Об асимптотических свойствах функций Лежандра

Н.П. Волчкова

Донецкий национальный технический университет

Асимптотические свойства различных специальных функций играют важную роль в анализе и приложениях. В настоящее время развиты некоторые общие методы, позволяющие существенно продвинуться в этом направлении. Вместе с тем остается еще много вопросов, требующих выяснения. В частности, в некоторых задачах интегральной геометрии важное значение имеет нахождение асимптотических рядов типа Бесселя для функций Лежандра P_{μ}^{ν} (см. [1], [2]).

Для $k \in Z_{+}$, $p \in N$, $\alpha \in C$ и $r \in (0,\pi)$ положим

$$d_k(r) = \begin{cases} -\dfrac{cth\, r}{k+1}, & \textit{если} \quad k \quad \textit{нечетно}, \\ \dfrac{1}{k+1}, & \textit{если } k \textit{ четно}, \ k \neq 0, \\ 0, & \textit{если} \qquad k = 0, \end{cases}$$

$$A_p = (sh\, r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}+\mu\right)_m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\ldots k_m!} d_{k_1}(r)\ldots d_{k_m}(r),$$

где $(a)_k = \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon \in (0,\pi)$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$P^{\mu}_{i\lambda-\frac{1}{2}}(ch\, r) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(sh\, r)^{-\mu}} \cdot$$

$$\left(\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\sin\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!}\frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}\Bigg).$$

Относительно различных частных случаев теоремы 1 см. [1] - [3].

Литература

1. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
2. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. - London: Springer, 2009. - 671 pp.
3. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М: ИЛ, 1952. – 476 с.