УДК 517. 5

О ФУНКЦИЯХ С ЗАДАННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО НЕКОТОРЫМ МНОЖЕСТВАМ

Н.П.Волчкова
Донецкий национальный технический университет

Введение.

Вопросы, связанные с изучением функций по ее заданным интегральным средним, занимают важное место в анализе и приложениях. Глубокие связи данного направления с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией аппроксимации, микролокальным анализом, а также различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, интегральной и комбинаторной геометрией и теорией графов были предметом исследований многих известных математиков двадцатого века (см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией, а также монографии [3], [4]). Полученные результаты, в ряду которых − работы Радона, Помпейю, Дельсарта, Йона, Зальймана, Беренстейна и других, оказались весьма важными во многих направлениях современной математики и конкретных приложениях, связанных с созданием компьютерной аксиальной томографии, акустикой, обработкой сигналов и т.д. В данной работе изучается задача об обращении локального преобразования Помпейю для многомерных обобщений круговой луночки.

Постановка задачи.

Пусть R^n − вещественное евклидово пространство размерности $n \ge 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ − группа движений R^n, $F = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ − конечное семейство распределений с компактным носителем в R^n. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(R^n)$ по правилу

$$< g\mu_i, f > = < \mu_i, f \circ g^{-1} >, \ f \in C^\infty(R^n).$$

Преобразование Помпейю P_F (глобальное) отображает $C^\infty(R^n)$ в $C^\infty(M(n))^k$ и определяется равенством

$$P_F(f)(g) = \left(< g\mu_1, f >, ..., < g\mu_k, f >\right), \quad g \in M(n). \tag{1}$$

Аналогично, для открытого множества $U \subseteq R^n$ локальное преобразование Помпейю отображает по формуле (1) пространство $C^\infty(U)$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(U,\mu_1)) \times ... \times C^\infty(\Lambda(U,\mu_k))$, где $\Lambda(U,\mu_i) = \{g \in M(n) : \operatorname{supp} g\mu_i \subset U\}$.

Для заданных F и U возникает следующая

Проблема [1]. 1) Выяснить, является ли P_F инъективным и если не является, то описать его ядро.

2) Если P_F инъективно, то найти обратное отображение.

Для отдельных F и U инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. [1] - [4]). Особый интерес представляет случай, когда $U = B_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$, а $F = \{\chi_E\}$ − индикатор компактного множества $E \subset B_R$ положительной меры. Для этого семейства F и широкого класса множеств E преобразование P_F инъективно по отношению к U, если R больше диаметра $d(E)$ наименьшего замкнутого шара, содержащего E (см. [4] - [6], а также [3], [7], где для многих E найдено минимальное значение R, при котором P_{χ_E} инъективно). Для указанного класса E и $R > 3d(E)/2$ в работе [6] приводится также схема обращения преобразования P_{χ_E}. Кроме того, для некоторых множеств найдена конструкция восстановления преобразования Помпейю и при $R > d(E)$ (см. [6], [8], [9]). Особенно трудным является случай множеств с криволинейной границей. Представляет интерес получить при этом условии и $R > d(E)$ решение проблемы 2) для других множеств E. В данной работе это делается для множеств вида $H = \Lambda \times [-b_3, b_3] \times \ldots \times [-b_n, b_n]$, где Λ - круговая луночка.

Построение решения задачи.

Пусть $S^{n-1}=\{x\in R^n:|x|=1\}$, ρ,σ - полярные координаты в R^n (для любого $x\in R^n$ $\rho=|x|$, а если $x\neq 0$, то $\sigma=x/\rho\in S^{n-1}$), $\{Y_s^{(k)}(\sigma)\}$, $1\le s\le d_k$ - фиксированный ортонормированный базис в пространстве H_k сферических гармоник степени k на S^{n-1} (H_k рассматривается как подпространство $L^2(S^{n-1})$). Всякая функция $f\in C^\infty(B_R)$ представима в виде ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{d_k} f_{ks}(\rho)Y_s^{(k)}(\sigma),\ 0<\rho<R,$$

где

$$f_{ks}(\rho)=\int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma)\overline{Y_s^{(k)}(\sigma)}d\sigma.$$

Для восстановления функции f достаточно знать коэффициенты Фурье f_{ks}.

