

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

з курсу

"ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ"

Частина 2

Нелінійні та дискретні САУ

Для студентів, що навчаються за напрямками

6.050201 "Системна інженерія" (СУА)

6.050202 "Автоматизація та

комп'ютерно-інтегровані технології" (АУП)

(для денної та заочної форм навчання)

Розглянуто

на засіданні кафедри

автоматики й телекомунікацій

Протокол № 4 від 12.04.2012.

Затверджено на засіданні

навчально-видавничої ради ДонНТУ

Протокол № 2 від 19.04.2012.

Донецьк, ДонНТУ 2012 р.

УДК 62-52 (071)

Конспект лекцій з курсу "Теорія автоматичного управління", частина 2 – Нелінійні та дискретні САУ ((для студентів, що навчаються по напрямках 6.050201“Системна інженерія” (СУА) і 6.050202“Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології” (АУП) денної й заочної форм) / Укладачі: Р.В. Федюн, В.О.Попов.- Донецьк: ДонНТУ, 2012.- 168 с.

Укладач:

Р.В. Федюн, доц.

В.О. Попов, доц.

Рецензент

О.І. Секірін, доц.

Відповідальний за випуск

В.Я. Воропаєва, зав. каф.

# НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## 13. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Система автоматического управления (САУ) является нелинейной, если хотя бы один ее конструктивный элемент (или одно ее алгоритмическое звено) описывается нелинейным уравнением. Если переменные  $y(t)$ ,  $x(t)$  и их производные входят в дифференциальное уравнение в виде произведений, частных или степеней, то уравнение является нелинейным.

Практически все реальные САУ содержат один или несколько нелинейных элементов (или так называемых нелинейностей). Нелинейными могут быть как элементы неизменяемой части системы, так и элементы изменяемой (синтезируемой) части.

В первом случае говорят о сопутствующих нелинейностях. К ним относятся, например, исполнительные органы с ограниченной пропускной способностью (вентили, клапаны), исполнительные устройства с ограниченным диапазоном воздействия (электрические и гидравлические исполнительные механизмы с ограниченным ходом, регулируемые источники напряжения с насыщением), кинематические передачи с зазором или трением. Нелинейной характеристикой часто обладает и объект управления.

Нелинейная форма характеристик указанных элементов, как правило, нежелательна, но они функционально необходимы для работы системы.

Некоторые нелинейные элементы вводятся конструктором в систему преднамеренно — для улучшения качества управления. Такими нелинейностями являются, например, релейные управляющие устройства. Они обеспечивают высокое быстродействие процесса управления, выгодно отличаются от других управляющих устройств простотой, надежностью и

экономичностью. Применяются также и нелинейные корректирующие устройства.

Различают два вида нелинейных элементов, существенно нелинейные и несущественно нелинейные. Нелинейность считается несущественной, если ее замена линейным элементом не изменяет принципиальных особенностей системы и процессы в линеаризованной системе существенно не отличаются от процессов в реальной системе. Если же такая замена невозможна и процессы в линеаризованной и реальной системах сильно отличаются, то нелинейность является существенной.

САУ с существенными нелинейностями обладают рядом принципиальных особенностей, которые не присущи линейным системам и не могут быть выявлены при исследовании линеаризованного уравнения САУ.

Главная особенность существенно нелинейных САУ заключается в том, что они не подчиняются принципу наложения (суперпозиции), а характер и показатели переходного процесса зависят от величины внешнего воздействия или начального отклонения. Например, при малом начальном отклонении  $x_1(0)$ , меньшем некоторого критического значения  $x_{кр}$ , переходный процесс может быть аperiodическим (рис.13.1,а - линия 1), а при большом начальном отклонении  $x_2(0) > x_{кр}$  - колебательным (см.рис.13.1,а - линия 2).

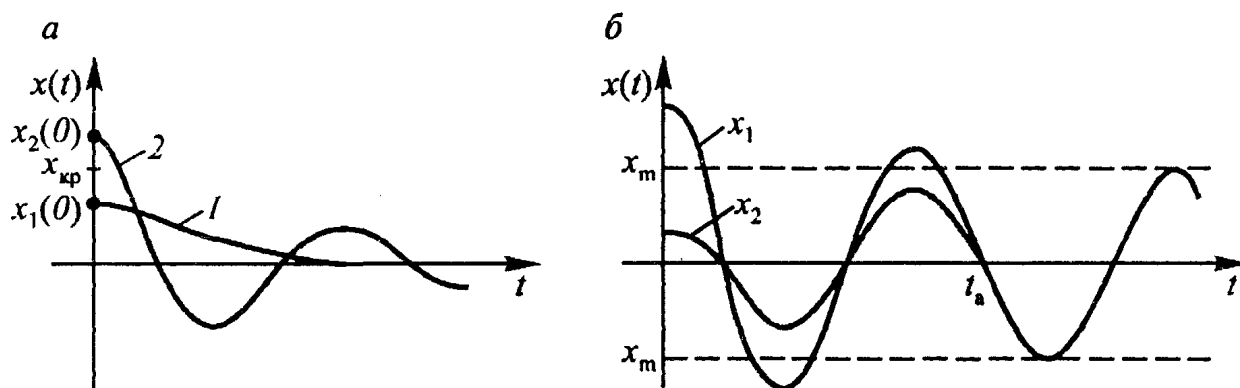


Рисунок 13.1. Особенности нелинейных САУ

Другой важной особенностью динамики существенно нелинейных САУ является зависимость условий устойчивости от величины внешнего воздействия: САУ, устойчивая при одних значениях начального отклонения, оказывается неустойчивой при других его значениях. На рис.13.1,б показаны переходные процессы  $x_1$  и  $x_2$ , один из которых вызван большим начальным отклонением и сходится к устойчивому колебательному процессу, а второй, вызванный малым начальным отклонением, расходится и тоже стремится к этому колебательному процессу.

В связи с этим для нелинейных САУ применяют понятия «устойчивость (неустойчивость) в малом», «устойчивость (неустойчивость) в большом», «устойчивость в целом». Система устойчива в малом, если она устойчива только при малых начальных отклонениях. Система устойчива в большом, если она устойчива при больших начальных отклонениях. Система устойчива в целом, если она устойчива при любых отклонениях.

Специфической особенностью нелинейных САУ является также режим автоколебаний. Автоколебания - это устойчивые собственные колебания, возникающие из-за нелинейных свойств системы. На рис.13.1,б процессы  $x_1$  и  $x_2$  переходят в автоколебания с момента  $t_a$ . Режим автоколебаний нелинейной системы принципиально отличается от колебания линейной системы на границе устойчивости. В линейной системе при малейшем изменении ее параметров колебательный процесс становится либо затухающим, либо расходящимся. Автоколебания же являются устойчивым режимом: малые изменения параметров системы не выводят ее из этого режима. Амплитуда автоколебаний  $x_m$  не зависит от начальных условий и уровня внешних воздействий.

Автоколебания в нелинейных САУ в общем случае нежелательны, а иногда и недопустимы (как незатухающие колебания в линейных системах). Однако в некоторых нелинейных САУ автоколебания являются основным рабочим режимом.

Рассмотрим в качестве примера нелинейной САУ систему стабилизации температуры с нелинейным управляющим устройством (рис.13.2). В качестве управляющего устройства применено трехпозиционное реле  $P$ , на обмотку которого подано напряжение разбаланса  $u_p$  моста  $M$ . Одним из плеч моста является термосопротивление  $ТС$ , помещенное в рабочее пространство объекта.

При отклонении температуры  $\Theta$  от заданной  $\Theta_3$  нарушается равновесие моста и реле подает напряжение  $u_o$  определенной полярности на исполнительный двигатель  $ИД$ , который при помощи задвижки  $З$  увеличивает или уменьшает подачу топлива в объект.

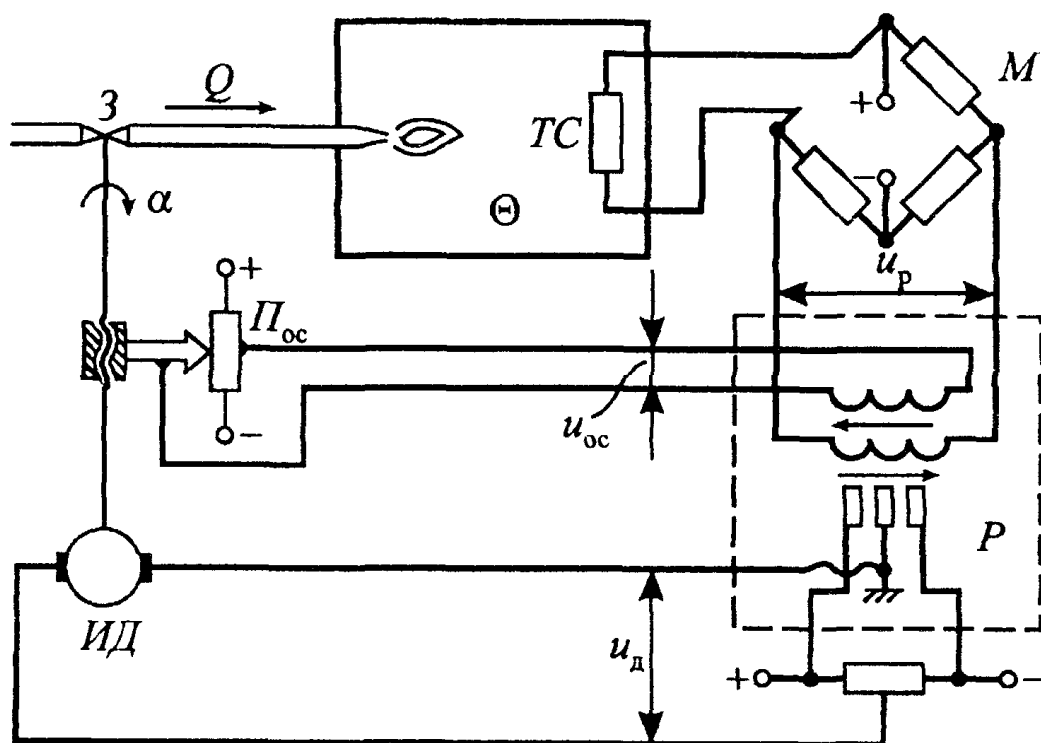


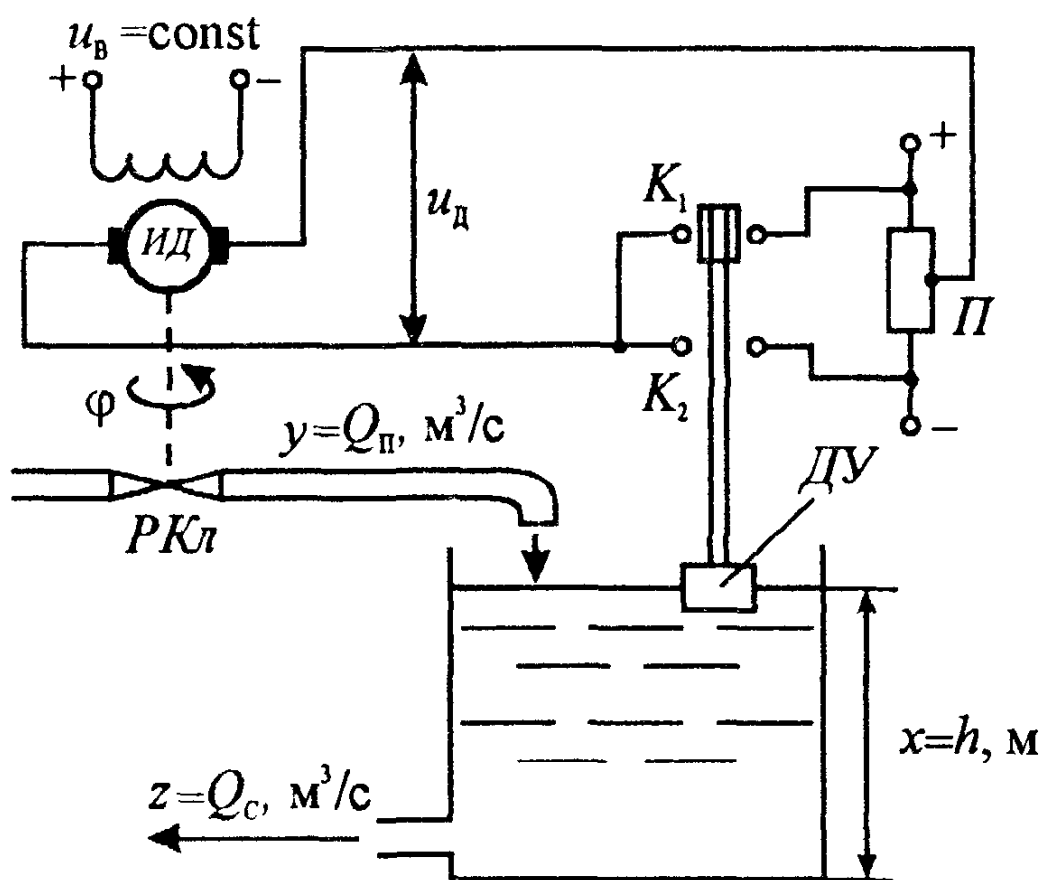
Рисунок 13.2. Система стабилизации температуры с нелинейным управляющим устройством

В этой системе имеется существенно нелинейный элемент - трехпозиционное реле (рис.13.2), и ей присущи все указанные выше особенности. Например, при определенных значениях параметров в системе могут возникнуть автоколебания: температура будет непрерывно колебаться

вокруг некоторого среднего значения, равного величине  $\Theta_3$ . Автоколебания будут возникать, если открывание и закрывание задвижки после включения двигателя будут происходить очень быстро. При этом температура будет быстро возвращаться к заданному значению и «проскакивать» зону нечувствительности реле, а двигатель будет снова и снова то увеличивать, то уменьшать подачу топлива.

Для устранения этих автоколебаний и улучшения динамических свойств системы в ней с помощью потенциометра  $\Pi_{oc}$  осуществлена внутренняя отрицательная обратная связь по положению регулирующего органа - углу  $\alpha$  поворота задвижки  $\mathcal{Z}$ .

Примером нелинейной САУ является также система стабилизации уровня жидкости в баке. Уровень измеряется с помощью поплавкового датчика уровня  $\mathcal{D}\mathcal{U}$  который замыкает цепи контактов  $K_1$  или  $K_2$ .



Когда уровень  $h$  (управляемая величина) равен заданному значению, подвижный контакт находится в нейтральном (среднем) положении. При

этом якорная цепь исполнительного двигателя **ИД** обесточена и он не вращает регулирующий клапан **РКл**. Если уровень **h** снизится или повысится, с потенциометра **П** через контакты **К<sub>1</sub>** или **К<sub>2</sub>** на двигатель будет подано напряжение **u<sub>д</sub>** необходимой полярности, и он будет открывать или закрывать клапан. Процесс увеличения или уменьшения подачи **Q<sub>п</sub>** будет происходить до тех пор, пока уровень не примет заданное значение.

Существенно нелинейным элементом этой системы является управляющее устройство, состоящее из контактов **К<sub>1</sub>** и **К<sub>2</sub>** и потенциометра **П**.

Нелинейные САУ описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, теория которых разработана не столь полно, как теория линейных дифференциальных уравнений. Существует ряд точных и приближенных методов, позволяющих решать лишь некоторые частные задачи анализа нелинейных систем. Наибольшее распространение в инженерной практике получили методы фазового пространства, гармонической линеаризации, критерий абсолютной устойчивости и метод моделирования на ЭВМ.

При анализе нелинейных систем обычно решают следующие задачи:

- 1) отыскание возможных состояний равновесия системы и оценка их устойчивости;
- 2) определение возможности существования автоколебаний и оценка их устойчивости;
- 3) выявление соотношений между параметрами системы, при которых возникают автоколебания;
- 4) определение параметров автоколебаний и их связи с параметрами системы.



## 14. ТИПОВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ САУ

Структура и уравнение нелинейной САУ в общем случае могут быть очень сложными. Степень сложности зависит от количества, вида и места включения нелинейных элементов. Однако большинство систем, встречающихся в промышленной автоматике, содержат один существенно нелинейный элемент. Обобщенная алгоритмическая схема таких систем показана на рис.14.1. На схеме выделены линейная и нелинейная части системы. Линейная часть включает в себя все линейные звенья системы и может иметь структуру любой сложности, в частности, содержать внутренние обратные связи.

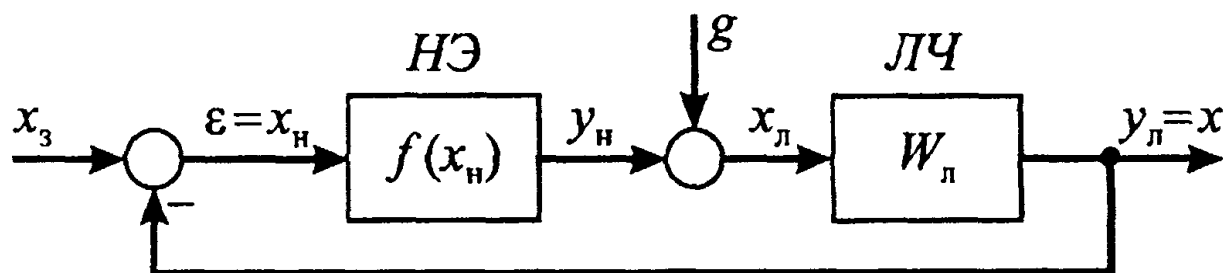


Рисунок 14.1. Обобщенная алгоритмическая структура нелинейной САУ

Нелинейная часть образована одним нелинейным элементом, выходная величина  $y_n$  которого может быть выражена как функция входной величины  $x_n$  и ее производной  $x'_n$ :

$$y_n = f(x_n, x'_n) \quad (14.1)$$

Структура, изображенная на рис. 14.1, соответствует случаю, когда нелинейный элемент выполняет функции управляющего устройства, как например, в системе стабилизации температуры (рис.13.2).

Иногда нелинейный элемент выполняет одновременно и функции блока сравнения. Так, например, в системе стабилизации уровня выходная величина управляющего устройства - напряжение  $u_d$  - связана с входной величиной - уровнем  $h$  зависимостью, изображенной на рис.14.2. Среднее

значение  $h_0$  между положениями верхних и нижних контактов может рассматриваться как задающее воздействие.

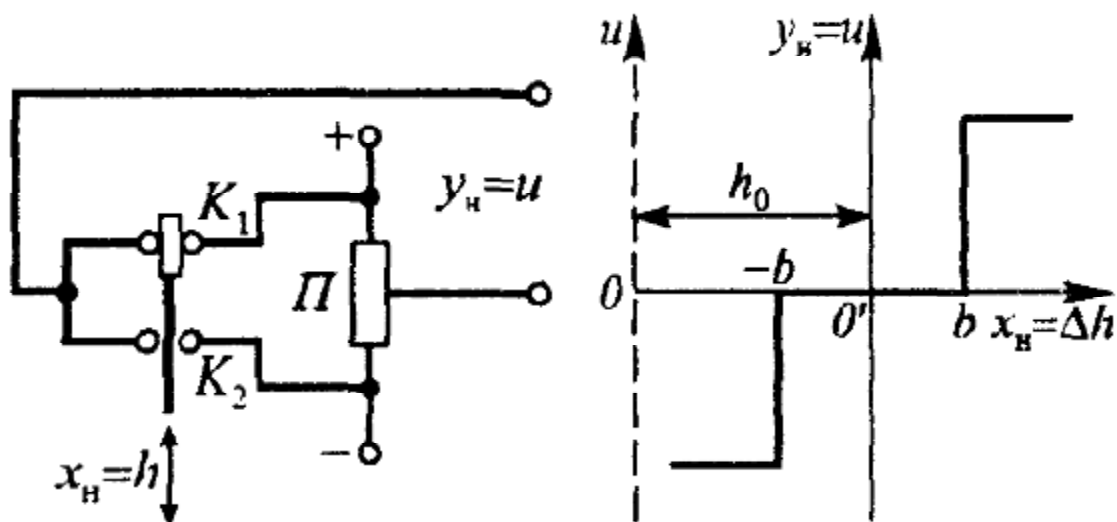
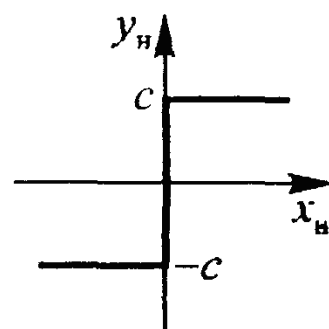


Рисунок 14.2. Нелинейное устройство и его характеристика

Простейшими нелинейными элементами являются статические (безынерционные) нелинейности. У них выходная величина  $y_n$  зависит только от входной величины  $x_n$ , причем эта зависимость строго однозначна.

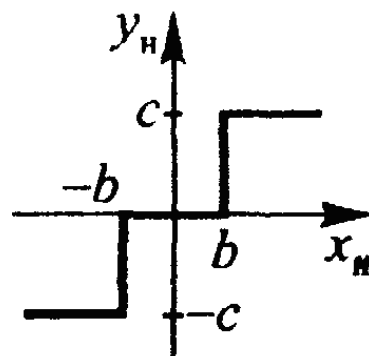
1. Идеальное реле (двухпозиционное реле).

$$y_n = \begin{cases} c, & \text{при } x_n > 0 \\ -c, & \text{при } x_n < 0 \end{cases}$$



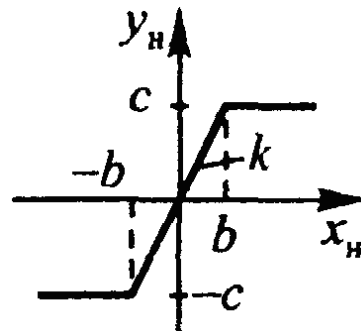
2. Трехпозиционное реле (реле с зоной нечувствительности)

$$y_n = \begin{cases} c, & \text{при } x_n > b \\ 0, & \text{при } -b < x_n < b \\ -c, & \text{при } x_n < -b \end{cases}$$



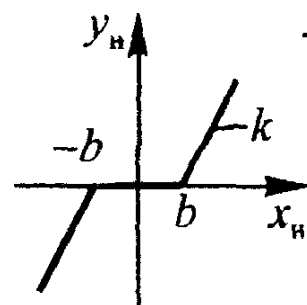
3. Усилитель с ограничением (усилитель с насыщением)

$$y_H = \begin{cases} c, & \text{при } x_H > b \\ kx_H, & \text{при } -b < x_H < b \\ -c, & \text{при } x_H < -b \end{cases}$$



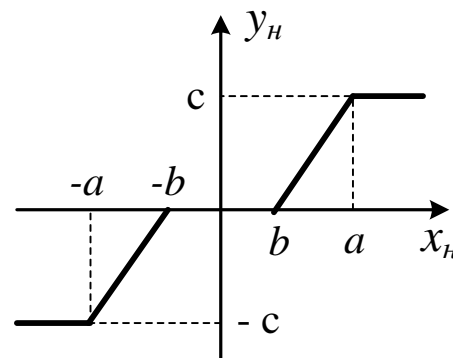
4. Усилитель с зоной нечувствительности.

$$y_H = \begin{cases} k(x_H - b), & \text{при } x_H > b \\ 0, & \text{при } -b < x_H < b \\ k(x_H + b), & \text{при } x_H < -b \end{cases}$$



5. Усилитель с зоной нечувствительности и ограничением

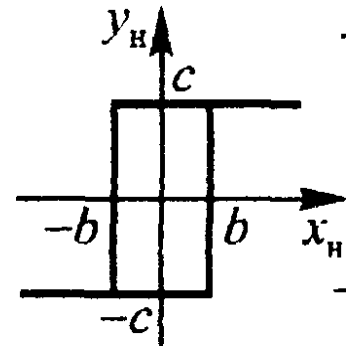
$$y_H = \begin{cases} c, & \text{при } x_H > a \\ k(x_H - b), & \text{при } b < x_H < a \\ 0, & \text{при } -b < x_H < b \\ k(x_H + b), & \text{при } -a < x_H < -b \\ -c, & \text{при } x_H < -a \end{cases}$$



У динамических нелинейностей выходная величина  $y_H$  зависит как от входной величины  $x_H$ , так и от ее производной  $x'_H$ . Характеристика динамической нелинейности всегда неоднозначна.

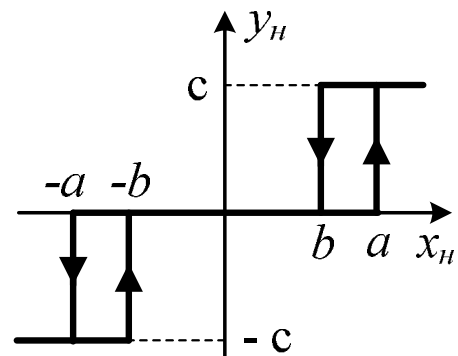
### 1. Реле с гистерезисом

$$y_H = \begin{cases} c, & \text{при } x_H > b, x'_H > 0 \\ & x_H > -b, x'_H < 0 \\ -c, & \text{при } x_H < b, x'_H > 0 \\ & x_H < -b, x'_H < 0 \end{cases}$$

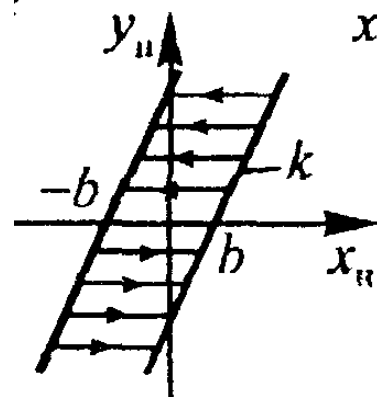


### 2. Реле с зоной нечувствительности и гистерезисом.

$$y_H = \begin{cases} c, & \text{при } x_H > a, x'_H > 0 \\ & x_H > b, x'_H < 0 \\ 0, & \text{при } -b < x_H < a, x'_H > 0 \\ & -a < x_H < b, x'_H < 0 \\ -c, & \text{при } x_H < -b, x'_H > 0 \\ & x_H < -a, x'_H < 0 \end{cases}$$



### 3. Нелинейность типа «люфт»



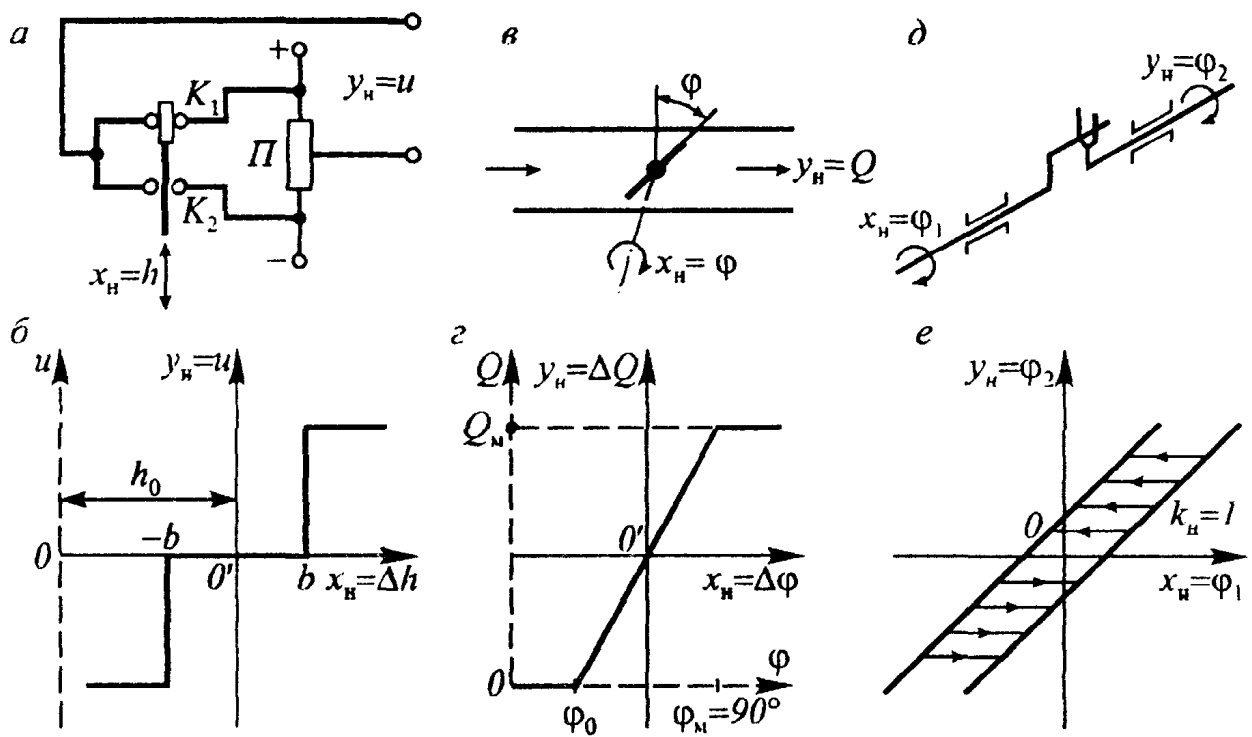


Рисунок 14.3 Нелинейные устройства и их характеристики

Рассмотренные статические и динамические нелинейности относятся к классу нелинейностей с кусочно-линейными характеристиками.

В управляющих устройствах САУ наряду с релейными элементами часто используются так называемые особые нелинейности, множительное и делительное звенья, элементы с переменной структурой, элементы логического типа.

Для улучшения качества систем применяются управляющие устройства с переменной структурой. В таких устройствах специальный блок изменения структуры (БИС) может включать в основной контур системы звенья с различными динамическими свойствами.

Например, в устройстве на рис.14.4,а **БИС**, в зависимости от значений сигнала ошибки и его производной, переключает закон регулирования с пропорционального на интегральный. Изменение структуры может происходить в зависимости и от других сигналов основного контура. Схема на рис. 14.4,б при больших сигналах ошибки работает как трехпозиционный

регулятор, а при малых — как ПИ-регулятор. В ней изменение структуры происходит за счет зон нечувствительности.

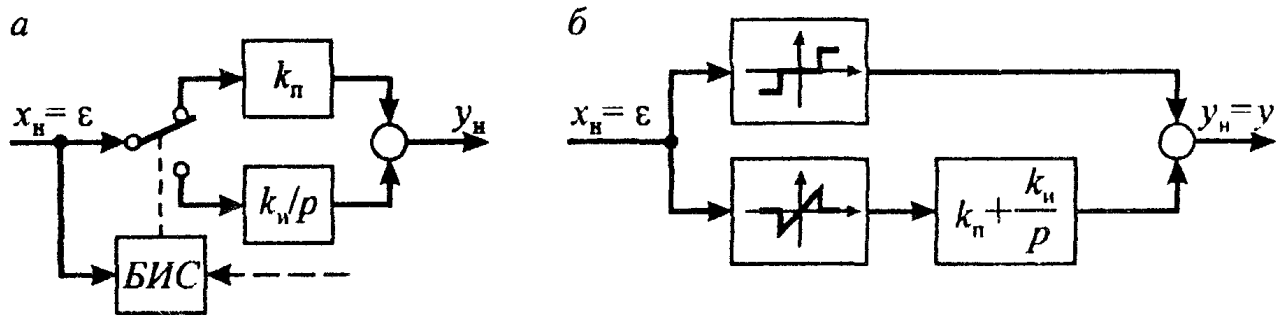


Рисунок 14.4. Нелинейные управляющие устройства с переменной структурой

Управляющим устройствам с переменной структурой эквивалентны и различные логические УУ. На рис. 14.5,а изображена структура логического УУ, изменение которой происходит по следующему алгоритму, называемому переключающей функцией:

$$y_H(e, e') = \begin{cases} -c, & \text{при } e > 0 \text{ и } e' > 0 \\ 0, & \text{при } e > 0 \text{ и } e' < 0 \\ & e < 0 \text{ и } e' > 0 \\ +c, & \text{при } e < 0 \text{ и } e' < 0 \end{cases}$$

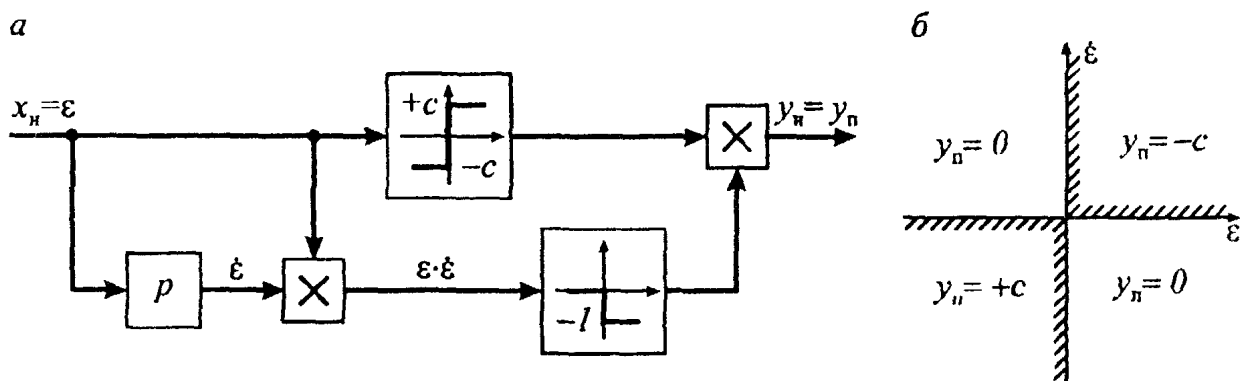


Рисунок 14.5. Алгоритмическая структура (а) и переключающая функция (б) логического управляющего устройства



Точку с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называют изображающей точкой, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы – фазовой траекторией.

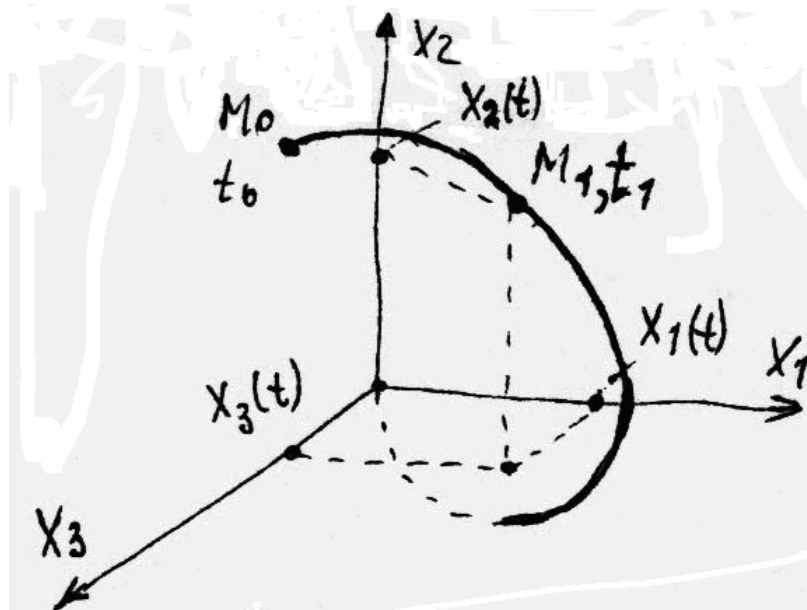


Рисунок 15.1. Фазовая траектория системы

Как известно, данной группе начальных условий  $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}$  соответствует единственное решение системы (2) – определенная совокупность искомых функции времени  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Поэтому каждой группе начальных условий соответствует только одна точка и единственная фазовая траектория, а множеству групп начальных условий соответствует целое семейство траекторий, которые называются фазовыми портретом системы.

Метод фазового пространства наиболее удобен для анализа систем второго порядка, так как их фазовые траектории располагаются в одной плоскости переменных  $x_1, x_2$ .

Пусть нелинейная система второго порядка представлена системой двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (15.3)$$



где  $x_I = x$  – отклонение выходной величины или сигнала ошибки от установившегося значения.

Если в качестве второй переменной состояния  $x_2$  принята производная переменной  $x_I = x$ , т.е.  $x_2(t) = x_1'(t)$ , то всегда функция

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 = \frac{dx_1(t)}{dt}.$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (15.4)$$

Разделив второе уравнение системы (15.4) на первое, получаем уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{x_2} \quad (15.5)$$

в котором независимой переменной является величина  $x_1$  (не время  $t!$ ), а зависимой -  $x_2$ .

Разделяя далее переменные  $x_1$  и  $x_2$  и интегрируя уравнение (15.5), можно получить уравнение фазовых траекторий в явном виде

$$x_2 = F(x_1) + C_0 \quad (15.6)$$

где  $C_0$  - постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

На рис.15.2 б, г, е, показаны характерные фазовые траектории линейной системы второго порядка, соответствующие затухающему (рис.15.2,а), расходящемуся (рис.15.2,в) и незатухающему (рис.15.2,д) колебательным процессам. Моменты времени  $t_1, t_3, t_5$ , когда кривые  $x(t)$  достигают своих максимумов и минимумов, соответствуют пересечению фазовыми траекториями оси  $x_I = x$ , а моменты прохождения кривых  $x(t)$  через нуль ( $t_2, t_4$ ) - пересечению оси  $x_2 = x'$ .

Построение фазовых траекторий значительно облегчается, если учитывать их следующие общие свойства, вытекающие из анализа выражений (15.5) и (15.6).

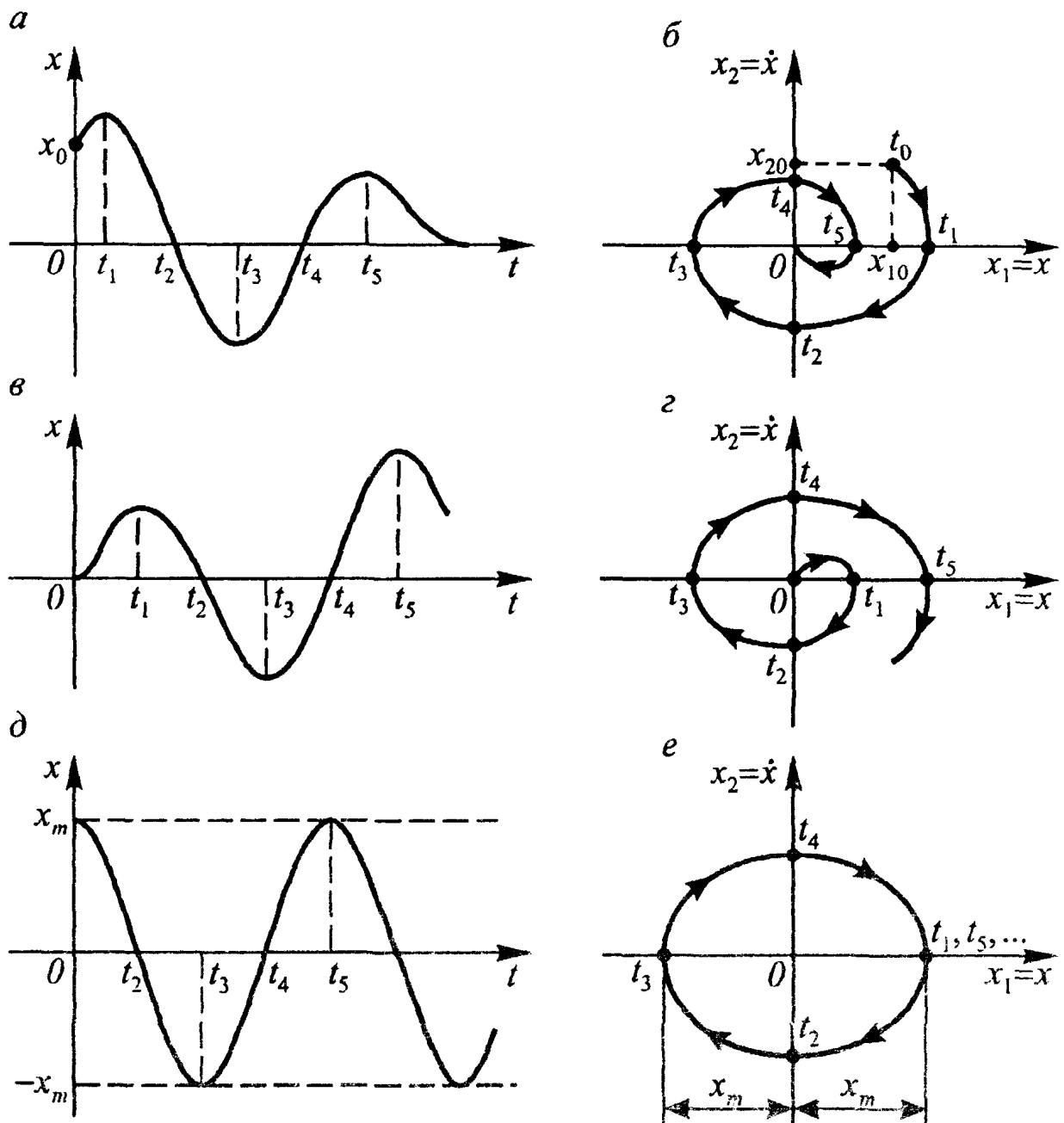


Рисунок 15.2. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы второго порядка

Общие свойства фазовых траекторий:

1. В верхних квадрантах фазовой плоскости изображающая точка движется всегда слева направо, а в нижних – справа налево. Это объясняется тем, что при  $x_2 = x' > 0$  переменная  $x_1 = x$  возрастает, а при  $x_2 = x' < 0$  переменная  $x_1 = x$  убывает.

2. В любой точке фазовой плоскости, где переменная  $x_2$  и функция  $f_2(x_1, x_2)$  не равны нулю, фазовая траектория имеет только одно определенное направление, соответствующее значению производной  $dx_2/dx_1$  в этой точке. Из этого следует, что фазовые траектории в таких точках не пересекаются.
3. Согласно выражению (15.2) при  $x_2 = 0$  производная  $dx_2/dx_1 = \infty$  т.е. фазовые траектории пересекают ось  $x_1$  под прямым углом, а переменная  $x_1 = x$  достигает своего максимума. Если при  $x_2 = 0$  одновременно равна нулю функция  $f_2(x_1, x_2) = 0$ , то фазовая траектория в таких особых точках плоскости не имеет определенного направления, а обе производные  $x'_1$  и  $x'_2$  согласно уравнениями (15.1) равны нулю. Последнее означает, что изображающая точка неподвижна, а исследуемая система уравнения находится состоянии равновесия. Особые точки могут быть обособленными или образовывать целые особые отрезки на оси  $x_1 = x$ . Такие отрезки называются **отрезками покоя**. У систем с релейными характеристиками длина отрезка покоя равна зоне нечувствительности
- 2б.**
4. Затухающему (устойчивому) переходному процессу соответствует фазовая траектория, сходящаяся к началу координат или отрезку покоя.
5. Неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.
6. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая предельным циклом. Предельный цикл может быть устойчивым или неустойчивым. Если все соседние фазовые траектории стягиваются к предельному циклу, то он является устойчивым и соответствует автоколебаниям. Если же соседние траектории отходят от цикла, то он является неустойчивым.

По графику устойчивого предельного цикла можно определить два основных параметра автоколебательного режима - частоту и амплитуду. Частота  $\omega_a$  равна отношению отрезка, отсекаемого траекторией на оси  $x_2$ , к отрезку, отсекаемому на оси  $x_1$  а амплитуда  $x_m$  равна отрезку на оси  $x_1$ .

Фазовый портрет нелинейной системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями. Линии, отделяющие на плоскости одну область от другой, называются *линиями переключения*. Уравнения линий переключения определяются по математическому описанию нелинейного элемента.

В точках пересечения фазовыми траекториями линий переключения происходит излом траекторий. Это происходит из-за скачкообразного изменения правой части уравнения (15.5).

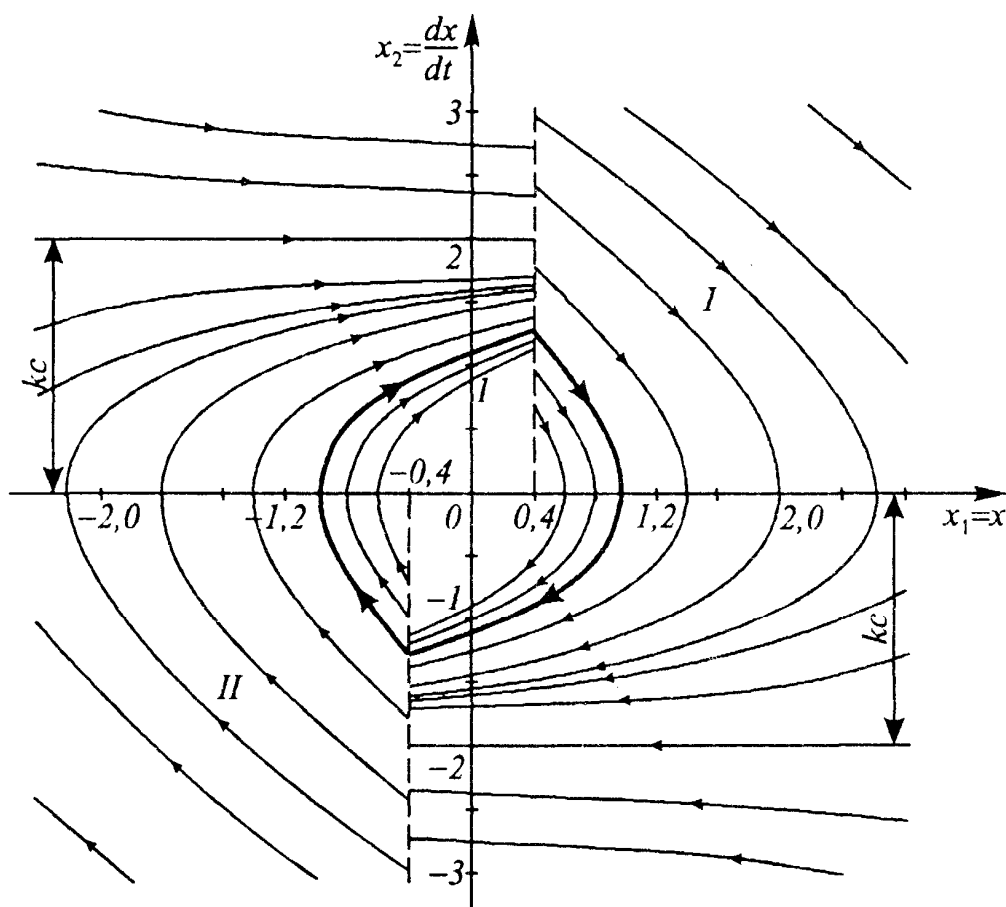


Рисунок 15.3 Фазовый портрет САУ, содержащей двухпозиционное реле с гистерезисом

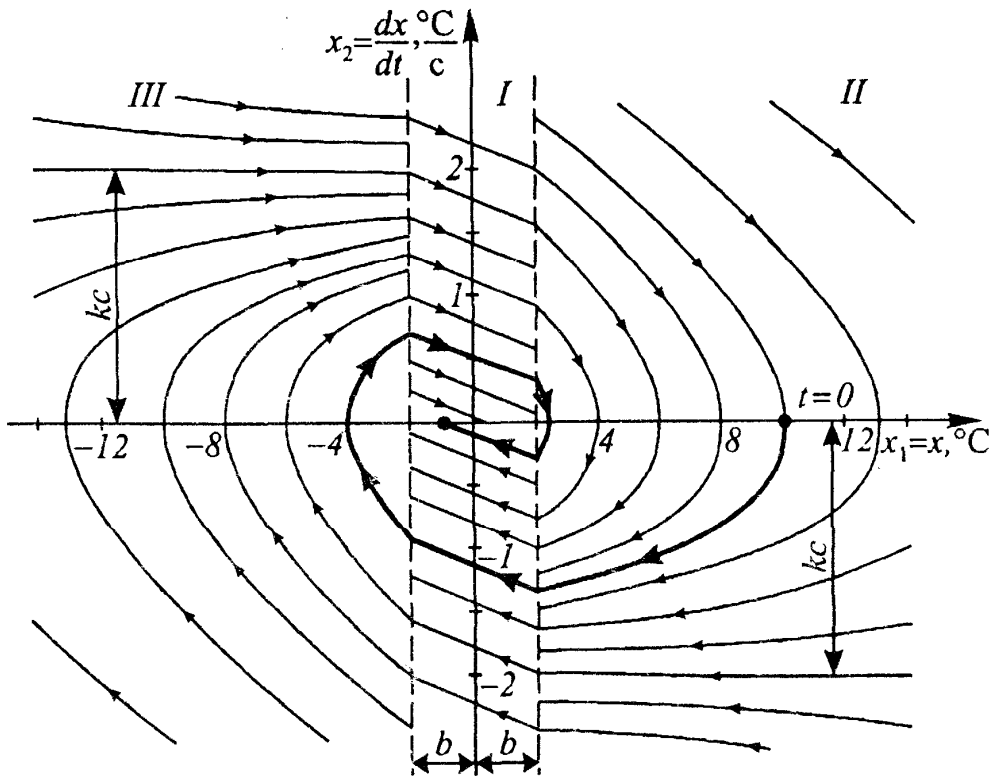


Рисунок 15.4 Фазовый портрет САУ, содержащей трехпозиционное реле

### 15.1. Нелинейное управление положением спутника

Рассмотрим жесткий спутник, изображенный на рис.15.5.

