M_o. Кути, які він утворює з координатними осями *Ox, Oy, Oz,* позначимо через α, β, γ. Отже, координати орта нормалі будуть:

$$\overline{n^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Позначимо ще довільну точку площини через *M(x, y, z)* і спроектуємо її радіус – вектор $\overline{r}$ на нормаль до площини:

$$np_{\overline{n^0}}\overline{r} = (\overline{r}\cdot\overline{n^0}) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

З іншого боку, безпосередньо з рис. 3 видно, що

$$np_{\overline{n^0}}\overline{r} = p$$

Отже, порівнюючи ці два вектори для проекції вектора, дістанемо:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \tag{2.10}$$

Це рівняння площини, що називають **нормальним рівнянням площини.**

Якщо задано загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то його можна звести до паралельного рівняння.

Дійсно, нормальне і загальне рівняння є дві форми рівняння однієї площини. Отже, їх коефіцієнти пропорційні

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-p}{D} = \mu$$

Користуючись співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

виразимо коефіцієнт пропорційності μ. Маємо:

$$\cos\alpha = A\mu, \quad \cos\beta = B\mu, \quad \cos\gamma = C\mu.$$

Отже,

$$(A\mu)^2 + (B\mu)^2 + (C\mu)^2 = \mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1$$

звідки:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак μ знаходимо з умови

$$-p = D\mu,$$

тобто знак μ потрібно брати протилежний знаку вільного члена.

Помноживши тепер обидві частини загального рівняння площини на нормуючий множник μ, отримаємо:

$$\frac{Ax + By + Cz}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$ - **нормальне рівняння площини**.

Розглянемо тепер задачу про знаходження відстані точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

Проведемо через точку M_0 площину, що паралельна заданій. Її рівняння буде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0 \qquad (2.11)$$

де p_i - відстань площини (2.11) від початку координат. Але

$$p_1 = p + d\ ,$$

де d - відстань точки M_o від площини (2.10).

Площина (2.11) проходить через точку M_0. Тому

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - (p + d) = 0$$

Звідси

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \qquad (2.12)$$

тобто, для того, щоб знайти віддаль точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини (4.10), потрібно у рівняння площини підставити координати точки, причому, в залежності від того, з якого боку від площини лежить точка M_o, знак правої частини (4.11) буде або додатним, або від'ємним. Тому, формулу (4.11) треба записувати так:

$$d = \left|\ x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\ \right| \qquad (2.13)$$

Якщо площину задано загальним рівнянням, то

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \qquad (2.14)$$

4. Нехай пряму L задано у просторі точкою M_o і напрямленим вектором $\bar{u}$, тобто вектором, що паралельний прямій L. Позначимо

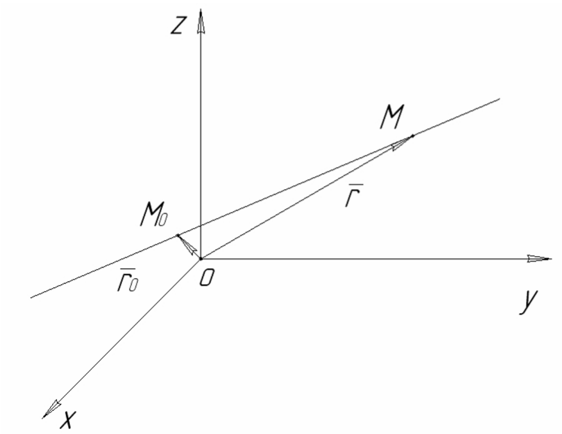

Рис. 4

через M довільну точку прямої, а через $\overline{r_0}$ і $\bar{r}$, радіуси вектори точок M_o і M.

Згідно з визначенням вектори $\overline{M_0M} = \bar{r} - \overline{r_0}$ і $\bar{u}$ колінеарні.

Запишемо умову їх колінеарності у векторній формі:

$$\bar{r} - \overline{r_0} = t \cdot \bar{u} \quad (2.15)$$

Рівняння (2.15) є векторне рівняння прямої у просторі.

Позначимо координати точок M_o і M_1 через $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а координати напрямного вектора через (l, m, n):

$$\bar{u} = \{l, m, n\}$$

Числа l, m, n називають **напрямними коефіцієнтами прямої**. Якщо вектор $\bar{u}$ є орт, то $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$, де α, β, γ - кути, які пряма (4.13) утворює з осями координат.