Далее, как обычно, $D(R^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^n, $D'(R^n)$ – пространство распределений на R^n, $\mu_1*\mu_2$ - свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu\in D'(R^n)$ называется радиальное распределение $R\mu$, действующее на функцию $\varphi\in D(R^n)$ по формуле

$$<R\mu,\varphi>=<\mu(x),\ \int_{SO(n)}\varphi(kx)dk>, \tag{2}$$

где $SO(n)$ – группа вращений пространства R^n, dk -нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$. Радиальность $R\mu$ означает, что для любого $k\in SO(n)$

$$<R\mu(x),\varphi(kx)>=<R\mu(x),\varphi(x)>\ ,\quad \varphi\in D(R^n)\ .$$

Пусть $\alpha\in(0,\pi)$, $\Lambda=\{z\in C:|z-\cos\alpha/2|\le 1,|z+\cos\alpha/2|\le 1\}$ - круговая луночка с вершинами в точках $z_1=ir$, $z_2=-ir$, $r=\sin\alpha/2$, $H=\Lambda\times[-b_3,b_3]\times\ldots\times[-b_n,b_n]$, $b_k>0$, $k=3,\ldots,n.$
Далее будут использоваться дифференциальные операторы: Δ - оператор Лапласа в R^n,

$$D^\kappa=\frac{\partial^{|\kappa|}}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\ \ (\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)\in Z_+^n,\ |\kappa|=\kappa_1+\ldots+\kappa_n),\ D_1=\frac{\partial^{n-2}}{\partial x_3\ldots\partial x_n}\quad,$$

$$D_{i,j}(a)=(x_i+a)\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i},\ a\in R^1,$$

$$D_2=\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2},\quad D_3=\left(x_1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$D_4=\left(x_1-\cos\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\ .$$

Пусть r_0 – радиус наименьшего замкнутого круга, содержащего Λ, $R>r$, $f\in C^\infty(B_R)$, где $r=\sqrt{r_0^2+b_3^2+\ldots+b_n^2}$, $n\ge 3$.

Обозначим $R_k=R(D_1D_2^k\mu)$, где $\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}D_4\right)D_3D_1\chi_\Lambda.$

Для $x\in B_{R-r}$ положим

$$f_1(x)=(f*R\chi_H)(x),\ f_i(x)=(\breve{f}*\nu_i)(x),\ i=2,3,$$

где $\breve{f}(x)=f(-x),\ \nu_2=R_1,$

$$\nu_3 = \begin{cases} R_3 + \dfrac{2}{3n}\Delta R_1, & 3n\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \neq 2r^2, \\ R_5 + \dfrac{4}{9n^2r^2}(3n-4)(3n+2)\Delta R_1 - \dfrac{4}{9n^2}\Delta^2 R_1, & 3n\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 2r^2, \end{cases}$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. Пусть $R > 2r$. Тогда для любого $k \in Z_+$, $1 \le s \le d_k$, и $\rho \in (0, R)$ существуют распределения $U_{l,i}$ $(l \in N,\, i = 1,2,3,4)$ со следующими свойствами:

1) $supp\, U_{l,i} \subset B_{R-r}$ $(l \in N,\, i = 1,2,3)$, $supp\, U_{l,4} \subset B_R$ $(l \in N)$;

2) для любой $f \in C^\infty(B_R)$ имеют место равенства

$$\left(\Delta^n \breve{f}\right)_{ks}(\rho) = \lim_{l \to \infty}\left(< U_{l,1}, f_2 > + < U_{l,2}, f_3 >\right), \tag{3}$$

$$\breve{f}_{ks}(\rho) = \lim_{l \to \infty}\left(< U_{l,3}, f_1 > + < U_{l,4}, \Delta^n \breve{f} >\right). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 потребуется несколько вспомогательных утверждений.
Пусть $1 \le i < j \le n$, $h, \theta \in R^1, \tau_{i,h}$ - сдвиг на h вдоль x_i, $k_{i,j,\theta}$-поворот в плоскости (x_i, x_j) на угол θ.