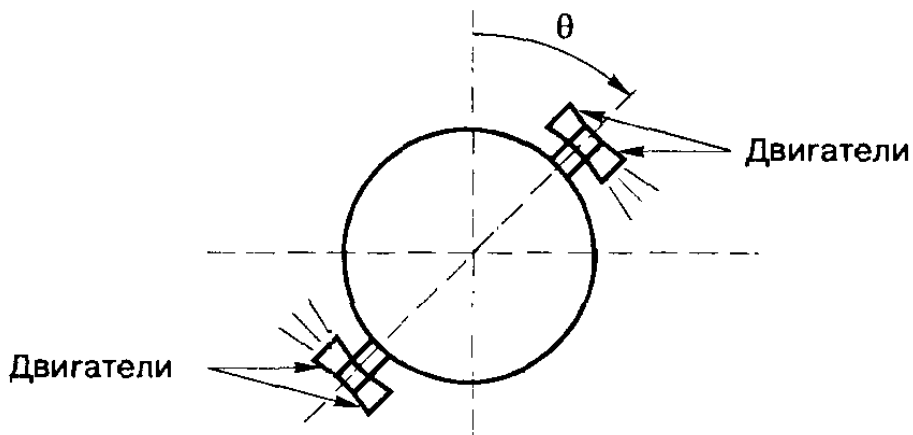


Рисунок 15.5. Нелинейная система – искусственный спутник Земли.

Предполагается, что спутник жесткий, трение отсутствует, и что он вращается относительно оси, перпендикулярной странице книги. Вращающий момент, прикладываемый к спутнику, создается двигателями. Например, если включены два двигателя, как показано на рис.15.5., это

приводит к уменьшению угла  $\Theta$ . Если же включена другая пара двигателей, то угол  $\Theta$  имеет тенденцию к увеличению. Предполагается, что момент  $t(t)$ , создаваемый двигателями, является входом системы, а угол  $\Theta(t)$  — ее выходом. Тогда:

$$t(t) = J \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2}$$

поскольку трение о воздух отсутствует ( $J$  — момент инерции спутника). В этом случае передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{\Theta(p)}{t(p)} = \frac{1}{Jp^2}$$

Это достаточно точная модель жесткого спутника, и она часто используется во многих примерах в силу ее простоты. Однако если к спутнику прикреплены солнечные панели, то допущение о его жесткости уже не действует (одни части спутника могут перемещаться относительно других частей), и модель получается более сложной.

Система управления спутником предназначена для поддержания его заданного углового положения  $\Theta$  путем включения двигателей, показанных на рисунке 15.5. Модель системы описывается уравнением

$$\Theta'' = \frac{t}{J} = u$$

где  $t$  — момент, развиваемый двигателями,  $J$  — момент инерции спутника, а  $u$  можно рассматривать как нормированный момент. Модель спутника в фазовых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Theta \\ x_1' &= x_2 = \Theta' \\ x_2' &= u = \Theta'' \end{aligned}$$

Предполагается, что двигатели развивают постоянную тягу, т.е.

$$u(t) = \pm U$$

На рис.15.5 включению двигателей соответствует уменьшение угла  $\Theta$ , поэтому

$$u(t) = -U$$

Для двух других двигателей  $u(t) = U$ .

Модель спутника имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = u(t) \end{cases}$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $u(t) = -U$ . Уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме:

$$\frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{u(t)}{x_2},$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-U}{x_2},$$

или

$$x_2 dx_2 = -U dx_1.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\frac{x_2^2}{2} = -U x_1 + C_1$$

где  $C_1$  - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий:

$$C_1 = U x_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}.$$

Таким образом, на плоскости  $(x_1, x_2)$  мы получили семейство парабол, изображенное на рис.15.6,а.

При  $u(t) = U$  решение уравнений состояния дает результат

$$\frac{x_2^2}{2} = U x_1 + C_2$$

$C_2$  - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий:

$$C_2 = -U x_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}$$

Фазовый портрет для данного случая приведен на рис.15.6,б.

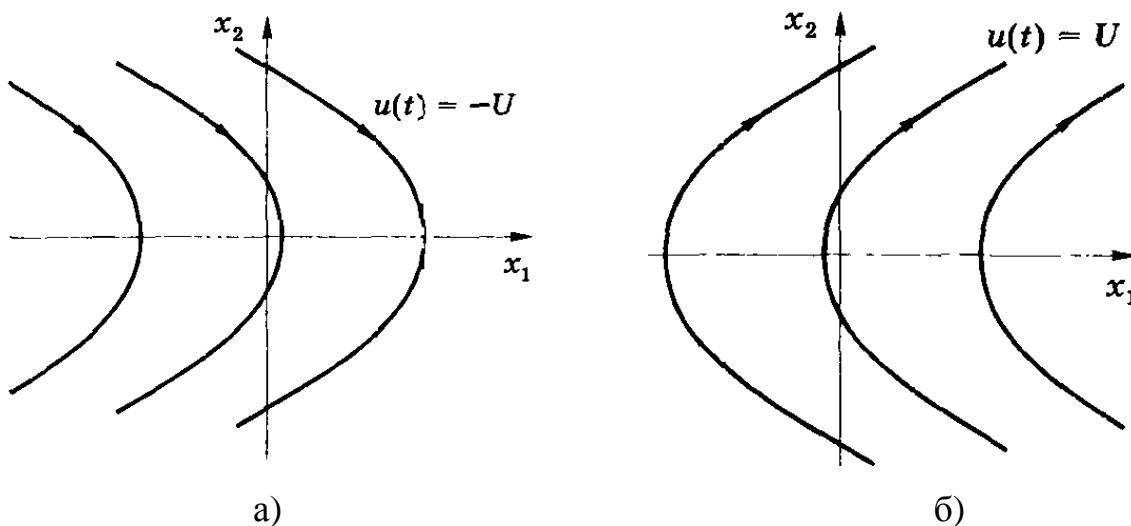


Рисунок 15.6. Фазовые портреты спутника при вращении в разные стороны

Рассмотрим замкнутую систему управления спутником, изображенную на рис.15.7.

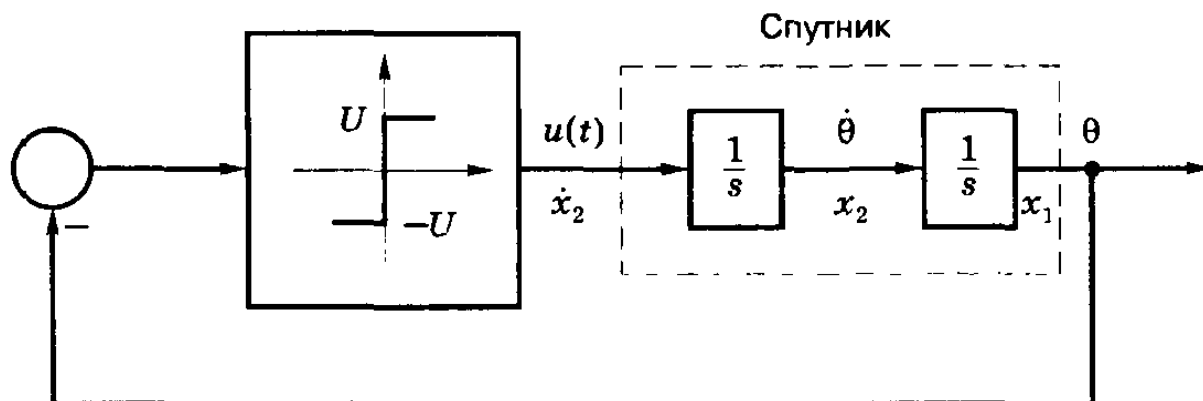


Рисунок 15.7. Структурная схема замкнутой САУ спутником

Эта система с обратной связью предназначена для поддержания углового положения спутника  $\Theta = 0^\circ$ . Если  $\Theta \neq 0^\circ$ , то соответствующие двигатели включаются, стремясь вернуть угол  $\Theta$  к  $0^\circ$ .

Когда  $\Theta = x_1 > 0^\circ$  то  $f(t) = -U$  и действительны траектории, изображенные на рис.15.6,а.

Если же  $\Theta = x_1 < 0^\circ$  то  $f(t) = U$  и действительны траектории, изображенные на рис.15.6,б.



Заметим, что переключение  $u(t)$  происходит при  $x_1 = 0$ , поэтому линия  $x_1 = 0$  (ось  $x_2$ ) является *линией переключения*. Типичная траектория движения системы изображена на рис.15.8,а откуда следует, что в ней возникают незатухающие колебания. Фазовый портрет приведен на рис.15.8,б. Очевидно, что система управления с такой динамикой является неприемлемой.

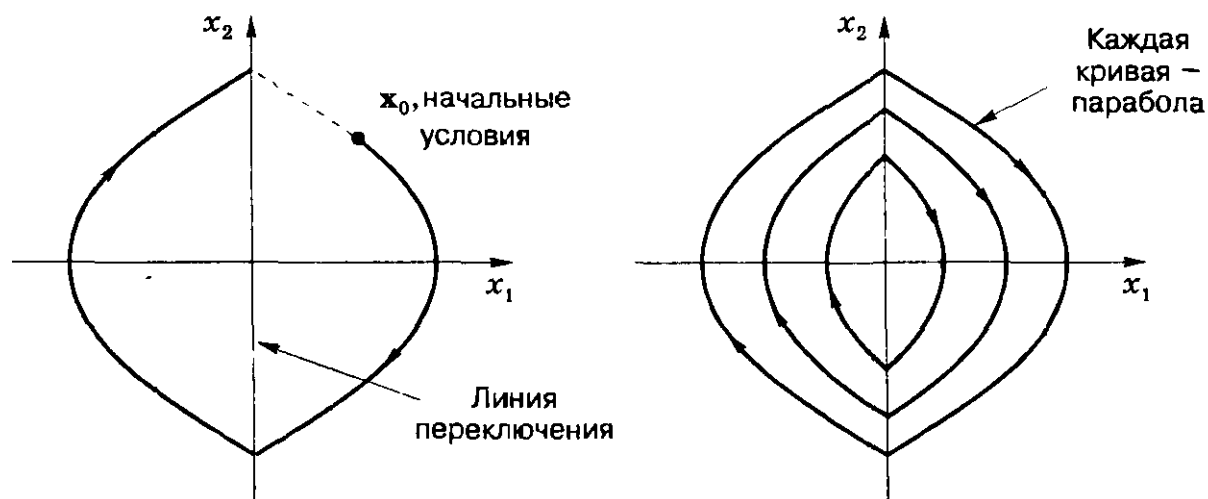


Рисунок 15.8. Фазовая траектория (а) и фазовый портрет (б) замкнутой САУ

Для улучшения динамических свойств системы используется обратная связь по скорости, как показано на рис.15.9.

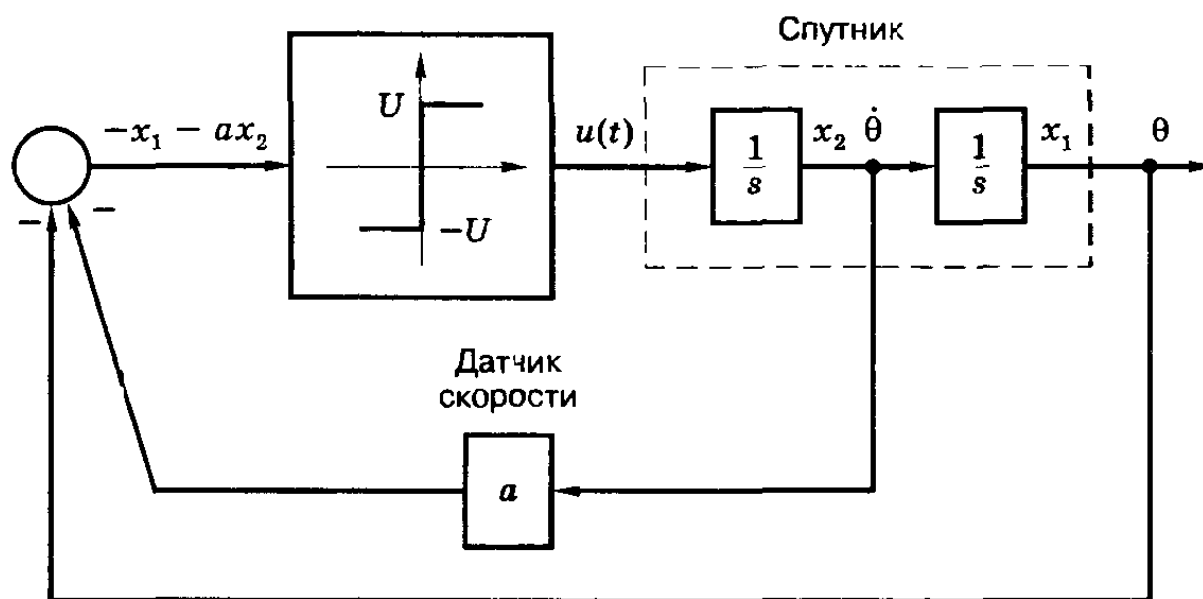


Рисунок 15.9. Система управления спутником с обратной связью по скорости

Информацию об угловой скорости спутника содержит выходной сигнал от датчика с коэффициентом усиления  $a$ . Входной сигнал спутника по-прежнему принимает значения  $\pm U$ , и траектории движения объекта на фазовой плоскости остаются параболами, как и в случае неуправляемого спутника.

Однако теперь иначе выглядят условия переключений  $u(t)$ : они происходят, когда сигнал на входе реле равен нулю, т.е.

$$\begin{aligned} -x_1 - ax_2 &= 0, \\ x_1 + ax_2 &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение определяет линию переключения - прямую с наклоном

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1}{a}.$$

Типичная фазовая траектория в данном случае показана на рис.15.10,а.

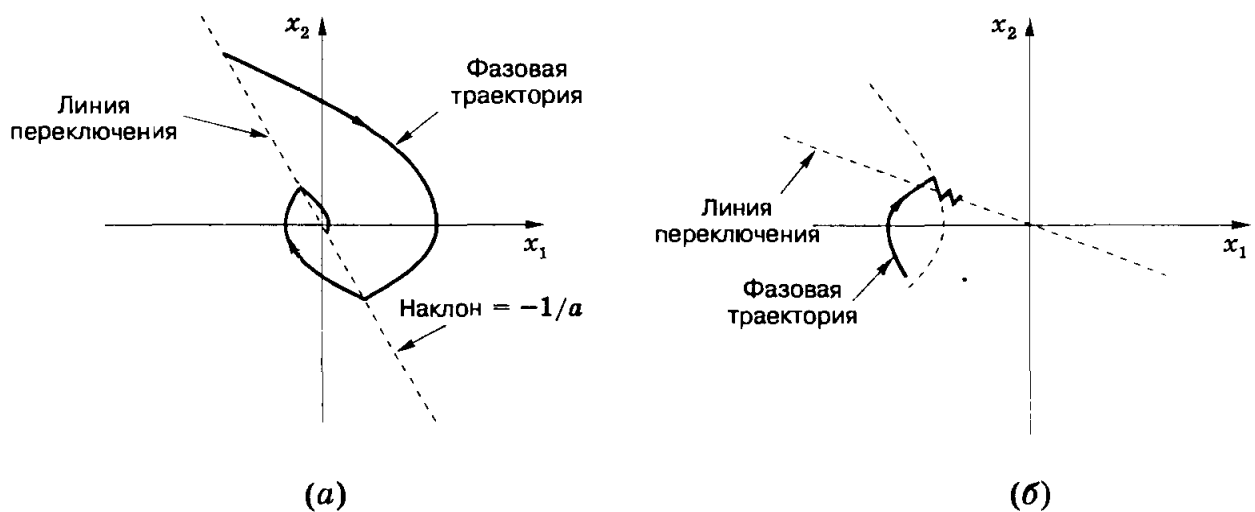


Рисунок 15.10. Фазовые траектории системы управления спутником с обратной связью по скорости

Из рисунка 15.10 видно, что динамика системы значительно улучшилась; причиной этого является введение коррекции с опережением по фазе, аналогичной действию ПД-регулятора. Более того, точка равновесия в начале координат теперь является асимптотически устойчивой. В системах, содержащих идеальную релейную характеристику, может возникать особый

вид движения, называемый «дребезгом». Условия возникновения такого режима работы проиллюстрированы на рис.15.10,б. Если наклон линии переключения является малым, то по мере приближения траектории к началу координат она всегда стремится пересечь линию переключения независимо от того, по какую сторону от нее находится. Это приводит к тому, что фазовая траектория «скользит» вдоль линии переключения к началу координат. Это явление известно под названием «скользящий режим».

## 15.2. Фазовые траектории линейных систем

В этом разделе исследуются фазовые траектории линейных систем в окрестности точек равновесия. Результаты исследований могут быть распространены на нелинейные системы, которые поддаются линеаризации. Исследуем линейную систему, описываемую уравнением

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (15.7)$$

Эта система имеет характеристическое уравнение

$$p^2 + ap + b = (p - l_1)(p - l_2) = 0 \quad (15.8)$$

Решение уравнения (15.7) при  $l_1 \neq l_2$  имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{l_2 t} \quad (15.9)$$

а при  $l_1 = l_2$

$$y(t) = C_1 e^{l_1 t} + C_2 t e^{l_1 t} \quad (15.10)$$

В обоих решениях константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются начальными условиями в системе. Предположим, что мы представили уравнение (15.7) в виде тождественной модели в переменных состояния. Как обычно, положим  $x_1 = y$ . Тогда

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = y' \\ x_2' = -bx_1 - ax_2 \end{cases} \quad (15.11)$$

В соответствии с (15.9) и (15.11), при  $l_1 \neq l_2$  имеем:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{l_2 t} \\x_2(t) &= y'(t) = C_1 l_1 e^{l_1 t} + C_2 l_2 e^{l_2 t}\end{aligned}\tag{15.12}$$

По этим уравнениям мы можем установить характер движения системы в окрестности точек равновесия на плоскости  $(x_1, x_2)$ . Заметим, однако, что согласно (15.11) система имеет только одну точку равновесия, расположенную в начале координат,  $x = 0$ . Рассмотрим теперь ряд частных случаев.

### Случай 1

В этом случае  $l_1$  и  $l_2$  являются вещественными и имеют один и тот же знак. Предположим сначала, что  $l_1$  и  $l_2$  отрицательны. Согласно (15.12)  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  с течением времени стремятся к нулю и каждая из этих функций может изменить знак самое большее один раз. Фазовый портрет для этого случая приведен на рис.15.11,а. Подобная точка равновесия называется *устойчивым узлом*.

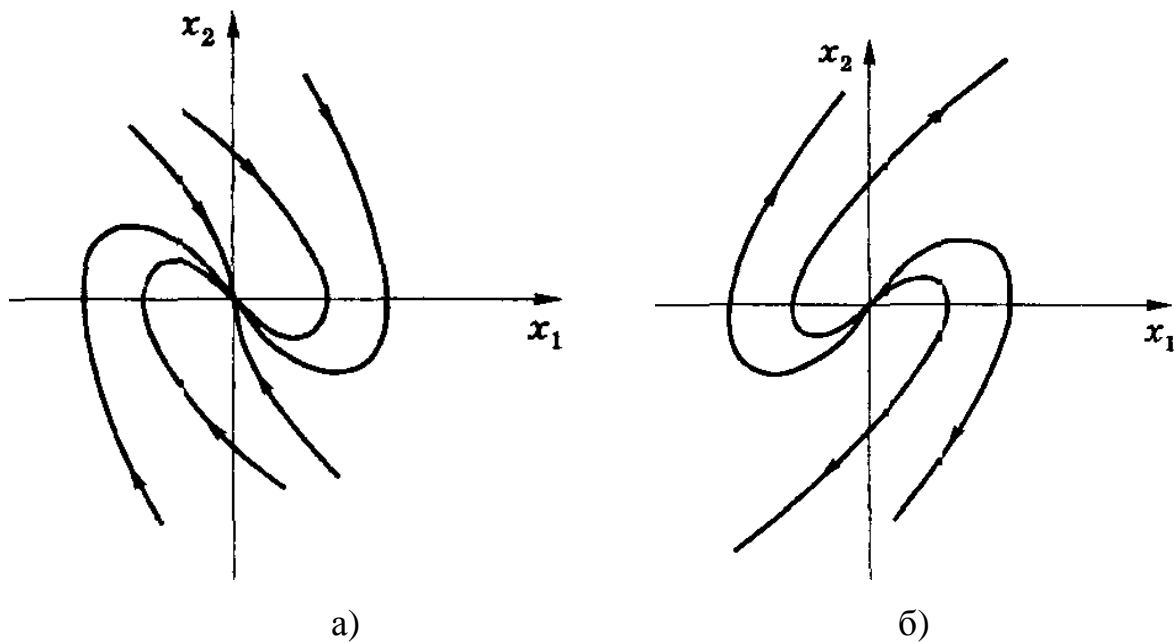


Рисунок 15.11. Фазовый портрет, соответствующий устойчивому узлу (а) и неустойчивому узлу (б)

Если  $I_1$  и  $I_2$  являются вещественными и положительными, то система неустойчива и фазовый портрет имеет вид рис. 15.11,б. Точка равновесия в этом случае называется *неустойчивым узлом*.

### Случай 2

В этом случае  $I_1$  и  $I_2$  являются комплексными с ненулевой действительной частью. Положим

$$\begin{aligned} I_1 &= a + jb \\ I_2 &= a - jb \end{aligned} \quad (15.13)$$

тогда переменные состояния будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{at} \sin(bt + j_1) \\ x_2(t) &= C_2 e^{at} \sin(bt + j_2) \end{aligned} \quad (15.14)$$

Если  $I_1$  и  $I_2$  имеют отрицательные действительные части, то фазовый портрет выглядит в виде рис.15.12,а, а точка равновесия в начале координат называется *устойчивым фокусом*.

При положительной действительной части корней  $I_1$  и  $I_2$  фазовый портрет имеет вид 15.12,б, а точка равновесия называется *неустойчивым фокусом*.

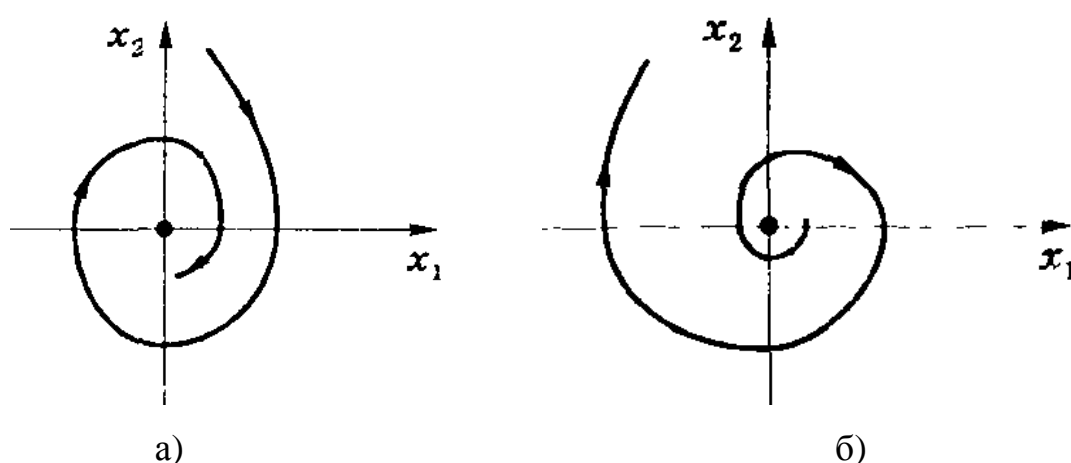


Рисунок 15.12. Фазовый портрет, соответствующий устойчивому фокусу (а) и неустойчивому фокусу (б)

### Случай 3

В этом случае  $I_1$  и  $I_2$  являются мнимыми, и решение (15.14) принимает вид:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 \sin(bt + j_1) \\x_2(t) &= bC_2 \cos(bt + j_1)\end{aligned}\tag{15.15}$$

Фазовые траектории имеют эллиптическую форму, как показано на рис.15.13,а, а точка в начале координат называется *центром* или *вихрем*.

### Случай 4

В этом случае  $I_1$  и  $I_2$  являются действительными, причем  $I_1 > 0$ , а  $I_2 < 0$ . Согласно (15.12)

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 e^{I_1 t} + C_2 e^{I_2 t} \\x_2(t) &= C_1 I_1 e^{I_1 t} + C_2 I_2 e^{I_2 t}\end{aligned}\tag{15.16}$$

За исключением случая, когда  $C_1 = 0$ ,  $x_1$  и  $x_2$  с течением времени неограниченно возрастают. Фазовый портрет изображен на рис.15.13,б а точка равновесия в начале координат называется *седлом*.

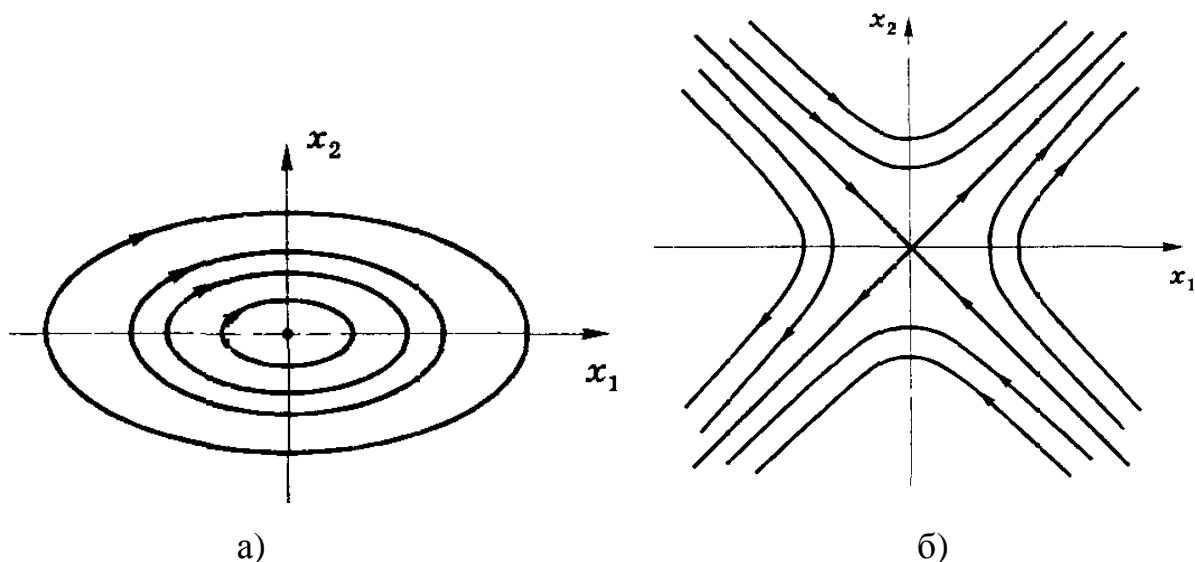


Рисунок 15.13. Фазовый портрет, соответствующий центру (а) и седлу (б)

## 16. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Является приближенным методом исследования режима автоколебаний нелинейных систем. Этим методом можно определить условия возникновения и параметры автоколебаний как в системах второго порядка, так и в более сложных системах

Метод заключается в замене существенного наименьшего элемента с характеристикой  $f(x_H)$  эквивалентным линейным звеном с коэффициентом  $k_H$ . В замкнутой САУ, работающей в режиме автоколебаний, условием эквивалентности служит равенство амплитуд и фаз выходного сигнала реального нелинейного элемента. При этом предлагается, что сигнал на входе нелинейного элемента является синусоидальным. Такое предположение справедливо во всех случаях, когда линейная часть системы достаточно инерциальная и не пропускает высокочастотные гармоники.

Рассмотрим сущность метода гармонической линеаризации подробнее. Пусть, как и прежде, САУ состоит из отдельных друг от друга линейной и нелинейной частей (рис.16.1), и нелинейная часть описывается уравнением:

$$y_H(t) = f(x_H(t), x'_H(t)) \quad (16.1)$$

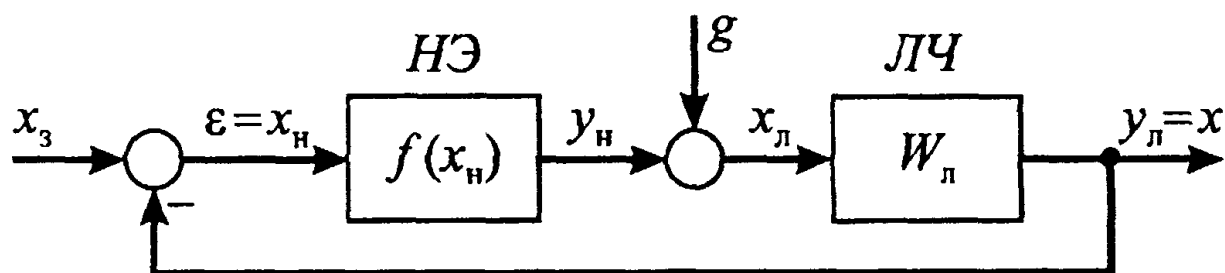


Рисунок 16.1. Типовая структура нелинейной системы

Предположим, что контур системы разомкнут (на выходе линейной части) и что на входе нелинейного элемента действует синусоидальный сигнал

$$x_H(t) = x_{nm} \sin \omega t \quad (16.2)$$

При этом на выходе нелинейного элемента будет возникать периодический сигнал  $y_n(t)$ , форма которого зависит от характера нелинейности и в общем случае существенно отличается от синусоидальной.

Уравнение нелинейной части (16.1) при синусоидальном воздействии (16.2) можно записать в таком общем виде:

$$y_n(t) = f[x_n(t), x'_n(t)] = f[x_{nm} \sin wt, x_{nm} w \cos wt] \quad (16.3)$$

Периодический сигнал  $y_n(t)$  может быть разложен в ряд Фурье

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos w_1 kt + b_k \sin w_1 kt)$$

где  $w_1 = 2\pi/T$  - частота основной гармоники;

$w_k = w_1 k$  - частота  $k$ -той гармоники;

коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_n(t) \cos w_1 kt dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (*)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_n(t) \sin w_1 kt dt, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (**)$$

$k$ -тая гармоника выходного сигнала нелинейного элемента имеет вид

$$y_{nk}(t) = a_k \cos wkt + b_k \sin wkt = y_{km} \sin(wkt + y_k) \quad (16.4)$$

$$y_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad y_k = \arctg(a_k/b_k) \quad (16.5)$$

У большинства встречающихся в автоматике нелинейных элементов статическая характеристика кососимметрична относительно начала координат, т. е.  $f(x_n) = -f(-x_n)$  и для них всегда постоянная составляющая  $a_0/2 = 0$ , а также коэффициенты всех четных гармоник  $a_{2k} = b_{2k} = 0$  и  $y_{2km} = 0$ .

Возможность и правомерность замены реального нелинейного элемента, функционирующего в замкнутой системе в режиме гармонических



колебаний, эквивалентным линейным звеном основаны на следующих общих закономерностях:

1. Амплитуды  $y_{km}$  всех гармоник выше первой почти всегда значительно меньше амплитуды первой гармоники сигнала  $y_H(t)$ , т.е.

$$y_{km} \ll y_{1m}, \quad (k = 3, 5, 7 \dots) \quad (16.6)$$

2. Линейная часть большинства нелинейных систем обладает свойством фильтра низкой частоты:

$$|W_{\mathcal{L}}(j\omega)| \gg |W_{\mathcal{L}}(jk\omega)|, \quad (k = 3, 5, 7 \dots) \quad (16.7)$$

т. е. все гармоники, кроме основной, существенно ослабляются линейной частью и благодаря этому сигнал  $y_H(t)$  на ее выходе окажется близким к синусоиде.

На основании этих двух предпосылок можно при анализе замкнутой системы учитывать только первую гармонику и сигнал  $y_H(t)$  на выходе элемента с кососимметричной характеристикой представлять приближенно так:

$$y_H(t) \approx y_{H1}(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = y_{1m} \sin(\omega t + \gamma_1) \quad (16.8)$$

Учитывая, что

$$\sin \omega t = x_H(t)/x_{Hm}; \quad \cos \omega t = x'_H(t)/(x_{Hm} \cdot \omega) \quad (16.9)$$

и вводя обозначения

$$q(x_{Hm}) = b_1/x_{Hm} \quad q_1(x_{Hm}) = a_1/x_{Hm} \quad (16.10)$$

можно вместо выражения (8) записать

$$y_H(t) \approx q(x_{Hm})x_H(t) + q_1(x_{Hm})x'_H(t)/\omega \quad (16.11)$$

или в операторной форме

$$y_H(t) \approx q(x_{Hm})x_H(t) + q_1(x_{Hm})px_H(t)/\omega \quad (16.12)$$

Таким образом, при выполнении указанных выше предпосылок нелинейное уравнение (16.3) может быть заменено линейным уравнением (16.11). Эта операция называется **гармонической линеаризацией**, а коэффициенты  $q(x_{Hm})$  и  $q_1(x_{Hm})$  - **коэффициентами гармонической линеаризации**.

Коэффициенты гармонической линеаризации зависят от вида нелинейности и могут быть определены по формулам (\*), (\*\*) и (16.9). В таблице 16.1 приведены коэффициенты  $q(x_{nm})$  и  $q_1(x_{nm})$  для наиболее часто встречающихся нелинейностей.

Гармоническая линеаризация принципиально отличается от обычной линеаризации, т. к. коэффициенты гармонически линеаризованного элемента непостоянны, а зависят от амплитуды входного сигнала  $x_{nm}$ . Однако при определенном режиме периодических колебаний, когда значения  $w$  и  $x_{nm}$  фиксированы, коэффициенты гармонической линеаризации имеют также постоянные значения. Благодаря этому для решения некоторых задач анализа нелинейных систем могут быть использованы понятия и методы теории линейных систем.

Из уравнения (16.12) можно получить **эквивалентную ПФ нелинейного элемента**

$$W_H(p, x_{nm}, w) = \frac{y_n(p)}{x_n(p)} = q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/w \quad (16.13)$$

а подстановкой в нее  $p = j\omega$  - **эквивалентную АФХ**

$$W_H(x_{nm}) = q(x_{nm}) + jq_1(x_{nm}) \quad (16.14)$$

Модуль функции (16.14)  $W_H(x_{nm})$

$$A_H(x_{nm}) = \frac{y_{m1}}{x_m} = \sqrt{[q(x_{nm})]^2 + [q_1(x_{nm})]^2} \quad (16.15)$$

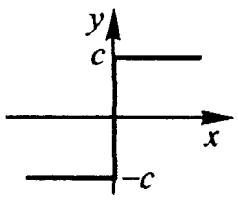
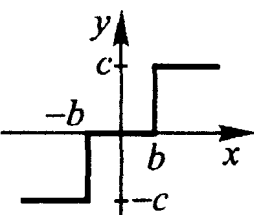
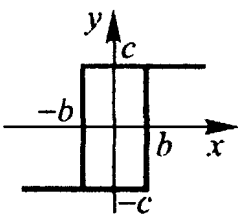
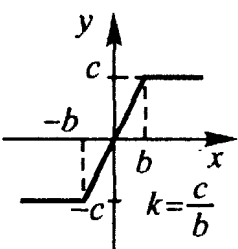
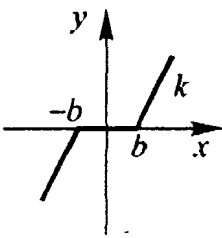
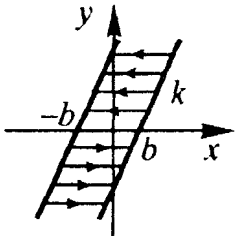
определяет отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала к амплитуде входного сигнала, а аргумент функции

$$j_H(x_{nm}) = \text{arctg} \frac{q_1(x_{nm})}{q(x_{nm})} \quad (16.16)$$

- фазовый сдвиг между первой гармоникой и входным сигналом.

Отметим, что у всех нелинейностей с однозначными (статическими) характеристиками коэффициент  $q_1(x_{nm})$  равен нулю, и они не создают отставания по фазе.

Таблица 16.1. Коэффициенты гармонической линеаризации типовых нелинейностей

	$y_H = f(x_H)$	$q(x_m)$	$q_1(x_m)$
1		$\frac{4c}{\pi x_m}$	0
2		$\frac{4c}{\pi x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2}$ при $x_m > b$	0
3		$\frac{4c}{\pi x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2}$ при $x_m > b$	$-\frac{4cb}{\pi x_m^2}$ при $x_m > b$
4		$\frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{x_m} + \frac{b}{x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2} \right)$ при $x_m > b$	0
5		$k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{x_m} + \frac{b}{x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2} \right)$ при $x_m > b$	0
6		$\frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{x_m} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{x_m} \right) \times \sqrt{\frac{b}{x_m} \left( 1 - \frac{b}{x_m} \right)} \right]$	$-\frac{4kb}{\pi x_m} \left( 1 - \frac{b}{x_m} \right)$ при $x_m > b$

На рис.16.2 приведены графики коэффициентов  $q(x_{nm})$  и  $q_1(x_{nm})$ , построенные по формулам табл. 16.1. Графики построены в безразмерной форме. В качестве единицы измерения амплитуды  $x_{nm}$  принят параметр  $b$ , а для самих коэффициентов введен нормирующий множитель  $b/c$  или  $1/k$ .

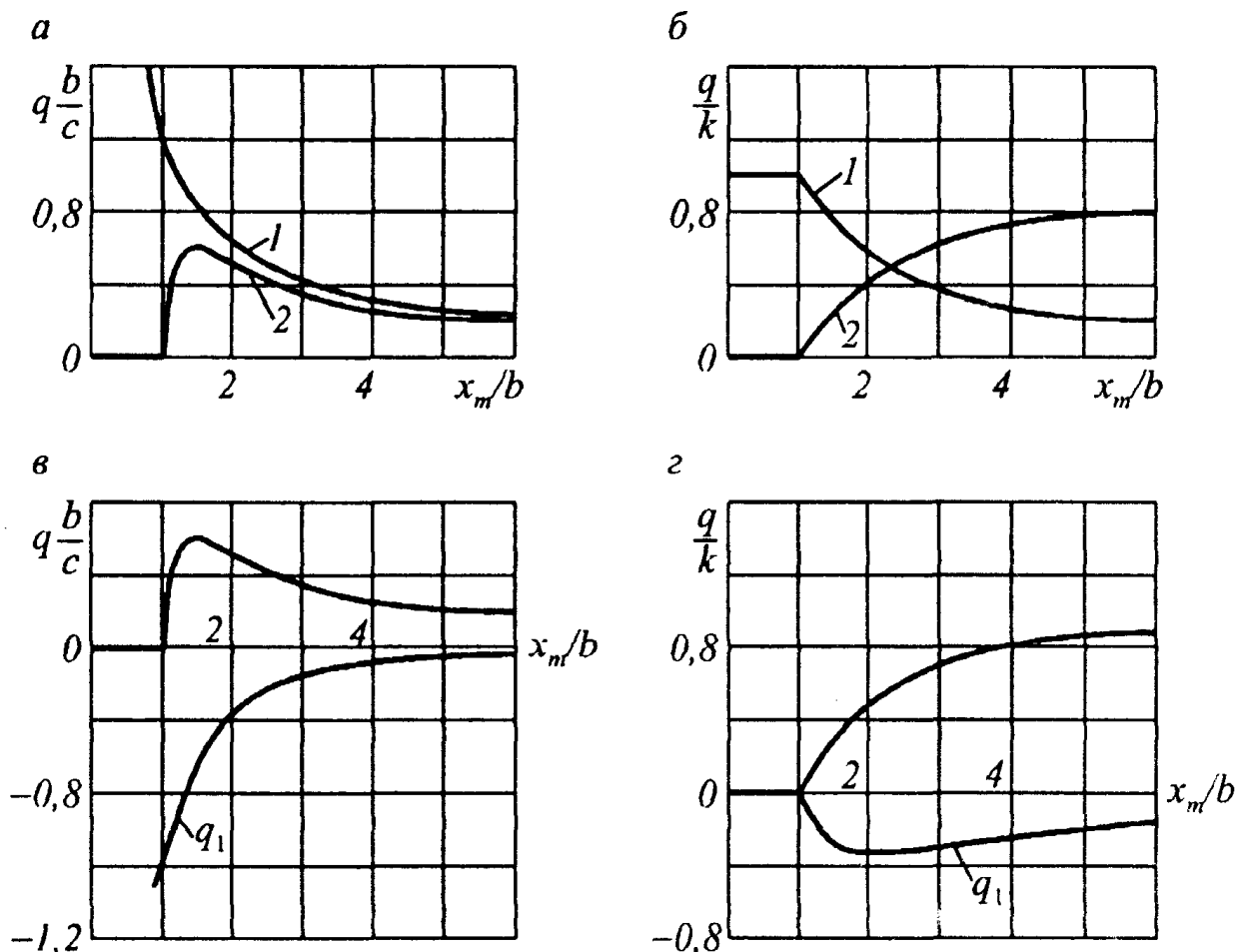


Рисунок 16.2. Зависимости коэффициентов гармонической линеаризации от амплитуды входного сигнала

**Линия 1** на рис. 16.2,а соответствует нелинейности 1 в табл. 16.1, **линия 2** - нелинейности 2.

**Линия 1** на рис. 16.2,б соответствует нелинейности 4, **линия 2** - нелинейности 5. На рис. 16.2,в,г представлены графики соответственно для нелинейностей 3 и 6.

У нелинейностей 1-4, имеющих ограничение  $c$ , коэффициенты гармонической линеаризации по мере увеличения амплитуды  $x_{nm}$  стремятся к

нулю, т. к. амплитуда первой гармоники выходного сигнала остается постоянной. У нелинейностей 5 и 6 с ростом амплитуды  $x_{nm}$  ослабевают влияние нечувствительности  $b$ , и коэффициент  $q(x_{nm})$  стремится к коэффициенту  $k$  линейного участка. Нелинейности 3 и 6, имеющие неоднозначные характеристики, создают отставание по фазе. С ростом амплитуды  $x_{nm}$  коэффициент  $q_1(x_{nm})$  этих звеньев уменьшается и соответственно уменьшается отставание по фазе.

Перейдем теперь непосредственно к использованию метода гармонической линеаризации для исследования режима автоколебаний.

Если известны ПФ линейной части

$$W_L(p) = \frac{K_L(p)}{D_L(p)} \quad (16.17)$$

и эквивалентная ПФ (16.12) нелинейной части, то можно записать эквивалентную ПФ разомкнутого контура нелинейной САУ

$$W(p, x_m, w) = W_L(p)W_H(p, x_m, w) = \frac{K_L(p)}{D_L(p)} \cdot [q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/w] \quad (16.18)$$

и характеристическое уравнение замкнутой гармонически линеаризованной системы

$$F(p, x_m, w) = D_L(p) + K_L(p) \cdot [q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/w] = 0 \quad (16.19)$$

В режиме автоколебаний амплитуда  $x_m$  и частота  $w$  остаются постоянными. Следовательно, и функция  $W(p, x_m, w)$  в этом режиме постоянна, а выражения (16.18) и (16.19) линейны, и их можно анализировать обычными методами теории линейных САУ.

Существованию в нелинейной САУ автоколебаний соответствует нахождение линеаризованной системы (16.19) на колебательной границе устойчивости. Для определения колебательной границы можно использовать любой из критериев устойчивости, применяемых для линейных систем.

### 16.1. Критерий Михайлова.

Для того чтобы установить, возможны ли в системе автоколебания вида  $x(t) = x_{ma} \sin w_a t$  с постоянной амплитудой  $x_{ma}$  и частотой  $w_a$ , необходимо в характеристическое уравнение (16.19) подставить чисто мнимый корень  $p = jw_a$ :

$$D_L(jw_a) + K_L(jw_a) \cdot [q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})jw_a/w_a] = 0 \quad (16.20)$$

и решить его относительно неизвестных  $x_{ma}$  и  $w_a$ .

Решение уравнения (16.20) упрощается благодаря тому, что в левой части всегда могут быть выделены действительная и мнимая составляющие, которые порознь также равны нулю:

$$\begin{cases} P(x_{ma}, w_a) = 0 \\ Q(x_{ma}, w_a) = 0 \end{cases} \quad (16.21)$$

Одновременное выполнение равенств (16.21) соответствует прохождению характеристической кривой  $F(x_m, jw)$  через начало координат.

Если уравнения (16.21) не имеют положительных действительных корней  $x_{ma}$  и  $w_a$ , то автоколебания в системе невозможны.

После отыскания параметров  $x_{ma}$  и  $w_a$  необходимо проверить, соответствуют ли они устойчивым автоколебаниям. Для этого используют следующее условие устойчивости автоколебаний:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x_m} \right)^* \left( \frac{\partial Q}{\partial w} \right)^* - \left( \frac{\partial P}{\partial w} \right)^* \left( \frac{\partial Q}{\partial x_m} \right)^* > 0 \quad (16.22)$$

где звездочка означает, что в частные производные, полученные из выражений (16.21), необходимо подставить найденные численные значения параметров  $x_{ma}$  и  $w_a$ .

## 16.2. Критерий Найквиста

Если линейная часть описывается уравнением высокого порядка или содержит запаздывание, то аналитическое решение системы (16.21) затруднительно или невозможно. В этих случаях автоколебания можно отыскать при помощи критерия Найквиста.

Согласно критерия Найквиста, система находится на колебательной границе устойчивости, если АФХ разомкнутого контура проходит через точку  $(-1; j0)$ . Следовательно, условием существования автоколебаний является равенство

$$W_{\text{Л}}(j\omega_a)W_{\text{Н}}(x_{ma}) = -1 \quad (16.23)$$

или

$$W_{\text{Л}}(j\omega_a) = \frac{-1}{W_{\text{Н}}(x_{ma})} \quad (16.24)$$

Левая часть уравнения (16.24) представляет собой АФХ всех линейных звеньев системы, а правая - обратную характеристику нелинейного элемента, взятую с противоположным знаком.

Уравнение (16.24) удобно решать графически. Для этого необходимо построить указанные характеристики в одной системе координат (рис.16.3). В точках пересечения кривых выполняется равенство (16.24). Эти точки определяют параметры автоколебаний. Отметка текущей частоты на кривой  $W_{\text{Л}}(j\omega)$  определяет частоту автоколебаний  $\omega_a$ , а отметка текущей амплитуды на кривой  $-1/W_{\text{Н}}(x_m)$  - амплитуду автоколебаний  $x_{ma}$ .

Если характеристики не пересекаются, то автоколебания отсутствуют.

Факт устойчивости или неустойчивости найденного режима автоколебаний устанавливаются при помощи следующего правила, если точка на кривой  $-1/W_{\text{Н}}(x_m)$ , близкая к точке пересечения, но сдвинутая в направлении возрастания параметра  $x_m$ , не охватывается характеристикой  $W_{\text{Л}}(j\omega)$ , то автоколебания устойчивы, если же охватывается, - то

неустойчивы. На рис. точка  $M_2$  соответствует устойчивым автоколебаниям, а точка  $M_1$  - неустойчивым.