Векторне рівняння (4.13) еквівалентне трьом рівнянням **в** координатній формі

$$x - x_0 = lt,$$

$$y - y_0 = mt,$$

$$z - z_0 = nt,$$

або

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt, \qquad (2.16)$$
$$z = z_0 + nt$$

Ці рівняння **називають параметричним рівнянням прямої у просторі.**

Вектори $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ і $\overline{u}$ колінеарні. Тому їх координати пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (2.17)$$

Система рівнянь (2.17) еквівалентна одному векторному рівнянню (2.15) або трьом параметричним рівнянням (2.16). **Рівняння (2.17) називають канонічним рівнянням прямої.**

Як окремий випадок канонічних рівнянь прямої можна розглядати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overline{M_1M_2}$ буде напрямним вектором $\overline{u}$ прямої. Тоді

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1$$

і **рівняння прямої, що проходить через дві задані точки**, набуває вигляду:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (2.18)$$

Якщо задано дві прямі у просторі

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

то кут між ними дорівнює куту між їх напрямними векторами $\overline{u_1} = \{l_1; m_1; n_1\}$ і $\overline{u_2} = \{l_2; m_2; n_2\}$. Кут між двома векторами, як відомо, визначається за формулою:

$$\cos\theta = \frac{\overline{u_1} \cdot \overline{u_2}}{|\overline{u_1}| \cdot |\overline{u_2}|}$$

Виразимо скалярний добуток і модулі векторів через координати цих векторів. Отримаємо **формулу для визначення кута між двома прямими:**

$$\cos\theta = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (2.19)$$

Якщо дві прямі перпендикулярні $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (2.20)$$

Це є **умова перпендикулярності двох прямих.**

Умова паралельності двох прямих, тобто колінеарності їх напрямних векторів, є:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (2.21)$$

6. Розглянемо тепер задачу про знаходження кута між прямою *u* заданою системою рівнянь

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

і площиною *P,* заданою рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

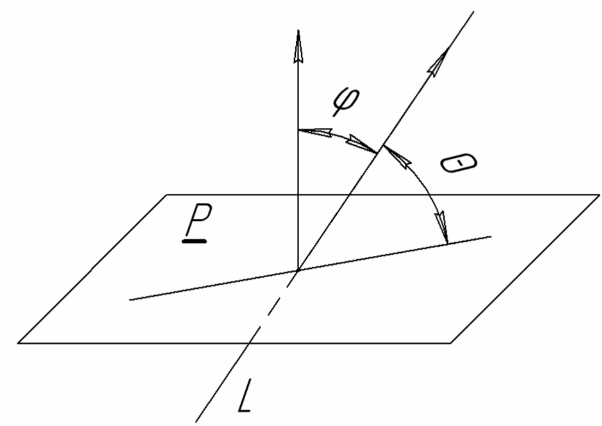

Рис. 5

Відомо, що кут θ між прямою і площиною у просторі вимірюється кутом між прямою та її проекцією на площину.

Кут φ між нормаллю $\bar{n}$ до площини *P* і прямою *L* доповнює шуканий кут θ між прямою і площиною до $\frac{\pi}{2}$ (Рис. 5). Але кут φ як кут між двома векторами $\bar{n}$ і $\bar{u}$ ($\bar{u}$ - напрямлений вектор, прямої *L*) можна визначити за формулою:

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}\cdot\bar{u}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{u}|}$$

Звідси, враховуючи, що $\bar{n} = \{A, B, C\}$, $\bar{u} = \{l; m; n\}$ і

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

отримаємо

$$\sin\theta = \pm\frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Ця формула дає можливість знайти **кут між прямою і площиною у просторі.**

Якщо пряма паралельна площині, то кут θ =0. Отже, співвідношення

$$Al + Bm + Cn = 0$$

є **умова паралельності прямої і площини**.

Якщо пряма *L* перпендикулярна до площини *P,* то вектори $\bar{n}$ і $\bar{u}$ колінеарні. Отже, співвідношення

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

є **умова перпендикулярності прямої і площини**.

Контрольні питання

1. Як записати векторне рівняння площини?
2. Який вигляд має рівняння площини, що проходить через задану точку?
3. Як записати загальне рівняння площини?
4. Які особливості розташування площини у просторі, якщо:
   а) коефіцієнт D = 0.?
   б) коефіцієнт A = 0? B = 0? B = C?
   в) A = B = 0? A = C = 0? B = C = 0?
   г) A = D = 0? B =D = 0? C = D = 0?
   д) B = C = D = 0? A = C = D = 0? A = B = D = 0?
5. Як записати рівняння площини у відрізках на осях?
6. Як записати рівняння площини, що проходить через три задані точки?
7. Як знайти кут між двома площинами?
8. Які умови паралельності і перпендикулярності двох площин?
9. Який вигляд має нормальне рівняння площини?
10. Як знайти віддаль від точки до площини?
11. Як записати рівняння прямої у просторі?
12. Як записати параметричне рівняння прямої? Канонічні рівняння?

13. Як знайти кут між прямими у просторі?
14. Які умови паралельності і перпендикулярності двох прямих у просторі?
15. Як записати рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки?
16. Як знайти кут між прямою і площиною у просторі?
17. Які умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі?

Лекція 3
Тема: Деякі задачі на пряму і площину в просторі.

План лекції

1. Перетин прямої і площини.
2. Рівняння прямої, що проходять через точку перпендикулярно до даної площини.
3. Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини.
4. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої.
5. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.
6. Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно іншій прямій.
7. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини.
8. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.
9. Умова при якій дві прямі лежать в одній площині.
10. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.

1. Перетин прямої і площини.

Нехай потрібно знайти точку перетину прямої, яка задана параметрично

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases},$$

з площиною $Ax + By + Cz + D = 0$.