Лемма 1. Пусть $E \subset \overline{B}_{r_1}$, $R > r_1$, $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда

$$P_{\chi_E;B_R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(g) = \frac{d}{dh}((P_{\chi_{E;B_R}} f)(\tau_{i,h} \circ g))\bigg|_{h=0}, \tag{5}$$

$$P_{\chi_E;B_R}(D_{ij}(0) f)(g) = \frac{d}{d\theta}(P_{\chi_E}(f)(k_{i,j,\theta} \circ g))\bigg|_{\theta=0}, \tag{6}$$

где $gE \in B_R$.

Лемма 2. Пусть $R > r_1$, $E \subset \overline{B}_{r_1}$, $\nu = D^\kappa D_{ij}(a)\chi_E$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(B_R)$ и $x \in B_{R-r_1}$ имеет место равенство

$$(\breve{f} * R\nu)(x) = (-1)^{|\kappa|+1}\int\limits_{SO(n)}(P_{\chi_{E;B_R}}(D_{ij}(a)D^\kappa)(y)(f(ky - x)))(e)dk, \tag{7}$$

где e – единица группы $SO(n)$.

Лемма 3. Пусть $R > r_1$, $E \subset \overline{B}_{r_1}$, $\mu(\kappa) = R(D^\kappa \chi_E)$. Тогда для любой $f \in C^\infty(B_R)$ и $x \in B_{R-r_1}$ имеет место равенство

$$(f * \mu(\kappa))(x) = \int\limits_{SO(n)}\left\langle D^\kappa \delta(y), (P_{\chi_{E;B_R}} f)\left(\begin{Vmatrix} -k^{-1} & x - ky \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right)\right\rangle dk,$$

где $M(n)$ рассматривается как группа матриц порядка $(n+1)\times(n+1)$ вида $\begin{Vmatrix} k & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $k \in SO(n)$, $x \in R^n$ и R^n отождествляется с аффинным подпространством $\{x_{n+1} = 1\}$ в R^{n+1}.

Доказательство лемм 1-3 содержится в работах [6], [8].

Далее, для любого $m \in \{1,\ldots,n\}$ обозначим η_m- отображение $R^n \to R^n$, действующее следующим образом: если $x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$, то $\eta_m x = ((\eta_m x)_1,\ldots,(\eta_m x)_n)$, где $(\eta_m x)_k = x_k$ при $k \ne m$, $(\eta_m x)_m = -x_m$. Пусть (соответственно G_-^n) совокупность отображений $R^n \to R^n$, представимых в виде суперпозиции четного (соответственно нечетного) числа отображений η_m, $1 \le m \le n$.

Лемма 4. Для любой $f \in C^{n+1}(H)$ имеет место равенство

$$\int_H D_1 D_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+D_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n =$$

$$\left(\sum_{\eta\in G_+^{n-2}}-\sum_{\eta\in G_-^{n-2}}\right)\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\left[f(z_1,\eta b)-f(z_2,\eta b)-\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}f(z_1,\eta b)+\frac{\partial}{\partial x_2}f(z_2,\eta b)\right)\right]\right],$$

где $z_1 = i\sin\frac{\alpha}{2}$, $z_2=\overline{z_1}$, $b=(b_3,\dots,b_n)$.

Доказательство. Для любой $u\in C^3(\Lambda)$ имеет место равенство

$$\int_\Lambda D_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+D_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(f(z_1)-f(z_2)-\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}f(z_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}f(z_2)\right)\right) \qquad (8)$$

(см. [7]). Поскольку для любой $v\in C^{n-2}([-b_3,b_3]\times\ldots\times[-b_n,b_n])$

$$\int_{-b_3}^{b_3}\dots\int_{-b_n}^{b_n}(D_1 v)(x_3,\dots,x_n)dx_3\dots dx_n = \sum_{\eta\in G_+^{n-2}}v(\eta b)-\sum_{\eta\in G_-^{n-2}}v(\eta b),$$

из (8) получаем утверждение леммы 4.