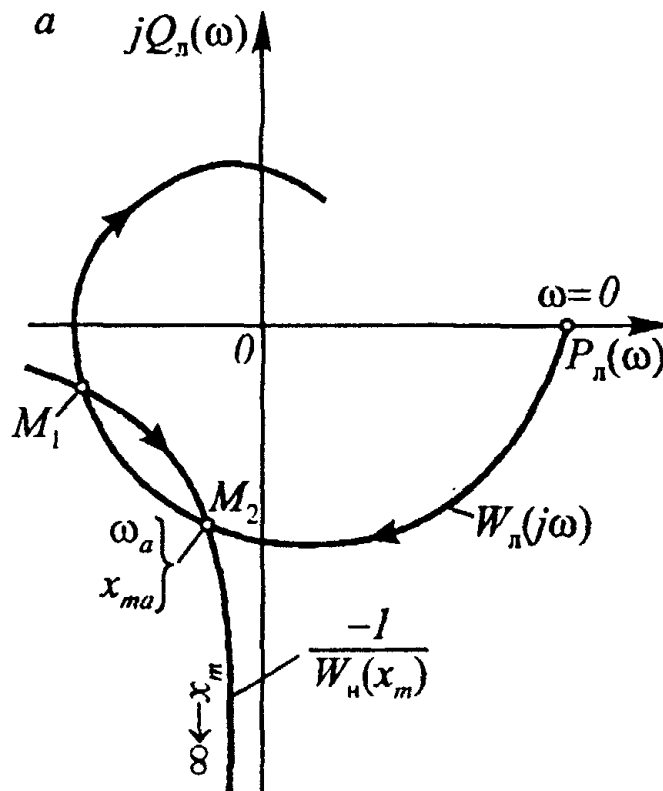


Рисунок 16.3. К определению автоколебаний по критерию Найквиста

### 16.3. Оценка абсолютной устойчивости с помощью критерия Попова

При решении практических задач анализа и синтеза нелинейных САУ часто возникает необходимость оценки устойчивости состояния равновесия и определения допустимых вариаций формы и параметров статической характеристики нелинейного элемента. Эти две задачи связаны с понятием и критерием абсолютной устойчивости нелинейной системы.

Пусть в контуре нелинейной САУ содержится нелинейный элемент с характеристикой  $f(x_H)$ , имеющей любую форму, но не выходящей за пределы определенного сектора  $[0, k_H]$  (рис.16.4,а).

Состояние равновесия нелинейной системы называется **абсолютно устойчивым**, если оно асимптотически устойчиво при любой нелинейности, относящейся к определенному классу. Нелинейности считаются относящимися к одному классу, если их характеристики  $f(x_H)$



располагаются в секторе между осью абсцисс и прямой с угловым коэффициентом  $k_H$  (см. рис.16.4,а).

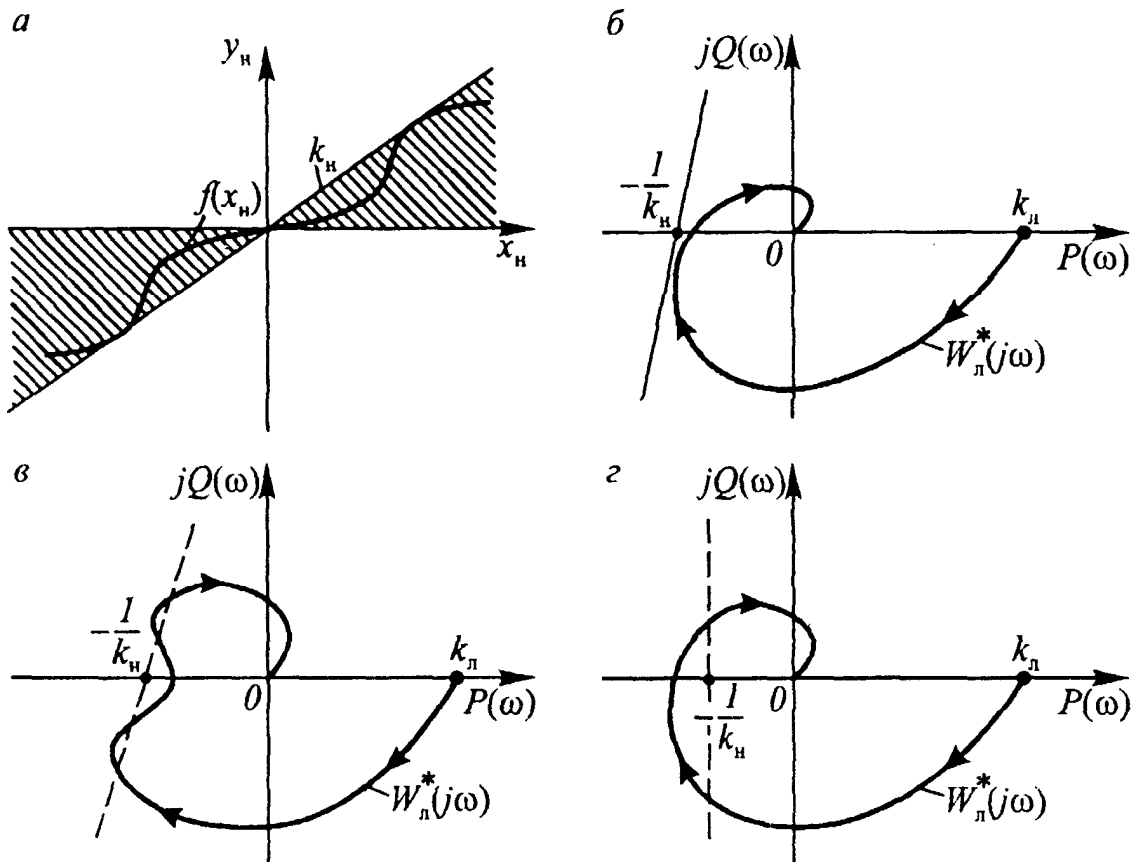


Рисунок 16.4. Критерий оценки абсолютной устойчивости Попова

На первый взгляд, может показаться, что для оценки абсолютной устойчивости нелинейной системы, состоящей из линейной части с  $W_{\text{Л}}(p)$  и нелинейности с  $f(x_n)$ , достаточно оценить устойчивость линейной системы с передаточной функцией  $k_H W_{\text{Л}}(p)$ . Однако это предположение выполняется только для некоторых частных видов  $W_{\text{Л}}(p)$ , а в общем случае оно несправедливо и требуются специальные критерии.

Удобный критерий для суждения об абсолютной устойчивости нелинейных САУ предложил в 1959 г. румынский ученый В.Попов. Его критерий основан, как и критерий Найквиста, на использовании АФЧХ и имеет простую геометрическую трактовку.

В формулировке критерия используется понятие модифицированной АФЧХ. Пусть линейная часть устойчива и имеет следующую АФЧХ:

$$W_{\text{Л}}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (16.25)$$

Образуем из этой обычной АФЧХ следующую видоизмененную АФЧХ:

$$W_{\text{Л}}^*(j\omega) = P(\omega) + j\omega T_M Q(\omega) \quad (16.26)$$

у которой мнимая часть получена умножением  $Q(\omega)$ , на  $\omega T_M$ , где  $T_M = 1$  с - нормирующий множитель. Характеристика (16.26) и называется **модифицированной**.

Теперь можно следующим образом сформулировать критерий абсолютной устойчивости равновесия нелинейной САУ, которая состоит из линейной части с АФЧХ  $W_{\text{Л}}(j\omega)$  и нелинейного элемента с характеристикой  $f(x_H)$ , расположенной в секторе  $[0, k_H]$ :

**для абсолютной устойчивости равновесия достаточно, чтобы модифицированная характеристика  $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$  не охватывала точку  $(-1/k_H, j0)$  и через эту точку можно было провести прямую, не пересекающую характеристику  $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$  (последняя лежит справа от прямой).**

На рис.16.4,б, показан случай, когда критерий Попова выполняется, а на рис.16.4,в, г — случаи, когда не выполняется.

С помощью критерия Попова решают и обратную задачу, строят заданную характеристику  $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$ , затем проводят как можно ближе к этой характеристике прямую так, чтобы получить наименьший отрезок  $[0, -1/k_H]$ , и таким образом находят допустимое значение углового коэффициента  $k_H$ .

По наклону прямой Попова, «прижатой» к кривой  $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$ , можно судить о допустимом классе нелинейности: если прямая вертикальна, то нелинейность может быть только однозначной, а если она наклонена, то нелинейность может быть и однозначной, и неоднозначной (например, с гистерезисом).

## 17. КОРРЕКЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### 17.1. Линейная коррекция нелинейных систем

Для достижения требуемой точности и качества процесса в нелинейные системы можно вводить линейные корректирующие устройства такие же, как и в линейных системах. Эти линейные корректирующие устройства могут быть последовательными (с введением производных, интегралов и т. п.) и параллельными (в виде местных обратных связей различного типа).

Рассмотрим системы с одной нечетно-симметричной однозначной нелинейностью  $F(x)$ , гармоническая линейризация которой имеет вид

$$F(x) = q(x_m)x \quad (17.1)$$

где  $q(x_m)$  коэффициент гармонической линейризации принимает ограниченные значения

$$0 \leq q(x_m) \leq q_m \quad \text{или} \quad q_n \leq q(x_m) \leq q_m \quad (17.2)$$

К такого типа нелинейностям относятся, например, нелинейности, изображенные на рисунке 17.1.

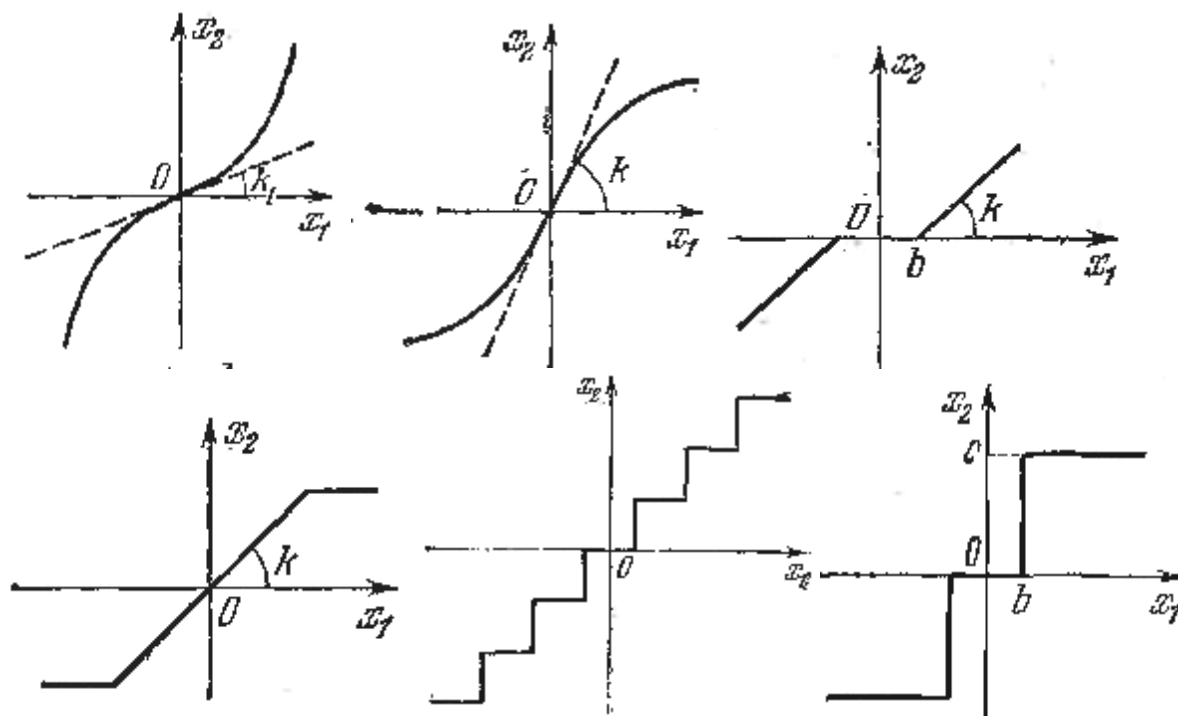


Рисунок 17.1. Нелинейности с ограниченным коэффициентом гармонической линейризации

Случаи наличия нелинейностей вида (рис.17.2) когда коэффициент  $q(x_m)$  принимает бесконечное значение при  $x_m = 0$ , здесь не рассматриваются, так как в этих случаях невозможно обеспечить устойчивое равновесное состояние системы в нулевой точке и установившийся режим будет автоколебательным. В этих случаях путем введения линейных корректирующих устройств можно добиваться приемлемых значений параметров  $(x_m, w)$  автоколебаний.

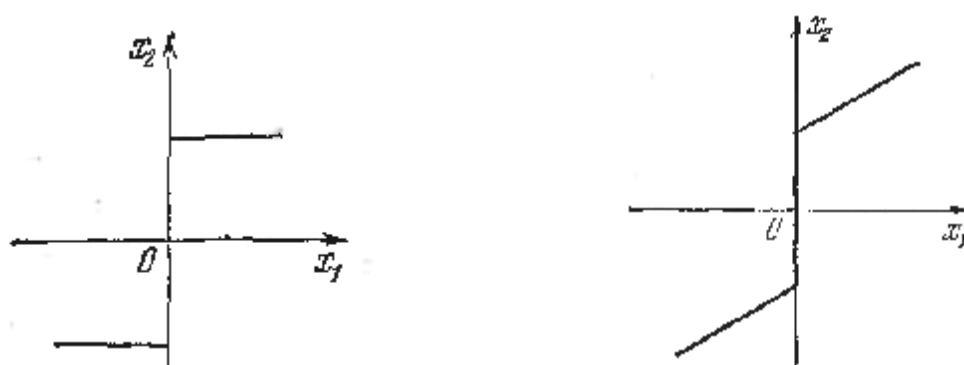


Рисунок 17.2 Нелинейности с неограниченным коэффициентом гармонической линеаризации

Здесь мы будем рассматривать точность и качество процессов *около устойчивого равновесного состояния в нулевой точке*.

Пусть схема системы имеет вид, изображенный на рис. 17.3.

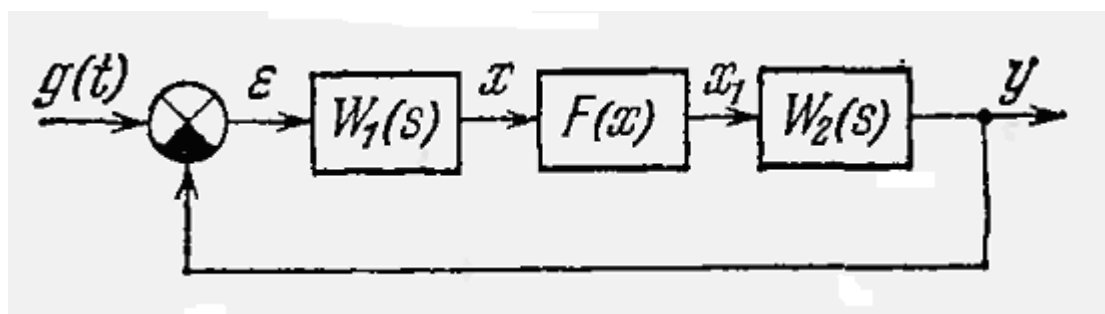


Рисунок 17.3. Структура нелинейной системы

Положим, что линейное корректирующее устройство любого типа вводится в одну из линейных частей, т. е. в блок  $W_1(p)$  или  $W_2(p)$ , не

охватывая нелинейного звена  $F(x)$ . Формулу гармонической линеаризации (17.1) будем записывать

$$q(x_m) = kq_0(x_m) \quad (17.3)$$

где  $k$  - коэффициент усиления (его определение для различных нелинейностей показано на рис.). Выражение  $q_0(x_m)$  получают для каждой нелинейности используя метод гармонической линеаризации в виде

$$q_0(x_m) = \frac{1}{k} q(x_m)$$

Указанный в формуле (17.3) коэффициент  $k$  будем относить к передаточной функции линейной части системы. Так, для схемы, приведенной выше передаточную функцию такой **приведенной линейной части** будем записывать в виде

$$W_{пл}(p) = kW_{л}(p) = kW_1(p)W_2(p) \quad (17.4)$$

где  $k$  - коэффициент, выделенный из нелинейности согласно (17.3).

Соответственно в случае релейной характеристики (трехпозиционное реле) в качестве величины  $k$  примем значение  $q_{\max}$ , т.е.

$$k = \frac{2c}{pb} \quad (17.5)$$

В этом случае, получим

$$q_0(x_m) = \frac{2b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (17.6)$$

Величину  $q_0(x_m)$  будем называть **нормированным коэффициентом гармонической линеаризации**. Тогда синтез корректирующего устройства можно производить следующим образом.

1. Строится логарифмическая амплитудная частотная характеристика первоначально заданной приведенной линейной части системы:

$$W_{пл}(p) = kW_{л}(p) = kW_1(p)W_2(p),$$

где  $k$  - коэффициент усиления, перенесенный из нелинейности.

2. Формируется желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика линейной части  $W_{ж}(p)$  в соответствии с требованиями точности и качества процессов, как это изложено в теории линейных систем.

3. Выполняется синтез линейного корректирующего устройства также методом линейной теории.

4. Строится логарифмическая фазовая частотная характеристика полученной скорректированной линейной части системы.

В дополнение ко всем этим операциям, выполняемым по линейной теории, добавляется еще один пункт, учитывающий нелинейность  $F(x)$  в нормированном виде.

5. Для данной нелинейности с использованием нормированного коэффициента  $q_0(x_m)$  строится «запретная» зона, соответствующая желаемому показателю колебательности  $M$ . Внутри этой зоны не должна заходить фазовая частотная характеристика скорректированной линейной части системы. Та кривая  $M = \text{const}$ , которой касается полученная фазовая характеристика, определяет значение показателя колебательности данной скорректированной системы. Если необходимо его уменьшить, то нужно несколько изменить параметры полученного выше линейного корректирующего устройства, следя за тем, чтобы не допускать существенного искажения желаемых свойств логарифмической амплитудной частотной характеристики приведенной линейной части, положенных первоначально в основу расчета.

Этот пятый пункт процедуры синтеза в совокупности с предыдущими обеспечивает нужные качества процессов в замкнутой нелинейной системе в целом. Следовательно, прежде чем приступить к синтезу линейного корректирующего устройства в нелинейной системе, необходимо научиться строить запретную зону по показателю колебательности при заданной нелинейности. Такое построение может производиться методом гармонической линеаризации, поскольку речь идет о колебательных переходных процессах.

Рассмотрим методику этого построения. Ограничиваясь рассмотрением однозначных нелинейностей (17.1) с ограниченными значениями коэффициента гармонической линейризации (17.2) и используя его нормирование (17.3), получим следующее выражение для передаточной функции разомкнутой цепи гармонически линейризованной системы:

$$W(p, x_m) = W_{\text{Л}}(p)kq_0(x_m) = q_0(x_m)W_{\text{ПЛ}}(p).$$

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$W_3(p, x_m) = \frac{W(p, x_m)}{1 + W(p, x_m)} = \frac{q_0(x_m)W_{\text{ПЛ}}(p)}{1 + q_0(x_m)W_{\text{ПЛ}}(p)}.$$

Выделим вещественные и мнимые части после замены  $p = jw$ , обозначив их следующим образом:

$$W(jw) = P(w) + jQ(w).$$

Тогда для показателя колебательности  $M = |W_3(jw)|$  имеем выражение

$$M = \frac{q_0 \sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{(1 + q_0 P)^2 + (q_0 Q)^2}}$$

Отсюда после преобразования получаем уравнение линий равных значений  $M$  на комплексной плоскости  $(P, Q)$  в виде

$$(P - P_0)^2 + Q^2 = R^2, \quad (17.7)$$

где

$$P_0 = -\frac{M^2}{q_0(M^2 - 1)}, \quad R = -\frac{M}{q_0(M^2 - 1)} \quad (17.8)$$

При определенном значении  $q_0$  линии  $M = \text{const}$  получают вид окружностей. Но согласно (17.2) и (17.3) величина  $q_0$  может принимать любое значение в интервале

$$0 \leq q(x_m) \leq q_{0m} \quad \text{или} \quad q_{0н} \leq q(x_m) \leq q_{0m} \quad (17.9)$$

где числа  $q_{0н}$  и  $q_{0m}$  получают свои определенные значения для каждой конкретной нелинейности. В соответствии с этим, согласно (17.8),

координата центра окружности  $P_0$  и радиус  $R$  будут тоже меняться в определенных для каждой нелинейности пределах. Следовательно, каждая линия  $M = \text{const}$  будет определяться как огибающая непрерывного множества постепенно меняющихся окружностей. При этом в случае первого неравенства (17.9) линия  $M = \text{const}$  будет незамкнутой (рис. 17.4,а), так как в начальной точке  $q_0 = 0$  из (17.8) имеем  $P_0 = \infty$ ,  $R = \infty$ . Показанные на рис.17.4, а величины  $P_1$  и  $R_1$ , согласно (17.8), определяются выражениями

$$P_1 = -\frac{M^2}{q_{0m}(M^2 - 1)}, \quad R_1 = -\frac{M}{q_{0m}(M^2 - 1)} \quad (17.10)$$

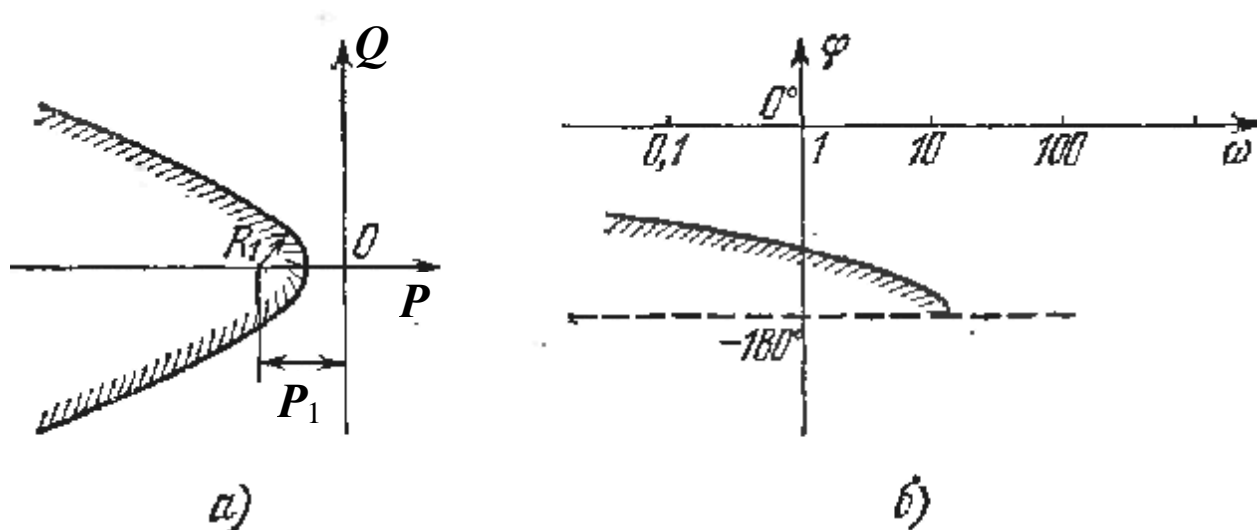


Рисунок 17.4. Построение незамкнутых запретных зон

В случае второго неравенства (17.9) линия  $M = \text{const}$  будет замкнутой (рис.17.5,а), причем

$$P_2 = -\frac{M^2}{q_{0H}(M^2 - 1)}, \quad R_2 = -\frac{M}{q_{0H}(M^2 - 1)} \quad (17.11)$$

а значения  $P_1$  и  $R_1$  прежние.



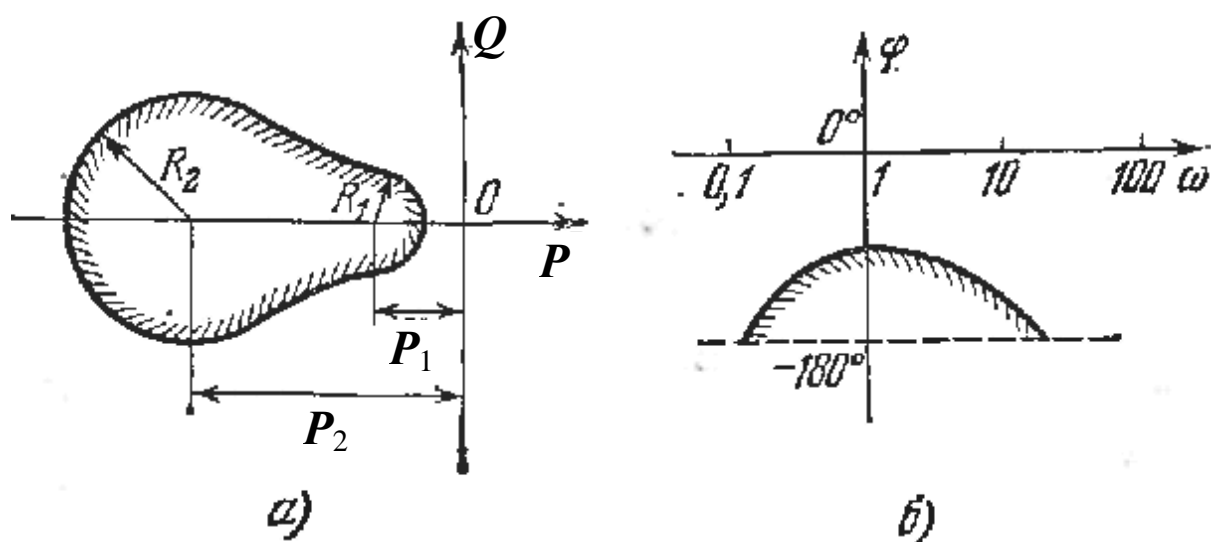


Рисунок 17.5. Построение замкнутых запретных зон

Поскольку синтез линейного корректирующего устройства проводится по логарифмическим частотным характеристикам, то изображенные на рис. 17.4,а и рис. 17.5,а линии  $M = \text{const}$  (запретные зоны) должны быть перенесены в систему координат логарифмических характеристик (методика приведена в конце данного подраздела (рис.17.9-рис.17.11)). Это показано соответственно на рис. 17.4,б и рис. 17.5,б.

Взяв разные постоянные значения  $M$  ( $M_1, M_2, M_3, \dots$ ), получим серию кривых  $M = \text{const}$  (рис. 17.6).

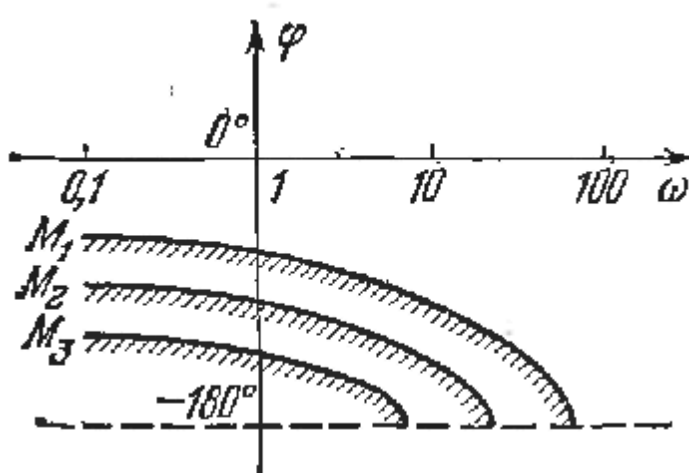


Рисунок 17.6.

Логарифмические частотные характеристики скорректированной по изложенной выше процедуре системы должны быть такими, чтобы фазовая

характеристика линейной части  $j(\omega)$  не заходила внутрь запретной зоны, определяемой допустимым значением показателя колебательности  $M$  (рис.17.7).

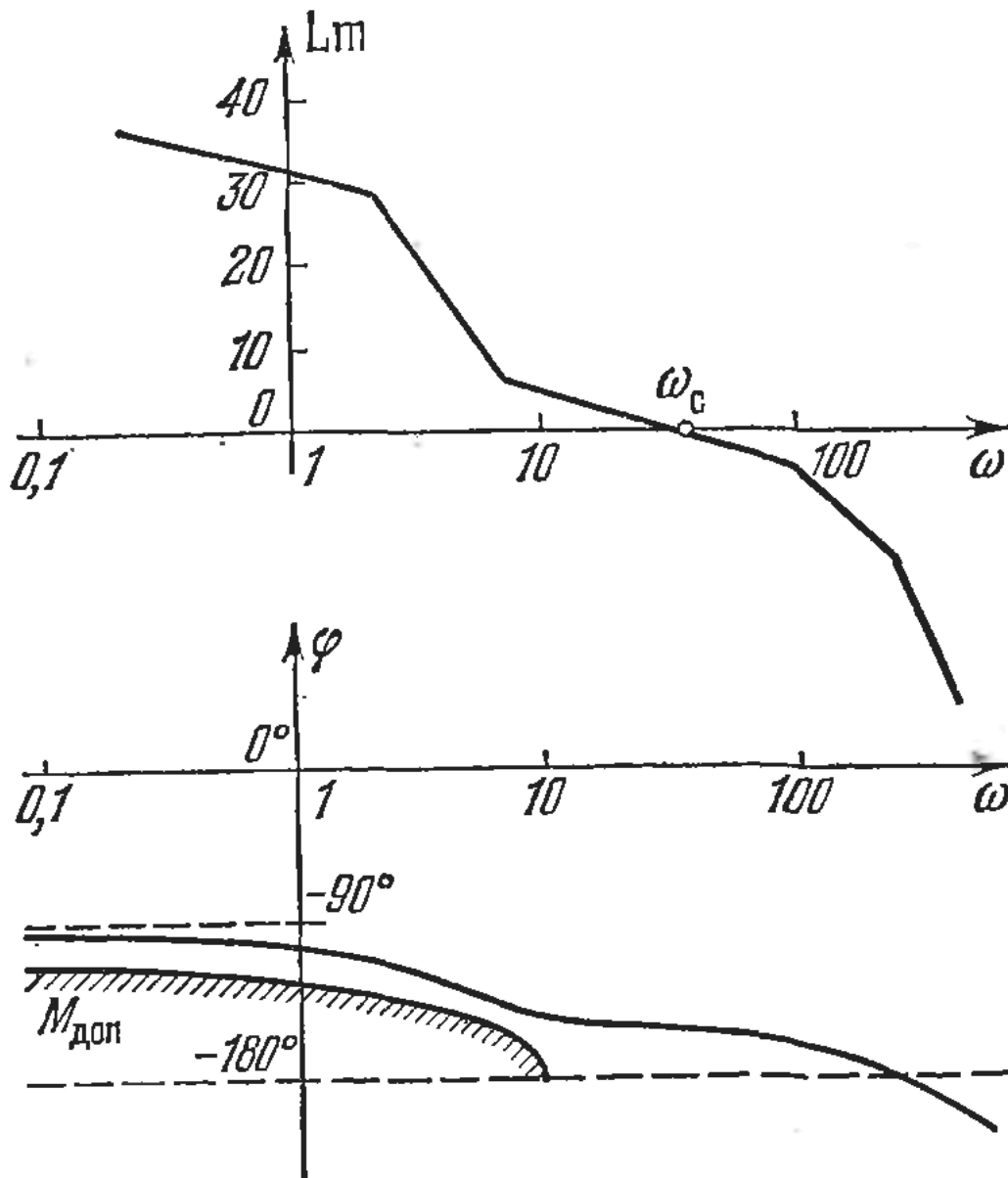


Рисунок 17.7. ЛАЧХ и ЛФЧХ скорректированной САУ

Если расчет корректирующего устройства ведется по амплитудно-фазовым частотным характеристикам, то на поле координат  $(P, Q)$  получается серия кривых  $M = \text{const}$  (рис.17.8,а), причем амплитудно-фазовая частотная характеристика приведенной линейной части скорректированной системы не должна заходить внутрь запретной зоны, определяемой здесь допустимым значением показателя колебательности  $M$  (рис.17.8, б).

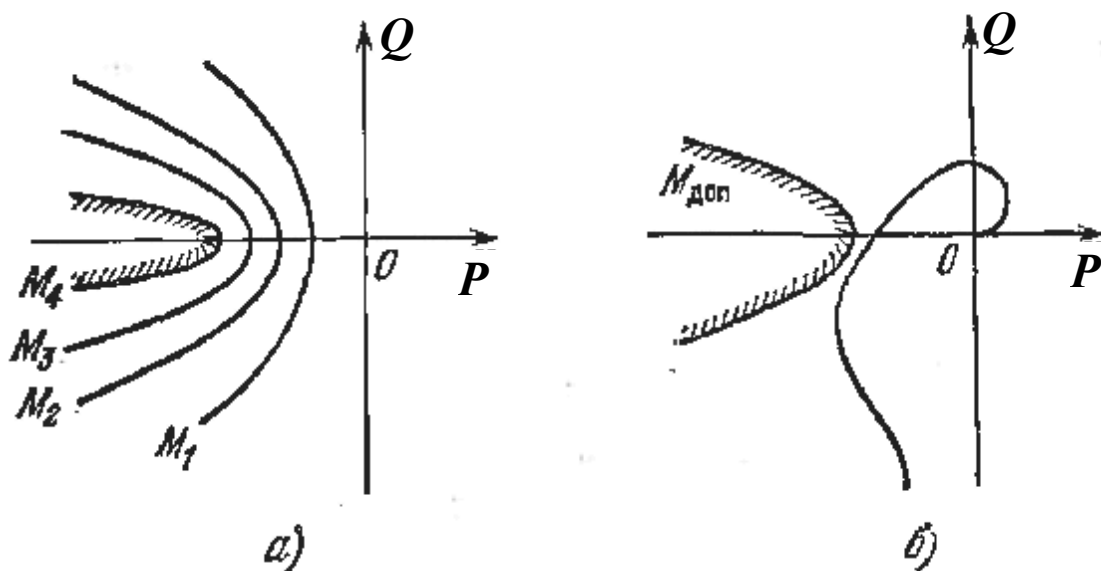


Рисунок 17.8

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в устойчивой системе показатель колебательности был не больше заданного, является нахождение амплитудно-фазовой характеристики АФЧХ разомкнутой системы вне запретной области (рис.17.9), представляющей собой окружность. Радиус этой окружности равен использоваться

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}$$

а смещение центра влево относительно начала координат

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

Для оценки запаса устойчивости замкнутой системы по этой методике в непрерывном случае должна использоваться частотная передаточная функция разомкнутой системы  $W(j\omega)$ .

Условие того, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не заходила в запретную область

$$j_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{C}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} = \arctg \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \arcsin \frac{1}{M}$$

По полученному выражению для  $j_{\max}$  можно определить требуемый запас по фазе в функции модуля, выраженного в децибелах, для различных значений показателя колебательности  $M$ . Эти зависимости построены на рис. 17.10.

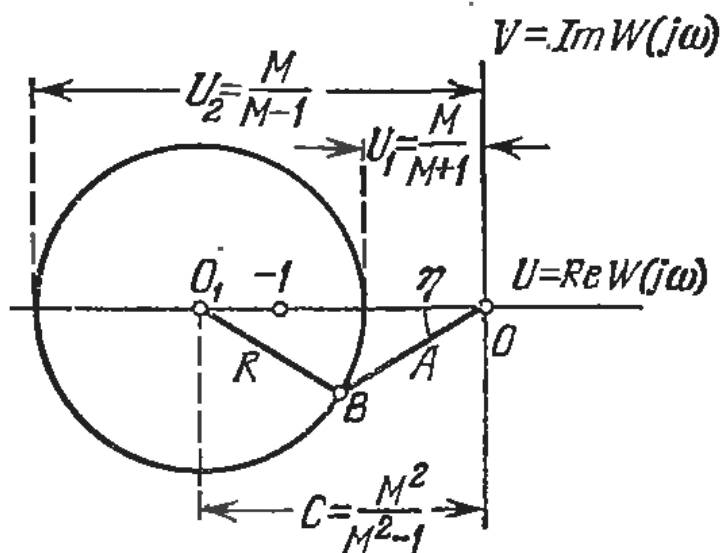


Рисунок 17.9. Запретная область для АФЧХ разомкнутой системы.

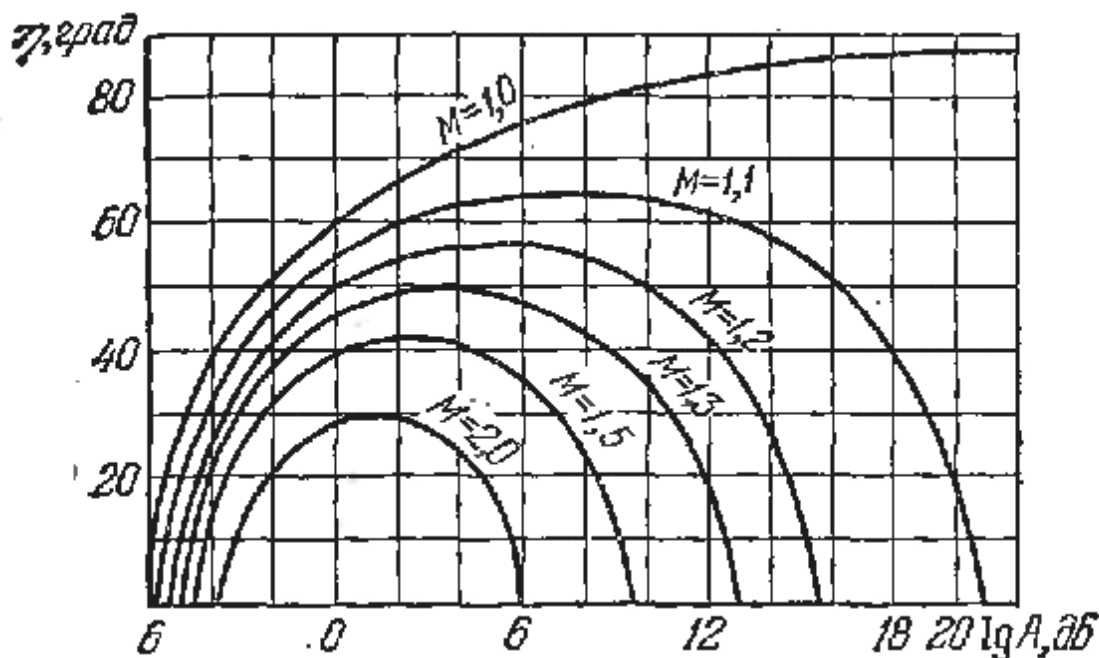


Рисунок 17.10. Зависимость требуемого запаса по фазе от модуля в децибелах.

Использование кривых (рис.17.10) может заключаться в том, что для построенной ЛАЧХ разомкнутой системы по точкам находится и строится требуемый запас по фазе (рис.17.11), который откладывается от оси нуля децибел вниз. Построение ведется в пределах изменения модуля

$$20\lg \frac{M}{M+1} \leq 20\lg A \leq 20\lg \frac{M}{M-1}$$

и образует запретную область для логарифмической фазовой характеристики  $j(\omega)$ . Требуемый запас устойчивости будет обеспечен, если ЛФЧХ не заходит в запретную область, определяемую заданным показателем колебательности (рис.17.11).

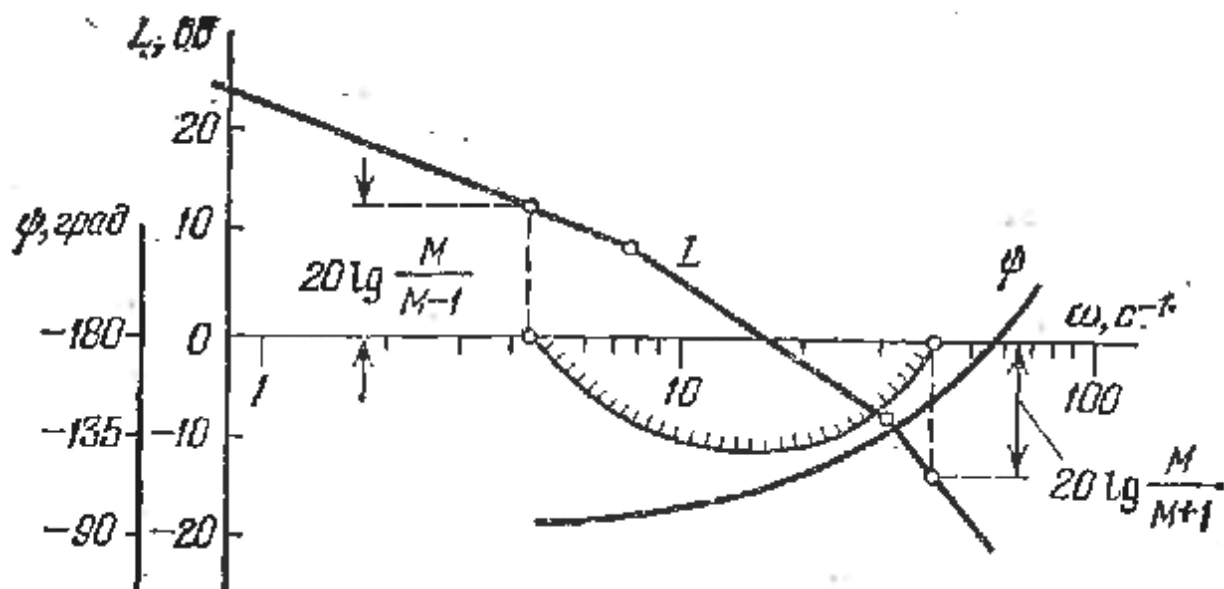


Рисунок 17.11. Запретная область для ЛФЧХ

## 17.2. Нелинейные корректирующие устройства

Все корректирующие устройства, применяемые в системах автоматического управления, можно разделить на линейные и нелинейные. Линейные корректирующие устройства имеют ряд достоинств и широко применяются для улучшения динамических свойств как линейных, так и нелинейных автоматических систем. Вместе с тем линейным корректирующим устройствам присущи и недостатки. К ним, в частности,

следует отнести жесткую зависимость между амплитудными и фазовыми частотными характеристиками. Так, например, дифференцирующие фазоопережающие цепи создают положительный сдвиг, но одновременно вносят ослабление в области низких частот, т. е. в области спектра полезного сигнала. Этим объясняется низкая помехоустойчивость дифференцирующих цепей. Интегрирующие корректирующие контуры подавляют высокие частоты, но при этом создают запаздывание по фазе, что приводит к ухудшению переходных процессов и т. д. В то же время было бы желательно, чтобы корректирующие устройства создавали опережение по фазе без изменения амплитудной характеристики, подавляли высокие частоты без изменения фазовой характеристики, обеспечивали опережение по фазе и одновременно ослабляли высокие частоты. Эти задачи могут быть решены с помощью нелинейных корректирующих устройств.

Кроме указанных недостатков, линейные корректирующие устройства имеют ограниченные возможности в получении высоких показателей качества в автоматических системах. Например, если в линейной системе для повышения быстродействия (уменьшения времени переходного процесса  $t_n$ , рис.) увеличивать коэффициент усиления разомкнутой системы  $k_p$  то это приводит к уменьшению запаса устойчивости, увеличению колебательности переходного процесса. Для иллюстрации сказанного на рис.17.12 приведены кривые **1** и **2** переходных процессов линейной САУ при  $k_{p1}$  и  $k_{p2}$  соответственно  $k_{p2} > k_{p1}$ . Применение линейных корректирующих устройств позволяет повысить в некоторых пределах значение коэффициента усиления системы, однако это не снимает указанного противоречия и необходимости компромиссного решения при выборе коэффициента усиления системы и настройке корректирующего устройства.

Указанное противоречие можно устранить применением нелинейных корректирующих устройств, изменяющих свое влияние на систему в зависимости от величины отклонения от установившегося режима (ошибки системы).

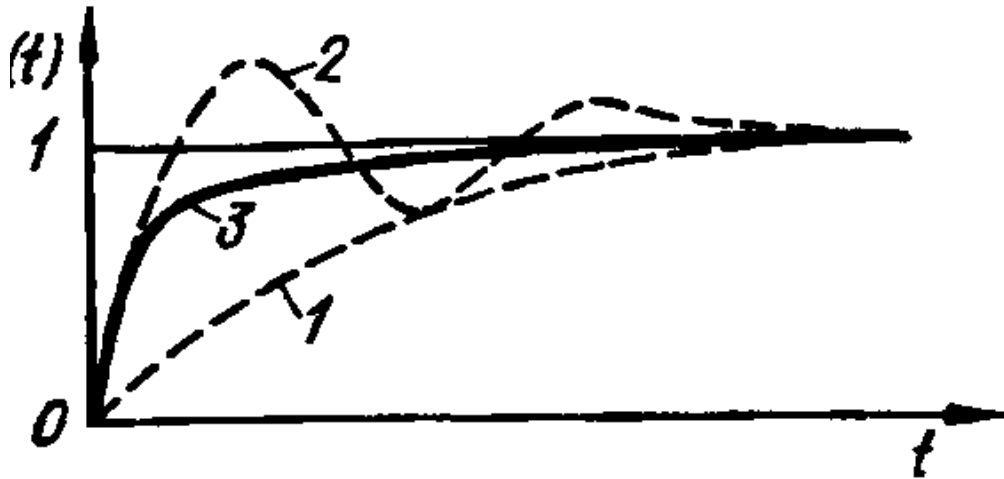


Рисунок 17.12. Переходные процессы САУ при линейной (1 и 2) и нелинейной коррекции

В результате применения такой нелинейной коррекции может быть получен желаемый процесс, изображенный, например, на рис.17.12 кривой 3. Как видно из рисунка, он сочетает полезные свойства процессов 1 и 2: начальная часть процесса 3 совпадает с процессом 2 линейной системы, благодаря чему обеспечивается большое быстродействие системы, а окончание процесса 3 подобно окончанию процесса 1, т. е. является монотонным. Такой процесс, может быть, достигнут, например, изменением коэффициента усиления разомкнутой системы,  $k_p$  в зависимости от величины ошибки  $e$ . При больших  $e$  значение  $k_p$  должно быть большим, чтобы обеспечить быстрое уменьшение ошибки (начальный участок кривой 3), а по мере уменьшения  $e$  значение  $k_p$  должно уменьшаться для завершения переходного процесса без перерегулирования. Такое изменение  $k_p$  может быть реализовано, например, с помощью простейшего последовательного нелинейного корректирующего устройства (рис.17.13).

При больших значениях напряжения ошибки  $u_e$  нелинейное сопротивление  $RI$  мало и поэтому коэффициент усиления цепи  $k_1 = R_2 / (R_2 + R_1)$  большой. По мере уменьшения  $u_e$  нелинейное сопротивление  $RI$  увеличивается, а коэффициент усиления  $k_1$  уменьшается.

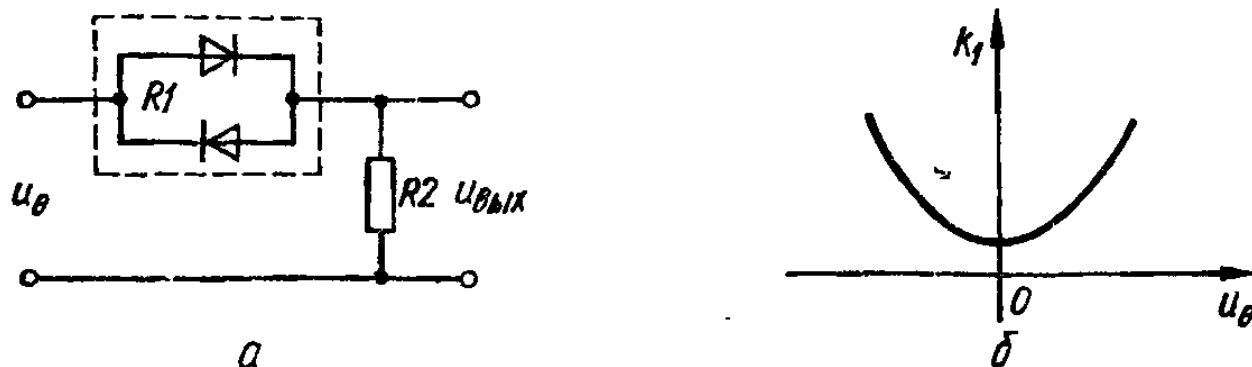


Рисунок 17.13. Последовательное нелинейное корректирующее устройство (а) и его характеристика (б)

Примерный график зависимости  $k_I$  от  $u_в$  изображен на рис.17.13,б. По такому же графику будет изменяться и коэффициент усиления системы  $k_p$ . Недостаток коррекции с помощью рассматриваемого корректирующего устройства состоит в том, что оно изменяет лишь  $k_p$  системы, не компенсируя при этом вредное влияние инерционности ее элементов. Из-за этого получаются малые значения  $k_p$  в установившихся динамических режимах, а, следовательно, большие динамические ошибки системы.