Розв'язавши дані рівняння отримаємо

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0 \qquad (3.1)$$

З рівняння (3.1) знаходимо значення параметра t, яке відповідає точці перетину прямої і площини.

Можливі такі випадки:

- $Am + Bn + Cp \neq 0$ - пряма перетинає площину в одній точці.
- $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ - пряма паралельна площині.
- $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ - пряма належить площині.

<u>Приклад 1.</u> Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ і площини

$$3x-2y+z-3=0.$$

Розв'язання:

Навпаки перейдемо від канонічних рівнянь до параметричних: $x=-1+2t$, $y=2+t$, $z=1-t$. Підставимо значення x, y, z в рівняння площини.

$3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0,$

$-3+6t)-4-2t)+1-t-3=0,$

$3t=9,$

$t=3.$

Тому $x=5, y=5, z=-2.$

Відповідь: $x=5, y=5, z=-2.$

2. Рівняння прямої, що проходять через точку перпендикулярно до даної площини.

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C} \qquad (3.2)$$

<u>Приклад 2.</u> Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку А(2; -3; -5)перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

Розв'язання:

Отже $x_1=2, y_1=-3, z_1=-5, A=6, B=-3, C=-5$ тоді шукане рівняння прийме вигляд:

$$\frac{x-2}{-6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$$

Відповідь: $\frac{x-2}{-6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}.$

3. Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини.

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до площини $Ax+By+Cz+D=0$, має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.3)$$

4. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої.

Рівняння площини, що проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ має вигляд:

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0 \qquad (3.4)$$

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1; 2; -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

Розв'язання:

$x_1=1,\ y_1=2,\ z_1=-1,\ m=1,\ n=-3,\ p=4$

$1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0$

$x-1-3y+6+4z+1=0$

$x-3y+4z+9=0$.

Відповідь: $x-3y+4z+9=0$.

5. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.

Нехай шукана площина проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і пряму $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$. Тоді вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\bar{s}$ - компланарні, тобто $(\overline{M_0M},\ \overline{M_0M_1},\ \bar{s})=0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \qquad (3.5)$$

6. Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно іншій прямій.

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і паралельна до прямої $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Якщо $M(x; y; z)$ - довільна точка площини то вектори $(\overline{M_1M},\ \overline{s_1},\ \overline{s_2})$ - компланарні:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.6)$$

7. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини.

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$, тоді $\overline{M_0M}$, $\overline{s}$, $\overline{n}$ - компланарні:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \qquad (3.7)$$

8. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.

Нехай площина проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Тоді вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{s}$ - компланарні:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \qquad (3.8)$$

<u>Приклад 4.</u> Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{2}$.

Розв'язання:

Перша пряма проходить через точку А(-2; 1; 0), друга через точку – В(1; -2; 1), $\overline{s}=\{3;-2;1\}$, $\overline{AM}=\{x+2;\, y-1;\, z\}$, $\overline{AB}=\{3;-3;1\}$.

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$-3(x+2)+3(y-1)-6z+9z-3(y-1)+2(x+2)=0$

$-(x+2)+3z=0$

$x-3z+2=0$

Відповідь: $x-3z+2=0$.

9. Умова при якій дві прямі лежать в одній площині.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Їх направляючі вектори відповідно $\overline{s_1}=\{m_1;n_1;p_1\}$ і $\overline{s_2}=\{m_2;n_2;p_2\}$

Рис.1

Пряма l_1 проходить через точку M_1, радіус-вектор якої позначимо через $\overline{r_1}$, аналогічно l_2 проходить через точку M_2, радіус-вектор якої позначимо через $\overline{r_2}$. Тоді $\overline{r_2}-\overline{r_1}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$. Прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$, $\overline{M_1M_2}$ компланарні (мішаний добуток дорівнює нулеві):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.9)$$

10. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.

Нехай прямі $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ перетинаються. Тоді вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$ - компланарні, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.10)$$

Рекомендована література

1. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова „Высшая математика в упражнениях и задачах” Ч1. М.1986
2. В.Ю.Клепко, В.Л.Голець „Вища математика в прикладах і задачах” К. 2006.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, -М.: Наука, 1978.
4. За редакцією В.П.Дубовика І.І.Юрика „Вища математика. Збірник задач.” К. 2001.
5. Под редакцией Н.И.Кремера «Высшая математика для экономистов.» М. 2000.
6. Под редакцией В.И.Ермакова «Общий курс высшей математики для экономистов» М. 2000.
7. Под редакцией В.И.Ермакова «Сборник задач по высшей математики для экономистов» М. 2002.
8. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів” (теорія) К. 2005.
9. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів” (практика) К. 2005
10. За редакцією Ю.К. Рудавського „Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії” Л. „Бескит Біт” 2002.

Данильчук Оксана Миколаївна
Бабенко Марина Олегівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів усіх форм навчання*)

Підписано до друку 26.04.2012. Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 2,375.
Друк лазерний. Замовлення № 22/12. Тираж 50 прим.

Надруковано в Видавничому центрі КІІ ДВНЗ „ДонНТУ”