Пусть J_q - функция Бесселя порядка $q\ge 0$, и пусть $j_q(z)=J_q(z)/z^q$. Сферическое преобразование радиального распределения μ с компактным носителем в R^n определяется равенством

$$\tilde{\mu}(\lambda) = <\mu(x), j_{(n-2)/2}(\lambda|x|)>,\quad \lambda\in C. \qquad (9)$$

Лемма 5. Пусть $k\in Z_+$. Тогда

$$\tilde{R}_k(\lambda)=(-1)^{n-2}2^{n-1}\cos\frac{\alpha}{2}b_3\cdot\ldots\cdot b_n\lambda^{2(k+n-2)}\left\{c_{1k}\, j_{\frac{3n+2k-6}{2}}(\lambda r)+\lambda^2 c_{2k}\, j_{\frac{3n+2k-4}{2}}(\lambda r)\right\},$$

где

$$c_{1k}=z_1^k-z_2^k-ik\sin\frac{\alpha}{2}\left(z_1^{k-1}+z_2^{k-1}\right),\quad c_{2k}=\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(z_1^k-z_2^k\right).$$

Доказательство. Поскольку $j_q'(t)=-tj_{q+1}(t)$ (см. [3, формула (1.4.45)]), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1+ix_2)^k j_q(\lambda|x|)\right)=k(x_1+ix_2)^{k-1}j_q(\lambda|x|)-\lambda^2 x_1(x_1+ix_2)^k j_{q+1}(\lambda|x|),, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left((x_1+ix_2)^k j_q(\lambda|x|)\right)=ik(x_1+ix_2)^{k-1}j_q(\lambda|x|)-\lambda^2 x_2(x_1+ix_2)^k j_{q+1}(\lambda|x|). \qquad (11)$$

Из (10), (11) индукцией по k находим

$$(-1)^k D_2{}^k\left(j_q(\lambda|x|)\right)=\lambda^{2k}(x_1+ix_2)^k j_{q+k}(\lambda|x|)$$

и (см. (9))

$$\tilde{R}_k(\lambda)=\lambda^{2(k+n-2)}<\mu, x_3,\dots,x_n(x_1+ix_2)^k j_{\frac{3n+2k-6}{2}}(\lambda|x|)>,$$

где $\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}D_4\right)D_3D_1\chi_\Lambda$. Используя лемму 4, получаем требуемое утверждение.

По теореме Винера-Пэли [3, теорема 1.6.5] существуют радиальные распределения μ_1 и μ_2 с носителями в B_r, для которых

$$\tilde{\mu}_1(\lambda)=(-1)^n\frac{\tilde{\nu}_2(\lambda)}{\lambda^{2n}},\qquad \tilde{\mu}_2(\lambda)=(-1)^n\frac{\tilde{\nu}_3(\lambda)}{\lambda^{2n}}.$$

Далее нам потребуется оценка снизу функции $\tilde{\mu}_1(\lambda)\tilde{\mu}_2(\lambda)j_{n/2+k-1}(\varepsilon\lambda)$, где $\varepsilon>0$.

Лемма 6. Пусть $a_1,\ a_2,\ a_3>0,\quad k\in Z_+$

$$\theta(\lambda) = j_{(3n-2)/2}(a_1\lambda)\, j_{3n/2}(a_2\lambda)\, j_{n/2+k-1}(a_3\lambda).$$

Тогда существуют константы $L_{1k}, L_{2k} > 0$ такие, что для любого $l \geq L_{1k}$ можно выбрать $\rho_l \in (l, l+1)$ с условием: если $|\lambda| = \rho_l$ или $|Im\,\lambda| \geq 1$ и $|\lambda| \geq L_{1k}$, то

$$|\theta(\lambda)| \geq \frac{L_{2k}}{|\lambda|^{(7n+2k-1)/2}} e^{(a_1+a_2+a_3)|Im\,\lambda|}.$$