### 17.3. Псевдолинейные корректирующие устройства

*Псевдолинейными корректирующими устройствами* называются такие нелинейные корректирующие устройства, у которых эквивалентные передаточные функции (а значит, и коэффициенты гармонической линеаризации), **зависят только от частоты** и не зависят от амплитуды. Однако эта зависимость от частоты — нелинейная в том смысле, что характер ее отличается от частотной зависимости линейных передаточных функций и может быть произвольным, т. е. отсутствует жесткая связь между амплитудными и фазовыми характеристиками, которая имеется у линейных звеньев. Это важное достоинство псевдолинейных устройств позволяет корректировать фазовые соотношения независимо от амплитудных и наоборот, что невозможно сделать линейными средствами. Возможность формирования амплитудной и фазовой характеристик псевдолинейных



корректирующих устройств независимо друг от друга открывает широкие возможности изменения частотных характеристик САУ в желаемом направлении.

Псевдолинейные корректирующие устройства выполняются двух- и трехканальными. Рассмотрим двухканальное псевдолинейное корректирующее устройство (рис.17.14).

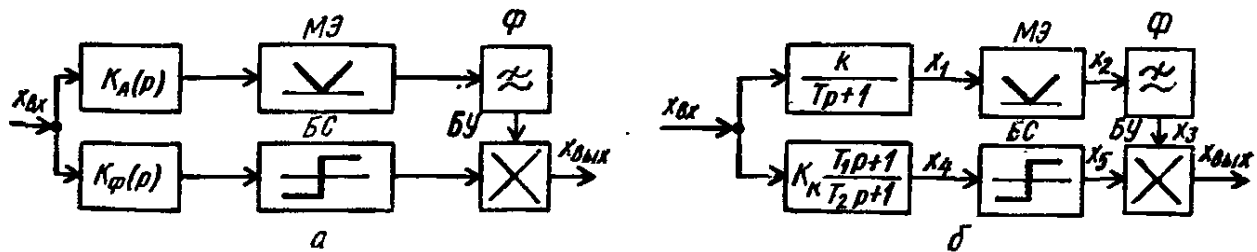


Рисунок 17.14. Структурные схемы двухканальных псевдолинейных корректирующих устройств

а – общая схема; б – схема устройства, создающего опережение по фазе и подавляющего высокие частоты

Входной сигнал разветвляется и проходит по двум каналам. Один из каналов (верхний) служит для формирования амплитудной характеристики и называется амплитудным, второй - фазовый канал формирует фазовую характеристику устройства. Амплитудный канал состоит из линейного элемента с передаточной функцией  $K_A(p)$ , модульного элемента  $MЭ$  (например, двухполупериодного выпрямителя) и фильтра  $\Phi$ . Амплитудная характеристика линейного элемента определяет амплитудную характеристику всего корректирующего устройства. Модульный элемент дает на выходе величину, пропорциональную амплитуде колебания на его входе и исключает прохождение информации о фазе входного сигнала  $x_{вх}$ . Фильтр служит для выделения постоянной составляющей выпрямленного напряжения. В фазовый канал входят линейный элемент с передаточной функцией  $K_\Phi(p)$  и блок сигнатуры (блок знака)  $БС$ . Фазовая характеристика линейного элемента определяет фазовую характеристику всего корректирующего устройства. Блок сигнатуры исключает прохождение

информации об амплитуде через фазовый канал и представляет собой релейное устройство с характеристикой, близкой к идеальной. При изменении знака сигнала на входе изменяется знак выходного сигнала блока **БС**, а величина его принимает лишь два фиксированных значения  $\pm 1$ , независимо от значения амплитуды входного сигнала. Выходная величина  $x_{вых}$  корректирующего устройства получается в результате перемножения выходных величин амплитудного и фазового каналов в блоке умножения **БУ**.

Выбирая линейные элементы с соответствующими передаточными функциями  $K_A(p)$  и  $K_\Phi(p)$ , можно реализовать псевдолинейное корректирующее устройство с желаемыми, независимыми друг от друга амплитудой и фазовой частотными характеристиками.

Для примера рассмотрим псевдолинейное корректирующее устройство, создающее опережение по фазе и ослабляющее высокие частоты (рис.17.14,б). Для реализации такого корректирующего устройства в амплитудный канал включается элемент, ослабляющий высокие частоты, например апериодическое звено, имеющее передаточную функцию

$$K_A(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (17.12)$$

а в фазовый канал - элемент, создающий положительный сдвиг по фазе, например дифференцирующая фазоопережающая цепь с передаточной функцией

$$K_\Phi(p) = \frac{k_\Phi(T_1p + 1)}{T_2p + 1}, \quad k_\Phi = \frac{T_2}{T_1} < 1. \quad (17.13)$$

При  $x_{вх}(t) = X_m \sin wt$  (рис.17.15,а) напряжение  $x_1$  на выходе апериодического звена является также синусоидальной функцией (рис. 17.15,б)

$$x_1(t) = X_{m1} \sin[wt + j_A(w)], \quad (17.14)$$

где

$$X_{m1} = \frac{kX_m}{\sqrt{1 + T^2w^2}}, \quad j_A(w) = -\text{arctg } wT. \quad (17.15)$$

Выпрямленное напряжение  $x_2$  (рис. 17.15, в) с выхода модульного элемента проходит через фильтр  $\Phi$ , на выходе которого выделяется его постоянная составляющая  $x_3$  (рис.17.15,г). Напряжение  $x_3$  пропорционально амплитуде  $X_{m1}$ :

$$x_3 = k_M X_{m1} = \frac{k_M k X_m}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \quad (17.16)$$

где при применении в качестве элемента взятия модуля двухполупериодного выпрямителя  $k_M = 2/p$ .

Напряжение  $x_4$  (рис.17.15,д) на выходе дифференцирующей фазоопережающей цепи в фазовом канале

$$x_4(t) = X_{m4} \sin[\omega t + j_\Phi(\omega)], \quad (17.17)$$

где

$$X_{m4} = \frac{k_\Phi X_m \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}, \quad j_\Phi(\omega) = \text{arctg } \omega T_1 - \text{arctg } \omega T_2. \quad (17.18)$$

т.е. напряжение  $x_4$  сдвинуто по фазе в сторону опережения относительно входного на угол  $j_\Phi(\omega)$ . Это напряжение, поступая на идеальный релейный элемент, формирует на его выходе переключающее напряжение  $x_5$  вида прямоугольной волны (рис. 17.15,е). Амплитуда напряжения  $x_5$  не зависит от  $X_{m4}$  (т. е. не пропускается информация об амплитуде) и равна единице, а фаза (моменты переключения) сдвинута по сравнению с напряжением  $x_{вх}$  в сторону опережения на угол  $j_\Phi(\omega)$ . В результате перемножения сигналов  $x_3$  и  $x_5$  получается выходное напряжение корректирующего устройства  $x_{вых}$  вида прямоугольной волны (рис. 17.15, ж), амплитуда импульсов которого равна значению напряжения  $x_3$  на выходе амплитудного канала (17.16), а моменты переключения (фаза) соответствует моментам переключения напряжения  $x_5$  на выходе фазового канала.

Зная форму выходного сигнала  $x_{вых}$  корректирующего устройства, можно определить его эквивалентную АФХ. Прямоугольную волну  $x_{вых}$

можно рассматривать как выходной сигнал идеального релейного элемента с  $B = x_3$ , лишь сдвинутый по фазе на угол  $j_\phi(\omega)$  в сторону опережения. Поэтому модуль эквивалентной АФХ псевдолинейного корректирующего устройства (амплитудная характеристика) равна коэффициенту гармонической линеаризации  $q(X_m)$  этого релейного элемента, а, следовательно, определяется выражением

$$A(\omega) = \frac{4x_3}{pX_m} = \frac{4k_m kX_m}{pX_m \sqrt{1+T^2\omega^2}} = \frac{8k}{p^2 \sqrt{1+T^2\omega^2}} = \frac{k_\Delta}{\sqrt{1+T^2\omega^2}},$$

где  $k_\Delta = \frac{8k}{p^2}$ .

Фаза первой гармоники выходного напряжения корректирующего устройства  $x_{вых1}$  (рис.17.15,ж) равна фазе прямоугольной волны  $x_{вых}$ , поэтому аргумент эквивалентной АФХ (фазовая характеристика) корректирующего устройства определяется формулой

$$j(\omega) = j_\phi(\omega) = \text{arctg } \omega T_1 - \text{arctg } \omega T_2 = \text{arctg} \frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + T_1 T_2 \omega^2}.$$

Таким образом, эквивалентная амплитудная характеристика практически совпадает с амплитудной характеристикой линейного элемента  $K_A(p)$ , а эквивалентная фазовая характеристика — с фазовой характеристикой линейного элемента  $K_\phi(p)$ . Обе характеристики не зависят от амплитуды и являются лишь функциями частоты входного колебания.

Полученные выражения для эквивалентных амплитудной и фазовой характеристик являются приближенными. При их выводе не учитывалось, что напряжение на выходе фильтра  $\Phi$  не является строго постоянным. Из-за трудности создания фильтра  $\Phi$ , выделяющего постоянную составляющую выпрямленного напряжения на всех частотах, на практике его часто из схемы исключают. В этих случаях амплитудный канал оказывает некоторое влияние на фазовую характеристику корректирующего устройства.

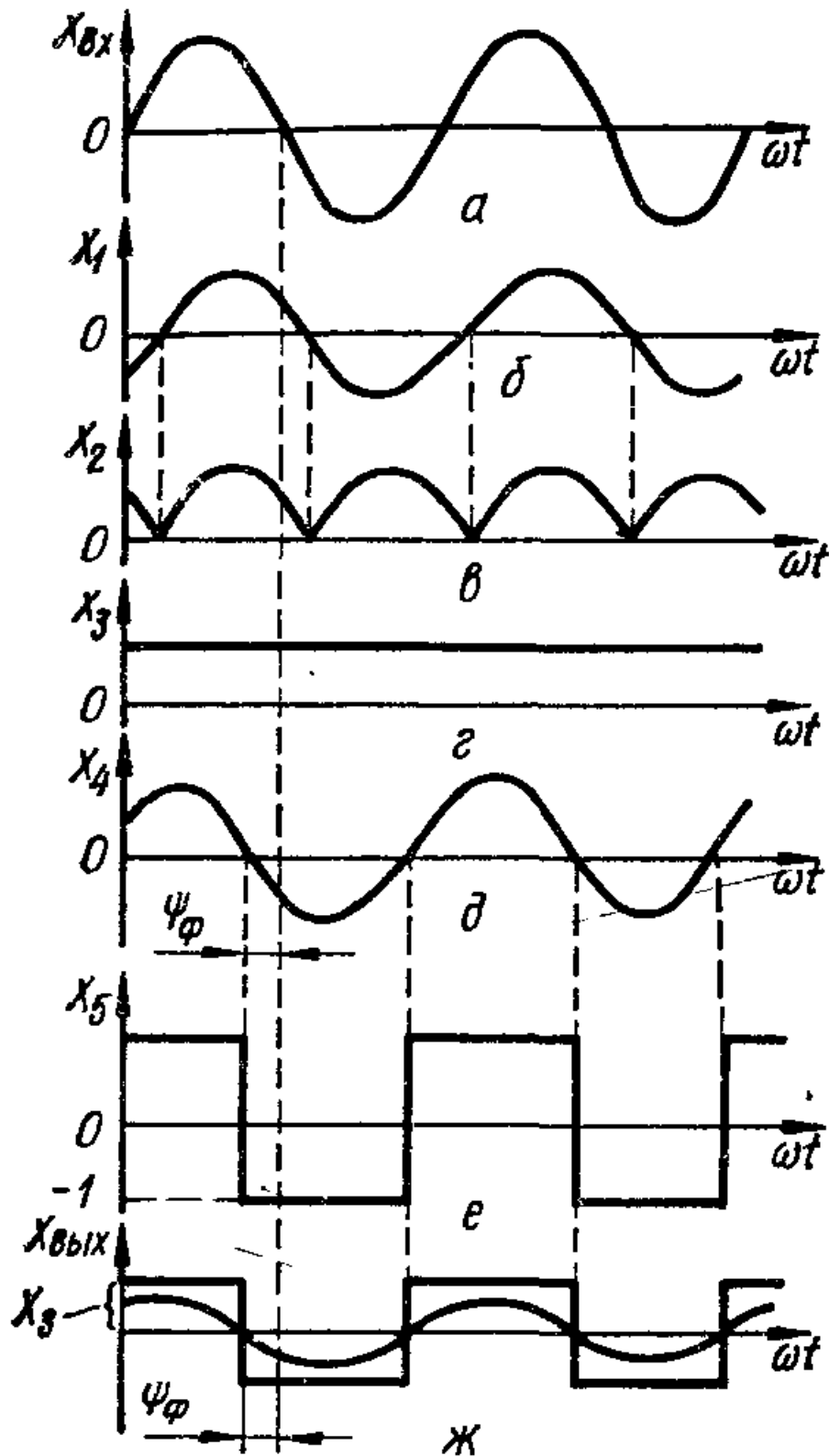


Рисунок 17.15. Формы сигналов псевдолинейного корректирующего устройства

Приведенная на рис.17.14 структурная схема псевдолинейного корректирующего устройства является довольно общей. Если принять

$K_A(p)=k$ , а  $K_\phi(p)$  оставить в виде (17.13), то корректирующее устройство будет создавать опережение по фазе, не изменяя амплитудной характеристики системы. Для того чтобы получить ослабление высоких частот, не изменяя фазовой характеристики, необходимо в амплитудный канал включить апериодическое, а в фазовый канал — пропорциональное звено.

Анализ системы при использовании эквивалентных амплитудных и фазовых характеристик псевдолинейных корректирующих устройств аналогичен анализу линейных систем.

Таким образом, с помощью нелинейных корректирующих устройств возможно удовлетворение повышенным требованиям к показателям качества САУ. Нелинейную коррекцию можно рассматривать как более общее средство коррекции, чем линейную коррекцию, которую можно отнести к частному случаю нелинейной коррекции. Построение оптимальных по быстродействию систем возможно только благодаря применению нелинейных устройств управления. С помощью нелинейных корректирующих устройств решается задача компенсации вредных естественных нелинейностей. Вместе с тем следует отметить, что нелинейная коррекция является более специализированной (менее универсальной) по отношению к внешним воздействиям. Нелинейная коррекция, выбранная для определенного класса внешних воздействий, может оказаться малоэффективной или даже вредной при других воздействиях (режимах работы системы). Поэтому при широком диапазоне внешних воздействий может оказаться лучшей линейная коррекция. Следует отметить, что общей методики синтеза нелинейных корректирующих устройств в настоящее время нет. Приходится прибегать к применению частных приемов и схем нелинейных корректирующих устройств.

## 18. МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ НЕГАТИВНОГО ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 18.1. Краткая характеристика методов.

Наличие существенно нелинейных элементов САУ, не предусмотренных структурой, может вызвать ухудшение качества управления, а в ряде случаев делает управление вообще невозможным. Это проявляется в росте погрешности управления, увеличении времени протекания переходного процесса и его колебательности, потере системой устойчивости в большом, возможности возникновения автоколебательных режимов и др. В связи с этим стремятся уменьшить вредное влияние нелинейных элементов следующим образом:

- 1) улучшая конструкции функционально-необходимых элементов;
- 2) устраняя влияния нелинейного элемента путем изменения линейной части системы за счет:
  - изменения параметров и структуры линейной части системы;
  - введения дополнительных линейных обратных связей (охват нелинейных элементов линейными обратными связями);
- 3) компенсируя влияние нелинейности путем:
  - применения специальных компенсирующих нелинейных элементов, обеспечивающих линейность системы;
  - применения компенсирующих формирующих устройств, осуществляющих введение дополнительного (компенсирующего) сигнала управления по отклонению;
  - используя вибрационную линеаризацию нелинейности.

Применительно к конкретной динамической системе можно применять наиболее рациональные из указанных методов или их комбинации.

## **18.2. Улучшение конструкции функционально необходимых элементов.**

Тщательная конструктивная обработка, высокая точность изготовления функционально необходимых элементов позволяют приблизить характеристики этих элементов к линейным. Повышение запаса мощности дает возможность увеличить линейный диапазон их работы без ограничения. Увеличение коэффициента преобразования системы уменьшает влияние зоны нечувствительности. Усложнение конструкции редуктора за счет введения противолюфтовых шестерен и т. д. позволяет свести к минимуму влияние люфта. Однако такой путь устранения вредного влияния нелинейных элементов целесообразен до определенного предела, так как ведет к возрастанию стоимости изготовления устройств и их эксплуатации. Устранение в той или иной степени влияния сил сухого трения вызывает уменьшение зоны нечувствительности и статических ошибок. Вместе с тем уменьшение сил сухого трения, оказывающих стабилизирующее действие на систему, может вызвать автоколебания. Целесообразным выбором параметров системы можно добиться ослабления влияния различных нелинейностей на качество и устойчивость САУ.

## **18.3. Устранение вредного влияния нелинейного элемента за счет изменения параметров линейной части САУ.**

*Изменение параметров и структуры линейной части САУ.* С помощью соответствующего выбора параметров линейной части можно существенно ослабить или даже в некоторых случаях устранить влияние нелинейных элементов на устойчивость и качество переходных процессов САУ. Изменяя параметры линейной части, можно добиться, чтобы характеристики  $W_L(j\omega)$  и  $-\frac{1}{W_H(x_m)}$  не пересекались и условия



гармонического баланса (условия возникновения автоколебаний) не выполнялись (см. рис.18.1).

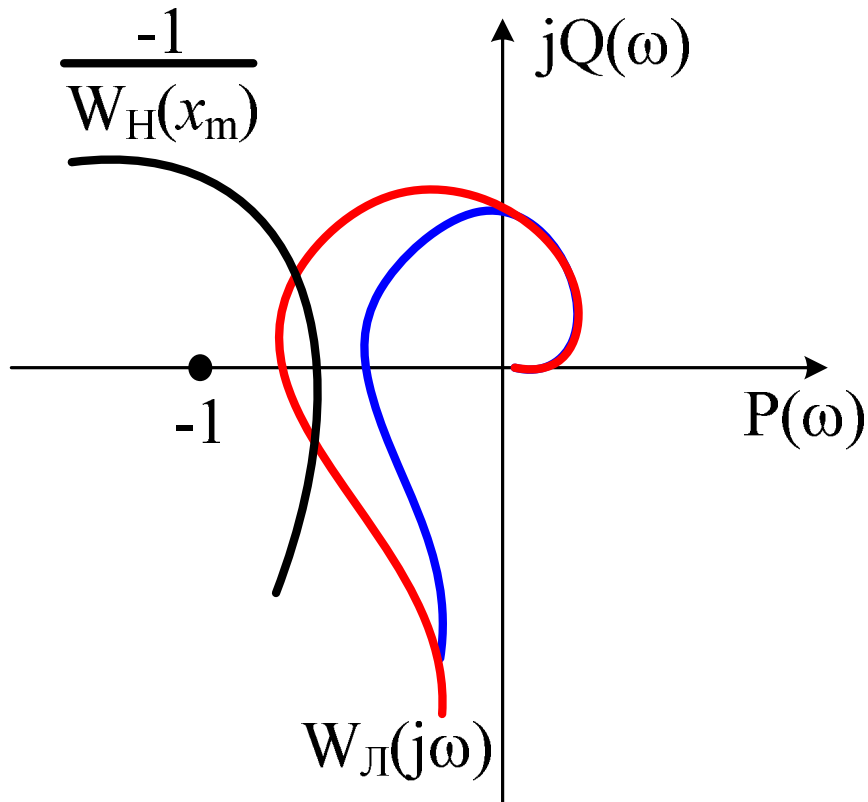


Рисунок 18.1. Изменение параметров линейной части

Подбором параметров линейной части можно изменить параметры возникающего автоколебательного режима ( $x_m$ ,  $\omega$ ) в нужном направлении.

**Введение дополнительных обратных связей.** Эффективный способ уменьшения влияния нелинейных элементов - применение обратных связей, охватывающих те или иные нелинейные элементы. Если элемент с  $W_1(j\omega)$ , имеющий нелинейность с эквивалентной АФЧХ  $W_H(x_{\text{нл}}) = q(x_{\text{нл}}) + jq_1(x_{\text{нл}})$  охвачен стабилизирующей обратной связью, то эквивалентная частотная характеристика определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega) \cdot W_H(x_m)}{1 + W_1(j\omega) \cdot W_H(x_m) \cdot W_{OC}(j\omega)}. \quad (18.1)$$

Можно так подобрать параметры стабилизирующей обратной связи  $W_{OC}(j\omega)$ , чтобы в рабочем диапазоне частот обеспечивалось соотношение

$$|W_1(j\omega) \cdot W_H(x_m) \cdot W_{OC}(j\omega)| \gg 1. \quad (18.2)$$

Тогда

$$W(j\omega) \approx \frac{1}{W_{OC}(j\omega)}$$

и характеристика системы не зависит от свойств нелинейного элемента и амплитуды действующих на систему сигналов. Данный способ достаточно экономичен, эффективен и широко применяется на практике.

#### 18.4. Компенсация влияния нелинейностей.

##### Метод коррекции, основанный на применении обратных нелинейностей.

Суть метода в том, что для компенсации влияния той или иной нелинейности в цепь системы включается статическое звено, имеющее характеристику, компенсирующую исходную. В результате суммарная характеристика линейна. Здесь возможны последовательная и параллельная коррекции.

На рис. 18.2 показано, как осуществляется компенсация характеристики нелинейного элемента

$W_H(p, x_{nm}, \omega) = \frac{y_H(p)}{x_H(p)} = q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/\omega$  путем параллельного

включения добавочного нелинейного элемента с характеристикой  $[1 - W_H(p, x_{nm}, \omega)]$ , выполняемого в виде модели.

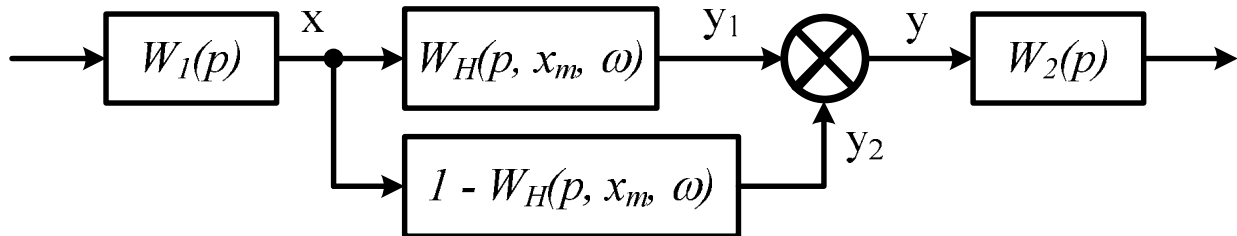
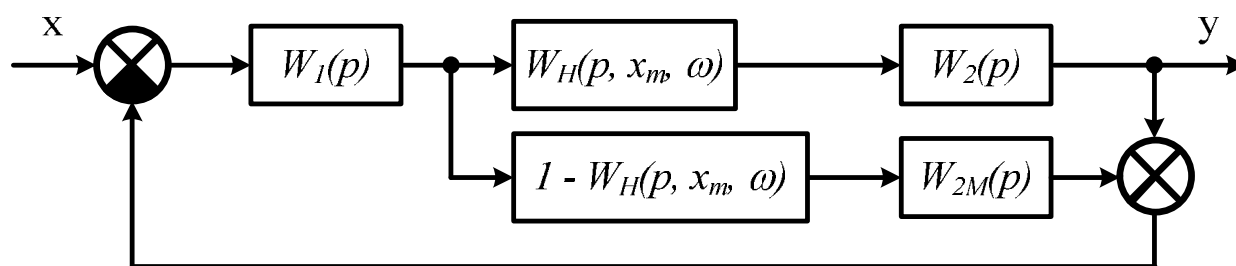


Рисунок 18.2.

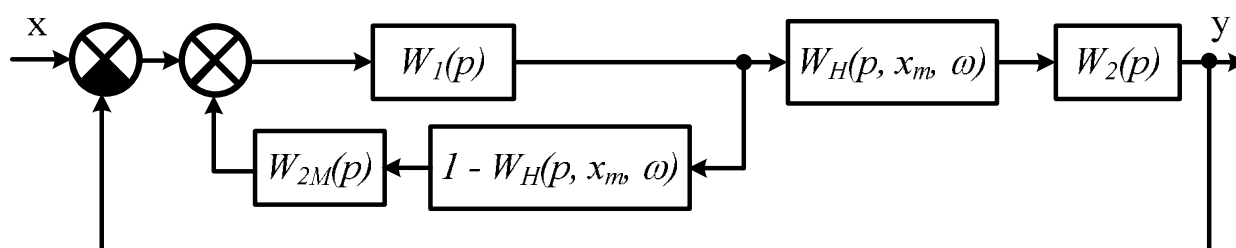
Таким образом, если  $x$  — синусоидальный сигнал, то сигналы  $y_1$  и  $y_2$  в сумме тоже должны давать синусоидальный сигнал  $y$ . Следовательно, эти

параллельно соединенные нелинейные элементы могут быть заменены линейным элементом. Однако полученное решение не может быть практически реализовано. Если, например, нелинейный элемент с  $W_H(p, x_{nm}, w)$  соответствует усилителю мощности с ограничением, то элемент с  $[1 - W_H(p, x_{nm}, w)]$  соответствует усилителю, который при большой мощности не имеет насыщения. Но в таком случае не нужен первый усилитель.

Реализуемой является схема (рис. 18.3,а), где устройства с  $W_M(x_{nm}) = 1 - W_H(p, x_{nm}, w)$  и  $W_{2M}(p)$  включаются в маломощный контур обратной связи. Элемент  $W_{2M}(p)$  - модель реального элемента основной  $W_2(p)$  с той же характеристикой. На рис. рис. 18.3,б представлена эквивалентная схема, соответствующая схеме, изображенной на рис. 18.3,а.



а)



б)

Рисунок 18.3

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_H(p, x_{nm}, w) + W_1(p) \cdot W_M(p, x_{nm}, w) \cdot W_{2M}(p) = 0$$

Выбирая модель с  $W_{2M}(p) = W_2(p)$ , а  $W_M(x_{nm}) = 1 - W_H(p, x_{nm}, w)$ , превращаем характеристическое уравнение в линейное:  $1 + W_1(p) \cdot W_2(p) = 0$ .

В результате указанной компенсации на уровне малой мощности устраняется влияние нелинейности в цепи обратной связи и в цепи измерения. На практике иногда необходимо выходную величину (на уровне большой мощности) определять грубо, но измерять значение обрабатываемого системой сигнала точно (например, за счет люфта антенна может покачиваться, но азимут измеряется точно благодаря компенсации на уровне малой мощности). Вместе с тем нелинейность вида  $[1 - W_H(p, x_{nm}, w)]$  не всегда можно реализовать. Кроме того, эффективность подобной компенсации во многом зависит от свойств линейной части системы, стабильности параметров линейной и нелинейной частей системы и места включения корректирующего элемента.

### Применение компенсирующих форсирующих устройств.

Принцип применения компенсирующих устройств иллюстрируется схемой, приведенной на рис.18.4.

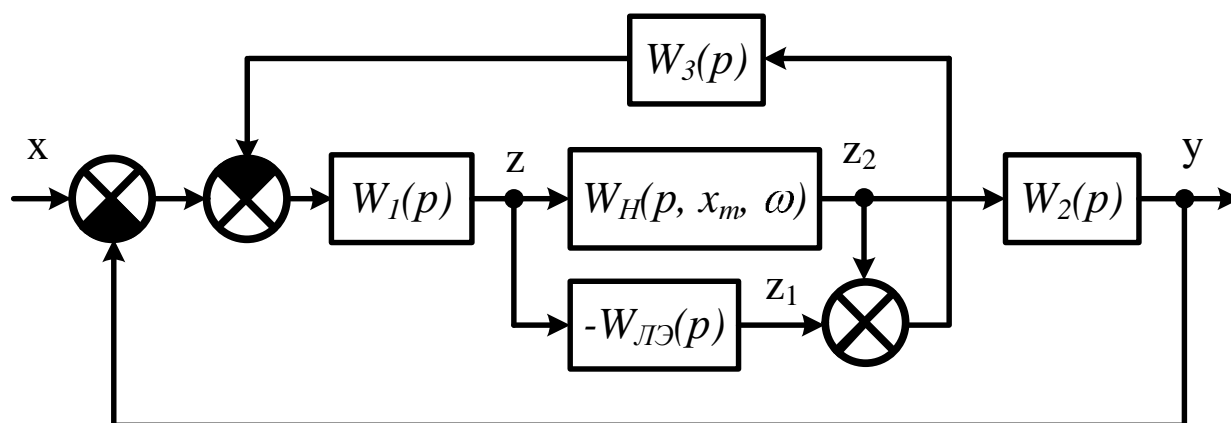


Рисунок 18.4. Применение компенсирующих устройств

Параллельно нелинейному элементу включается модель линейного элемента ( $-W_{ЛЭ}(p)$ ) с желаемой характеристикой. Сигналы нелинейного элемента и линейного элемента сравниваются и через форсирующий элемент

с  $W_3(p)$  подаются в прямую цепь. Если  $z_2 > z_1$ , то на вход схемы поступает отрицательный сигнал, уменьшающий  $z_2$ ; если  $z_2 < z_1$ , то компенсирующий сигнал – положительный, увеличивающий  $z_2$ . За счет компенсирующего контура обеспечивается равенство  $z_2 = z_1$ , т.е. устранение влияния нелинейности на работу системы.

ПФ системы в разомкнутом состоянии без компенсации имеет вид

$$W(p, x_{нм}, w) = W_1(p) \cdot W_H(p, x_{нм}, w) \cdot W_2(p)$$

При наличии цепи компенсации

$$W_{комп}(p, x_{нм}, w) = \frac{W_1(p) \cdot W_H(p, x_{нм}, w) \cdot W_2(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_{ЛЭ}(p) \cdot W_3(p) + W_1(p) \cdot W_H(p, x_{нм}, w) \cdot W_3(p)}$$

При условии, что  $W_1(p) \cdot W_3(p) = 1/W_{ЛЭ}(p)$  нелинейный элемент влияния на характеристики системы не оказывает, т. е.

$$W_{комп}(p) = W_1(p) \cdot W_{ЛЭ}(p) \cdot W_2(p)$$

Часто желательно иметь  $W_{ЛЭ}(p) = 1$ , тогда

$$W_{комп}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$$

Реализация таких систем вызывает ряд трудностей, и полная компенсация влияния нелинейности, как правило, невозможна. Действительно, элемент с характеристикой  $W_3(p)$  должен быть в общем случае дифференцирующим, что невозможно или трудновыполнимо; кроме того, для устойчивой работы система должна быть грубой.

Несмотря на указанные трудности, данный метод позволяет в достаточной степени ослабить действие нелинейного элемента типа зона нечувствительности, люфт и др.

## 19. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

### 19.1. Общее понятие о нелинейных законах управления

Законы управления могут быть разбиты на классы. Е. П. Поповым введена следующая классификация нелинейных законов управления:

- функциональные нелинейные законы управления;
- логические нелинейные законы управления;
- оптимизирующие нелинейные законы управления;
- нелинейные законы наведения (параметрические нелинейные законы управления).

Важным отличием нелинейных законов от линейных является то, что они придают системе управления принципиально новые свойства. Если при линейном законе всегда используется сигнал, пропорциональный входной переменной или ее производной и т. д., то при нелинейном законе может существенно изменяться сам характер действия системы управления на объект в зависимости от величины входного воздействия. Другими словами, если для линейных систем изменение размера отклонения - это изменение только масштаба, но не формы процессов, то в нелинейной системе при этом может существенно изменяться и форма процессов, вплоть до принципиальных качественных изменений картины процессов. Эти особые свойства нелинейных законов и следует максимально использовать в технике автоматического управления и регулирования.

### 19.2. Функциональные нелинейные законы управления.

Функциональными будем называть такие нелинейные законы управления, когда управляющее воздействие на объект выражается в виде нелинейной функции от отклонения управляемой величины, представляющей собой входную информацию для системы управления.

Данный класс может содержать в себе как статические, так и динамические нелинейности. Примеры статических нелинейностей в законе управления:

$$y_1 = k(1 + b|x|)x; \quad (19.1)$$

$$y_1 = k(\operatorname{sign}x)\sqrt{1 + b|x|}. \quad (19.2)$$

Коэффициент усиления, измеряемый крутизной статической характеристики  $k_y = dy_1/dx$  соответственно будет:

$$k_y = k(1 + 2b|x|); \quad (19.3)$$

$$k_y = \frac{kb}{2\sqrt{1 + b|x|}} \quad (19.4)$$

В случае (19.1), (19.3) (рис.19.1) будет более энергичное действие регулятора при больших отклонениях  $x$  и большой запас устойчивости установившегося режима, но зато меньшая точность в установившемся режиме. Возможна более сильная колебательность процесса вначале при неблагоприятных начальных условиях (рис. 19.1).

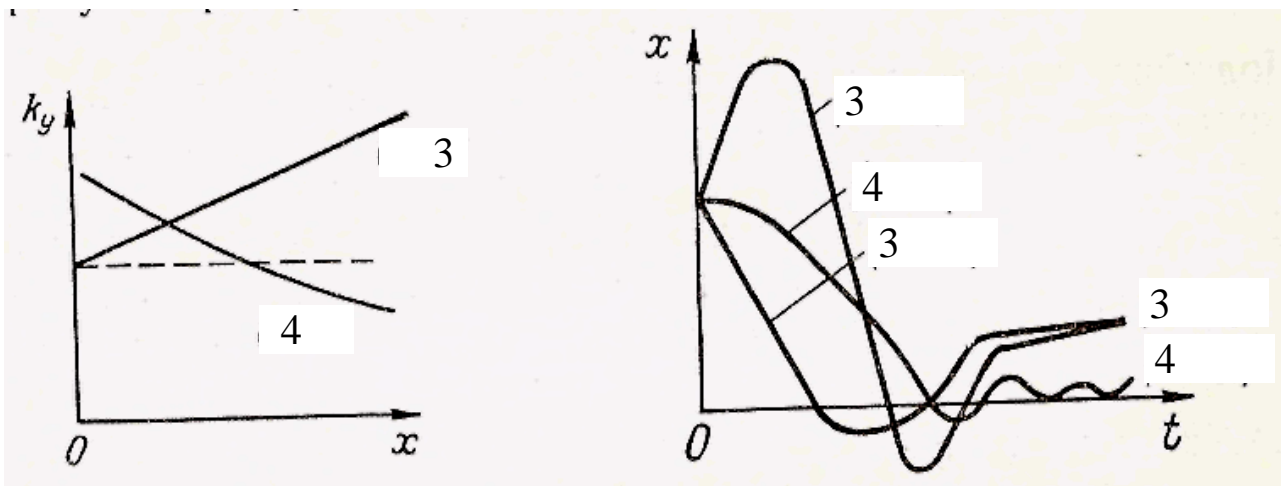


Рисунок 19.1.

В случаях (19.2), (19.4) будут менее энергичное, но более плавное действие регулятора и повышенная точность в установившемся режиме, хотя и с меньшим запасом устойчивости. Возможно даже появление установившихся автоколебаний (рис.19.1). Однако это зависит от общего сочетания параметров всей системы. Граница устойчивости, в этом случае, как правило, безопасная, в то время как в случаях (19.1), (19.3) - опасная.

Приведенные рекомендации не всегда справедливы. В сложных многоконтурных системах эффект действия указанных нелинейных законов может быть совершенно иной. В каждом конкретном случае нужны специальные исследования.

Нелинейный закон управления за счет дополнительных нелинейных обратных связей может включать в себя также нелинейности, зависящие от выходной величины  $y$ :

$$y_1 = kx + F(y)$$

Это расширяет возможности целесообразного изменения динамических свойств систем управления.

Примеры динамических нелинейностей в законе управления:

$$y_2 = k(1 \pm b|x'|)x; \quad (19.5)$$

$$y_2 = k(1 \pm b|x|)x'; \quad (19.6)$$

$$y_2 = k(1 \pm b|y'|)x' \quad (19.7)$$

Вместо двойного знака подразумевается какой-либо один из них.

Подобные динамические члены нелинейного закона управления различно влияют на демпфирующие свойства системы управления в переходных процессах в зависимости от размеров и скорости отклонения. Они же могут существенно улучшать динамическую точность системы в различных режимах вынужденного движения, воспроизведение различных форм задаваемых входных сигналов, а также при случайных воздействиях. Изучение данного вопроса и накопление фактов легче всего производить путем моделирования процессов управления. Однако путь чистого моделирования не наилучший. Его нужно комбинировать с приближенными методами расчета, дающими в упрощенном виде в главных чертах качественную и количественную картину поведения системы при различных нелинейных законах управления. При расчете систем с нелинейными законами управления наиболее важными являются следующие задачи:



1) введение в систему специальных нелинейных корректирующих устройств для компенсации вредного влияния имеющихся в ней неизбежных нелинейностей типа зазоров, насыщения или других (т. е. исправлять «вредное плавание» частотных характеристик, рис. 19.2);

2) синтез нелинейных законов управления для получения заданных качеств работы различных систем управления, как для линейных, так и для нелинейных объектов различной структуры и назначения;

3) синтез нелинейных фильтров для борьбы с различными изменяющимися помехами, когда эффект действия их существенно зависит от величины амплитуды или среднеквадратического значения.

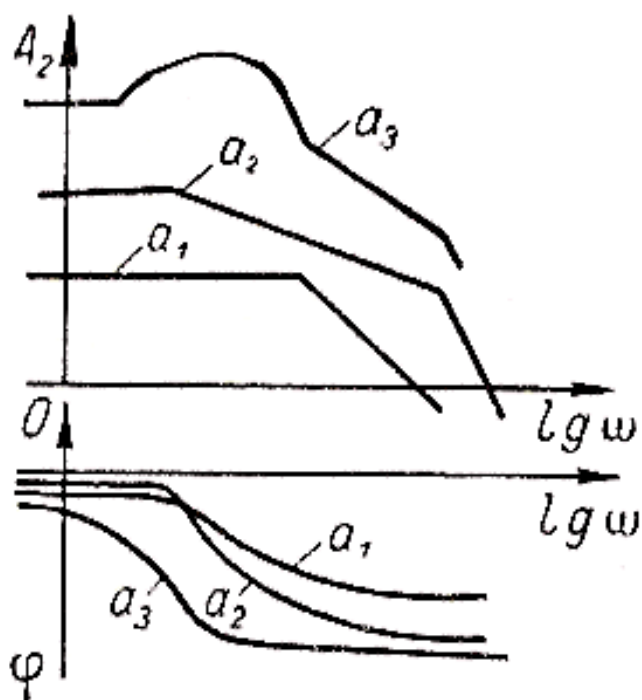


Рисунок 19.2

Отметим, что функциональные нелинейные законы управления могут быть связаны не только с изменением параметров в зависимости от размера входных воздействий, но и с изменением структуры. Например, при увеличении отклонения регулируемой величины сверх определенного порога в системе может происходить переключение с гибкой обратной связи на жесткую (рис. 19.3). Первая уменьшает ошибку системы в установившемся

состоянии, вторая ускоряет затухание процесса при больших отклонениях. Аналогично могут создаваться нелинейные законы управления и по возмущению в комбинированных автоматических системах.

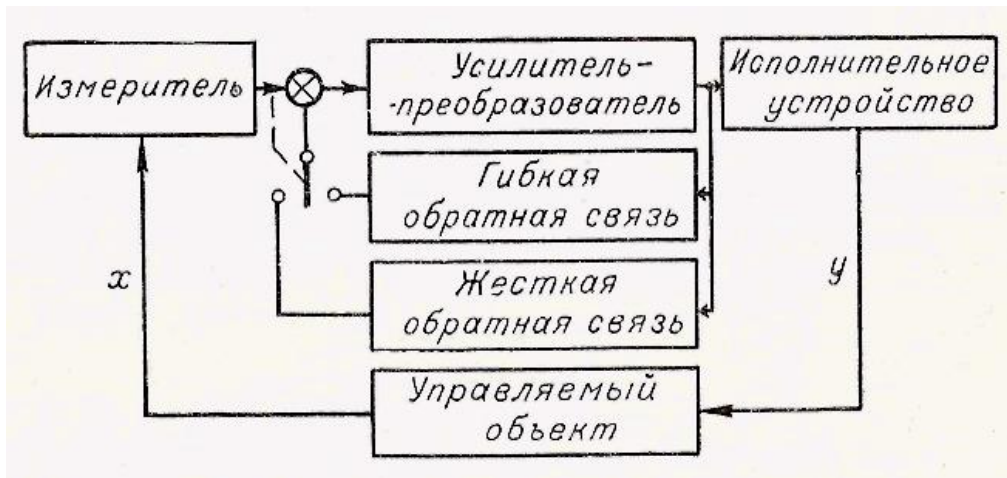


Рисунок 19.3

### 19.3. Логические нелинейные законы управления.

Нелинейные законы управления могут иметь иные формы, которые реализуются с помощью не функциональных, а более или менее сложных логических устройств. Например, в системе на рис. 19.4 логический нелинейный закон управления может быть применен для экономии управляющих воздействий со стороны системы управления на объект (а также экономии расхода энергии на нужды управления).

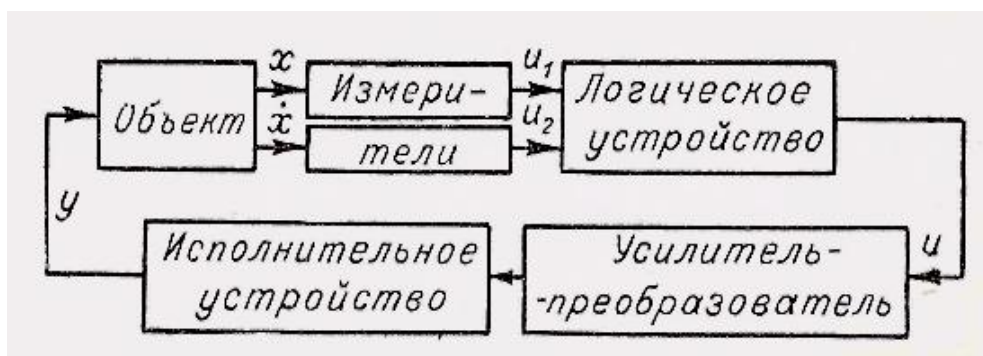


Рисунок 19.4.

Построение простейшего логического нелинейного закона управления лучше всего пояснить на плоскости двух входных величин  $u_1$ ,  $u_2$  (рис.19.5). Последние соответствуют отклонению  $x$  и скорости отклонения  $x'$  регулируемой величины.

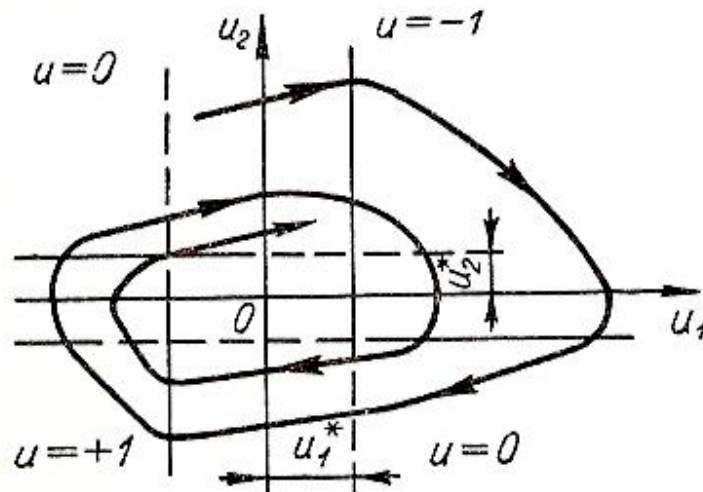


Рисунок 19.5

Управляющее воздействие ( $u = +1$  или  $u = -1$ ) включается только тогда, когда  $|u_1| > u_1^*$ , т. е. когда отклонение достаточно велико, и  $u_2$  имеет знак, одинаковый со знаком  $u_1$  или противоположный, но при малом  $|u_2| < u_2^*$ . Во всех остальных случаях управление выключено ( $u = 0$ ), так как при противоположных знаках  $u_2$  и  $u_1$  и достаточной величине  $|u_2| > u_2^*$  система сама без управления возвращается к требуемому положению  $x = 0$  (если при этом гарантирована противоположность знаком  $x$  и  $x'$ ) (рис.19.4).

Логические нелинейные законы управления могут быть связаны также с изменением структуры системы управления. Например, при помощи логического устройства можно включать и выключать сигналы управления по первой и второй производной и по интегралу (рис.19.6) в зависимости от сочетания значения отклонения регулируемой величины  $x$  и скорости отклонения ее  $x'$ . При этом можно существенно повысить качество работы системы управления.

Вместо комбинирования указанных на рис. 6 линейных членов закона управления могут вводиться также и функциональные нелинейные члены, включение и выключение которых производится при помощи логического

устройства. Тогда получится комбинация функциональных и логических нелинейных законов управления.

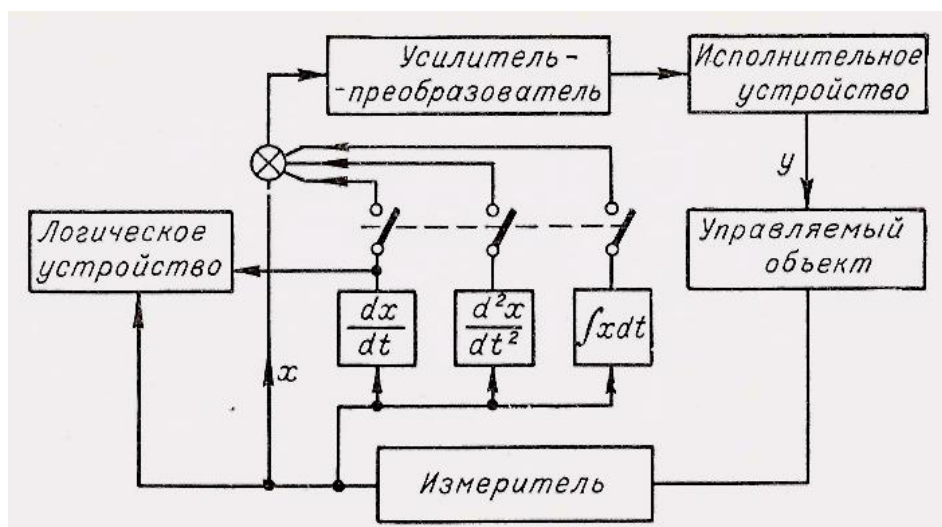


Рисунок 19.6

#### 19.4. Оптимизирующие нелинейные законы управления.

В настоящее время интенсивно развивается теория оптимальных процессов управления. При этом на основе классических вариационных методов или на основе так называемого принципа максимума определяется закон управления таким образом, чтобы система имела максимум быстродействия или минимум ошибки или же максимум, либо минимум какой-нибудь другой величины с учетом ограничений, накладываемых в реальной системе на координаты, скорости, силы и т. п. Как правило, при этом приходят к нелинейным законам управления, хотя, вообще говоря, можно оптимизировать и коэффициенты линейного закона. Часто оптимальный нелинейный закон управления состоит в переключении управляющего воздействия при определенных состояниях системы с одного максимально возможного значения на другое, противоположного знака. Моменты переключения в целом определяются комбинациями стольких значений обобщенных координат и обобщенных скоростей, каков суммарный порядок дифференциальных уравнений системы.

В связи с этим необходимо отметить, что, во-первых, само определение моментов переключения для систем общего вида выше второго

порядка весьма затруднительно (а во многих случаях до конца неразрешимо), во-вторых, система должна измерять столько непрерывно меняющихся переменных, характеризующих течение процесса управления во времени, каков общий порядок дифференциальных уравнений системы, что далеко не всегда возможно.

Однако теория оптимальных процессов нужна для расчета «теоретических эталонов», показывающих, что можно максимально взять из данной системы при данном критерии ее качества и при заданных ограничениях. К такому эталону на практике можно приближаться путем введения более простых нелинейных законов управления, о которых говорилось выше. Таким образом, могут создаваться системы, в том или ином смысле близкие к оптимальным, но достаточно простые для практической реализации.

### **19.5. Нелинейные законы наведения.**

В законах управления в качестве переменных рассматриваются обычно отклонения регулируемых величин от некоторых заданных или изменяющихся по программе значений.

**Законом наведения** называется особая программа управления, которая задается не во времени, как обычно, а через текущие значения координат и скоростей независимо от того, в какой момент времени они имеют место в процессе движения объекта, Управление же будет осуществляться, как правило, в отклонениях от этого закона наведения. Часто целесообразно бывает введение нелинейных законов наведения.

Пусть, например, тело  $A$  должно быть сближено с телом  $B$  для мягкого контакта;  $r$  - текущее относительное расстояние между ними. Условия, которые должны быть выполнены в процессе сближения, следующие:

$$r' < 0; \quad (19.8)$$

$$r' = 0 \text{ при } r = 0; \quad (19.9)$$

$$|r''| - \text{ограничено}; \quad (19.10)$$

$$T - \text{ограничено,} \quad (19.11)$$

где  $T$  - время сближения.

Условие (19.9) - условие мягкого контакта в конце сближения. Условия (19.8), (19.10) должны выполняться в течение всего процесса сближения, причем ограничение  $r''$  связано с ограничением мощности или силы управляющего воздействия. Представим закон наведения в виде:

$$r' + f(r) = 0 \quad (19.12)$$

т. е. в системе управления должны быть измерители величин  $r$  и  $r'$  и устройство формирования сигнала

$$u = r' + f(r) \quad (19.13)$$

величина которого должна при помощи системы управления все время сводиться к нулю. Найдем целесообразное выражение функции  $f(r)$ .

Если принять линейный закон наведения, т. е. положить  $f(r) = kr$ , при котором уравнение (19.12) имеет вид:

$$r' + kr = 0 \quad (19.14)$$

то окажется, что при этом  $T = \infty$ . Следовательно, линейный закон наведения не годится.

Обратимся к нелинейной функции вида  $f(r) = kr^b$ . Тогда нелинейный закон наведения (19.12) запишется так:

$$r' + kr^b = 0 \quad (19.15)$$

Оказывается, что при  $b > 1$  величина  $T = \infty$ , а при  $b < 1/2$  величина  $r'' = \infty$  при  $r = 0$ . Если же

$$\frac{1}{2} \leq b < 1 \quad (19.16)$$

то  $T$  конечно, причем  $r'' = const$  при  $b = 1/2$ , а в остальных случаях

$(\frac{1}{2} < b < 1)$  величина  $r''$  уменьшается в процессе наведения с уменьшением

$r$ .

В результате приемлемым является нелинейный закон наведения (19.15) при значении  $b$  в интервале (19.16). Конкретизация значения  $b$  внутри этого интервала может производиться из каких-либо других условий, применительно к каждой конкретной технической системе.

# ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## 20. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

В последние годы в связи с интенсивным развитием вычислительной техники в промышленной автоматике все большее применение получают дискретные системы управления. Основным элементом дискретной системы является управляющая вычислительная машина (УВМ), которая может использоваться либо в супервизорном режиме, либо в режиме прямого цифрового управления (ПЦУ). В супервизорном режиме УВМ вырабатывает задания локальным контурам регулирования, реализованным с помощью традиционных технических средств автоматики. При режиме ПЦУ контуры регулирования образуются самой УВМ.

Рассмотрим функциональную структуру системы ПЦУ (рис.20.1), в которой объектом управления является некоторый технологический процесс (ТП), характеризуемый управляемыми переменными  $x_1, x_2, \dots, x_6$ . Эти выходные переменные объекта зависят от управляющих воздействий  $u_1, u_2, u_3, u_4$  (расходов сырья, катализатора, энергии, рабочей среды) и возмущений  $z_1$  и  $z_2$  (качественные признаки сырья). Электрические сигналы  $u_i$ , пропорциональные указанным выходным и входным переменным объекта, поступают в УВМ. УВМ в соответствии с заданной целью управления и требованиями  $x_{i3}$  к качеству продукции и режиму ТП вырабатывает управляющие сигналы, которые с помощью исполнительных механизмов ИМ и регулирующих органов РО преобразуются в управляющие воздействия - расходы  $u_i$ .



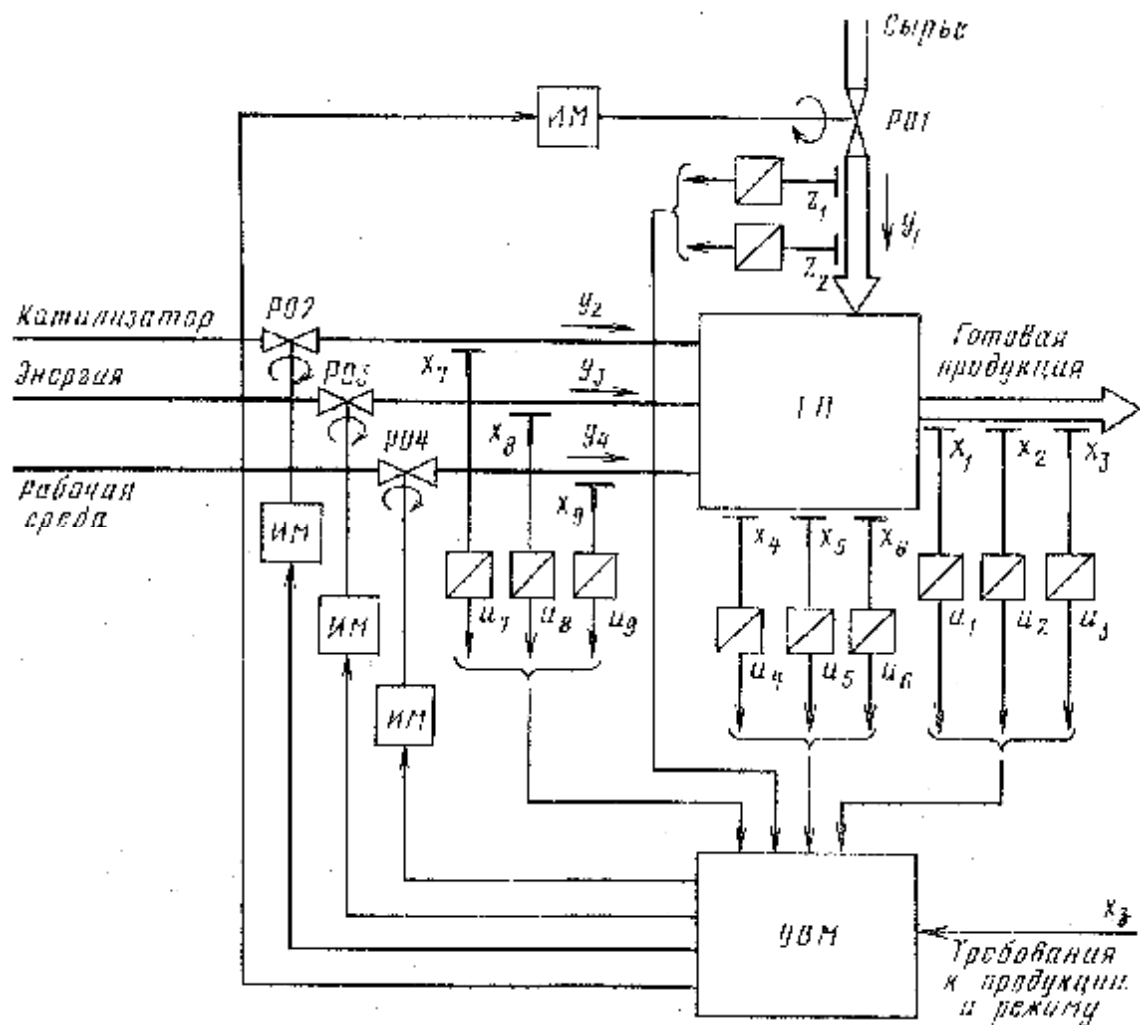


Рисунок 20.1. Функциональная структура автоматической системы прямого цифрового управления

В рассматриваемой системе **УВМ** работает в так называемом режиме разделения времени - поочередно подключается к отдельным контурам регулирования (рис.20.2). Для этого используются специальные коммутирующие устройства - мультиплексор МП и демультиплексор ДМП, которые одновременно подключают цифровое вычислительное устройство ЦВУ к датчику Д и исполнительному устройству ИУ *l*-го контура. Периодичность подключения контуров к ЦВУ задается специальным устройством - таймером. Преобразование сигналов из аналоговой формы в цифровую и наоборот осуществляется аналого-цифровым преобразователем АЦП и цифроаналоговым преобразователем ЦАП.

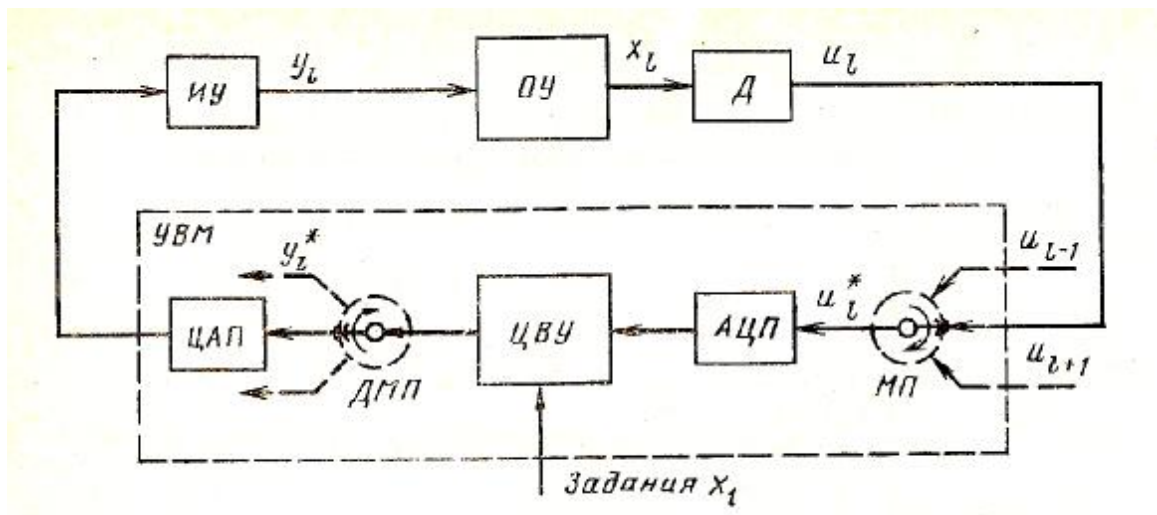


Рисунок 20.2. Функциональная структура отдельного контура системы с УВМ

Таким образом, в системе с УВМ наряду с непрерывными сигналами  $x_L$ ,  $y_L$ ,  $u_L$  действуют и дискретные сигналы  $u_L^*$  и  $u_{L+1}$  представляющие собой последовательности электрических импульсов, а сама система управления поэтому относится к классу дискретных.

В *дискретной системе управления* один или несколько сигналов являются дискретными и представляют собой последовательность кратковременных импульсов. В состав дискретной системы наряду со звеньями непрерывного действия входят элементы, преобразующие непрерывные сигналы в дискретные, и элементы, выполняющие обратное преобразование. Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется **квантованием**. Различают три вида квантования сигналов: по уровню; по времени; по уровню и времени (совместно).

**Квантование по уровню** заключается в фиксации вполне определенных дискретных значений непрерывного сигнала (рис. 20.3, а). При этом непрерывный сигнал (тонкая линия) заменяется ступенчато изменяющимся сигналом (жирная линия). Смежные дискретные значения отличаются друг от друга на постоянную величину  $\Delta x$  называемую **интервалом квантования по уровню**. Переход с одного уровня на другой

происходит в моменты времени, когда непрерывный сигнал достигает очередного фиксированного значения.

**Квантование по времени** заключается в фиксации мгновенных значений непрерывного сигнала в равноотстоящие друг от друга дискретные моменты времени (рис. 20.3, б). При этом квантованный по времени сигнал представляет собой так называемую **решетчатую функцию** - последовательность идеальных импульсов. Смежные моменты времени отличаются друг от друга на постоянную величину  $\Delta t = T$  называемую **интервалом дискретности** (интервалом квантования по времени, периодом повторения, периодом дискретности).

При **совместном квантовании по уровню и по времени** фиксируются дискретные по уровню значения, ближайšie к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени (рис. 20.3, в), причем приоритетным является квантование по времени.

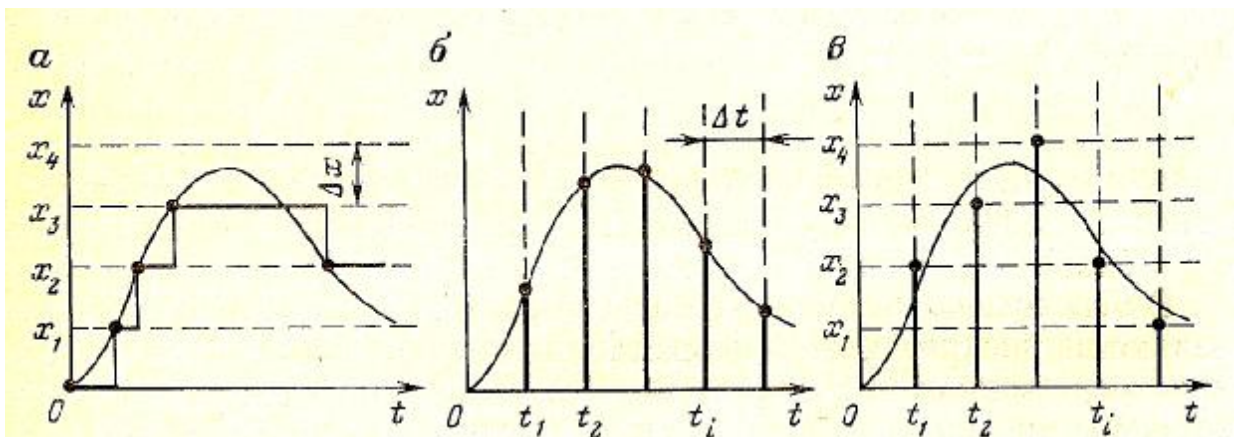


Рисунок 20.3 – Виды квантования непрерывных сигналов

В зависимости от применяемого вида квантования все дискретные системы разделяют на три класса: релейные, импульсные и цифровые. В **релейных системах** квантование осуществляется только по уровню, в **импульсных** - по времени, а в **цифровых** - и по уровню и по времени.

Квантование по уровню производится специальными элементами - квантователями. Простейшими квантователями являются двух- и трехпозиционные реле. Они квантуют непрерывный сигнал соответственно

по двум и трем уровням. При достаточно большом числе уровней и малом интервале квантования, обеспечиваемых в УВМ, релейную систему можно приближенно рассматривать как непрерывную.

Квантование по времени осуществляется с помощью импульсного элемента. **Импульсный элемент** преобразует непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, амплитуда, длительность или период повторения которых зависят от значений входного сигнала в дискретные моменты времени. При этом преобразующее действие квантователя можно рассматривать как процесс **модуляции** последовательности одинаковых импульсов по закону изменения входного непрерывного сигнала, а сам квантователь по времени - как импульсный модулятор.

Импульс в дискретном сигнале определяется несколькими величинами (параметрами): периодом повторения  $T$  или частотой следования  $w_0 = 2p/T$ , амплитудой импульса  $X_H$ , длительностью  $t_H$ , скважностью  $g = t_H/T$ , смещением по времени от начала периода  $t_{CM}$ , или относительным смещением  $S = t_{CM}/T$  (рис.20.4).

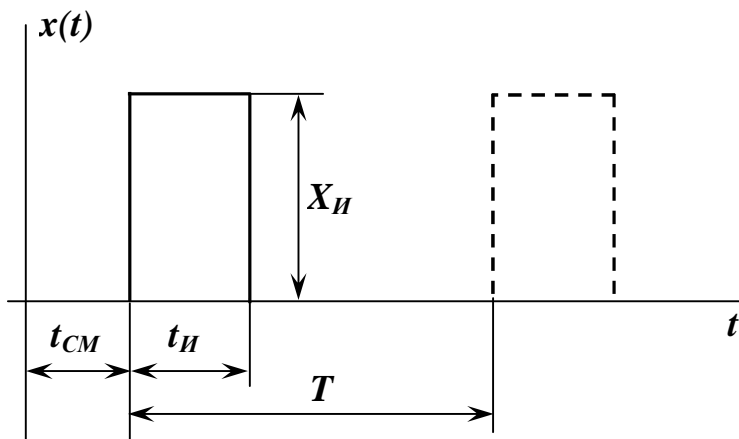


Рисунок 20.4. Параметры прямоугольного импульса

В зависимости от того, какой из параметров модулируемой последовательности импульсов изменяется по закону изменения модулирующего сигнала  $x(t)$  различают модуляции: амплитудно-

импульсную (АИМ) , широтно-импульсную (ШИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ). При АИМ значениям модулирующего сигнала  $x(t)$  пропорциональны амплитуде (высоте) импульсов  $X_H$  (рис. 20.5 а):

$$X_H \equiv x(t), T = const, t_H = const;$$

при ШИМ - длительности  $t_H$  импульсов (рис. 20.5, б):

$$t_H \equiv x(t), T = const, X_H = const;$$

и при ЧИМ – частота  $w_0$  импульсов (рис. 20.5, в):

$$w_0 \equiv x(t), t_H = const, X_H = const;$$

Совместное квантование сигналов по уровню и по времени в цифровых системах осуществляется при помощи АЦП. В АЦП кроме квантования по уровню и по времени происходит кодирование дискретных значений сигнала - представление их в виде последовательности чисел и запись в каком-либо цифровом коде.

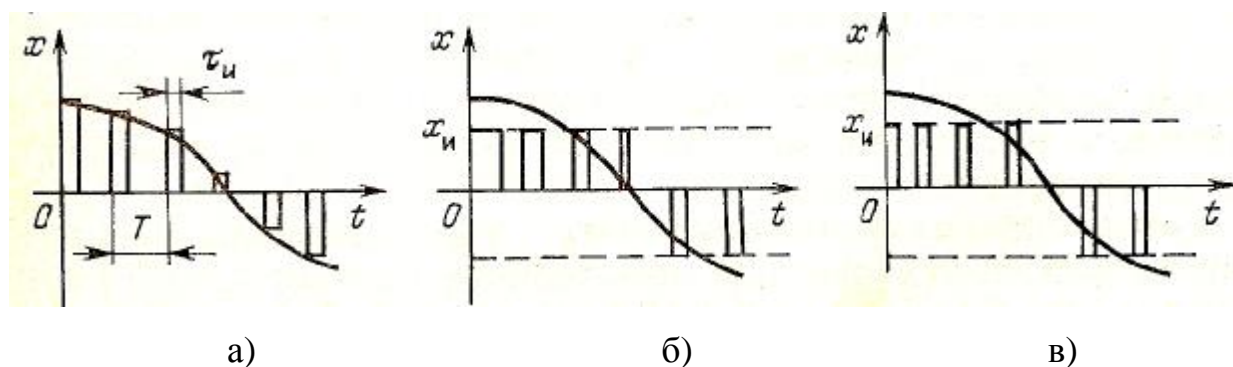


Рисунок 20.5 – Виды модуляции непрерывных сигналов

Отметим, что при сравнительно большом шаге квантования по уровню цифровая система существенно нелинейна, а при достаточно малом шаге дискретностью по уровню можно пренебречь и рассматривать систему как линейную амплитудно-импульсную.

Ниже рассмотрен наиболее распространенный вид дискретных систем - импульсные системы с АИМ, а также показано, что цифровые системы с УВМ при определенных условиях могут анализироваться как импульсные с АИМ.

## 21. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 21.1. Решетчатые функции и разностные уравнения.

Величины, описывающие поведение автоматических систем, представляют собой функции времени. Математическое исследование дискретных систем существенно упрощается в том случае, когда все величины рассматриваются в дискретные равноотстоящие моменты времени.

Решетчатая функция времени  $f^*(t) = f(nT)$ , или в сокращенной записи  $f(n)$  - это математическая функция, значения которой определены в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени  $t = nT$ ,

где  $n$  - целое положительное число  $0, 1, 2 \dots$ ,

$T$  - период дискретности.

То есть решетчатая функция представляет собой числовую последовательность:

$$f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots, f(nT)$$

На рис. 21.1 представлена разомкнутая цепь линейной дискретной системы с идеальным импульсным элементом (идеальным ключом), имеющим период замыкания  $T$ .

Под идеальным импульсным элементом будем понимать ключ, который замыкается на бесконечно малое время и в момент, когда ключ замкнут, его сопротивление равно нулю, а в разомкнутом состоянии его сопротивление равно бесконечности.

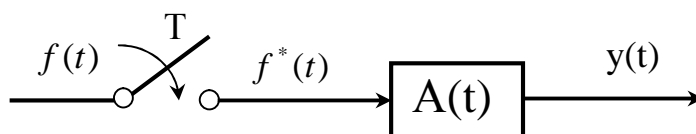


Рисунок 21.1 – Разомкнутая дискретная система с идеальным импульсным элементом

Если на вход такой цепи подать непрерывный сигнал  $f(t)$  (рис.21.2), то на выходе идеального импульсного элемента будет получен дискретный сигнал – решетчатая функция  $f^*(t) = f(nT)$  (рис.20.2).

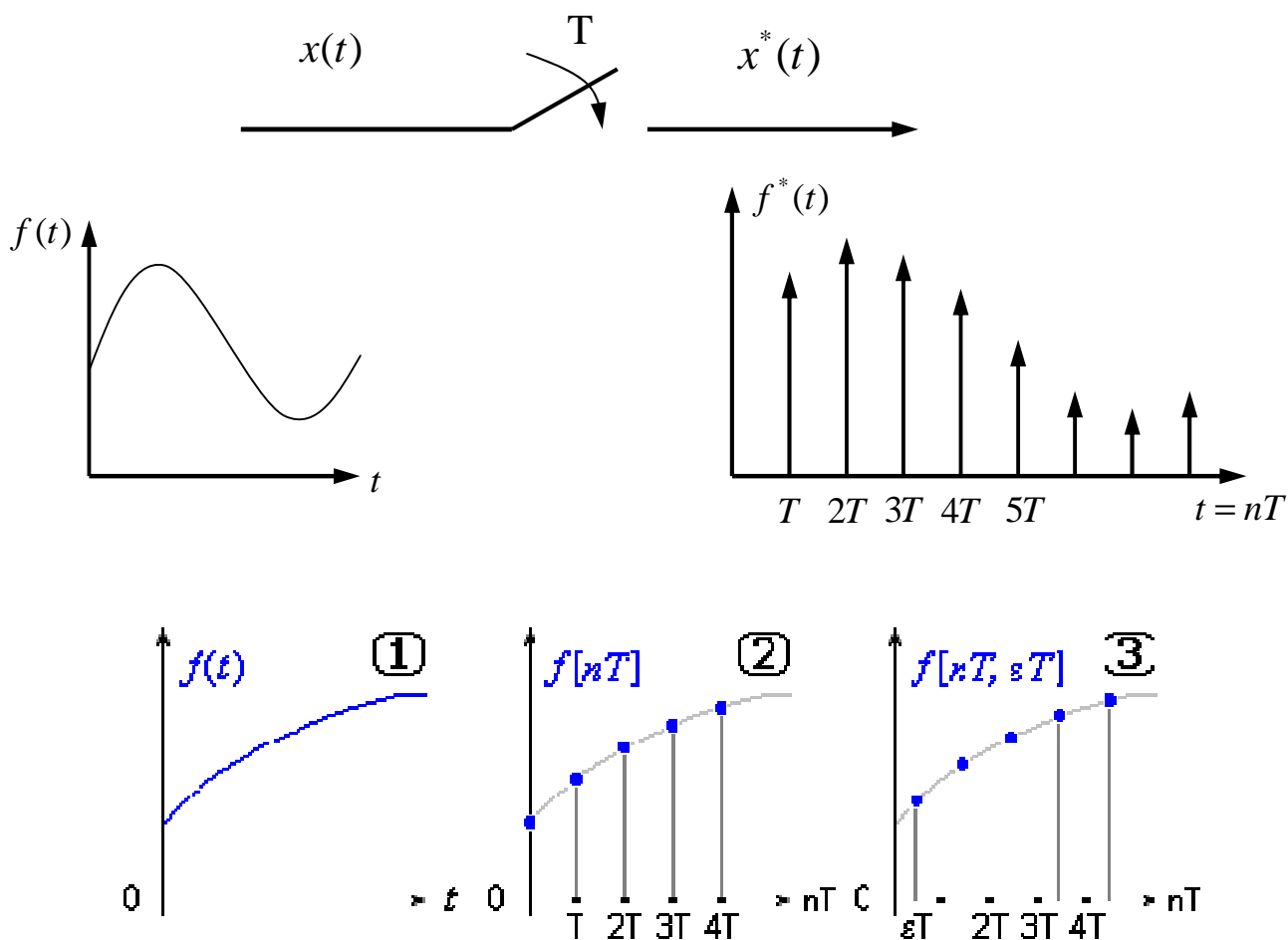


Рисунок 21.2. Разомкнутая дискретная система с идеальным импульсным элементом

Если период дискретности  $T$  задан, то решетчатая функция  $f^*(t) = f(nT)$  однозначно формируется из исходной непрерывной  $f(t)$ . Обратная задача - формирование непрерывной функции из решетчатой - не может быть решена однозначно без дополнительных сведений о поведении функции в интервале между точками  $t = nT$ , так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций. Непрерывные функции, проходящие

через дискреты заданной решетчатой функции, называют огибающими. Их бесконечно много (рис.21.3).

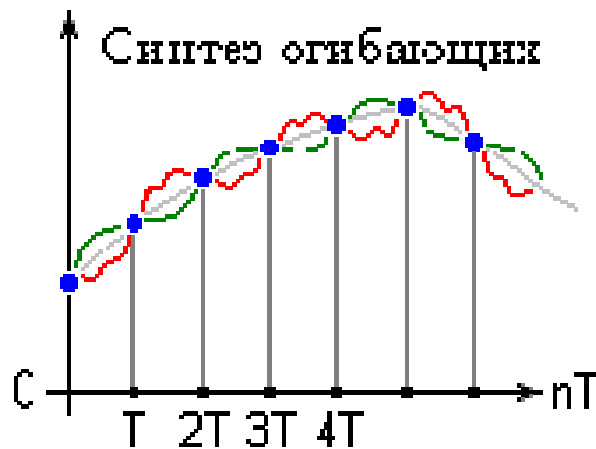


Рисунок 21.3. Восстановление непрерывной функции по решетчатой.

Для суждения о характере поведения непрерывной функции в интервалах между дискретными моментами времени  $t = nT$  вводится понятие смещенной решетчатой функции  $f(n, s) = f(nT + sT)$ , которая представляет собой числовую последовательность:

$$f(T, s), f(T + sT), f(2T + sT), f(3T + sT), \dots, f(nT + sT),$$

где  $s = \frac{\Delta t}{T}$  - постоянное число, называемое смещением, выбираемое из интервала  $0 \leq s < 1$ .

Для удобства записи вводят переменную – относительное время  $\bar{t} = \frac{t}{T}$ .

В этом случае непрерывной функции в относительном времени  $f(\bar{t})$  будет соответствовать решетчатая функция  $f(n)$  или смещенная решетчатая функция  $f(n + s)$ , обозначаемая сокращенно  $f(n, s)$ .

Аналогами производных и интегралов непрерывных функций для решетчатых функций являются конечные разности и конечные суммы.

Конечные разности решетчатых функций бывают двух видов: прямые (упреждающие) и обратные (отстающие).



Первой прямой конечной разностью функции  $f(n)$  называется решетчатая функция вида  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ .

Первая обратная конечная разность  $\nabla f(n) = f(n) - f(n-1)$ .

Вторую прямую конечную разность определяют как разность двух первых разностей  $\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n)$ .

Вторая обратная конечная разность  $\nabla^2 f(n) = \nabla f(n) - \nabla f(n-1)$ .

Разности произвольного порядка  $k$  определяются при помощи рекуррентных соотношений:

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n)$$

$$\nabla^k f(n) = \nabla^{k-1} f(n) - \nabla^{k-1} f(n-1)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

**Пример 21.1.** Пусть  $f(n) = e^{ln}$ , тогда:

первая разность -  $\Delta f(n) = e^{l(n+1)} - e^{ln} = (e^l - 1)e^{ln}$ ;

вторая разность -  $\Delta^2 f(n) = (e^l - 1)e^{l(n+1)} - (e^l - 1)e^{ln} = (e^l - 1)^2 e^{ln}$ ;

$k$ -тая разность -  $\Delta^k f(n) = (e^l - 1)^k e^{ln}$

Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до  $t$  для решетчатой являются неполная сумма и полная сумма:

$$f_{\Sigma}(n) = \sum_{v=0}^{n-1} f(v)$$

$$f_{\bar{\Sigma}}(n) = \sum_{v=0}^n f(v)$$

**Разностные уравнения (уравнения в конечных разностях)** связывают между собой решетчатые функции и их конечные разности:

$$\Phi[n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)] = 0$$

Разностное уравнение может быть записано:

- непосредственно через конечные разности

$$a_0 \Delta^m f(n) + a_1 \Delta^{m-1} f(n) + a_2 \Delta^{m-2} f(n) + \dots + a_m f(n) = b_0 c(n);$$

- через решетчатую функцию

$$a_0 f(n+m) + a_1 f(n+m-1) + a_2 f(n+m-2) + \dots + a_m f(n) = b_0 c(n)$$

;

Общее решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$f(n) = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n$$

где  $z_i$  - корни характеристического уравнения

$C_i$  - постоянные коэффициенты.

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используются дискретное преобразование Лапласа, z-преобразование, w-преобразование, а также частотные методы.

## 21.2. Дискретное преобразование Лапласа

Дискретное преобразование Лапласа определяется следующим соотношением:

а) для решетчатой функции  $f(nT)$

$$F^*(p) = D\{f(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTp}$$

б) для смещенной решетчатой функции  $f(nT, sT)$

$$F^*(p, s) = D\{f(nT, sT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT, sT) e^{-nTp}$$

где  $p = a + jw$  - оператор Лапласа;

$a$  - абсцисса абсолютной сходимости.

Для существования изображений по Лапласу  $F^*(p)$ ,  $F^*(p, s)$  необходимо, чтобы степенные ряды в выражениях для  $F^*(p)$ ,  $F^*(p, s)$  сходились. Условием сходимости является  $a < \infty$ .

Дискретное преобразование Лапласа содержит трансцендентный сомножитель  $e^{-npT}$ , из-за которого изображения  $F^*(p)$  и соответствующие передаточные функции становятся иррациональными функциями аргумента  $p$ , что создает определенные трудности при их использовании. Поэтому с целью получения передаточных функций дискретных систем в дробно-рациональной форме целесообразна определенная замена аргументов ( $z = e^{pT}$ ).

### 21.3. Z-преобразование

Z-преобразование связано дискретным преобразованием Лапласа посредством подстановки  $z = e^{pT}$ .

Z-преобразованием решетчатой функции  $f(nT)$  называется функция комплексного аргумента  $z$ , определяемая выражением

$$F(z) = Z\{f(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

для смещенной решетчатой функции  $f(nT, sT)$

$$F(z, s) = Z\{f(nT, sT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT, sT)z^{-n}$$

Главное достоинство и удобство  $z$ -преобразования заключается в том, что сама запись  $z$ -изображения указывает простой способ выполнения прямого и обратного преобразования:

- чтобы по известной функции времени  $x(t)$  найти ее  $z$ -изображение, необходимо лишь каждое дискретное значение  $x(nT)$  умножить на  $z^{-n}$ , а затем свернуть получившийся степенной ряд в конечную сумму;

- чтобы по известному изображению  $X(z)$  найти соответствующий сигнал  $x(t)$ , необходимо представить изображение  $X(z)$  в виде степенного ряда по убывающим степеням  $z^{-n}$ , получающиеся при этом числовые коэффициенты ряда и есть дискретные значения  $x(nT)$  сигнала  $x(t)$ .

### Основные свойства Z-преобразования

#### 1. Свойство линейности

$$Z\{af(t)\} = aF(z),$$

$$Z\{f_1(t) + f_2(t)\} = Z\{f_1(t)\} + Z\{f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z)$$

$a$  – постоянный коэффициент.

Здесь и далее  $t = nT$ .

#### 2. Теорема сдвига во временной области (теорема запаздывания и упреждения)

$$Z\{f(t - kT)\} = z^{-k} F(z)$$

$$Z\{f(t + kT)\} = z^k F(z)$$

#### 3. Теорема об умножении оригинала на экспоненту (теорема смещения в области изображений)

$$Z\{f(t)e^{at}\} = F(ze^{-aT}) = F\left(\frac{z}{d}\right), \quad d = e^{aT};$$

$$Z\{f(t)e^{-at}\} = F(ze^{aT}) = F(zd), \quad d = e^{aT};$$

для смещенной решетчатой функции

$$Z\{f(t + sT)e^{at}\} = d^s F\left(\frac{z}{d}\right), \quad d = e^{aT};$$

#### 4. Теорема об умножении оригинала на степенную функцию

$$Z\{t^m f(t)\} = (-1)^m \frac{d^m F(e^{pT})}{dp^m}.$$

#### 5. Теорема о конечном значении оригинала

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z).$$

6. Теорема о начальном значении оригинала

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z).$$

7. Изображение разностей. На основании формул теоремы сдвига во временной области изображение первой разности имеет вид

$$Z\{\Delta f(nT)\} = Z\{f(nT+T) - f(nT)\} = Z[F(z) - f(0)] - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0)$$

Для k-той разности

$$Z\{\Delta^k f(nT)\} = (z-1)^k F(z) - z \sum_{i=1}^{k-1} (z-1)^{k-1-i} \Delta f(0), \quad \Delta^0 f(0) = f(0).$$

8. Изображение сумм.

Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до  $t$  для решетчатой являются неполная сумма и полная сумма:

$$\sum (nT) = \sum_{m=0}^{n-1} f(mT),$$

$$\sum_0(nT) = \sum_{m=0}^n f(mT)$$

$Z$  – изображение неполной суммы

$$Z\{\sum (nT)\} = \frac{1}{z-1} F(z),$$

$Z$  – изображение полной суммы

$$Z\{\sum_0(nT)\} = \frac{z}{z-1} F(z).$$

Для случая k-кратного суммирования

$$Z\{\sum^k(nT)\} = \frac{1}{(z-1)^k} F(z),$$

$$Z\{\sum_0^k(nT)\} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^k F(z)$$

9. Свертка решетчатых функций.

Если  $Z\{f_1(nT)\} = F_1(z)$  и  $Z\{f_2(nT)\} = F_2(z)$ ,

то

$$Y(z) = F_1(z)F_2(z) = Z \left\{ \sum_{m=0}^n f_1(mT) \cdot f_2[(n-m)T] \right\} = Z \left\{ \sum_{m=0}^n f_1[(n-m)T] \cdot f_2(mT) \right\}$$

и 
$$Y(nT) = Z \left\{ \sum_{m=0}^n f_1(mT) \cdot f_2[(n-m)T] \right\}.$$

## 21.4. Отображение $p$ -плоскости на $z$ -плоскость

Связь между комплексной переменной  $p$  и комплексной переменной  $z$  определяется соотношением  $z = e^{pT}$ , где  $p = \pm a \pm jw$ .

Рассмотрим преобразование плоскости комплексной переменной  $p$  в плоскость комплексной переменной  $z$ .

Пусть  $a = 0$ . При изменении  $w$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  получаем на плоскости  $p$  годограф, совпадающий с осью ординат. Определим, как этот годограф трансформируется на плоскости  $z$ . С этой целью зададимся некоторыми значениями частот:

$$w = -\frac{w_0}{2}, \quad w = -\frac{w_0}{4}, \quad w = 0, \quad w = \frac{w_0}{4}, \quad w = \frac{w_0}{2}; \quad (w_0 = 2p/T),$$

вычислим значения  $z$ , нанесем их на плоскость  $z$  и сопоставим расположение соответствующих точек на плоскости  $p$  и на плоскости  $z$ .

1.  $w = 0; z = e^{jwT} = e^0 = 1;$
2.  $w = \frac{w_0}{4}; z = e^{j\frac{w_0 T}{4}} = e^{j\frac{p}{2}} = j;$
3.  $w = \frac{w_0}{2}; z = e^{j\frac{w_0 T}{2}} = e^{jp} = -1;$
4.  $w = -\frac{w_0}{4}; z = e^{-j\frac{w_0 T}{4}} = e^{-j\frac{p}{2}} = -j;$
5.  $w = -\frac{w_0}{2}; z = e^{-j\frac{w_0 T}{2}} = e^{-jp} = -1;$

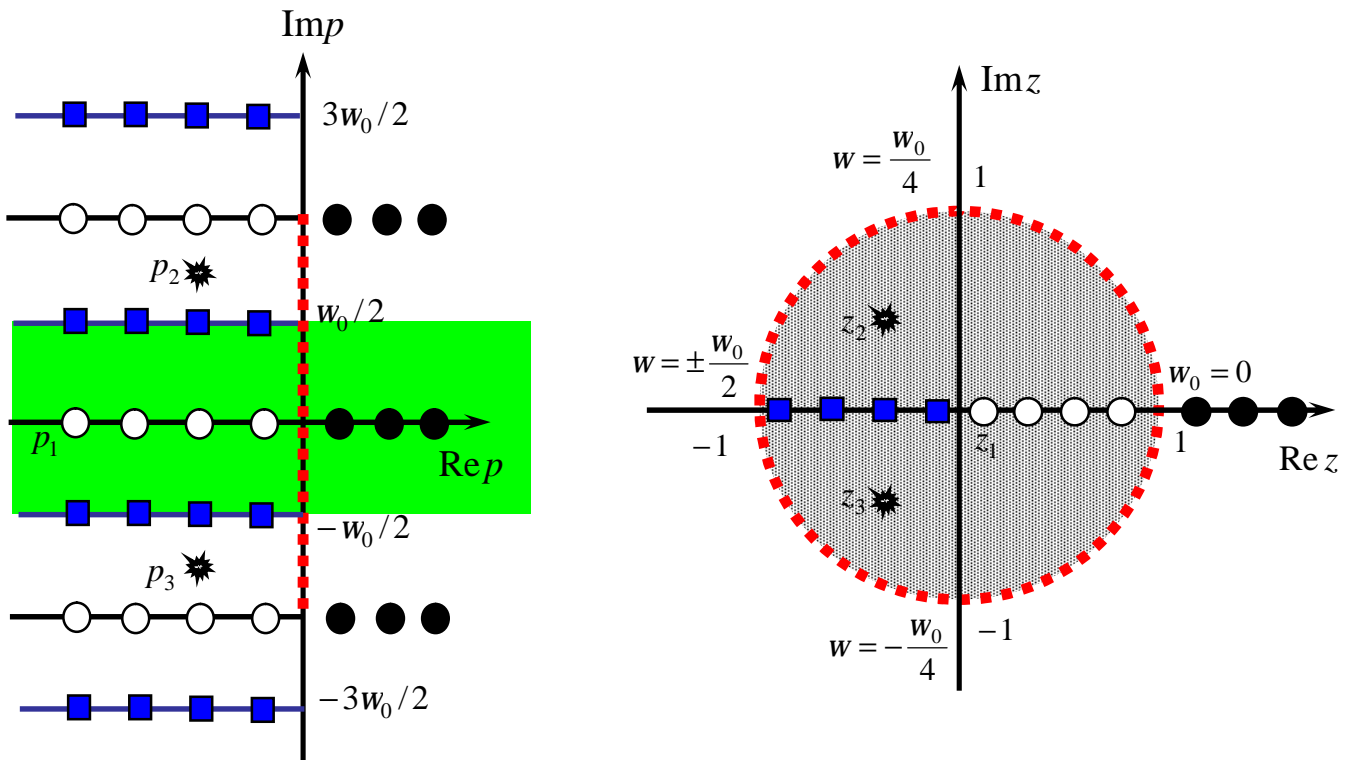


Рисунок 21.4. Отображение плоскости  $p$  в плоскость  $z$

Из рисунка видно, что участок мнимой оси плоскости  $p$  в интервале от  $w = -\frac{w_0}{2}$  до  $w = \frac{w_0}{2}$  отображается на плоскости  $z$  в окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Дальнейший анализ показывает, что участки мнимой оси плоскости  $p$  на интервалах  $w = \frac{w_0}{2}$  до  $w = \frac{3w_0}{2}$ , от  $w = \frac{3w_0}{2}$  до  $w = \frac{5w_0}{2}$  и т.д., т.е. на интервалах, кратных  $w_0$ , будут отображаться на плоскости  $z$  в ту же окружность единичного радиуса, причем, левая полуплоскость плоскости  $p$  будет отображаться на плоскости  $z$  во внутреннюю часть круга единичного радиуса.

Пусть  $p = -|a| \pm jw$ , тогда  $z = e^{pT} = e^{-|a|T \pm jwT} = e^{-|a|T} e^{\pm jwT} = e^{-|a|T} (\cos wT \pm j \sin wT)$ ;  $|z| = e^{-|a|T}$ , так как всегда  $T > 0$ , то  $|z| < 1$ .

## 21.5. Билинейное $w$ -преобразование

Билинейное  $w$ -преобразование осуществляется путем замены переменной  $z$  и  $e^{pT}$  в  $z$  – изображениях или дискретных изображениях по Лапласу:

$$z = e^{pT} = \frac{1+w}{1-w}.$$

Если  $W(z)$  есть отношение двух полиномов от  $z$ , то  $W(w)$  также получится в виде отношения двух полиномов от  $w$ .

$w$ -преобразование представляет собой отображение области внутри круга единичного радиуса плоскости  $z$  в левую полуплоскость плоскости  $w$ , обладающую теми же свойствами, что и левая полуплоскость плоскости  $p$ . Данная особенность  $w$ -преобразования позволяет применять в исследовании дискретных систем логарифмические частотные характеристики, алгебраические и частотные критерии устойчивости, в том виде, как они сформулированы для непрерывных систем.

## 21.6. Получение разностных уравнений

Разностные уравнения могут быть получены на основании физических соображений при описании динамики систем, или с помощью дискретных передаточных функций замкнутых систем и их звеньев.

В первом случае непрерывная функция, описывающая динамику системы, заменяется решетчатой, из которой и получают разностное уравнение.

Во втором случае общий алгоритм получения разностного уравнения следующий:

- записывается уравнение исследуемого канала САУ в дискретных изображениях  $Y(z) = W(z)X(z)$ ;



- из полученного уравнения определяется дискретная передаточная функция замкнутой САУ, и представляется в виде полиномов по отрицательным степеням

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^n b_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)};$$

- осуществляется переход к разностному уравнению в изображениях

$$Y(z) \left( 1 + \sum_{i=0}^n b_i z^{-i} \right) = X(z) \sum_{i=0}^n a_i z^{-i};$$

- к полученному уравнению применяется теорема смещения  $z$ -преобразования и получается разностное уравнение в рекуррентной форме.

## 22. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 22.1. Расчетная модель дискретной системы

Любая дискретная система может быть приведена к схеме, состоящей из последовательно соединенных дискретного (импульсного) элемента ИЭ и непрерывной части НЧ системы (рис.22.1,а).

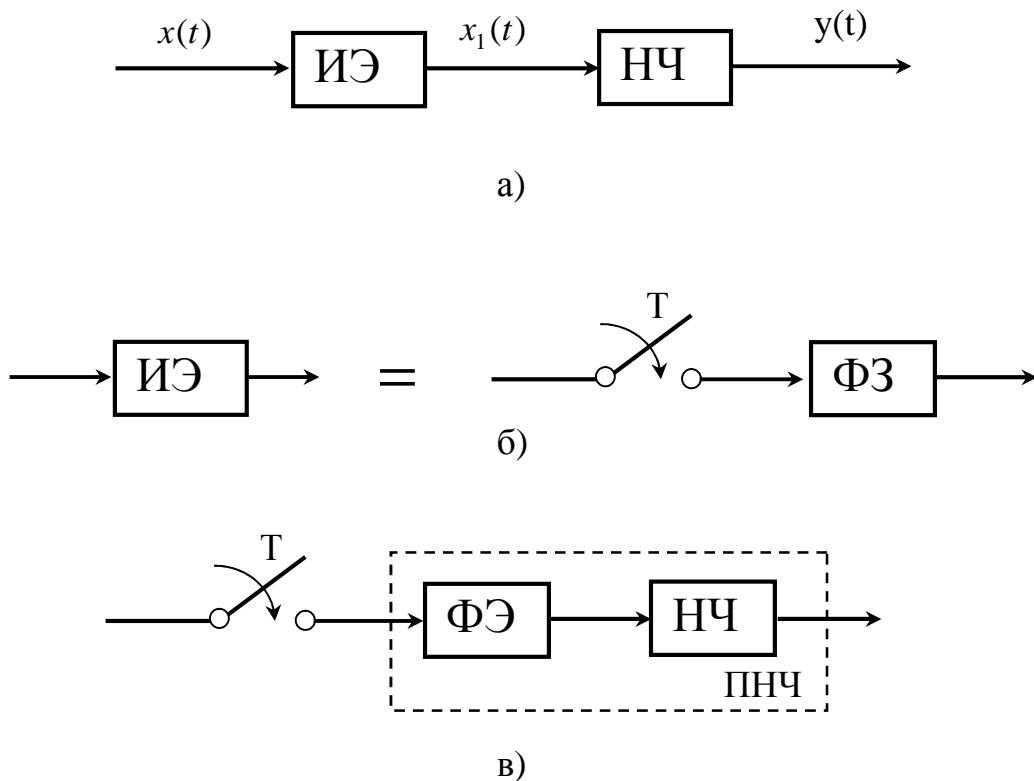


Рисунок 22.1 – Эквивалентное представление дискретной системы

Математический аппарат для исследования дискретных систем предполагает, что выходной сигнал импульсного элемента представляет собой последовательность идеальных импульсов. Но реальный импульсный элемент формирует импульсы определенной длительности. Поэтому реальный импульсный элемент представляют эквивалентной схемой в виде последовательного соединения идеального импульсного элемента, имеющего на выходе последовательность идеальных импульсов, и формирующего звена ФЭ, преобразующего идеальные импульсы, в импульсы по всем

характеристикам не отличающимися от импульсов на выходе реального импульсного элемента. Идеальный импульсный элемент на схемах изображается в виде ключа (рис.22.1,б).

Формирующее звено является линейным непрерывным элементом схемы, и его относят к непрерывной части (НЧ) системы и эту часть называют приведенной непрерывной частью системы (ПНЧ). Таким образом, расчетная модель дискретной системы в разомкнутом состоянии представляет собой схему, состоящую из последовательного соединения идеального импульсного элемента и приведенной непрерывной части системы (рис.22.1,в).

## 22.2. Передаточная функция формирующего звена

В модели линейной системы с амплитудно-импульсной модуляцией формирующее звено преобразует последовательность  $\delta$ -функций в последовательность прямоугольных импульсов, т.е. прямоугольный импульс является реакцией формирующего элемента на воздействие в виде  $\delta$ -функций. Таким образом, реакция формирующего звена на  $\delta$ -функцию представляет собой весовую характеристику  $w_{\phi}(t)$ . Как известно, изображение по Лапласу весовой функции есть передаточная функция.

Определим передаточную функцию формирующего звена. Для этого представим прямоугольный импульс – весовую функцию формирующего звена в виде, как показано на рис.22.2.

$$w_{\phi}(t) = k(t) - k(t - gT)$$

Амплитуду прямоугольного импульса примем равной единице.

Изображение по Лапласу весовой функции  $w_{\phi}(t)$ :

$$H(p) = L\{w_{\phi}(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-gTp} = \frac{1 - e^{-gTp}}{p}.$$

Данное выражение представляет собой передаточную функцию формирующего звена.