Доказательство. В силу четности $\theta(\lambda)$ можно считать, что $Re\,\lambda \geq 0$. Из асимптотического разложения функции Бесселя (см.[13 , с. 209]) находим

$$\theta(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(a_1)^{-(3n-1)/2}(a_2)^{-(3n+1)/2}(a_3)^{-(n+2k-1)/2}}{\lambda^{(7n+2k-1)/2}} \cos(a_1\lambda - (3n-1)\frac{\pi}{4}) \cos(a_2\lambda - (3n+1)\frac{\pi}{4}) \cdot$$

$$\cos(a_3\lambda - (n+2k-1)\frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{e^{(a_1+a_2+a_3)|\mathrm{Im}\lambda|}}{|\lambda|^{(7n+2k-1)/2}}\right).$$

По неравенству Лоясевич имеем (см. [6])

$$|\cos z| \geq \frac{1}{\pi e} d(z,V) e^{|Im\,z|}, \tag{12}$$

где $V = \{(2l+1)\pi/2, l \in Z\}$, $d(z,V) = \min(1, dist(z,V))$. Используя (12) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 7 работы [6], получаем утверждение леммы 6.

Всюду в дальнейшем $R > 2r$, $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $R/(2r) - 1$, $R_m = 2r(1+\varepsilon_m)$, $m \geq 1$, $R_0 = 0$.

Лемма 7. Пусть $R > 2r$. Тогда для любого $k \in Z_+$, $m \in N$, $t \in [R_{m-1}, R_m)$ существуют две последовательности радиальных распределений $\mu_{l,i}$ $(l \geq 1, i = 1,2)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $supp\ \mu_{l,i} \subset B_{R_m - r}$, $i = 1,2$, $l \in N$,

2) существуют константы $L = L(k, R, r, \varepsilon_1, n)$, $C = C(R, r, \varepsilon_1, n) > 0$, для которых при $l \geq L$ имеет место неравенство

$$\left| j_{n/2+k-1}(t\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda)\tilde{\mu}_{l,1}(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda)\tilde{\mu}_{l,2}(\lambda) \right| \leq \frac{C}{l} \frac{\|\lambda\|^{-n/2-k+13/2}}{t^{n/2+k-1}} e^{R_m|Im\,\lambda|},$$

где $\|\lambda\| = max(1, |\lambda|)$.

Для доказательства леммы 7 достаточно использовать лемму 6 и повторить рассуждения из доказательства предложения 8 работы [6].

Перейдем к доказательству теоремы 1. Из леммы 7 следует (см. [6, доказательство теоремы 9]), что для любого $m \in N$, $\rho \in [R_{m-1}, R_m)$ существуют распределения $U_{l,i}$ $(l \in N, i = 1,2)$ с носителями в B_{R-r}, для которых при $l \geq L$ и любой $f \in C^{\infty}(B_R)$ имеет место оценка

$$\left| f_{ks}(\rho) - < U_{l,1}, f * \mu_1 > - < U_{l,2}, f * \mu_2 > \right| \leq \frac{C_1}{l} \frac{\rho^{-n/2+1}}{(R - R_m)^M} \sup_{x \in B_{R'_m}, |\kappa| \leq M} \left| \frac{\partial^{|\kappa|}}{\partial x^{\kappa}} f(x) \right|, \tag{13}$$

где $R_m^{'} = 2/3R + 1/3R_m$, $M = [(n+13)/2]+1$ и константа C_1 зависит от R, r, ε_1, n. Применяя (13) к $\Delta^n \breve{f}$ и учитывая, что $\Delta^n \mu_i = \nu_{i+1}$, $i = 1,2$, получаем равенство (3). Пусть теперь $T_1 = R\chi_H$, $T_2 = \Delta^n \delta$. Тогда $\tilde{T}_1(0) \neq 0$, $\tilde{T}_2(\lambda) = (-1)^n \lambda^{2n}$, т.е. $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ не имеют общих нулей. Кроме того, $\tilde{T}_1$ имеет такое же асимптотическое поведение, что и функция Бесселя (см. [5], [6]). Поэтому, как и выше, существуют распределения $U_{l,i}$ $(l \in N, i = 3,4)$, для которых выполнено равенство (4). Теорема доказана.

Анализ результатов.