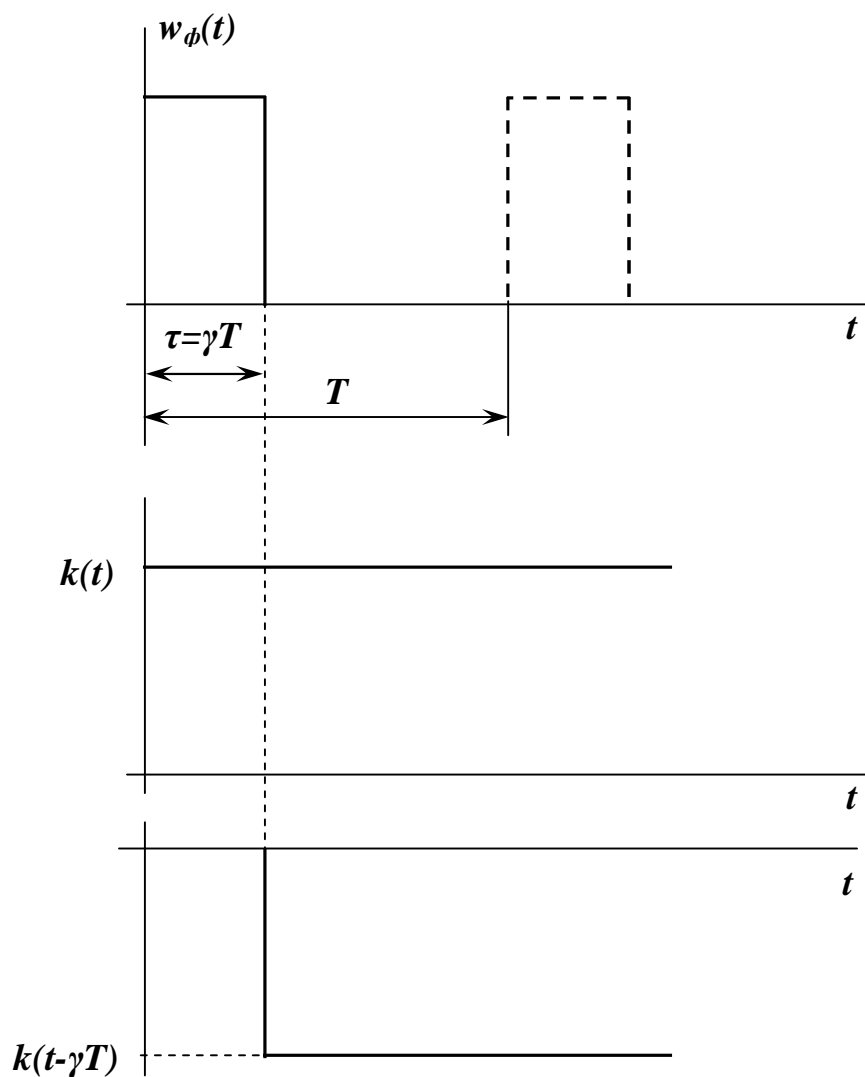


Рисунок 22.2. Представление прямоугольного импульса в виде двух скачкообразных функций

Если амплитуда прямоугольного импульса отлична от единицы и равна  $k_{И}$ , то передаточная функция формирующего элемента примет вид:

$$H(p) = k_{И} \frac{1 - e^{-gTp}}{p}.$$

Аналогично определяется передаточная функция формирующего элемента, имеющего на выходе импульсы другой формы.

Если  $g = 1$ , то передаточная функция формирующего элемента определяется выражением:

$$H_0(p) = k_{\text{И}} \frac{1 - e^{-Tp}}{p}.$$

Формирующий элемент с такой передаточной функцией называется фиксатором (экстраполятором) нулевого порядка. Такие фиксаторы получили наибольшее распространение в практике применения цифровых управляющих машин. Подавляющее большинство реальных восстанавливающих устройств описываются именно моделью фиксатора нулевого порядка. Это наиболее простой экстраполятор, легко реализуемый с помощью стандартной аппаратуры (ЦАП).

### 22.3. Математическое описание идеального импульсного элемента

Идеальный импульсный элемент представляет собой модулятор. Известно, что выходной сигнал модулятора  $x^*(t)$  равен произведению сигнала несущей  $x(t)$  на модулирующий сигнал  $d_T(t)$ .

Модулирующий сигнал  $d_T(t)$  есть последовательность  $d$ -функций:

$$d_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d(t - nT).$$

С учетом последовательности  $d$ -функций выражение для выходного сигнала идеального импульсного элемента имеет вид:

$$x^*(nT) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} d(t - nT).$$

Определим изображение по Лапласу функции  $x^*(t)$ . Для этого произведем некоторые преобразования.

$$x^*(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) d(t - nT);$$

$$D\{x^*(nT)\} = x^*(p) = D\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) d(t - nT)\right\}.$$

Поскольку величина  $x(nT)$  в течение периода  $T$  постоянна, то  $x(nT)$  можно вынести за знак преобразования  $D$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) D\{d(t-nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp}.$$

Таким образом, изображение по Лапласу сигнала модулированного идеальным импульсным элементом по существу является дискретным изображением по Лапласу решетчатой функции  $x(nT)$  соответствующей непрерывной функции  $x(t)$ .

Последнее выражение легко представить в виде  $z$ -изображения, применив подстановку  $z = e^{pT}$ :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}.$$

Последовательность импульсов  $d_T(t)$  можно представить рядом Фурье

$$d_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr w_0 t} = \frac{1}{T} (1 + e^{jw_0 t} + e^{jw_0 2t} + e^{jw_0 3t} + \dots),$$

где  $w_0 = \frac{2p}{T}$  - частота импульсов;

$r$  - номер гармоники.

С учетом последнего выражения, сигнал  $x^*(t)$  можно записать в виде:

$$x^*(t) = x(t) \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr w_0 t} = \frac{1}{T} x(t) + \frac{1}{T} x(t) e^{jw_0 t} + \frac{1}{T} x(t) e^{jw_0 2t} + \frac{1}{T} x(t) e^{jw_0 3t} + \dots$$

Применив к полученному выражению преобразование Лапласа и, учитывая теорему смещения, получим

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x(t) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr w_0 t} \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x(t) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{(jr w_0 - p)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X(p - jr w_0)$$

Полученное соотношение устанавливает аналитическую связь между обычным и дискретным преобразованиями Лапласа и получило в литературе название прямого D-преобразования.

Перейдем далее к преобразованию Фурье сигнала  $x^*(t)$ .

Преобразование Фурье для  $k$ -го члена запишется в виде:

$$X_k^*(p) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x_k^*(t) e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x_k^*(t) e^{j(k\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{T} X_k(j\omega - jk\omega_0)$$

а для всего выражения

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X(j\omega - jr\omega_0).$$

Последнее выражение показывает, что частотный спектр решетчатой функции  $x(nT)$  представляет собой сумму частотных спектров модулирующего сигнала, смещенных по оси частот на величины  $r\omega_0$ .

Частотный спектр решетчатой функции  $x(nT)$  показан на рис. 22.3.

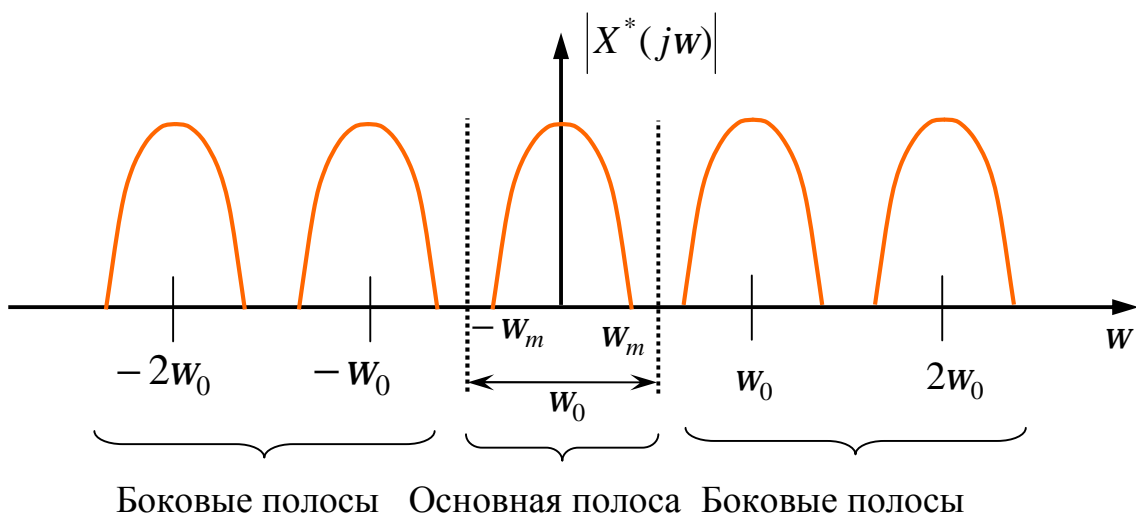


Рисунок 22.3. Частотный спектр решетчатой функции

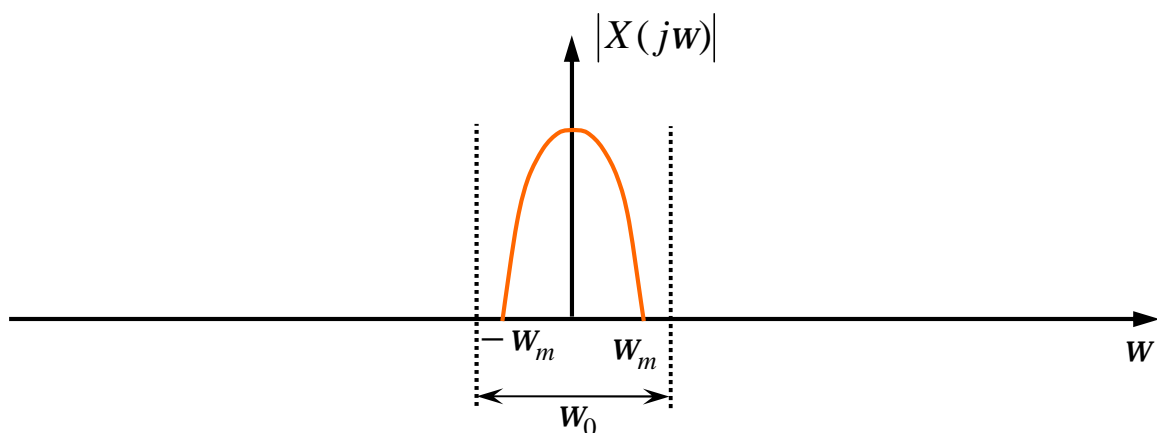


Рисунок 22.4. Частотный спектр непрерывного сигнала

Модуляция непрерывным сигналом  $x(t)$  последовательности  $d$ -функций  $d_T(t)$  приводит к появлению боковых (дополнительных) полос спектров, идентичных частотному спектру непрерывной функции, около частот, кратных частоте следования импульсов  $\omega_0$ . Реально существуют спектры сигнала, расположенные справа от оси ординат.

Восстановление непрерывной функции, т.е. полезного сигнала может быть произведено по одной из полос спектра. Выделение полезной информации производится фильтрами низких частот, которые отфильтровывают боковые полосы модулированного сигнала. Обычно роль фильтров выполняют сами непрерывные инерционные элементы системы.

Для того чтобы выделить полезную информацию без искажений из модулированного сигнала, необходимо чтобы основной и дополнительные спектры не перекрывали друг друга (рис.22.4, рис.22.5).

Это условие можно сформулировать в виде теоремы, которая носит название теоремы В.А. Котельникова.

Чтобы исходная непрерывная функция была восстановлена без потери информации из модулированного сигнала, необходимо, чтобы частота следования импульсов  $\omega_0$  была не менее чем в 2 раза выше наивысшей частоты  $\omega_m$  в спектре полезного сигнала.

*или*

Если непрерывный сигнал обладает спектром, ограниченным частотой  $\omega_m$ , то его квантование по времени с частотой  $\omega_0 \geq 2\omega_m$  не приводит к потере информации, т.е. сигнал однозначно и полностью представляется своими дискретными значениями, взятыми через интервал квантования

$$\Delta t = T = 0,5 \frac{2\pi}{\omega_m}.$$



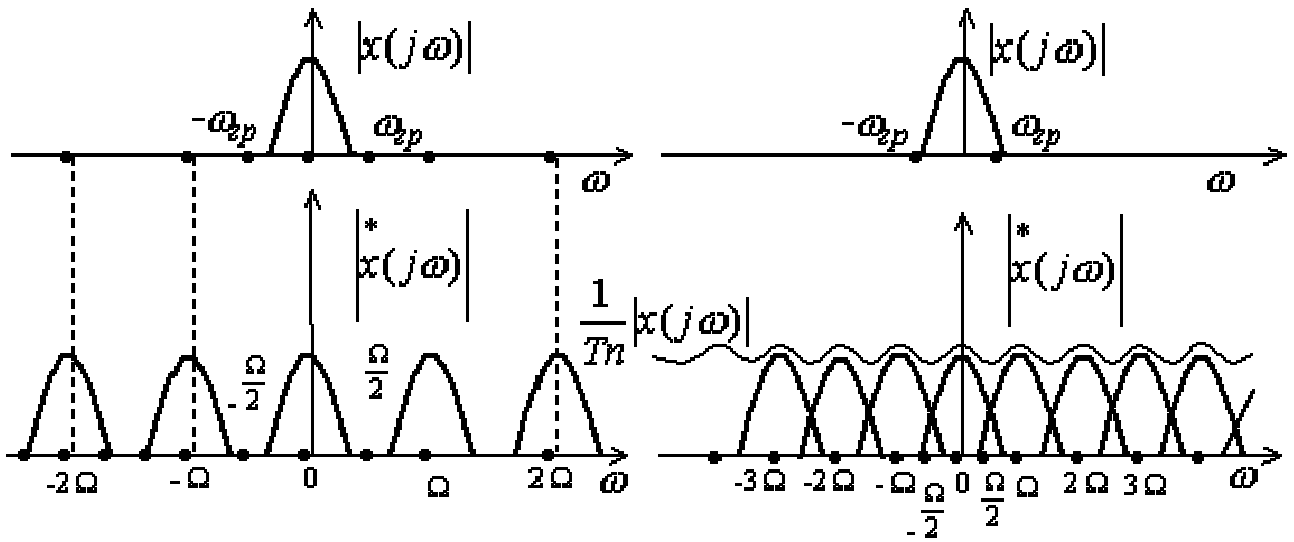


Рисунок 22.5. Частотный спектр дискретного процесса

### Теорема Котельникова-Шеннона

Непрерывный сигнал, преобразование Фурье которого равно нулю вне интервала  $(-W_m, W_m)$ , однозначно представляется своими значениями в равноотстоящих точках, если частота квантования больше  $W_m$ . Непрерывный сигнал может быть получен из дискретного по формуле

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin w_0(t - kT) / 2}{w_0(t - kT) / 2}$$

## 22.4. Дискретная передаточная функция

Дискретной передаточной функцией называется отношение дискретно-преобразованных по Лапласу ( $z$ -изображений) выходной величины  $Y^*(p)$  ( $Y(z)$ ) ко входной величине  $X^*(p)$  ( $X(z)$ ) при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим разомкнутую дискретную систему, изображенную на рис.22.6.

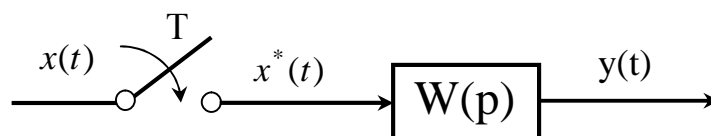


Рисунок 22.6. Разомкнутая дискретная система.

Определим выходную величину системы  $y(nT)$  в дискретные моменты времени, совпадающие с моментами замыкания ключа. Выходная величина  $y(nT)$  - есть реакция непрерывной части системы  $W(p)$  на последовательность  $\delta$ -функций на ее входе.

На основании принципа суперпозиции выходную величину системы определяем как сумму реакций непрерывной части на каждый в отдельности импульс последовательности  $\delta$ -функций:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n w[(n-m)T]x(mT),$$

где  $w(nT)$  - весовая функция непрерывной части системы.

Определим дискретное изображение по Лапласу или  $z$ -изображение от левой и правой частей последнего выражения:

$$D\{y(nT)\} = D\left\{\sum_{m=0}^n w[(n-m)T]x(mT)\right\};$$

$$Z\{y(nT)\} = Z\left\{\sum_{m=0}^n w[(n-m)T]x(mT)\right\}.$$

На основании теоремы свертки получим:

$$Y^*(p) = W^*(p)X^*(p) \quad \text{или} \quad Y(z) = W(z)X(z)$$

здесь  $W^*(p)$  - дискретное преобразование Лапласа, преобразование от решетчатой весовой функции непрерывной части системы.

Откуда дискретная передаточная функция:

- в форме дискретного преобразования Лапласа

$$W^*(p) = \frac{Y^*(p)}{X^*(p)};$$

- в форме  $z$ -изображений

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Как следует из выше изложенного, ДПФ определяется по весовой функции приведенной непрерывной части системы:

$$W^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} w(nT)e^{-pT} \quad \text{или} \quad W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(nT)z^{-n}.$$

В практических задачах удобнее определять дискретную передаточную функцию по передаточной функции непрерывной части, используя таблицы соответствия между обычным преобразованием Лапласа и дискретным или  $z$ -преобразованием для временных функций.

Порядок нахождения ДПФ разомкнутой системы следующий:

- передаточная функция непрерывной части системы представляется в виде суммы простейших передаточных функций

$$W(p) = \sum_{i=0}^k W_i(p);$$

- по простейшей передаточной функции  $W_i(p)$  определяется из таблиц соответствий изображение  $W_i(z)$  или  $W_i(z, s)$ ;
- дискретная передаточная функция разомкнутой системы определяется по формуле

$$W(z) = \sum_{i=0}^k W_i(z).$$

Если в типовой цепи после идеального импульсного элемента стоит фиксатор нулевого порядка, то ДПФ всей цепи может быть определена по формуле:

$$W(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_H(p) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \{h_H(t)\}$$

где  $W_H(p)$  - передаточная функция непрерывной части (без фиксатора).

При определении ДПФ необходимо учитывать следующую особенность дискретных систем:

- если на входе непрерывной части имеется один общий импульсный элемент, то

$$Z \{W_1(p)W_2(p)\} \neq Z \{W_1(p)\}Z \{W_2(p)\}.$$

В практических расчетах дискретных систем используют приближенные способы перехода от  $W(p)$  к ДПФ  $W(z)$ . Эти способы основаны на замене производной по времени, фигурирующей в уравнении непрерывной части, так называемой первой разностью:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}.$$

Наиболее часто используемая формула приближенного перехода от передаточных функций непрерывной части (без учета фиксатора) к ДПФ:

$$p = \frac{z-1}{Tz}.$$

Более точный переход от непрерывной системы к дискретной обеспечивает *подстановка Тастина*

$$p = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}.$$

При достаточно большой частоте дискретности, когда  $w_0 \gg w_H$ , где  $w_H$  - полоса пропускания непрерывной части системы, приближенные способы перехода, основанные на приведенных выше заменах, дают результаты, близкие к точным ДПФ, а частотные свойства импульсной цепи эквивалентны свойствам непрерывной части с АФХ  $W_H(jw)/T$ . Это условие эквивалентности обычно выполняется, если наибольшая постоянная времени непрерывной части больше периода квантования  $T$ .

## 22.5. Особенности преобразования структурных схем дискретных систем

Для определения ДПФ замкнутой дискретной системы можно использовать правила структурных преобразований типовых соединений, сформулированные для непрерывных систем. Но при этом следует помнить, что:

- обычные правила структурных преобразований справедливы для дискретных систем, только если каждая ветвь типового соединения

представляет собой типовую импульсную цепь, состоящую из идеального квантователя (на входе) и непрерывной части;  
 - при иной структуре цепи и всего типового соединения эквивалентная ДПФ определяется более сложными правилами.

Рассмотрим разомкнутую дискретную систему, схема которой приведена на рис.22.7.

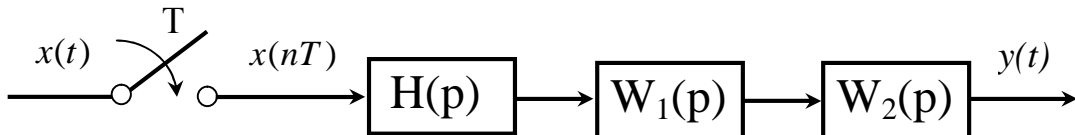


Рисунок 22.7. Структурная схема разомкнутой дискретной системы

Запишем уравнение этой системы в форме изображений по Лапласу:

$$Y(p) = H(p)W_1(p)W_2(p)X^*(p).$$

Переменная  $x(nT)$  - решетчатая функция, поэтому в последнем выражении она представлена в виде дискретного изображения по Лапласу. Произведение передаточных функций для краткости можно записать в виде

$$H(p)W_1(p)W_2(p) = HW_1W_2(p).$$

Представим переменную  $y(t)$  в форме дискретного изображения по Лапласу (или z-изображения):

$$Y^*(p) = X^*(p)D\{HW_1W_2(p)\} = X^*(p)HW_1W_2^*(p)$$

или

$$Y(z) = X(z)Z\{HW_1W_2(p)\} = X(z)HW_1W_2(z).$$

Знак дискретного преобразования Лапласа (z-преобразования) относится ко всему произведению  $HW_1W_2^*(p)$   $HW_1W_2(z)$ .

Из полученных выражений можно определить ДПФ разомкнутой системы:

$$W^*(p) = \frac{Y^*(p)}{X^*(p)} = HW_1W_2^*(p) \quad \text{или} \quad W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = HW_1W_2(z).$$

Рассмотрим разомкнутую дискретную систему, схема которой приведена на рис.22.8.

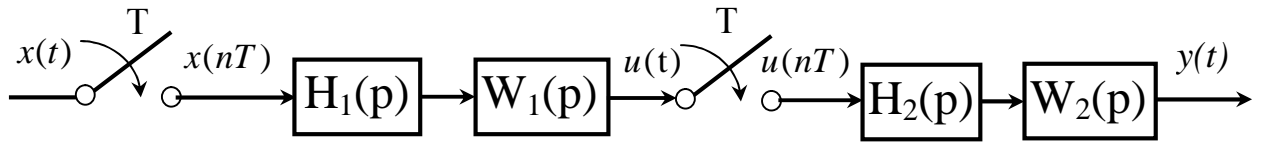


Рисунок 22.8. Структурная схема разомкнутой дискретной системы

Запишем уравнение этой системы в форме изображений по Лапласу:

$$U(p) = H_1 W_1(p) X^*(p);$$

$$Y(p) = H_2 W_2(p) U^*(p).$$

Определим дискретное изображение по Лапласу сигналов  $y(t)$  и  $u(t)$ :

$$U^*(p) = H_1 W_1^*(p) X^*(p);$$

$$Y^*(p) = H_2 W_2^*(p) U^*(p).$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$Y^*(p) = H_2 W_2^*(p) H_1 W_1^*(p) X^*(p).$$

Откуда определяются дискретные передаточные функции разомкнутой системы:

$$W^*(p) = \frac{Y^*(p)}{X^*(p)} = H_1 W_1^*(p) H_2 W_2^*(p),$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1 W_1(z) H_2 W_2(z).$$

Таким образом, если разомкнутая система содержит несколько импульсных элементов, включенных между инерционными непрерывными элементами, то дискретная передаточная функция определяется как произведение дискретных передаточных функций участков цепи, заключенных между импульсными элементами.

Рассмотрим дискретную систему с единичной обратной связью, схема которой приведена на рис. 22.9.

Сначала рассмотрим случай, когда внешнее возмущение отсутствует,  $f(t) = 0$ .

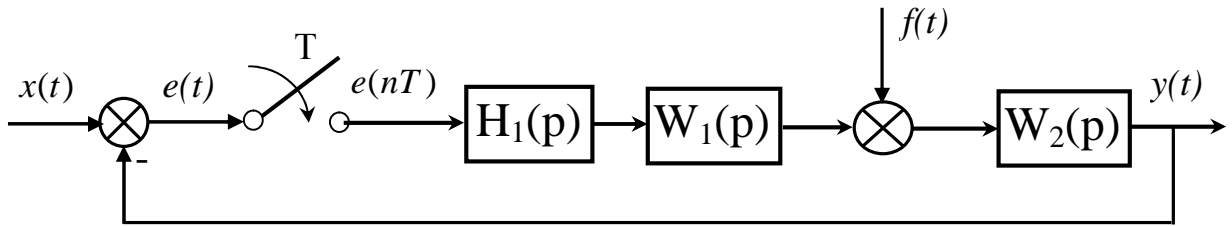


Рисунок 22.9. Структурная схема замкнутой дискретной системы

Запишем уравнения, описывающие поведение этой системы:

$$Y(p) = HW_1W_2(p)E^*(p);$$

$$E(p) = X(p) - Y(p) = X(p) - HW_1W_2(p)E^*(p),$$

где  $Y(p)$  - выходная координата системы в изображениях по Лапласу;

$E(p)$  и  $E^*(p)$  - ошибка системы в изображениях по Лапласу обычном и дискретном до и после импульсного элемента соответственно;

Выразим переменные  $E(p)$  и  $X(p)$  в последнем уравнении в форме дискретного преобразования Лапласа:

$$E^*(p) = X^*(p) - HW_1W_2^*(p)E^*(p)$$

откуда

$$E^*(p) = \frac{1}{1 + HW_1W_2^*(p)} X^*(p).$$

Последнее уравнение для  $E^*(p)$  подставим в исходное уравнение для  $Y(p)$ :

$$Y(p) = \frac{HW_1W_2(p)}{1 + HW_1W_2^*(p)} X^*(p).$$

Найдем дискретное изображение по Лапласу для  $Y(p)$ :

$$Y^*(p) = \frac{D\{HW_1W_2(p)\}}{1 + HW_1W_2^*(p)} X^*(p) = \frac{HW_1W_2^*(p)}{1 + HW_1W_2^*(p)} X^*(p).$$

Определяем дискретные передаточные функции системы по управляющему воздействию и ошибке:

$$W^*(p) = \frac{Y^*(p)}{X^*(p)} = \frac{HW_1W_2^*(p)}{1 + HW_1W_2^*(p)};$$

$$W_E^*(p) = \frac{E^*(p)}{X^*(p)} = \frac{1}{1 + HW_1W_2^*(p)}$$

или в форме z-изображений:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{HW_1W_2(z)}{1 + HW_1W_2(z)}; \quad W_E(z) = \frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + HW_1W_2(z)}.$$

Отметим, что для дискретной системы понятия передаточной функции относительно ошибки, измеренной непосредственно после сумматора (до импульсного элемента) не существует.

Рассмотрим случай, когда возмущение приложено к непрерывной части системы. Пусть  $x(t) = 0$ .

Определим уравнение, связывающее выходную координату системы  $Y(p)$  с возмущением  $F(p)$ :

$$Y(p) = F(p)W_2(p) - Y^*(p)HW_1W_2(p).$$

Найдем дискретное изображение по Лапласу для  $Y(p)$ :

$$D\{Y(p)\} = D\{FW_2(p)\} - Y^*(p)D\{HW_1W_2(p)\}$$

$$Y^*(p) = FW_2^*(p) - Y^*(p)HW_1W_2^*(p),$$

откуда

$$Y^*(p) = \frac{FW_2^*(p)}{1 + HW_1W_2^*(p)}.$$

Из последнего выражения видно, что переменную  $F^*(p)$  нельзя вынести из-под знака дискретного преобразования Лапласа и, следовательно, нельзя получить дискретную передаточную функцию системы относительно возмущения.

Таким образом, для системы, у которой возмущение приложено к непрерывной части, понятия дискретной передаточной функции относительно возмущения не существует.



## 22. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Построение частотных характеристик дискретных систем имеет ряд особенностей, обусловленных их периодичностью с периодом, кратным частоте квантования  $w_0 = \frac{2p}{T}$ .

Выражения для частотных характеристик импульсных систем получаются из их передаточных функций путем замены оператора  $z$  на  $e^{jwT}$ . Так как частота  $w$  входит в показатель степени числа  $e$ , то частотные характеристики являются периодическими функциями частоты, период изменения которых равен  $\pm p/T$ . Следовательно, нельзя различить составляющие, частоты которых кратны частоте квантования импульсного элемента  $w_0 = 2p/T$ .

Таким образом, частотная передаточная функция разомкнутой импульсной системы имеет вид:

$$W(e^{jwT}) = W(z) \Big|_{e^{jwT}}$$

Функция  $W(e^{jwT})$  представляет собой комплексный спектр дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы  $W(z)$  и полностью характеризует частотные свойства разомкнутой системы, т.е. позволяет вычислить установившуюся реакцию системы на решетчатое гармоническое воздействие  $x(nT) = X_m \sin(wnT)$  произвольной частоты  $w$ .

Как и для обыкновенных линейных систем, рассматривают амплитудную, фазовую, вещественную и мнимую частотную характеристики:

$$A(w) = |W(e^{jwT})|;$$
$$j(w) = \arg W(e^{jwT});$$

$$P(w) = \operatorname{Re} W(e^{jwT});$$

$$Q(w) = \operatorname{Im} W(e^{jwT}).$$

### Свойства частотных характеристик импульсных систем.

1. В соответствии с периодичностью частотной передаточной функции амплитудно-фазовая частотная характеристика  $W(e^{jwT})$  полностью определяется своими значениями в интервале  $-p/T \leq w \leq p/T$ .

2. Так как вещественная частотная характеристика является четной функцией, а мнимая - нечетной, то достаточно рассматривать интервал частот  $0 \leq w \leq p/T$ .

3. В крайних точках интервала  $0 \leq w \leq p/T$  амплитудно-фазовая частотная характеристика принимает вещественные значения.

4. При уменьшении периода дискретности  $T$ , т.е. при увеличении частоты квантования  $w_0 = 2p/T$ , частотные характеристики импульсных систем приближаются к частотным характеристикам непрерывных систем. При этом частотный интервал  $0 \leq w \leq p/T$  растягивается на всю ось  $w$  при  $T \rightarrow 0$ .

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой импульсной системы  $W(e^{jwT})$  строится по точкам в интервале частот  $0 \leq w \leq p/T$ .

Существуют следующие способы построения частотных характеристик:

- 1) по дискретной передаточной функции  $W(z)$  с заменой  $z = e^{jwT}$ ;
- 2) по весовой функции приведенной непрерывной части дискретной системы;
- 3) по частотной характеристике непрерывной части на основе соотношения:

$$W^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(p - jr\omega_0),$$

где  $W^*(p)$  - дискретная передаточная функция;

4) с использованием  $w$ -преобразования.

### **Способ 1.**

Дискретная передаточная функция системы представляется в виде суммы простейших передаточных функций:

$$W(z) = \frac{R(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i(z)}{Q_i(z)} = \sum_{i=1}^n W_i(z).$$

Построение частотных характеристик по  $W_i(z)$  осуществляется в диапазоне частот  $0 \leq \omega \leq p/T$  обычным путем. Затем частотная характеристика дискретной системы определяется как сумма частотных характеристик  $W_i^*(j\omega)$ .

### **Способ 2.**

ДПФ системы выражается через решетчатую весовую функцию соотношением

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(nT)z^{-n}.$$

Произведем замену  $z = e^{j\omega T}$

$$W_i^*(j\omega) = W(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} w(nT)e^{-j\omega nT}$$

Последнее выражение определяет алгоритм построения частотных характеристик. На рис. 23.1. показан пример построения АФХ. Точка АФХ для частоты  $\omega_1$  получена как сумма комплексных величин

$$W^*(j\omega_1) = 0 + w_1 e^{-j\omega_1 T} + w_2 e^{-j2\omega_1 T} + w_3 e^{-j3\omega_1 T} + w_4 e^{-j4\omega_1 T} + \dots$$

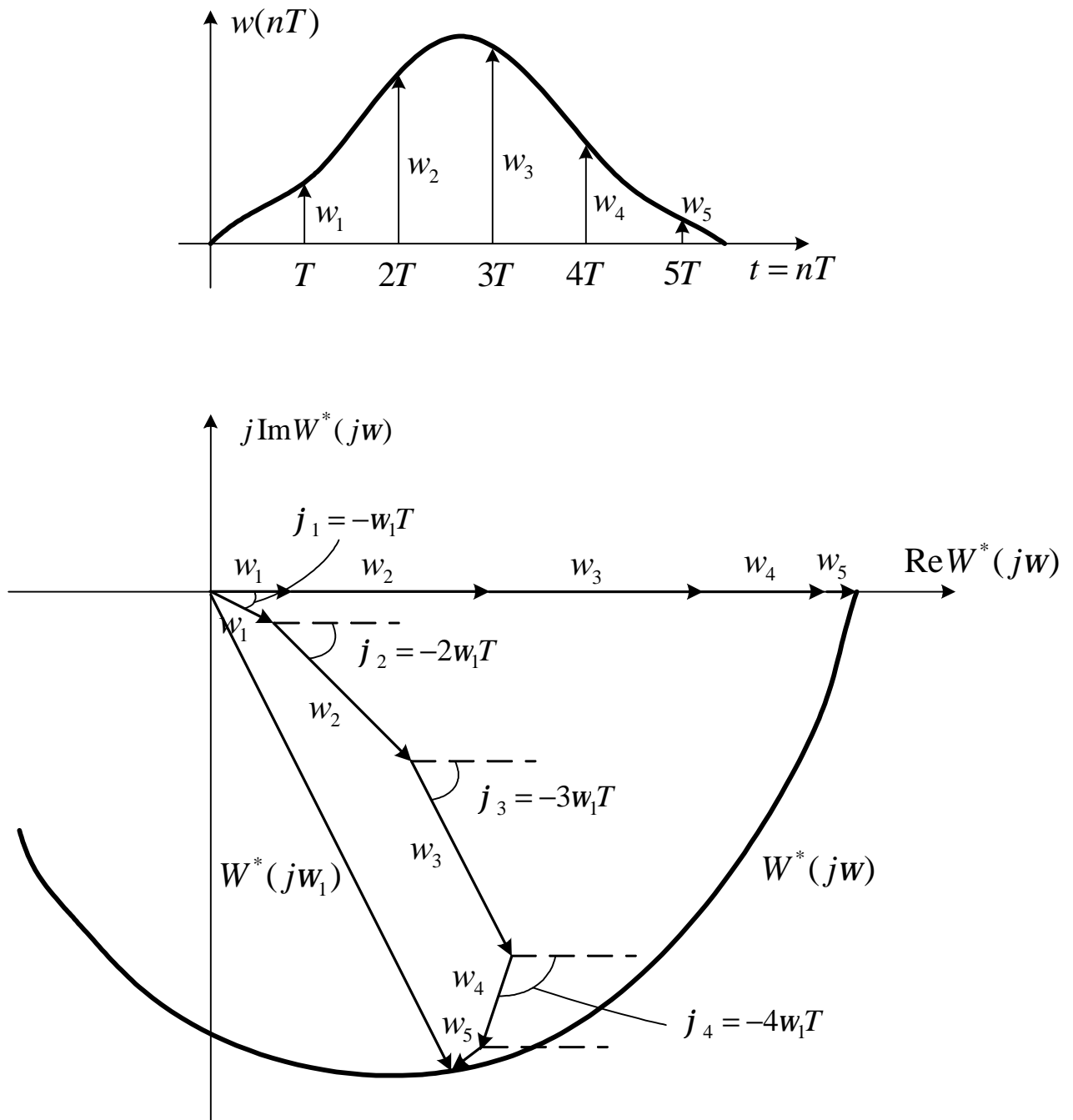


Рисунок 23.1. Пример построения АФХ дискретной системы по весовой функции приведенной непрерывной части системы

**Способ 3.**

Произведя замену  $p = j\omega$  в выражении

$$W^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(p - jr\omega_0),$$

получим выражение, связывающее частотную характеристику дискретной системы с частотной характеристикой ее приведенной непрерывной части:

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W(j\omega - jr\omega_0) = \frac{1}{T} W(j\omega) + \frac{1}{T} W(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{T} W(j\omega + j\omega_0) + \dots$$

Как правило,  $\omega \leq p/T$ . Построение частотных характеристик дискретных систем обычно производится по трем первым членам ряда, поскольку благодаря фильтрующим свойствам непрерывной части модули  $|W(j\omega \pm jr\omega_0)|$  при  $r \geq 2$  величины малые, которыми можно пренебречь.

На рис. 23.2 показан способ нахождения  $W^*(j\omega_i)$  для некоторого значения частоты  $\omega_i$ . Аналогично находится для других значений частот в диапазоне  $0 \leq \omega \leq p/T$ .

#### Способ 4.

Частотные характеристики импульсных систем, описываются трансцендентными выражениями. Их определение связано со сложными расчетами, поэтому на практике применяются частотные характеристики относительно абсолютной псевдочастоты  $l$ . Переход к псевдочастоте основан на переходе от  $z$ -преобразования к  $w$ -преобразованию с помощью подстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad w = \frac{z-1}{z+1}$$

с последующей заменой комплексной переменной  $w$  на абсолютную псевдочастоту

$$w = j \frac{T}{2} l.$$

При этом реальная частота  $\omega$  и псевдочастота  $l$  связаны соотношением

$$l = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}.$$

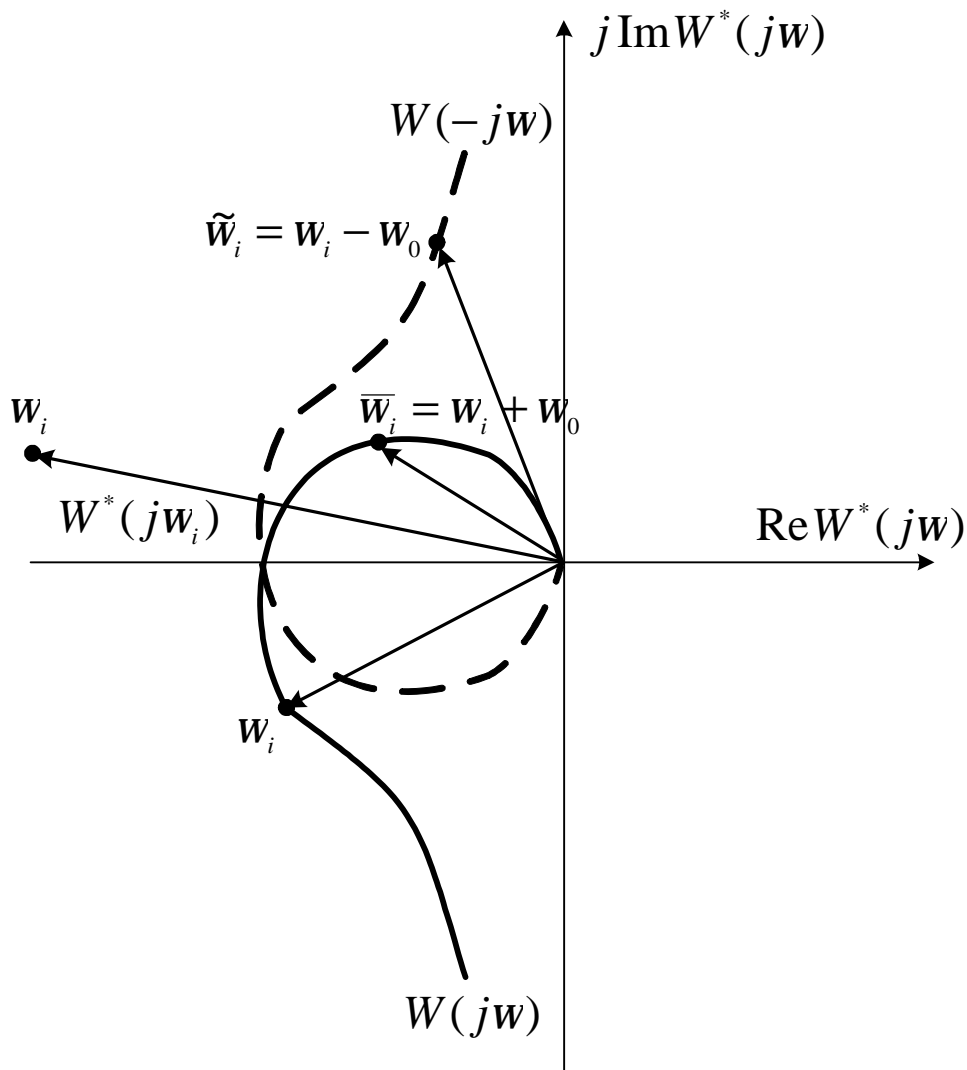


Рисунок 23.2. Пример построения АФХ дискретной системы по АФХ ее непрерывной части

Удобство псевдо частоты заключается в том, что, как следует из последнего соотношения, на частотах где выполняется условие  $wT < 2$ , она приближенно равна угловой частоте, т.е.  $l \approx w$ . Нетрудно убедиться, что при изменении частоты  $w$  от  $-p/T$  до  $p/T$  псевдо частота  $l$  принимает значение от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Если частота  $w_0 = 2p/T$  выбрана достаточно высокой, т.е. период следования импульсов значительно меньше постоянных времени непрерывных звеньев системы, то частотные характеристики дискретной системы и непрерывной части в существенном диапазоне частот совпадают,

что позволяет во многих случаях с удовлетворительной точностью применять методы анализа и синтеза непрерывных систем к дискретным системам.

Для перехода от дискретной передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$  к частотной характеристике  $W(j\Omega)$  следует сделать замену

$$z = \frac{1 + j\Omega T/2}{1 - j\Omega T/2}.$$

Полученное уравнение может быть использовано для построения логарифмических частотных характеристик.

**Приближенный способ построения ЛЧХ дискретных систем.** Для удобства логарифмические частотные характеристики строятся отдельно для областей низких и высоких частот. Границей, разделяющей частотную область на низкочастотную и высокочастотную, служит частота среза  $\omega_c$  в предположении, что  $\omega_c < \frac{2}{T}$ , где  $T$  - период дискретности.

Последнее условие необходимо выполнять вследствие требований, предъявляемых к обеспечению запаса устойчивости и точности работы системы, и согласуется с теоремой Котельникова-Шеннона.

Рассмотрим методику построения ЛЧХ на примере дискретной системы, включающей в себя экстраполятор нулевого порядка и непрерывную часть с передаточной функцией:

$$W_{HЧ}(p) = \frac{k \prod_{j=1}^m (t_j p + 1)}{p^r \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}$$

При построении вводят следующие предположения:

- величина, обратная периоду дискретности  $T$ , больше половины частоты среза  $\omega_C$ , т.е.  $\omega_C < \frac{2}{T}$ ;
- переход оси нуля децибел асимптотической ЛАХ непрерывной части происходит при отрицательном наклоне  $-20$  дб/дек;
- постоянным времени  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза.

4. Имеется  $s$  ( $s < n$ ) постоянных времени  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), которым соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза.

При принятых допущениях для области низких частот передаточную функцию непрерывной части можно представить в виде

$$W_{HЧ}^H(p) = \frac{k \prod_{j=1}^m (t_j p + 1)}{p^r \prod_{i=1}^s (T_i p + 1)} \quad (23.1)$$

а для области высоких частот

$$W_{HЧ}^B(p) = \frac{\omega_C}{p \prod_{i=s+1}^n (T_i p + 1)} \quad (23.2)$$

Выражение для ДПФ с фиксатором нулевого порядка получаем из выражения

$$W(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_H(p) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\} = \frac{z - 1}{z} Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\}$$

Для перехода от дискретной передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$  к частотной характеристике  $W(jl)$  следует сделать замену

$$z = \frac{1 + jlT/2}{1 - jlT/2}$$

По выражениям (23.1) и (23.2) получим частотные характеристики разомкнутой дискретной системы для области низких частот



$$W^H(jl) = (1 - jlT/2) \times \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + jl t_j)}{(jl)^r \prod_{i=1}^s (1 + jl T_i)} \quad (23.3)$$

для области высоких частот

$$W^B(jl) = \frac{w_C (1 - jlT/2) [1 + jl(T/2 - T_\Sigma)]}{(jl) \cdot (1 + jlT/2)}, \quad (23.4)$$

$$\text{где } T_\Sigma = \sum_{i=s+1}^n T_i.$$

Сравнение выражения (23.3) с (23.1) показывает, что в низкочастотной области частотная передаточная функция импульсной системы может быть получена из передаточной функции непрерывной части подстановкой  $p = jl$  и умножением на дополнительный множитель  $(1 - jlT/2)$ . Псевдочастота  $l$  в этой области практически совпадает с круговой частотой  $w$ . Влиянием дополнительного множителя при построении частотных характеристик в низкочастотной области можно пренебречь, так как  $w_C < 2/T$ .

Таким образом, в области низких частот частотные характеристики импульсной системы совпадают с частотными характеристиками ее непрерывной части.

Начало логарифмических частотных характеристик в высокочастотной области (23.4) сливается с концом частотных характеристик, построенных в низкочастотной области. На основании (23.3) и (23.4) можно записать выражение результирующей частотной передаточной функции разомкнутой дискретной системы

$$W(jl) = \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + jl t_j)}{(jl)^r \prod_{i=1}^s (1 + jl T_i)} \times \frac{(1 - jlT/2) [1 + jl(T/2 - T_\Sigma)]}{(1 + jlT/2)},$$

$$\text{где } T_\Sigma = \sum_{i=s+1}^n T_i.$$

Это выражение представляет собой произведение элементарных типовых сомножителей, поэтому его легко использовать для построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем. Результирующий фазовый сдвиг определяется как

$$j(\omega) = -r \times \frac{p}{2} + \sum_{j=1}^m \operatorname{arctg} \omega t_j + \operatorname{arctg} \omega (T/2 - T_{\Sigma}) - 2 \operatorname{arctg} \omega T/2 - \sum_{i=1}^s \operatorname{arctg} \omega T_i$$

## 24. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 24.1. Общее условие устойчивости дискретных систем

Устойчивость системы характеризуется ее свободным движением, которое определяется свободной составляющей процесса регулирования выходной величины. Линейная дискретная система называется устойчивой, если свободная составляющая процесса регулирования  $y_{св}(n, \mathcal{S})$  затухает с течением времени. Сформулированное условие устойчивости сводится к выполнению равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{св}(n, \mathcal{S}) = 0 \quad (24.1)$$

для всех  $\mathcal{S}$  из интервала  $0 < \mathcal{S} < 1$ . Если хотя бы для одного значения  $\mathcal{S}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{св}(n, \mathcal{S}) = \infty \quad (24.2)$$

то дискретная система называется неустойчивой. Если, наконец,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{св}(n, \mathcal{S}) = const \quad (24.3)$$

или не существует, то дискретная система находится на границе устойчивости.

В подавляющем большинстве случаев величина предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{св}(n, \mathcal{S})$  при любом  $\mathcal{S}$  определяется его значением при  $\mathcal{S} = 0$ . В тех случаях, когда при  $\mathcal{S} = 0$  выполняется соотношение (24.1), а при  $\mathcal{S} \neq 0$  - любое из соотношений (24.2), (24.3) говорят о так называемой высокочастотной неустойчивости дискретной системы.

Таким образом, чтобы оценить устойчивость дискретной системы, необходимо найти свободную составляющую процесса регулирования. Свободная составляющая процесса управления определяется решением однородного разностного уравнения замкнутой дискретной системы

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_m y(n-m) = 0, \quad (24.4)$$

где  $m$  - порядок системы.

Решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y_{св}(n) = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n \quad (24.5)$$

где  $z_i$  - корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m = 0 \quad (24.6)$$

$C_i$  - постоянные коэффициенты, значения которых зависят от свойств системы, характера внешнего воздействия и относительного времени  $S$ .

Из решения (24.5) следует, что для устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения замкнутой системы (полюса передаточной функции замкнутой дискретной системы  $W_3(z)$ ) удовлетворяли условию

$$|z_i| < 1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (24.7)$$

Если хотя бы один корень  $|z_i| > 1$ , система будет неустойчивой. Значением какого-либо корня  $|z_i| = 1$  при всех остальных  $|z_i| < 1$  определяется граница устойчивости дискретной системы.

*Для устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения замкнутой системы находились внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.*

Графически область устойчивости дискретной системы на плоскости  $z$  корней характеристического уравнения изображается единичным кругом.



Рисунок 24.1. Области устойчивости на плоскости  $z$

Таким образом, исследование устойчивости сводится к изучению расположения корней характеристического уравнения замкнутой дискретной системы относительно единичной окружности.