Пусть $x \in B_{R-r_1}$, $k \in SO(n)$ (x, k - фиксированы), g_1- элемент $M(n)$, действующий по формуле $g_1 y = ky - x$. Тогда

$$P_{\chi_H;B_R}(f(ky-x))(g) = (P_{\chi_H;B_R} f)(g_1 g),$$

где $g_H \subset B_{R-|x|}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что формула (7) позволяет вычислять значения $\breve{f} * R\nu$ по известному преобразованию Помпейю $P_{\chi_H;B_R} f$. Леммы 1, 2, 3 дают формулы для вычисления значений функций f_i, $i = 1,2,3$, по известному преобразованию Помпейю $P_{\chi_H;B_R} f$. Поэтому равенства (3), (4) восстанавливают коэффициенты Фурье $\breve{f}$ по $P_{\chi_H;B_R} f$. Таким образом, в теореме 1 содержится конструкция обращения преобразования Помпейю $P_{\chi_H;B_R}$.

Выводы.

Конструкция обращения, указанная в теореме 1, получена при условии $R > 2r$. Это условие является достаточным для инъективности преобразования Помпейю и не может быть улучшено в общем случае. Таким образом, теорема 1 усиливает теорему К.А. Беренстейна, Р. Гэя и А. Ижера (см. [6]) для случая множества H. Этого удалось достичь за счет использования дифференциальных операторов специального вида (см. лемму 4). Они позволяют сводить интегральные условия на функцию к функционально-дифференциальным уравнениям.

О функциях с заданными интегралами по некоторым множествам

Волчкова Н.П.

РЕЗЮМЕ.
Изучаются функции с заданными интегралами по некоторым многомерным обобщениям круговой луночки. Получена конструкция обращения соответствующего преобразования Помпейю в шаре. Доказательство основного результата использует методы гармонического анализа, а также некоторые результаты теории целых и специальных функций.

Ключевые слова: преобразование Помпейю, свёртка, функции Бесселя, распределение, сферические функции.

Про функції з даними інтегралами по деяких множинах

Волчкова Н.П.

РЕЗЮМЕ.
Вивчаються функції з заданими інтегралами по деяких багатовимірних узагальненнях кругового серпка. Одержано конструкцію обернення відповідного перетворення Помпейю в кулі. Для доведення основного результату використовуються методи гармонійного аналізу, а також деякі результати теорії цілих та спеціальних функцій.

Ключові слова: преобразование Помпейю, свёртка, функции Бесселя, распределения, сферические функции.

On functions with given integrals over some sets

Volchkova N.P.

SUMMARY.
Functions with given integrals over some multidimensional generalizations of crescent are studied. The construction of the inversion for the correspondent Pompeiu transform in a ball are obtained. The proof of main result uses the methods of harmonic analysis and some results of entire and special functions.

Key words: Pompeiu transform, convolution, Bessel functions, distribution, spherical functions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беренстейн К.А. Комплексный анализ и уравнения в свертках / Беренстейн К.А., Струппа Д. // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам.направления. – М.: ВИНИТИ, 1989. - Т.54. - С. 5-111.
2. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations, ed. B.Fuglede et al. - 1992 . - P.185-194.
3. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 2003. - 454p.
4. Volchkov V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. - London: Springer, 2009. - 671p.
5. Berenstein C.A. Le probleme de Pompeiu locale / Berenstein C.A., Gay R. // J. Analysis Mathematics. -1989. - V.52. - P. 133-166.
6. Berenstein C.A. Inversion of the local Pompeiu transform / Berenstein C.A., Gay R., Yger A. // J. Analysis Mathematics. - 1990. - V.54. - P. 259-287.
7. Машаров П.А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. - 2001. - №7. - С. 126-132.
8. Волчкова Н.П. Inversion of the local Pompeiu transform // Functional Analysis and its Applications. – 2004. – V. 197. – P. 301-309.
9. Волчкова Н.П. Об обращении локального преобразования Помпейю // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. - 2006. - Вип. 2 - С. 15-17.

Сведения об авторе.

Ф.И.О.	Волчкова Наталья Петровна
Место работы, должность	Донецкий национальный технический университет, доцент кафедры высшей математики
e-mail	math@dgtu.donetsk.ua