Для суждения об устойчивости дискретных систем можно использовать обычные критерии устойчивости линейных систем, но при этом приходится учитывать лишь некоторые особенности дискретных систем.

### 24.2. Критерий устойчивости Гурвица.

Для того чтобы применить критерий Гурвица, необходимо предварительно в характеристическом уравнении замкнутой дискретной системы

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$$

произвести замену переменной  $z$  на переменную  $w$  путем подстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w}.$$

В результате подстановки получаем преобразованное характеристическое уравнение:

$$A_0 w^n + A_1 w^{n-1} + A_2 w^{n-2} + \dots + A_n = 0.$$

Исследование устойчивости по полученному преобразованному характеристическому уравнению производится в соответствии с критерием Гурвица для непрерывных систем.

### 24.3. Критерий устойчивости Михайлова.

Записывают характеристический полином замкнутой дискретной системы:

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n.$$

В полученном выражении выполняют замену:

$$z = e^{j\omega T}$$

$$F(e^{j\omega T}) = a_0(e^{j\omega T})^n + a_1(e^{j\omega T})^{n-1} + a_2(e^{j\omega T})^{n-2} + \dots + a_n$$

Изменяя частоту  $\omega$  от 0 до  $p/T$  в комплексной плоскости строят годограф вектора  $F(e^{j\omega T})$  - характеристическую кривую, кривую Михайлова.

Дискретная система устойчива, если при возрастании  $\omega$  от 0 до  $p/T$  характеристический вектор системы  $F(e^{j\omega T})$  повернется против часовой стрелки на угол  $nT$ .

Если годограф характеристического вектора  $F(e^{j\omega T})$  проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости.

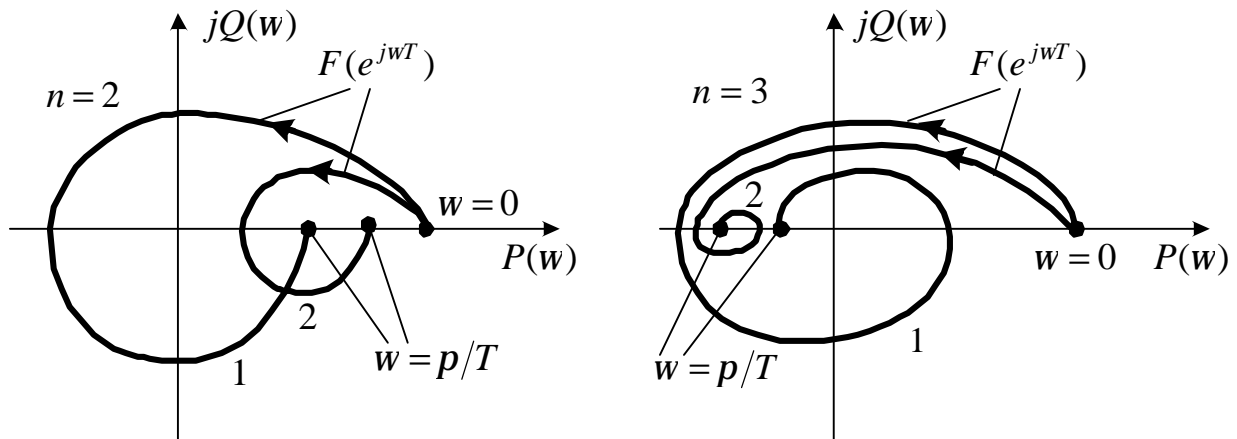


Рисунок 24.2. Примеры годографов Михайлова дискретных систем

#### 24.4. Критерий устойчивости Найквиста

Порядок исследования аналогичен, как и для непрерывных систем:

- по передаточной функции  $W(z)$  строится на комплексной плоскости АФЧХ разомкнутой системы  $W(e^{j\omega T})$ ;

- определяется число полюсов  $W(z)$  лежащих вне круга единичного радиуса (оно, как правило, совпадает с числом положительных полюсов передаточной функции непрерывной части  $W(p)$ );

- применяют критерий Найквиста в следующих формулировках:

1. Для того чтобы замкнутая дискретная система, непрерывная часть которой не имеет положительных полюсов была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой дискретной системы  $W(e^{j\omega T})$  при возрастании частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  не охватывала точку  $(-1; j0)$ .
2. Чтобы замкнутая дискретная система, непрерывная часть которой имеет  $l$  положительных полюсов была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой дискретной системы  $W(e^{j\omega T})$  при возрастании частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  охватывала точку  $(-1; j0)$   $l/2$ -раз.
3. Чтобы замкнутая дискретная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой дискретной системы  $W(e^{j\omega T})$  отрезка действительной оси  $(-\infty; -1)$  равнялась  $l/2$ .
4. Чтобы замкнутая дискретная система, непрерывная часть которой нейтральна (имеет нулевые корни) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой дискретной системы  $W(e^{j\omega T})$  вместе с дополнением ее дугой бесконечно-большого радиуса начинающейся на положительном направлении действительной оси не охватывала точку  $(-1; j0)$ .

Следует учитывать, что если АФЧХ начинается или заканчивается на отрезке  $(-\infty; -1)$ , то считается, что кривая  $W(e^{j\omega T})$  совершает половину перехода через отрезок действительной оси.

## 25. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Качество дискретных систем управления характеризуется такими же показателями, как и качество непрерывных систем: точностью в установившихся режимах, длительностью и перерегулированием переходного процесса.

*Длительность и перерегулирование* оценивают непосредственно по переходной характеристике. Переходная характеристика дискретной системы строится гораздо проще, чем для непрерывной системы. Для этого записывают z-изображение выходной величины при единичном ступенчатом воздействии

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \Phi(z),$$

а затем по изображению находят оригинал – решетчатую функцию  $x(iT)$ .

В простых случаях функцию  $x(iT)$  можно найти при помощи таблиц обратного z-преобразования, разложив предварительно изображение  $X(z)$  на простые дроби.

В тех случаях, когда разложение на дроби связано с трудностями, целесообразно разложить функцию  $X(z)$  в степенной ряд по отрицательным степеням  $z$  (делением числителя на знаменатель):

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{-i} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_l z^{-l} + \dots$$

Из определения z-преобразования вытекает, что коэффициенты степенного ряда по степеням  $z^{-1}$  представляют собой значения переходной характеристики  $h(t)$  в дискретные моменты времени  $t = iT$  ( $i = 1; 2; 3; \dots$ ), т.е.  $c_0 = x(0); c_1 = x(T); c_2 = x(2T); \dots; c_l = x(lT); \dots$

Дискретные системы обладают специфической особенностью: переходные процессы в них могут заканчиваться за конечное число периодов  $T$ , равное порядку системы  $n$ . Условием получения конечной длительности переходного процесса является равенство всех (кроме первого)



коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы  $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$  нулю:  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ .

При этом характеристический полином системы имеет вид:

$$F(z) = a_0 z^n,$$

а изображение выходной величины оказывается конечным рядом отрицательных степеней  $z$ :

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \Phi(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{K(z)}{a_0 z^n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n},$$

что соответствует переходному процессу с конечной длительностью  $t_{II} = nT$ .

При любом другом соотношении коэффициентов длительность переходного процесса больше  $nT$ . Поэтому процесс с конечной длительностью будет оптимальным по быстродействию.

**Точность** дискретной системы оценивают по установившемуся значению сигнала ошибки:

$$e(\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} e(iT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_E(z) X(z).$$

При ступенчатом воздействии  $x(t) = a1(t)$  установившаяся ошибка:

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+W(z)} \frac{az}{z-1} = \frac{a}{1+W(z)}$$

и называется статической ошибкой или ошибкой системы по положению.

При  $x(t) = a \cdot t$  установившаяся ошибка называется ошибкой системы от скорости и определяется как

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{aT}{(1-z)W(z)}$$

Если  $x(t) = \frac{a \cdot t^2}{2!}$ , то получаем ошибку системы от ускорения:

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{aT^2}{(1-z)^2 W(z)}$$

Из последних двух выражений следует, что установившаяся ошибка от задающего воздействия дискретных системы не только прямо

пропорциональна величине задающего воздействия, но и периоду дискретности.

Дискретные системы классифицируются в соответствии с числом полюсов дискретной передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$  при  $z=1$ . Если дискретная передаточная функция дискретной разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{W^*(z)}{(z-1)^n}$$

а  $W^*(z)$  не содержит полюсов при  $z=1$ , то при  $n=0$  система называется *статической*, при  $n=1$  - *астатической первого порядка* и т.д.

Для того чтобы дискретная система имела нулевую установившуюся ошибку от задающего воздействия, необходимо, чтобы степень астатизма  $n$  системы превышала степень полинома  $q$  входного воздействия  $x(t)$ , то есть:

$$e(\infty) = 0, \text{ если } q < n;$$

$$e(\infty) = \frac{aT^q}{W(1)}, \text{ если } q = n;$$

$$e(\infty) = \infty, \text{ если } q > n;$$

Отсюда видно, что при ступенчатом воздействии ошибка будет равна нулю, если передаточная функция  $W(z)$  разомкнутого контура имеет хотя бы один полюс, равный единице. Аналогично можно показать, что при линейном воздействии ошибка равна нулю, если не менее двух полюсов равны единице.

*Коэффициенты ошибок.* Если задающее воздействие  $x(t)$  имеет произвольный вид, предельное значение ошибки вычисляется по формуле

$$e(n) = C_0 x(n) + C_1 x'(n) + \frac{C_2}{2!} x''(n) + \dots + \frac{C_k}{k!} x^{(k)}(n),$$

где  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , - коэффициенты ошибок по положению, скорости, ускорению.

Коэффициенты ошибок находят по дискретной передаточной функции замкнутой импульсной системы по ошибке

$$C_i = i! \cdot \left. \frac{d^i}{dz^i} W_{e3}(z) \right|_{z=1}, \text{ для } i = 0, 1, 2, \dots, k$$

Число коэффициентов находится в соответствии с наибольшей степенью полинома входного воздействия.

В астатических системах несколько первых коэффициентов ошибок равны нулю:  $C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = 0$ , где  $n$  - порядок астатизма.

## 26. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 26.1. Синтез корректирующих устройств в дискретных системах методом ЛЧХ

При расчете дискретных систем методом ЛЧХ в первую очередь определяют желаемую ЛЧХ дискретной системы, которая удовлетворяет заданным показателям качества.

Заданные показатели качества дискретной системы можно обеспечить с помощью непрерывных или дискретных корректирующих устройств.

Расчет корректирующих устройств (определение их структуры и параметров) существенно упрощается, если использовать понятие типовой желаемой ЛЧХ. При этом дискретная система считается скорректированной, если ее ЛЧХ совпадает с желаемой ЛЧХ в существенном диапазоне частот.

Большинство реальных дискретных систем имеет достаточно малый период квантования и поэтому выполняется следующее условие:

$$1/T_0 \gg \omega_c$$

где  $T_0$  - период дискретности;  $\omega_c$  - частота среза.

При этих условиях частотные характеристики дискретной системы приближаются к частотным характеристикам непрерывной системы:

$$W(jl) \rightarrow W(j\omega),$$

$l$  - абсолютная псевдочастота дискретной системы;

$\omega$  - круговая частота непрерывной системы.

Если период дискретности  $T_0$  достаточно большой, и  $\omega_0 = 1/T_0$  соизмерима с  $\omega_c$ , то среднечастотная и высокочастотная части характеристики  $W(jl)$  будут существенно отличаться от  $W(j\omega)$ . Поэтому желаемую ЛЧХ необходимо строить с учетом заданного периода дискретности и с учетом заданных показателей качества.

В дискретных системах возможно использование типовых ЛАЧХ (типовых передаточных функций) при учете особенностей, которые вносятся дискретностью.

Выбор низкочастотной части ЛАЧХ должен делаться в соответствии с методикой обеспечения заданной точности, применяемой для непрерывных систем. Для этого необходимо, чтобы ЛАЧХ не заходила бы в запретную область, форма которой определяется заданием дисперсий (или максимальных значений) входного сигнала и его производных, а также дисперсий (или максимальным значением) ошибки воспроизведения. При этом предполагается, что для частот, которые определяют расположение запретной области по точности, справедливо утверждение о практическом совпадении круговой частоты с псевдо частотой, т. е.

$$l = \frac{2}{T_0} \operatorname{arctg} \frac{\omega T}{2} \approx \omega.$$

Данное условие определяет понятие низких частот в рассматриваемой системе.

**Низкочастотный участок желаемой ЛАЧХ** отвечает за точность системы в установившемся режиме. Исходными данными для построения этой асимптоты являются: требуемый порядок астатизма, величина ошибки, вид исходной ЛАЧХ. В области НЧ желаемая ЛАЧХ - это прямая, проходящая через точку  $20 \lg k^*$  при  $\omega = 1$ .  $k^*$  - рассчитанный из условия точности коэффициент передачи разомкнутого контура:

- для системы с астатизмом первого порядка  $k^*$  определяется из условия получения заданной скоростной ошибки  $d_{СК}$  при известной величине входного воздействия  $g_0$ . Общий коэффициент усиления системы с астатизмом первого порядка равен:

$$k^* = \frac{g_0}{d_{СК}}$$

- для статической системы общий коэффициент усиления системы определяется по формуле:

$$k^* = \frac{S_0}{S_C} - 1$$

где  $S_0$  – статизм объекта;  $S_C$  – статизм системы;

- Если задана максимально допустимая амплитуда сигнала ошибки  $e_{\max}$  при гармоническом входном воздействии  $x(t) = X_m \sin \omega_1 t$ , то низкочастотная часть желаемой ЛАЧХ должна располагаться не ниже контрольной точки, имеющей на частоте  $\omega_1$  ординату

$$L(\omega_1) = 20 \lg \left( \frac{X_m}{e_{\max}} \right) - \text{точка F (рис.26.1)}.$$

- Если входное воздействие имеет более сложный вид, чем гармоническое воздействие и известны максимальные значения его первой и второй производных, то можно подобрать эквивалентное гармоническое воздействие с такими же значениями производных. Из условия равенства максимальных значений производных реального входного воздействия и эквивалентного гармонического вычисляют эквивалентные значения частоты и амплитуды:

$$\omega_1^{\text{экс}} = \frac{X_m''}{X_m'}; \quad X_m^{\text{экс}} = \frac{(X_m')^2}{X_m''}.$$

Проведение желаемой ЛАЧХ на 3 дБ выше точки с координатами  $L(\omega_1), \omega_1$  (точка F) обеспечивает динамическую ошибку не больше заданной.

Выполнение требований по точности должно сопровождаться обеспечением в системе управления необходимых запасов устойчивости. Проверка достаточности удаления системы от колебательной границы устойчивости может производиться различными критериями. Используются, например, такие оценки, как колебательность (отношение мнимой части корня характеристического уравнения к вещественной), запасы устойчивости

по амплитуде и по фазе, перерегулирование, показатель колебательности и др.

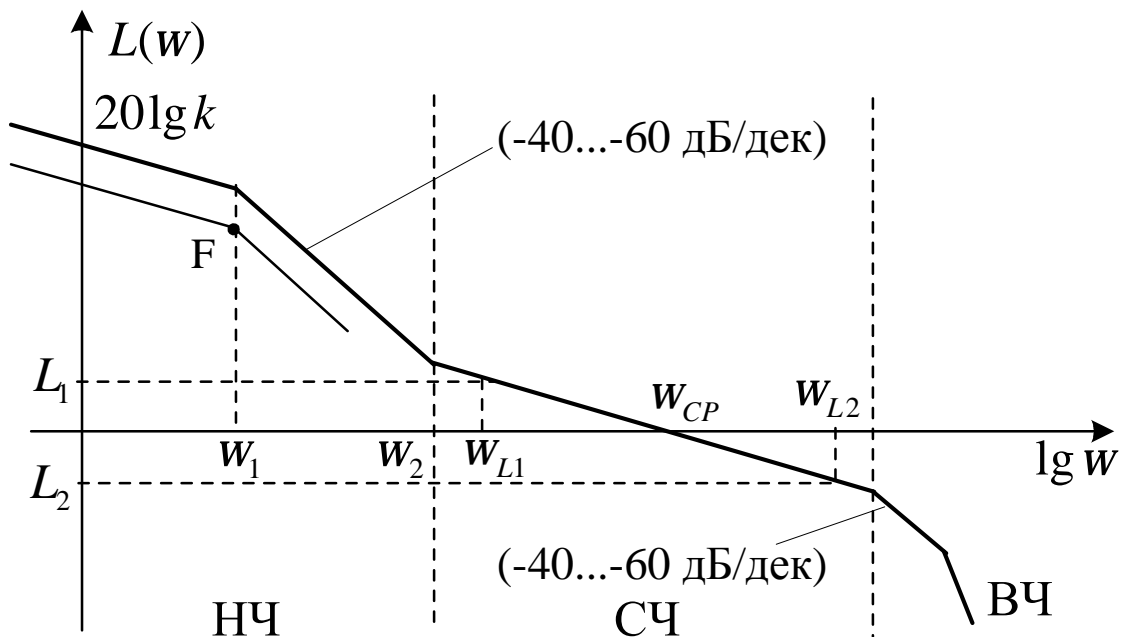


Рисунок 26.1. Желаемая ЛАЧХ непрерывной системы

При использовании для расчета систем частотных методов и, в частности, логарифмических частотных характеристик удобно использование и частотных оценок запаса устойчивости. Для этой цели наиболее удобен показатель колебательности  $M$ , равный отношению максимального пика амплитудной частотной характеристики замкнутой системы к ее начальной ординате при  $w = 0$ .

На основании большого числа опытных данных рекомендуемый показатель колебательности лежит в пределах  $M = 1,3 \div 1,7$ . В некоторых случаях, когда система регулирования должна быть очень хорошо демпфирована, принимают  $M = 1,1 \div 1,3$  и даже . Значения показателя колебательности выше 1,7 приводят к резкому возрастанию склонности системы к колебаниям. Слишком низкие его значения могут привести к серьезным трудностям при проектировании корректирующих средств.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в устойчивой системе показатель колебательности был не больше заданного, является нахождение амплитудно-фазовой характеристики АФЧХ разомкнутой системы вне запретной области (рис.26.2), представляющей собой окружность. Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}$$

а смещение центра влево относительно начала координат

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

Для оценки запаса устойчивости замкнутой системы по этой методике в непрерывном случае должна использоваться частотная передаточная функция разомкнутой системы  $W(j\omega)$ . В дискретных системах можно использовать как передаточную функцию  $W(e^{j\omega T})$ , так и передаточную функцию  $W(jl)$ . Для удобства расчета по логарифмическим характеристикам целесообразно ориентироваться на передаточную функцию  $W(jl)$ .

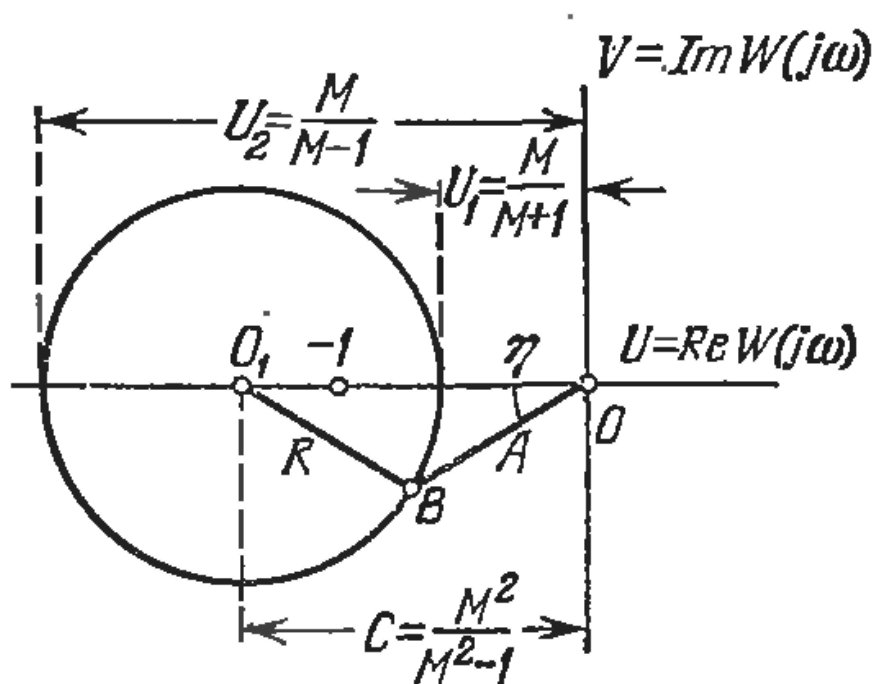


Рисунок 26.2. Запретная область для АФЧХ разомкнутой системы.



Дальнейшее изложение вопроса касается общих положений по построению систем с заданным запасом устойчивости, как непрерывных, так и дискретных. Поэтому все требования, которые будут сформулированы для частотной передаточной функции непрерывной системы  $W(j\omega)$  и ее логарифмических характеристик, в равной степени относятся к частотной передаточной функции разомкнутой дискретной системы  $W(jl)$  и ее логарифмическим характеристикам.

Условие того, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не заходила в запретную область

$$j_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{C}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \arcsin \frac{1}{M}$$

По полученному выражению для  $j_{\max}$  можно определить требуемый запас по фазе в функции модуля, выраженного в децибелах, для различных значений показателя колебательности  $M$ . Эти зависимости построены на рис. 26.3.

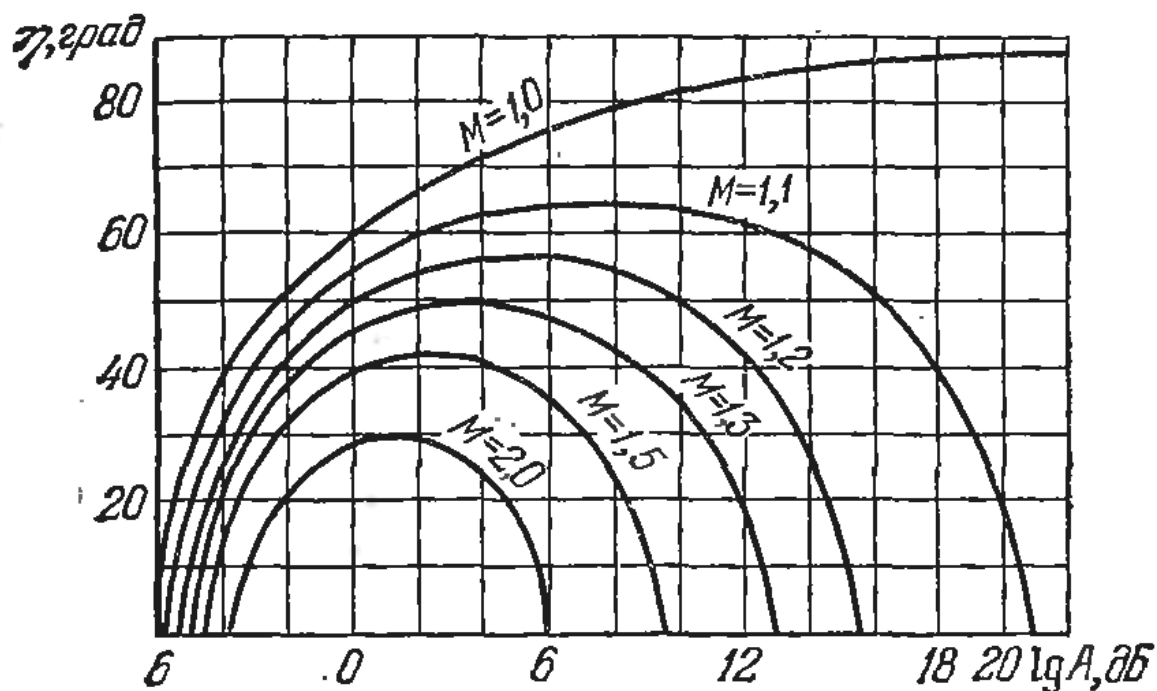


Рисунок 26.3. Зависимость требуемого запаса по фазе от модуля в децибелах.

Использование кривых (рис.26.3) может заключаться в том, что для построенной ЛАЧХ разомкнутой системы по точкам находится и строится требуемый запас по фазе (рис.4), который откладывается от оси нуля децибел вниз. Построение ведется в пределах изменения модуля

$$20\lg \frac{M}{M+1} \leq 20\lg A \leq 20\lg \frac{M}{M-1}$$

и образует запретную область для логарифмической фазовой характеристики  $j(\omega)$ . Требуемый запас устойчивости будет обеспечен, если ЛФЧХ не заходит в запретную область, определяемую заданным показателем колебательности.

В дальнейшем изложении будут рассмотрены принципы построения ЛАЧХ систем управления, имеющих в замкнутом состоянии заданный запас устойчивости, определяемый значением показателя колебательности. При этом предполагается, что разомкнутая система относится к классу минимально-фазовых систем.

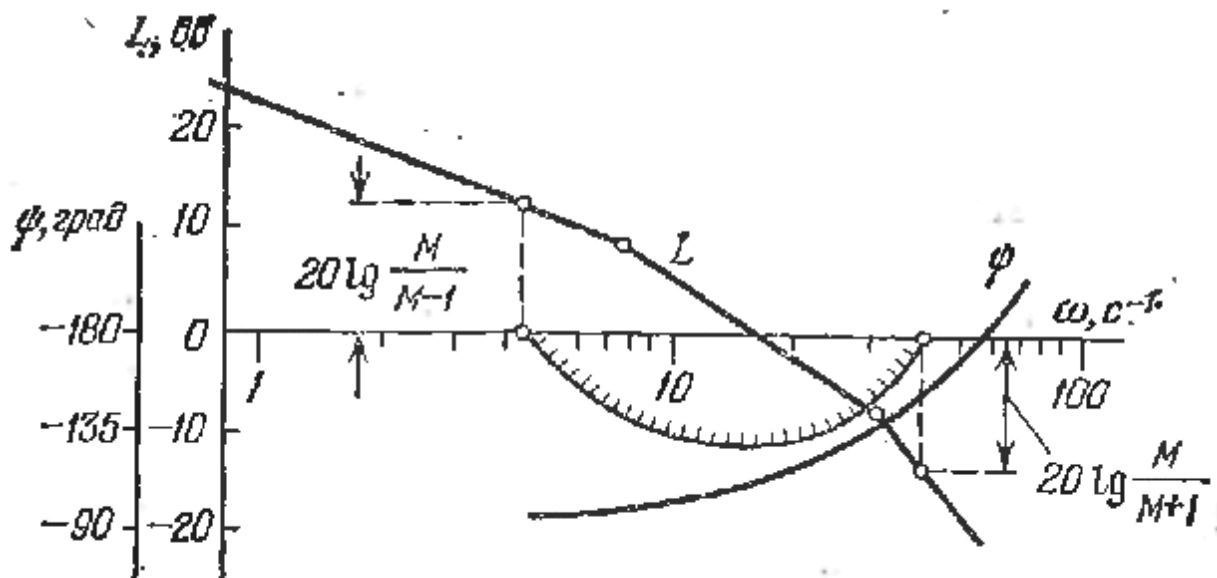


Рисунок 26.4. Запретная область для ЛФЧХ

Для удобства расчета систем регулирования вводятся так называемые типовые ЛАЧХ, применение которых автоматически обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Для исключения возможности потери устойчивости замкнутой системы при действии нелинейностей типа насыщения или ограничения целесообразно ограничить максимальные наклоны применяемых типовых ЛАЧХ в области низких частот, т. е. левее частоты среза  $\omega_{CP}$ , значением — 40 дБ/дек. При этом в области низких частот максимальные фазовые сдвиги не будут превосходить абсолютного значения  $180^\circ$ . ЛАЧХ такого типа и будут рассмотрены ниже.

## **26.2. Типовые передаточные функции дискретных систем при использовании непрерывных корректирующих звеньев.**

Рассмотрим методику построения типовой ЛАЧХ для дискретной системы при использовании экстраполятора нулевого порядка. Пусть асимптотическая ЛАЧХ непрерывной системы, удовлетворяющей требованиям точности воспроизведения задающего воздействия и требованиям по запасу устойчивости, имеет вид, изображенный на рис. 26.5,а. Изломы асимптотической ЛАЧХ определяются реальными постоянными времени аperiodических звеньев, входящих в структуру системы (объект, исполнительные элементы, усилители и др.), и постоянными времени используемых в системе непрерывных корректирующих звеньев.

Выберем некоторое значение периода дискретности  $T_0$  и проведем на логарифмической сетке вертикальную прямую на частоте  $\frac{2}{T_0}$ . Тогда на основании особенностей ЛАЧХ дискретных систем вся асимптотическая ЛАЧХ непрерывной системы левее частоты  $\omega = \frac{2}{T_0}$  перейдет в асимптотическую ЛАЧХ дискретной системы. Область частот от правого

края запретной области по точности до частоты  $\omega = \frac{2}{T_0}$  представляет собой область средних частот. Таким образом, и в области низких частот (в районе запретной области по точности), и в области средних частот построение ЛАЧХ дискретной системы не имеет никаких особенностей по сравнению с непрерывной системой (рис. 26.5,б).

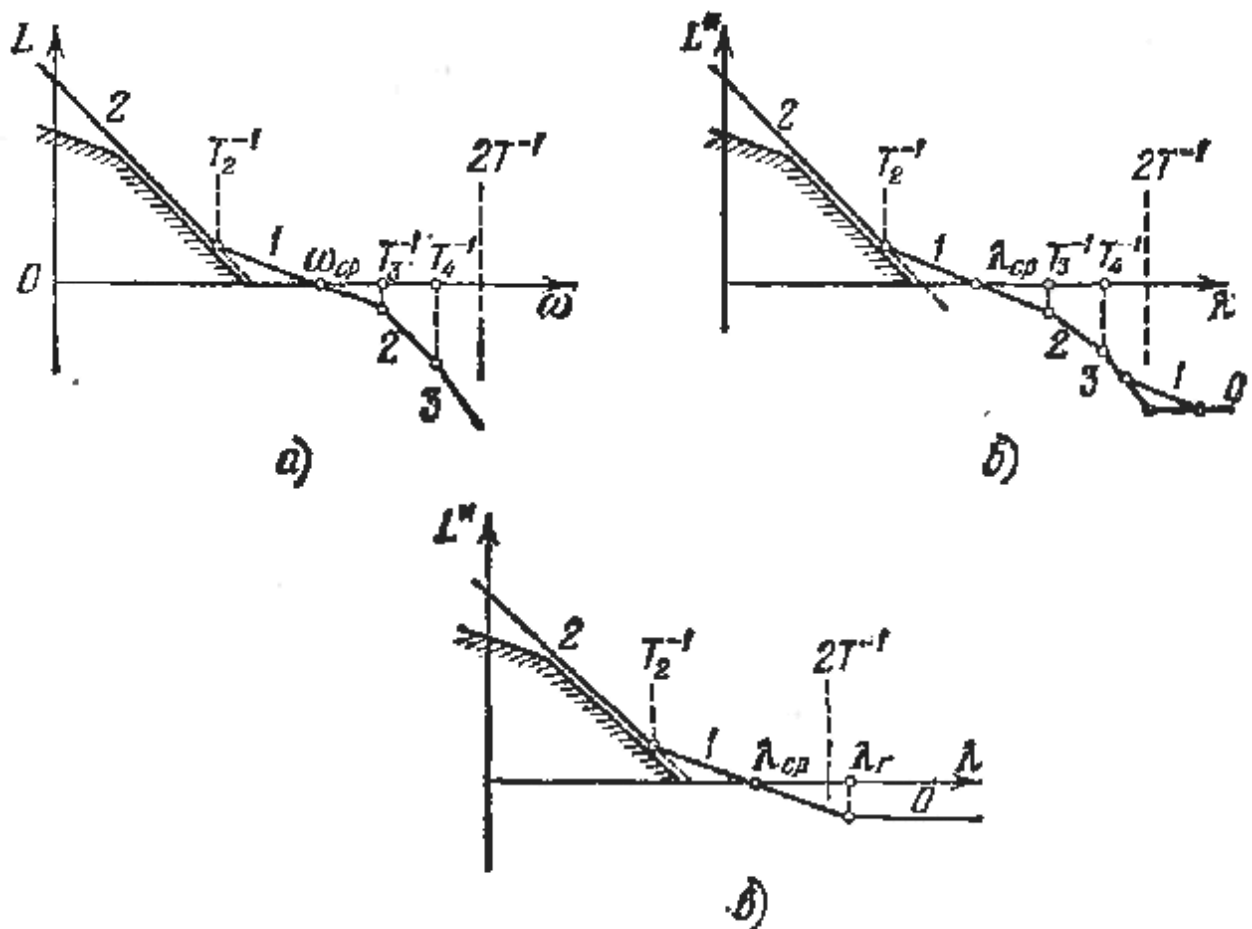


Рисунок 26.5. Переход от непрерывной ЛАЧХ к дискретной

В области высоких частот, асимптотическая ЛАЧХ дискретной системы имеет последнюю асимптоту с нулевым наклоном. Сопряжение этой асимптоты со среднечастотной частью может быть различным, что показано на рис. 26.5,б в виде некоторой области сопряжения.

В дискретных системах с экстраполятором нулевого порядка эквивалентная постоянная времени, которая должна учитываться в формуле для малых постоянных времени, равна

$$T_{\text{э}} = \frac{T_0}{2} + T_{\Sigma} + t$$

где  $T_{\Sigma}$  - сумма малых постоянных времени непрерывной части системы,  $t < T_0$  - временное запаздывание.

Кроме того, должно проверяться отсутствие захода ЛАЧХ при  $I > I_r$  в область, ограниченную прямой  $L_1 = 20 \lg M (M + 1)^{-1}$  (рис. 26.6).

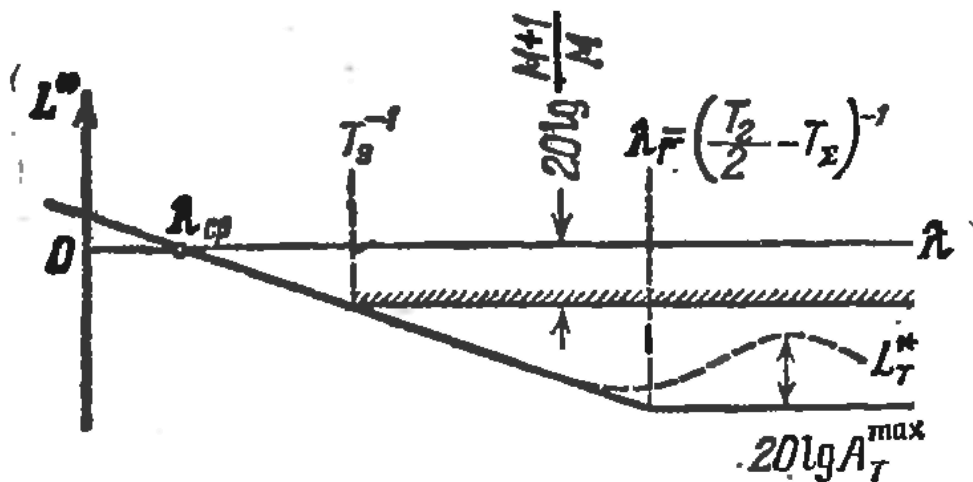


Рисунок 26.6 – К построению высокочастотной части ЛАЧХ

Изложенное выше позволяет сформулировать требования к типовым передаточным функциям разомкнутой дискретной системы. Выполнение этих требований гарантирует получение заданного запаса устойчивости. В низкочастотной и среднечастотной областях ЛАЧХ цифровой системы должна совпадать с какой-либо типовой ЛАЧХ. Высокочастотная часть ЛАЧХ должна удовлетворять требованиям по ограничению суммы малых постоянных времени.

В соответствии с классификацией типовых ЛАЧХ для статических систем здесь будут получаться ЛАЧХ типа 0—1—2—1—3...0, для систем с

астатизмом первого порядка - ЛАЧХ типа 1—2—1—3... ..0 и для систем с астатизмом второго порядка - ЛАЧХ типа 2—1—2 — 3...0.

Так как практически во всех случаях целесообразно иметь в дискретной системе наибольшее допустимое значение периода дискретности, то вертикальную линию на частоте  $w = \frac{2}{T_0}$  следует стремиться расположить

на асимптоте единичного наклона правее частоты среза (рис. 26.5, в).

В таблице 26.1 приведены типовые передаточные функции разомкнутых дискретных систем с экстраполяторами нулевого порядка, которым соответствует ЛАЧХ «симметричного» вида, для запаздывания  $t = 0$  и при выполнении условия максимизации периода дискретности.

Таблица 1. Типовые передаточные функции разомкнутых дискретных систем

Т и п	Порядок астатизма $\nu$	ПФ непрерывной части	ЧХ дискретной системы с фиксатором нулевого порядка
1	0	$\frac{k^*(1+t_1p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_np)}$	$\frac{k^*(1+jlt_1)(1-jl\frac{T_0}{2})\left[1+jl\left(\frac{T_0}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{(1+jlT_1)(1+jlT_2)(1+jl\frac{T_0}{2})}$ $T_\Sigma = \sum_{i=3}^n T_i$
2	1	$\frac{k^*(1+t_1p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_np)}$	$\frac{k^*(1+jlt_1)(1-jl\frac{T_0}{2})\left[1+jl\left(\frac{T_0}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{jl(1+jlT_1)(1+jl\frac{T_0}{2})}$ $T_\Sigma = \sum_{i=2}^n T_i$
3	2	$\frac{k^*(1+t_1p)}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_np)}$	$\frac{k^*(1+jlt_1)(1-jl\frac{T_0}{2})\left[1+jl\left(\frac{T_0}{2}-T_\Sigma\right)\right]}{(jl)^2(1+jl\frac{T_0}{2})}$ $T_\Sigma = \sum_{i=1}^n T_i$

Асимптотические ЛАЧХ, соответствующие типовым передаточным функциям таблицы 26.1, изображены на рис.26.7. Граничная частота  $I_G$  для дискретных систем с экстраполятором нулевого порядка равна

$$I_G = \left( \frac{T_0}{2} - T_\Sigma \right)^{-1}.$$

В соответствии с классификацией здесь для статических систем получаются ЛАЧХ. типа 0 – 1 – 2 – 1 – 0, для систем с астатизмом первого порядка - ЛАЧХ типа 1 – 2 – 1 – 0 и для систем с астатизмом второго порядка - ЛАЧХ типа 2 – 1 – 0.

Наличие малого временного запаздывания  $t < T_0 \neq 0$  не меняет вида типовых передаточных функций. Необходимо только учесть это запаздывание в общей сумме малых постоянных времени.

Анализируя типовые желаемые ЛАЧХ, изображенные на рисунке 26.7, видно, что низкочастотная часть этих ЛАЧХ имеет различную конфигурацию, которая определяется порядком астатизма системы.

Среднечастотный участок всех характеристик одинаков и имеет наклон -20 дБ/дек, а его протяженность и частота среза определяют запасы устойчивости системы (т.е. перерегулирование) и длительность переходного процесса.

Высокочастотная часть всех типовых ЛАЧХ одинакова и имеет наклон 0 дБ/дек.

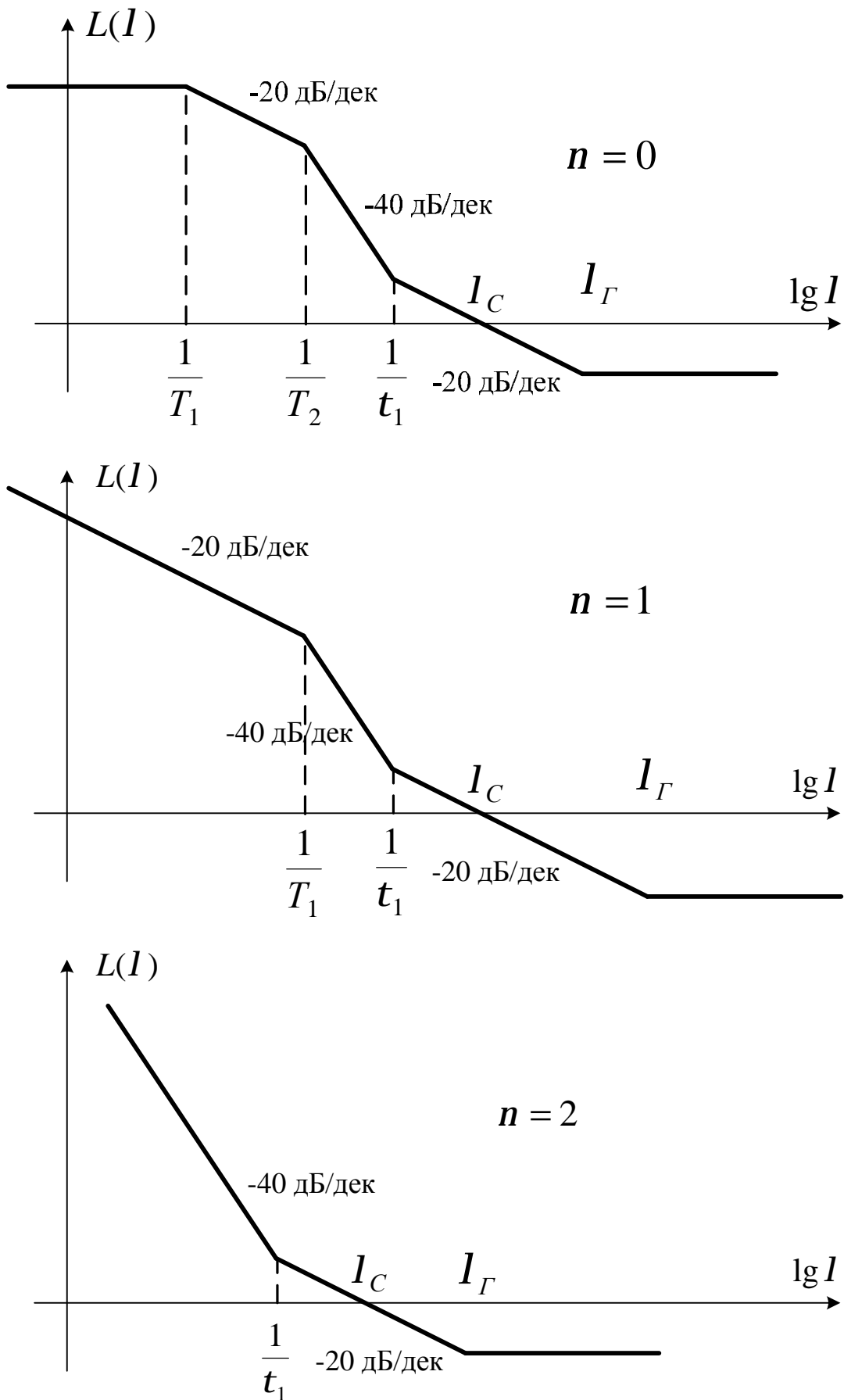


Рисунок 7. Типовые желаемые ЛАЧХ дискретных систем



Для дискретных систем, имеющих типовые передаточные функции (табл.26.1), показатель колебательности не превышает заданного значения  $M$ , если при формировании желаемой ЛАЧХ выполняются следующие условия:

- в области частот до  $w_c(I_c)$  ( $w(I) < w_c(I_c)$ ) должно выполняться следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{t_j} - \sum_{i=1}^l \frac{1}{T_i} \leq w_c \cdot \frac{M-1}{M}, \quad (26.1)$$

- в области частот больше  $w_c(I_c)$  ( $w(I) > w_c(I_c)$ ) должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{T_0}{2} + T_\Sigma \leq \frac{1}{w_c} \cdot \frac{M}{M+1}, \quad (26.2)$$

Условие (26.1) полностью совпадает с аналогичными условиями для непрерывных систем, так как в области низких частот характеристики непрерывной и дискретной систем совпадают.

Условие (26.2) отличается от аналогичного для непрерывных систем, так как в области высоких частот характеристики непрерывной и дискретной систем существенно различаются. В области высоких частот типовые желаемые ЛАЧХ дискретных систем имеют наклон 0 дБ/дек, при этом граничная абсолютная псевдочастота определяется из выражения:

$$I_\Gamma = \frac{2}{T_0 - 2T_\Sigma}$$

Период дискретности  $T_0$  и суммарная инерционность  $T_\Sigma$  определяются из выражения (26.2) по заданному значению показателя колебательности.

**Пример 26.1.** Рассмотрим систему с астатизмом второго порядка. Пусть передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W_O(p) = \frac{k^* (1 + tp)}{p^2} = \frac{k^*}{p^2} + \frac{k^* t}{p}.$$

Дискретная передаточная функция имеет вид:

$$W(z) = \frac{k^* T_0^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{k^* t T_0}{z-1}$$

Вспользуемся для расчета методом логарифмических частотных характеристик. Для этой цели применим подстановку

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

и перейдем к  $w$ -преобразованию

$$W(w) = \frac{k^* T_0^2}{4} \frac{\left(1 + 2 \frac{t}{T_0} w\right)}{w^2}$$

Для перехода к частотной передаточной функции сделаем подстановку

$$w = j \frac{T_0}{2} l.$$

В результате получим частотную передаточную функцию

$$W(jl) = \frac{k^* (1 + jt l) \left(1 - j \frac{T_0}{2} l\right)}{(jl)^2}.$$

Модуль этой величины

$$|W(jl)| = \frac{k^* \sqrt{1 + t^2 l^2} \sqrt{1 + \frac{T_0^2 l^2}{4}}}{l^2}$$

и фаза

$$j = -180^\circ + \operatorname{arctg} tl - \operatorname{arctg} \frac{T_0 l}{2}$$

По этим выражениям на рис. 26.8 построены асимптотическая ЛАЧХ и ЛФЧХ. Нетрудно видеть, что этот случай по расположению фазовой характеристики сводится к случаю ЛАЧХ типа 2—1—2. Используя формулы для непрерывных систем, получаем требуемую протяженность участка с наклоном -20 дб/дек в оптимальном случае:

$$h = \frac{2t}{T_0} = \frac{M+1}{M-1}. \quad (26.3)$$

Базовая частота ЛАЧХ  $I_0 = \sqrt{k^*}$ .

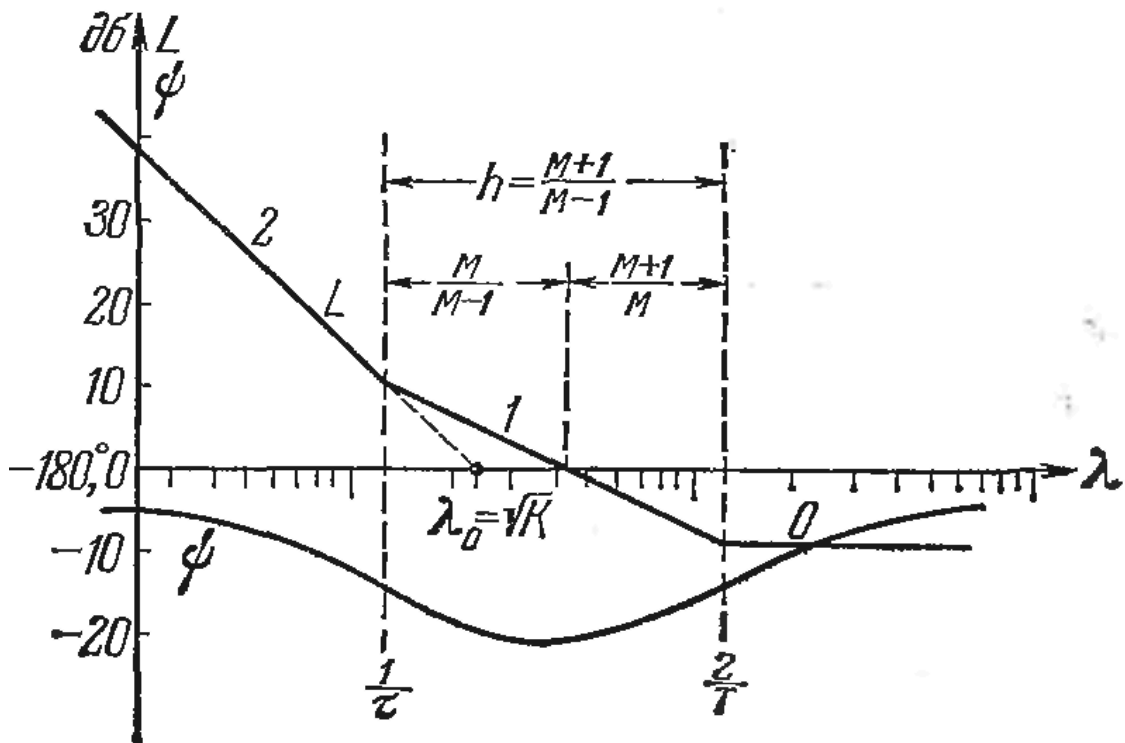


Рисунок 26.8. ЛЧХ дискретной системы к примеру 26.1.

Далее, имеем связь между постоянной времени  $t$  и базовой частотой:

$$t = \frac{1}{I_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}.$$

откуда находим общий коэффициент усиления

$$k^* = I_0^2 = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{M}{M-1} = \frac{4}{T_0^2} \cdot \frac{M(M-1)}{(M+1)^2}. \quad (26.4)$$

Эту формулу можно записать также в следующем виде:

$$\frac{k^* T_0^2}{4} \leq \frac{M(M-1)}{(M+1)^2}. \quad (26.5)$$

Формулы (26.3) и (26.4) позволяют выбрать значения общего коэффициента усиления непрерывной части  $k^*$  и постоянной времени  $t$  при заданном значении периода повторения  $T_0$  или определить значение периода повторения при заданном значении общего коэффициента усиления  $k^*$ . Заметим, что в рассматриваемой системе коэффициенты ошибок  $C_0$  и  $C_1$

равны нулю, а общий коэффициент усиления равен добротности системы по ускорению:

$$k^* = \frac{2}{C_2}.$$

Формула (26.5) дает возможность определить допустимое соотношение между добротностью по ускорению  $k^*$  и периодом дискретности  $T_0$ .

### **Пример 26.2.**

Произведем расчет системы с астатизмом второго порядка по следующим исходным данным: максимальная скорость слежения  $\Omega_{\max} = 10$  град/сек; максимальное ускорение слежения  $e_{\max} = 5$  град/сек<sup>2</sup>; максимальная допустимая ошибка  $q_{\max} = 2$  угл. мин.; период дискретности  $T_0 = 0,02$  сек; непрерывная часть содержит постоянные времени  $T_1 = 0,01$  сек,  $T_2 = 0,002$  сек и  $T_3 = 0,001$  сек; допустимый показатель колебательности  $M = 1,5$  и  $M = 1,2$ . Требуется определить параметры непрерывной части системы и допустимый период повторения ЦВМ.

Решим задачу вначале для случая  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$  и  $M = 1,5$ . Передаточная функция непрерывной части разомкнутой системы, структурно устойчивой в замкнутом состоянии, должна иметь вид

$$W_o(p) = \frac{k^* (1 + t_1 p)}{p^2} = \frac{k^*}{p^2} + \frac{k^* t_1}{p}$$

где  $t_1$  - постоянная времени, вносимая корректирующим звеном дифференцирующего типа.

Так как высокочастотная часть после частоты среза в рассматриваемом идеализированном случае представляет собой прямую с наклоном – 20 дб/дек, то вся частотная передаточная функция системы с ЦВМ может быть получена подстановкой  $p = jw$ , где  $w$  - псевдочастота, и введением дополнительно множителя  $(1 - jwT_0/2)$ :

$$W_o(j\omega) = \frac{k^* (1 + j\omega t_1) \left(1 - j\omega \frac{T_0}{2}\right)}{(j\omega)^2}$$

ЛАЧХ для нее построена на рис. 26.9.

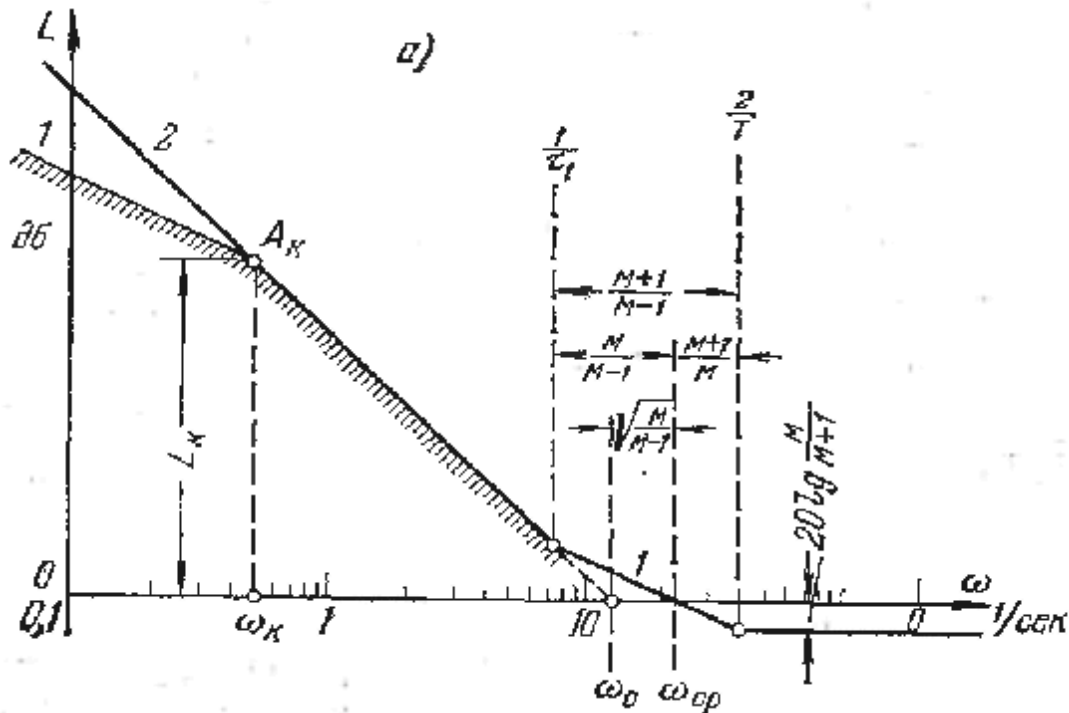


Рисунок. 26.9 – Желаемая ЛАЧХ

На этом же рисунке построена запретная зона для ЛАЧХ на основании условий по точности. Базовая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e_{\max}}{q_{\max}}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 60}{2}} = 12,2 \text{ сек}^{-1}$$

Требуемое значение общего коэффициента усиления при совпадении первой асимптоты ЛАЧХ с границей запретной зоны

$$k^* = \omega_0^2 = 150 \text{ сек}^{-1}$$

В соответствии с расчетом, проделанным в предыдущем примере, для ЛАЧХ, изображенной на рис. 26.8, получаем требуемое значение постоянной времени

$$t_1 = \frac{1}{w_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{12,2} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,142 \text{ сек.}$$

Частота среза ЛАЧХ

$$w_C = k^* t_1 = w_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 12,2 \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 21,2 \text{ сек}^{-1}.$$

В соответствии с формулой  $\frac{T_0}{2} + T_\Sigma \leq \frac{1}{w_C} \cdot \frac{M}{M+1}$  (без учета малых

постоянных времени) получаем

$$\frac{T_0}{2} \leq \frac{1}{w_C} \cdot \frac{M}{M+1} = \frac{1}{21,2} \cdot \frac{1,5}{1,5+1} = 0,0284 \text{ сек.}$$

откуда допустимый период дискретности  $T_0 \leq 0,0568$  сек. В случае учета постоянных времени  $T_1, T_2, T_3$  имеем

$$\frac{T_0}{2} \leq \frac{1}{w_C} \cdot \frac{M}{M+1} - (T_1 + T_2 + T_3) = 0,0284 - 0,013 = 0,0154 \text{ сек.}$$

и допустимый период дискретности  $T_0 \leq 0,0308$  сек.

Аналогичные расчеты для случая  $M=1,2$  дают  $t_1=0,2$  сек,  $w_C=30$  сек<sup>-1</sup>, и  $T_0 \leq 0,0368$  сек (при  $T_1=T_2=T_3=0$ ) и  $T_0 \leq 0,026$  сек (при  $T_1 \neq 0, T_2 \neq 0, T_3 \neq 0$ ).

На рис. 26.10 построены переходные процессы в дискретной системе, которые соответствуют различным значениям показателя колебательности.

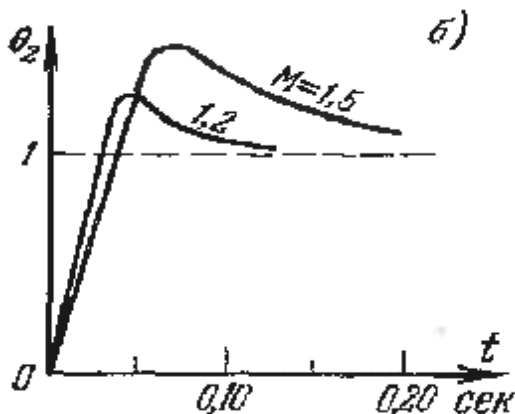


Рисунок 26.10. Переходные процессы в скорректированной системе

### 26.3. Синтез непрерывных корректирующих устройств в дискретных системах

В случае непрерывной коррекции, корректирующие устройства изменяют характеристики непрерывной части дискретной системы. Различные варианты включения корректирующих устройств приведены на рисунке 26.11.

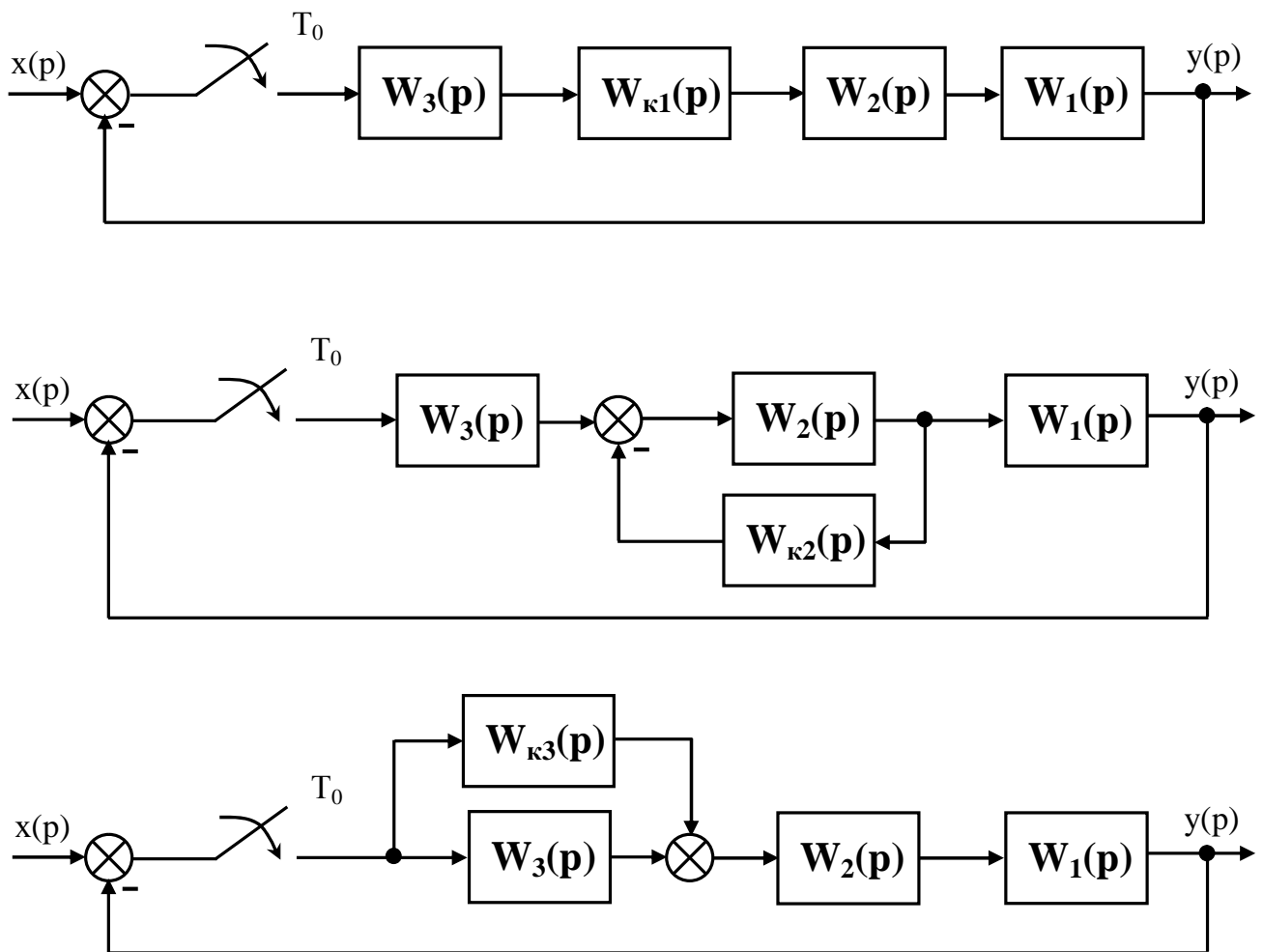


Рисунок 26.11 Структурные схемы дискретных систем с непрерывными корректирующими устройствами

Наиболее просто производится расчет корректирующих средств последовательного типа. В этом случае дискретная передаточная функция разомкнутой системы должна равняться желаемой передаточной функции

$$W_{\mathcal{K}}(z) = W_K W_O(z).$$

Здесь  $W_K W_O(z)$  представляет собой дискретную передаточную функцию последовательно включенных корректирующего звена с передаточной функцией  $W_K(z)$  и непрерывной части с передаточной функцией  $W_O(z)$ . Напомним, что  $W_K W_O(z) \neq W_K(z) W_O(z)$ . Поэтому расчет последовательных корректирующих средств в дискретных системах не является столь простой задачей, как в непрерывных системах.

Однако выше было показано, что ЛАЧХ дискретных систем, построенные в функции абсолютной псевдочастоты  $l = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}$  для частот  $l < 2/T_0$  практически сливаются с ЛАЧХ непрерывной части. Поэтому можно воспользоваться известными приемами расчета последовательных корректирующих средств, если в качестве желаемых ЛАЧХ использовать характеристики, соответствующие передаточным, функциям непрерывной части.

Требуемый вид последовательного корректирующего звена определяется в этом случае по виду ЛАЧХ, полученной вычитанием ординат ЛАЧХ нескорректированной системы из ординат желаемой (типовой) ЛАЧХ.

**Пример 26.3.** Произведем расчет системы с астатизмом первого порядка по следующим исходным данным: максимальная скорость слежения  $\Omega_{\max} = 20$  град/сек; максимальное ускорение слежения  $e_{\max} = 10$  град/сек<sup>2</sup>; максимальная допустимая ошибка  $q_{\max} = 4$  угл. мин.; допустимый показатель колебательности  $M = 1,5$ ; период дискретности  $T_0 = 0,02$  сек; передаточная функция непрерывной части имеет вид

$$W_0(p) = \frac{k^*}{p(1 + T_I p)(1 + T_{II} p)(1 + T_{III} p)}$$

где  $T_I = 0,05$  сек,  $T_{II} = 0,003$  сек,  $T_{III} = 0,001$  сек.



Определим вид и параметры последовательного корректирующего звена, которое должно быть включено в непрерывную часть системы, а также необходимое значение общего коэффициента усиления  $k^*$ .

Левее частоты среза ЛАЧХ дискретной системы совпадает с ЛАЧХ ее непрерывной части, а псевдочастота  $l$  - с реальной частотой  $w$ . Поэтому формирование желаемой ЛАЧХ левее частоты среза произведем обычными приемами.

Построим запретную зону для ЛАЧХ из условий точности (рис. 26.12).

$$\text{Контрольная частота} \quad w_K = \frac{e_{\max}}{\Omega_{\max}} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ сек}^{-1}$$

Модуль передаточной функции разомкнутой системы при  $w = w_K$

$$|W(jw_K)| = \frac{\Omega_{\max}^2}{e_{\max} q_{\max}} = 55,6 \text{ дБ}$$

По этим данным на рис.26.12 построены контрольная точка  $A_K$  и запретная зона, сформированная из прямых с наклоном -20 и -40 дБ/дек (наклоны 1 и 2).

Желаемая ЛАЧХ в низкочастотной области формируется так, чтобы она проходила выше точки  $A_K$  на 3 дБ. Она состоит из отрезков прямых с наклонами 1-2-1. В низкочастотной области частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(jw) = \frac{k^* (1 + jwt_1)}{jw(1 + jwT_1)}$$

Параметры желаемой ЛАЧХ и передаточной функции разомкнутой системы в низкочастотной области определим в следующем порядке. Базовая частота ЛАЧХ

$$w_0 = \sqrt{\sqrt{2} \frac{e_{\max}}{q_{\max}}} = 14,5 \text{ сек}^{-1}$$

Постоянная времени корректирующего звена, формирующая первый излом ЛАЧХ:

$$T_1 = \frac{1}{w_k} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ сек.}$$

Для получения заданного показателя колебательности должно выдерживаться условие:

$$t_1 = \frac{1}{w_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{14,5} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,12 \text{ сек.}$$

Далее определяем необходимое значение общего коэффициента усиления:

$$k^* = \sqrt{2} \frac{\Omega_{\max}}{q_{\max}} = \sqrt{2} \frac{20 \cdot 60}{4} = 420 \text{ сек.}^{-1}$$

и частоту среза ЛАЧХ:

$$w_C = \frac{k^* t_1}{T_1} = \frac{420 \cdot 0,12}{2} = 25,2 \text{ сек.}^{-1}.$$

Для обеспечения заданного показателя колебательности в высокочастотной области должно удовлетворяться неравенство:

$$\frac{T_0}{2} + \sum_{i=3}^n T_i \leq \frac{1}{w_C} \cdot \frac{M}{M+1},$$

где  $\sum_{i=3}^n T_i$  - сумма постоянных времени меньших, чем  $T_0/2$ .

Отсюда получаем допустимое значение для суммы постоянных времени:

$$T_{\Sigma} \leq \frac{1}{w_C} \cdot \frac{M}{M+1} - \frac{T_0}{2} = \frac{1}{25,2} \cdot \frac{1,5}{1,5+1} - \frac{0,02}{2} = 0,014 \text{ сек.}$$

На рис. 26.12 пунктиром построена ЛАЧХ непрерывной части нескорректированной системы, сплошной линией - желаемая (скорректированная) ЛАЧХ непрерывной части. В низкочастотной области (до частоты среза  $w_C$ ) она совпадает с ЛАЧХ дискретной системы. В области высоких частот вид желаемой ЛАЧХ непрерывной части, вообще говоря, может быть произвольным. Важно только, чтобы сумма постоянных времени  $T_{\Sigma}$  не превышала допустимого значения.

Наиболее простые корректирующие звенья получаются в тех случаях, когда сопрягающие частоты ЛАЧХ нескорректированной системы и желаемой ЛАЧХ совпадают между собой. В рассматриваемом примере

$$T_{\Sigma} = T_3 + T_4 + T_5.$$

Целесообразно принять  $T_4 = T_{II} = 0,003$  сек,  $T_5 = T_{III} = 0,001$  сек.

Тогда  $T_3 = T_{\Sigma} - T_4 - T_5 = 0,01$  сек.

Вычитая из ординат желаемой ЛАЧХ ординаты характеристики нескорректированной системы, получим искомую ЛАЧХ. последовательного корректирующего звена. Она соответствует интегро - дифференцирующему звену с передаточной функцией

$$W_{ПК}(p) = \frac{(1 + T_{2к}p)(1 + T_{3к}p)}{(1 + T_{1к}p)(1 + T_{4к}p)}.$$

где

$$T_{1к} = T_1 = 2 \text{ сек}, \quad T_{2к} = t_1 = 0,12 \text{ сек}, \quad T_{3к} = T_1 = 0,05 \text{ сек}, \quad T_{4к} = T_3 = 0,01 \text{ сек}.$$

Из приведенного примера 26.3 видно, что при синтезе непрерывных последовательных корректирующих устройств метод логарифмических частотных характеристик не теряет своей простоты и наглядности.

Можно показать, что при наличии временного запаздывания допустимый период повторения ЦВМ должен быть снижен в соответствии с формулой

$$T_0 \approx \frac{T_0^*}{1 + 2(k + x)}, \quad (26.6)$$

где  $T_0^*$  - допустимый период повторения, полученный в результате синтеза системы без учета запаздывания. Время запаздывания  $t = (k + x)T_0$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  и  $0 < x < 1$ .

Если время запаздывания  $t$  соответствует целому числу периодов, то формула (26.6) становится точной:

$$T_0 = \frac{T_0^*}{1 + 2k}$$

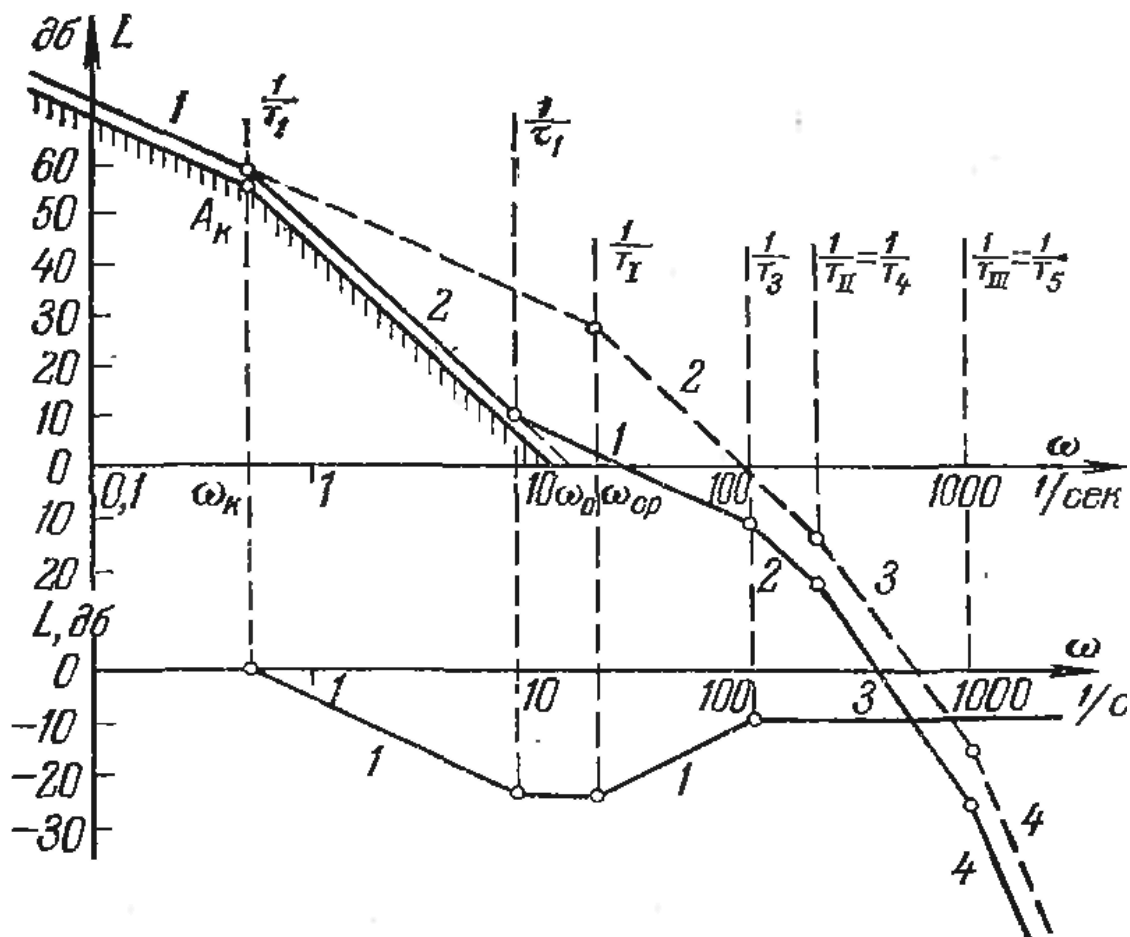


Рисунок 26.12. Построение желаемой ЛАЧХ

#### 26.4. Синтез дискретных корректирующих устройств

Структурную схему системы регулирования с ЦВМ можно представить следующим образом. Вне зависимости от сложности решаемых математических задач можно считать, что ЦВМ определяет разность между необходимым значением регулируемой величины и действительным значением, т. е. ошибку  $e = x - y$ . В функции этой ошибки ЦВМ должна

прикладывать к системе регулирования управляющее воздействие. Поэтому для исследования динамики следует пользоваться структурной схемой (рис 26.13), в которой ЦВМ условно введена последовательно в цепь вычисления ошибки. В общем случае в контуре регулирования может присутствовать элемент чистого временного запаздывания, выделенный в отдельное звено с передаточной функцией  $e^{-tp}$ .

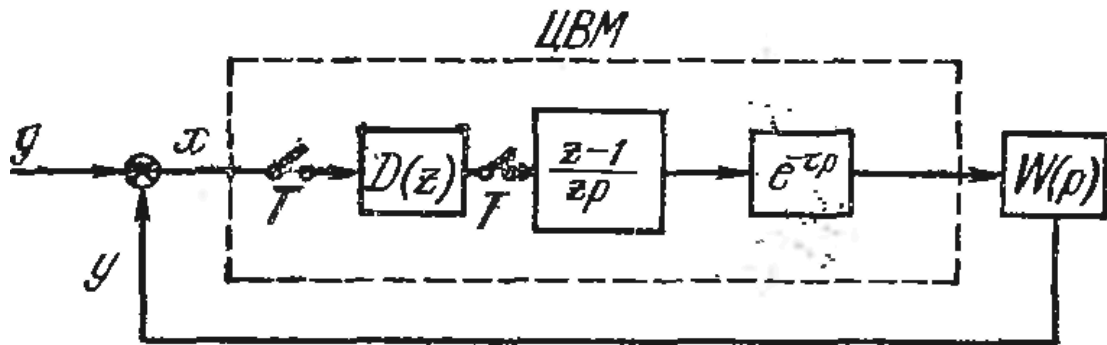
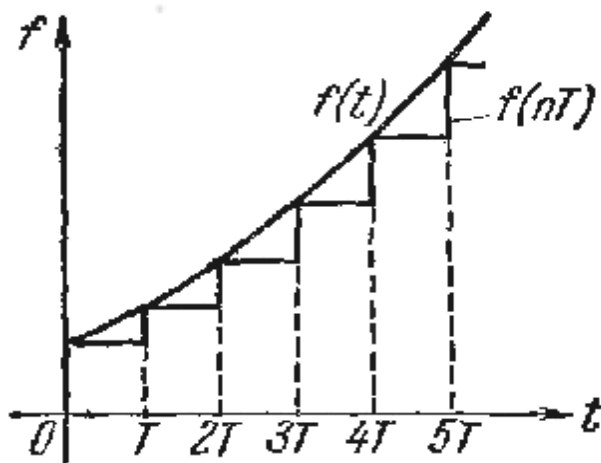


Рисунок 26.13. – Структурная схема ЦВМ

Эффекты запоминания на период интегрирования весовой функции



(рис.26.14), учитываются также отдельным звеном с передаточной функцией

$$\frac{1 - e^{-pT_0}}{p} = \frac{z - 1}{zp}, \quad z = e^{pT_0}.$$

Если кроме определения ошибки  $e = x - y$  ЦВМ производит интегро -

дифференциальные операции, то в контуре будет также присутствовать дискретная передаточная функция  $D(z)$ , соответствующая некоторому дискретному фильтру, разностное уравнение которого может быть получено из  $D(z)$ .

Ключи, изображенные на структурной схеме (рис.26.13), генерируют импульсные функции в соответствии с периодом повторения ЦВМ. Проходя

через запоминающее устройство (фиксатор нулевого порядка), последовательность импульсных функций образует ступенчатую функцию (рис. 26.14).

В общем случае передаточная функция ЦВМ (рис. 26.13) может быть сделана не равной единице:  $D(z) \neq 1$ . Пусть она представляет собой дробно-рациональное выражение вида

$$D(z) = \frac{X_1(z)}{X(z)} = \frac{b_k + b_{k+1}z + \dots + b_0z^k}{a_k + a_{k+1}z + \dots + a_0z^k}$$

Здесь  $X(z)$  и  $X_1(z)$  - изображения решетчатых функций на входе и выходе ЦВМ.

Степень числителя  $D(z)$  не может быть выше степени знаменателя. В формуле  $D(z)$  взят предельный случай, когда они равны.

После деления числителя и знаменателя на  $z^k$  передаточная функция получится в другом виде:

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_kz^{-k}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k}}$$

Отсюда можно найти разностное уравнение, соответствующее алгоритму работы ЦВМ:

$$a_0x_1[n] + a_1x_1[n-1] + \dots + a_kx_1[n-k] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_kx[n-k],$$

где  $x[n]$  и  $x_1[n]$  - решетчатые функции на входе и выходе ЦВМ.

Результирующая передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(z) = D(z)W^0(z)$$

где  $W^0(z)$  - передаточная функция разомкнутой системы при  $D(z) = 1$ .

Дискретная коррекция может быть также реализована в системах управления без ЦВМ. В этом случае дискретные корректирующие средства реализуются на дискретных фильтрах, построенных на различных ячейках памяти.

Расчет дискретных корректирующих средств, т. е. определение желаемого вида передаточной функции  $D(z)$ , может производиться следующим образом. Пусть известна желаемая дискретная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{жс}}(z) = \frac{\Phi_{\text{жс}}(z)}{1 - \Phi_{\text{жс}}(z)} = D(z)W^0(z),$$

где  $\Phi_{\text{жс}}(z)$  - желаемая передаточная функция замкнутой системы, а  $W^0(z)$  - передаточная функция исходной нескорректированной системы. Тогда искомая передаточная функция ЦВМ (или дискретного фильтра) будет

$$D(z) = \frac{W_{\text{жс}}(z)}{W^0(z)} = \frac{\Phi_{\text{жс}}(z)}{1 - \Phi_{\text{жс}}(z)} \cdot \frac{1}{W^0(z)}. \quad (26.7)$$

Формирование желаемой передаточной функции  $\Phi_{\text{жс}}(z)$  необходимо производить с учетом некоторых ограничений. Необходимо, чтобы передаточная функция  $\Phi_{\text{жс}}(z)$  содержала в качестве нулей все те нули  $W^0(z)$ , модуль которых равен или больше единицы. Необходимо также, чтобы выражение  $1 - \Phi_{\text{жс}}(z)$  содержало в качестве нулей все те полюсы  $W^0(z)$ , модуль которых равен или больше единицы.

Невыполнение этих условий вызывает нарушение требований к грубости системы и вызывает ее неустойчивость, так как приводит к неустойчивым линейным программам ЦВМ, которые должны реализовать получающуюся по формуле (26.7) передаточную функцию  $D(z)$ .

Кроме того, получающаяся дробно-рациональная передаточная функция  $D(z)$  не должна иметь степень числителя выше, чем степень знаменателя, так как это приводит к необходимости знания будущего значения входного сигнала, что не может быть реализовано.

Вместо формулы (26.7) может применяться соотношение, связывающее дискретные частотные передаточные функции

$$W_{\text{ПК}}^*(jI) = \frac{W_{\text{жс}}^*(jI)}{W^*(jI)}, \quad (26.8)$$

или соответствующие им логарифмические частотные характеристики

$$L_{ПК}(l) = L_{Ж}(l) - L(l)$$

После определения  $W_{ПК}^*(j\Omega)$  подстановкой  $j\Omega = 2\frac{w}{T_0}$  можно получить передаточную функцию  $W_{ПК}^*(w)$ , а затем путем перехода от  $w$ -преобразования к  $z$ -преобразованию - передаточную функцию  $W_{ПК}(z) = D(z)$ .

Сформулированные выше ограничения по отношению к выражению (26.8) имеют следующий вид. Необходимо, чтобы передаточная функция  $W_{Ж}^*(j\Omega)$  содержала в качестве своих нулей и полюсов по переменной  $x = j\Omega$  все те нули и полюсы передаточной функции  $W^*(j\Omega)$ , которые лежат в правой полуплоскости. Кроме того, необходимо, чтобы получающаяся дробно-рациональная функция  $W_{ПК}^*(j\Omega)$  имела степень числителя не больше, чем степень знаменателя.

Поясним сказанное примером. Пусть в цифровой системе с экстраполятором нулевого порядка передаточная функция непрерывной части

$$W_o(p) = \frac{k^*}{p^2}$$

соответствует интегрирующему звену второго порядка. Тогда без коррекции имеем

$$W^o(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k^*}{p^2} \right\} = \frac{k^* T_0^2 (z+1)}{2(z-1)^2}.$$

Далее можно получить частотную передаточную функцию

$$W^*(j\Omega) = \frac{k^* \left( 1 - j\Omega \frac{T_0}{2} \right)}{(j\Omega)^2}$$

Соответствующая ей ЛАЧХ  $L$  построена на рис. 26.15. Если принять в качестве желаемой ЛАЧХ  $L_1$ , то желаемая частотная передаточная функция



$$W_1^*(j\Omega) = \frac{k^*(1 + j\Omega T_2) \left(1 - j\Omega \frac{T_0}{2}\right)}{(j\Omega)^2}$$

Она совпадает с типовой передаточной функцией (таблица 26.1), если положить  $T_i = 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Дискретная частотная передаточная функция требуемого корректирующего звена последовательного типа

$$W_{ПК}^*(j\Omega) = \frac{W_1^*(j\Omega)}{W^*(j\Omega)} = 1 + j\Omega T_2.$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$W_{ПК}(z) = D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T_0}\right)z + \left(1 - \frac{2T_2}{T_0}\right)}{z + 1}$$

Последнее выражение определяет неустойчивую программу, так как полюс передаточной функции  $z_1 = -1$  соответствует колебательной границе устойчивости.

Заметим, что получившаяся частотная передаточная функция корректирующего устройства не может быть реализована, вообще говоря, и в непрерывном варианте. Эта функция соответствует бесконечному подъему усиления при росте частоты до бесконечности. При реализации в дискретном варианте эта функция приводит к неустойчивой программе ЦВМ.

Для исключения этого явления примем желаемую ЛАЧХ  $L_2$  в другом виде (рис. 26.15). Желаемая передаточная функция

$$W_2^*(j\Omega) = \frac{k^*(1 + j\Omega T_2) \left(1 - j\Omega \frac{T_0}{2}\right)}{(j\Omega)^2 \left(1 + j\Omega \frac{T_0}{2}\right)} \quad (26.9)$$

Передаточная функция корректирующего устройства в этом случае имеет вид

$$W_{ПК}^*(jI) = \frac{W_2^*(jI)}{W^*(jI)} = \frac{1 + jIT_2}{1 + jI\frac{T_0}{2}}$$

Переход к передаточной функции ЦВМ дает

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2T_2}{T_0}\right)z + \left(1 - \frac{2T_2}{T_0}\right)}{2z} \quad (26.10)$$

Этой передаточной функции соответствует устойчивая программа ЦВМ.

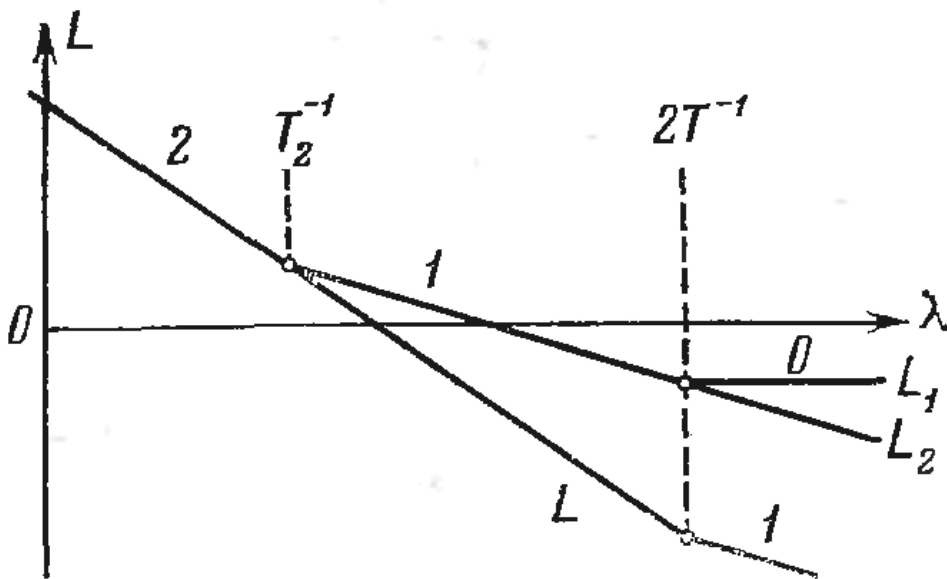


Рисунок 26.15.

Для рассмотренного примера произведем числовой расчет. Пусть по условиям точности  $k^* = 100 \text{ сек}^{-2}$ , а показатель колебательности  $M = 1,5$ .

Базовая частота ЛАЧХ

$$I_0 = \sqrt{k^*} = \sqrt{100} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

Требуемое значение постоянной времени равно

$$T_2 = \frac{1}{I_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,5}{1,5-1}} = 0,173 \text{ сек.}$$

Допустимое значение суммы малых постоянных времени для передаточной функции (26.9) равно периоду дискретности:

$$T_0 = \frac{1}{I_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{1,5(1,5-1)}{1,5+1}} = 0,0346 \text{ сек.}$$

Примем период дискретности  $T_0 = 0,0346$  сек. Передаточная функция ЦВМ (26.10) имеет вид

$$D(z) = \frac{\left(1 + \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}\right)z + \left(1 - \frac{2 \cdot 0,173}{0,0346}\right)}{2z} = 5,5(1 - 0,82z^{-1}).$$

В таблице 26.2 приведены некоторые простейшие дискретные корректирующие средства, которые могут реализоваться на ЦВМ или дискретных фильтрах. В таблице 26.2 даны также их параметры и значения модуля частотной передаточной функции  $G_0$  на нулевой псевдочастоте и  $G_\infty$  при  $I \rightarrow \infty$ .

Таблица 26.2.

Измещающие звенья	Передающая функция непрерывного аналога $W(s)$	Дискретная передаточная функция $D(z)$	Частотная передаточная функция $W^*(j\lambda)$ и параметры
1	2	3	4
Дифференцирующее	$s + T_1 p$	$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z}$ , $0 < a < 1$	$\frac{1+j\lambda\tau}{1-j\lambda\tau/2}$ , $\tau = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T}{2}$ , $G_0=1$ , $G_\infty = \frac{1+a}{1-a}$
Пассивное дифференцирующее с компенсирующей передаточной функцией	$\frac{s+T_1 p}{s+T_2 p}$ , $T_1 > T_2$	$\frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z-b}$ , $0 < a < 1$ , $0 < b < 1$ , $a > b$	$\frac{1+j\lambda\tau_2}{1-j\lambda\tau_1}$ , $\tau_1 = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T}{2}$ , $\tau_2 = \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{T}{2}$ , $G_0=1$ , $G_\infty = \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)}$
Интегрирующее	$\frac{k}{p} = \frac{1}{T_1 p}$	$\frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T} \cdot \frac{1-j\lambda\tau/2}{j\lambda}$ , $G_0 \rightarrow \infty$ , $G_\infty = \frac{a}{2}$
		$\frac{a(a+1)}{z-1}$	$\frac{2a}{T} \cdot \frac{1}{j\lambda}$ , $G_0 \rightarrow \infty$ , $G_\infty = 0$
Изотропное	$1 + \frac{1}{T_1 p} \cdot \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$	$1 + \frac{a}{z-1}$	$\frac{a}{T} \cdot \frac{1+j\lambda\tau}{j\lambda}$ , $\tau = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)T$ , $G_0 \rightarrow \infty$ , $G_\infty = \left 1 - \frac{a}{2}\right $
Пассивное интегрирующее	$\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$ , $T_1 > T_2$	$\frac{(1+a)s+1-a}{(1+b)s+1-b}$ , $a > 1$ , $b > 1$ , $a < b$	$\frac{1-j\lambda\tau_2}{1+j\lambda\tau_1}$ , $\tau_1 = \frac{bT}{2}$ , $\tau_2 = \frac{aT}{2}$ , $G_0=1$ , $G_\infty = \frac{a}{b}$
Интегро-дифференцирующее	$1 + \frac{1}{T_1 p} + \tau p$	$1 + \frac{a(s+1)}{s-1} + \frac{b(s-1)}{s}$ , $0 < a < 1$	$\frac{2a}{T} \cdot \frac{1+j\lambda \left[ \frac{1+a}{a} \cdot \frac{T}{2} + (j\lambda)^2 \cdot \frac{1-2b}{a} \cdot \frac{T^2}{4} \right]}{j\lambda \left(1 + j\lambda \frac{T}{2}\right)}$ , $G_0 \rightarrow \infty$ , $G_\infty = 1 + 2b$

## 26.5. Комбинированное регулирование.

В цифровых системах возможно использование комбинированного регулирования по задающему или возмущающему воздействиям. При выполнении заданных условий по точности комбинированное регулирование позволяет снизить требования к основному каналу.

Комбинированное регулирование особенно удобно применять в тех случаях, когда задающее воздействие вычисляется в управляющей ЦВМ. В этом случае на ЦВМ может быть также возложена задача вычисления производных этого воздействия, что позволяет просто реализовать схемы комбинированного регулирования, аналогичные применяемым в непрерывных системах. Подобное положение возникает, например, при слежении телескопов за планетами, при управлении по вычисляемым координатам и т. п.

Структурная схема системы комбинированного регулирования для случая использования дополнительного канала с передаточной функцией  $E(z)$  по задающему воздействию изображена на рис. 26.16.

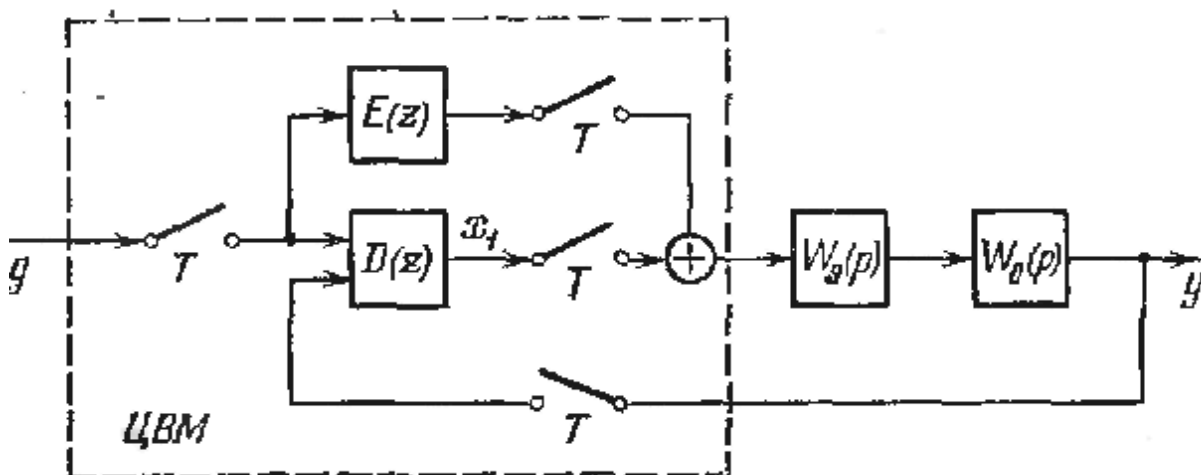


Рисунок 26.16. Структурная схема системы комбинированного регулирования

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом дополнительного канала

$$\Phi_{\text{э}}(z) = \frac{W^0(z)[D(z) + E(z)]}{1 + D(z)W^0(z)} = \frac{W(z) \left[ 1 + \frac{E(z)}{D(z)} \right]}{1 + W(z)} = \frac{W_{\text{э}}(z)}{1 + W_{\text{э}}(z)},$$

где  $W(z) = D(z)W^0(z)$  - передаточная функция разомкнутой системы,

$W_{\text{э}}(z)$  - эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{\text{эе}}(z) = 1 - \Phi_{\text{э}} = \frac{1 - W^0(z)E(z)}{1 + W(z)}. \quad (26.11)$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{э}}(z) = \frac{\Phi_{\text{э}}(z)}{1 - \Phi_{\text{э}}(z)} = \frac{W^0(z)[D(z) + E(z)]}{1 - E(z)W^0(z)}$$

Из формулы (26.11), если положить  $\Phi_{\text{эе}}(z) = 0$ , можно получить условие полной инвариантности

$$E(z) = \frac{1}{W^0(z)} = \frac{E_1(z)}{E_2(z)} \quad (26.12)$$

Для большинства реальных систем степень числителя  $W^0(z)$  оказывается меньше степени знаменателя на единицу. Поэтому степень полинома  $E_1(z)$  будет на единицу больше степени полинома  $E_2(z)$  и формула (26.12) может быть приведена к виду

$$E(z) = cz + \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_kz^{-k}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_kz^{-k}}. \quad (26.13)$$

Слагаемое  $cz = ce^{pT}$  означает, что при формировании сигнала по каналу с передаточной функцией  $E(z)$  необходимо использовать упрежденное на один такт значение задающего воздействия. Это связано с необходимостью применения прямых разностей, которые в дискретном плане должны здесь заменить процесс дифференцирования. При этом возможны следующие ситуации.

1. Если ЦВМ вычисляет значение задающей величины по некоторым заложенным в нее данным и использует при этом прогнозирование (например, при вычислении текущих координат небесных тел, спутников, ракет и др.), то вычисление будущего значения интересующей величины может быть легко сделано со сдвигом на практически любое число тактов. В этом случае реализация формулы (26.13) в принципе возможна. Однако практические трудности в реализации слишком сложных алгоритмов и ограничения в элементах не дают возможности получить полную инвариантность.

2. Если ЦВМ вычисляет задающую величину не по принципу прогнозирования, а в результате обработки поступающей текущей информации, то точная реализация формулы (26.13) оказывается невозможной. Тогда приходится ограничиться приближенной реализацией формулы (26.12) либо вводить в прямой канал дополнительное запаздывание на один такт. В первом случае условие полной инвариантности (26.13) нарушается, во втором - вводится постоянное временное запаздывание на один такт в обработку задающего воздействия, что также нарушает условие инвариантности.

Таким образом, при использовании комбинированного регулирования приходится ориентироваться не на полную инвариантность, а на некоторое, во многих случаях весьма существенное, повышение точности.

Поскольку точность систем регулирования определяется низкочастотной частью ЛАЧХ, а низкочастотная часть ЛАЧХ дискретных систем практически сливается с ЛАЧХ непрерывной части системы, то расчет дискретных систем комбинированного регулирования осуществляется аналогично непрерывному случаю.

Важнейшим следствием использования комбинированного регулирования является возможность снижения требований к ЦВМ в части ограничения периода дискретности. Это связано с понижением требований к

каналу регулирования по отклонению при введении дополнительного канала с передаточной функцией  $E(z)$ .

Пониженные требования к точности воспроизведения в канале регулирования по отклонению позволяют перейти к желаемым ЛАЧХ с меньшим значением частоты среза. Это дает возможность увеличить период дискретности  $T_0$  при сохранении необходимого запаса устойчивости.

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теория автоматического управления / Под ред. А.А.Воронова - М.: Высшая школа, 1986, ч. 1, 2.
2. Теория автоматического управления / Под ред. А.В.Нетушила - М.: Высшая школа, 1983. – 432 с.
3. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988. 304 с.
4. Зайцев Г.Ф., Стеклов В.К., Брицкий О.І. Теорія автоматичного управління. - К., Техніка, 2002.- 688 с.
5. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. Підручник. – Київ: Либідь, 1997. – 544с.
6. Лукас В. А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
7. Зайцев Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. Киев: Вища школа, 1988 - 431 с.



Навчальне видання  
Конспект лекцій з курсу  
"Теорія автоматичного управління"  
Частина 2 – Нелінійні та дискретні САУ

Для студентів, що навчаються за напрямками  
6.050201 "Системна інженерія" (СУА) і  
6.050202 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" (АУП)  
(для денної й заочної форм навчання)

Укладач: Федюн Роман Валерійович, к.т.н, доц.  
Попов Владислав Олександрович, к.т.н, доц.

Рецензент Секірін Олександр Іванович, к.т.н, доц.

Відповідальний  
за випуск Воропаєва Вікторія Яківна, к.т.н., доц., зав. каф.