

ОСОБЕННОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю.

г. Донецк, Донецкий национальный технический университет

belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua

Введение. Затронутые ниже вопросы, на наш взгляд, в равной степени имеют отношение к разделам курсов высшей математики, обыкновенных дифференциальных уравнений и численных методов.

Постановка задачи. Одним из основных средств анализа нелинейных динамических систем является численное моделирование. В настоящее время распространены различные версии пакетов прикладных программ, они просты в эксплуатации. Однако, иногда их применение к исследованию даже простейших нелинейных систем даёт взаимно исключающие результаты. Описание одного из таких случаев и является целью данной работы.

Исзуемое уравнение. Имеет вид

$$\ddot{x} + x = -F(x, \dot{x}, t), \quad (1)$$

где

$$F = f(x) + \beta \dot{x} + \mu \cos t \cdot x + \zeta x,$$

$$f(x) = \frac{1}{2} k \{ (x - \Delta) + |x - \Delta| + (x + 1) - |x + 1| \},$$

и является, по существу, нелинейным уравнением Матье с кусочно-линейной упругой характеристикой. При решении этого уравнения различными процедурами пакета MATLAB для начальных условий

$$x(0) = -5.0, \quad \dot{x}(0) = 1.75 \quad (2)$$

и значений параметров $\beta = 0.02$, $\mu = 0.12$, $\zeta = -0.75$, $k = 1.553$, $\Delta = 4$ были получены взаимно исключающие результаты. На рис. 1 представлены решения задачи (1), (2), полученные решателями ode45 и ode113, реализующими методы Рунге-Кутты 4-5-го порядков точности и экстраполяционный Адамса-Башворта-Мултона, соответственно. Для сравнения на рисунке приводится и график $\cos t$. В каждом случае число расчётных точек на промежутке величиной $T = 2\pi$ задавалось равным 60, что, обычно, вполне достаточно при анализе таких систем.

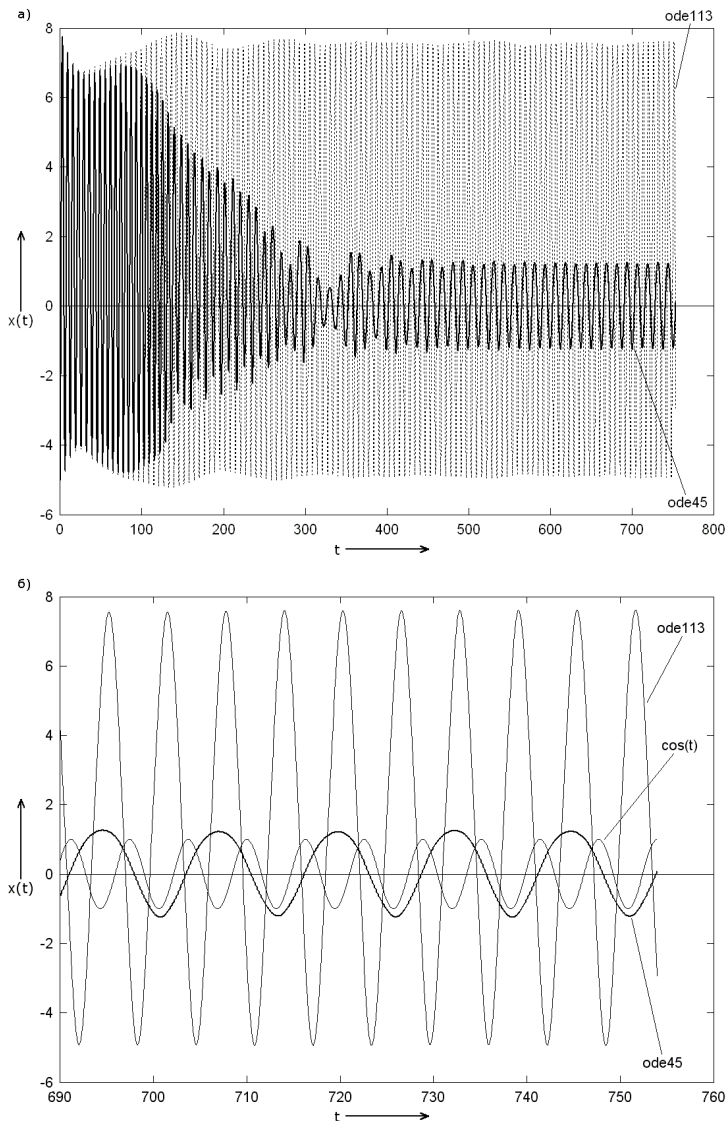


Рис. 1. Решения уравнения (1), даваемые решателями ode45, ode113 при $x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = 1.75$: а) на промежутке $t \in [0, 120T]$; б) на стационарном промежутке $t \in [90T, 120T]$

Как показывает рисунок наличие существенные количественные и качественные различия. Если в первом случае (решатель ode113)

установившиеся колебания имеют период равный периоду параметрического возбуждения, то во втором случае (решатель ode45) период стационарных колебаний равен удвоенному периоду возбуждения. Отметим, что разделились точки зрения и решателей ode23t, ode15s, реализующих метод трапеций и многошаговый метод переменного порядка, соответственно.

Предварительные предположения. На первый взгляд, причины обнаруженных различий лежат в области выбора точности интегрирования указанного уравнения. С этой целью были проведены специальные вычислительные эксперименты, предусматривающие варьирование числа расчётных точек на промежутке T , абсолютной (AbsTol) и относительной (RelTol) погрешностей интегрирования в достаточно широких диапазонах. Однако полученные результаты, сохранили, в целом отмеченное различие и не внесли дополнительной ясности в обнаруженное явление [1].

Далее, была предпринята попытка поиска объяснений путём анализа областей притяжения периодических режимов.

Область притяжения, её построение, анализ. Построение области притяжения проводилось на основе специально разработанных программ. Остановимся вкратце на их особенностях.

Предполагается, что изучаемый режим задаётся своим гармоническим составом $A_0, A_1, B_1, \dots, A_m, B_m$, т.е. набором коэффициентов ряда Фурье. Если гармонический состав неизвестен, то возможно задание начальной точки в сечении ($t_0 = 0$, например) области притяжения, которая «приводит» систему к исследуемому режиму. С помощью такой точки определение численного гармонического состава изучаемого режима производится автоматически.

Программа построения области притяжения, точнее, её сечения, организована следующим образом. Задаётся система дифференциальных уравнений, назначается метод её интегрирования и указывается период исследуемого режима T . Далее, задаётся промежуток интегрирования

$[t_0; t_0 + N \cdot T]$, число P , где $h = \frac{T}{P}$ – шаг интегрирования,

гармонический состав изучаемого режима или точка в сечении ($t = t_0$) области притяжения, область сканирования в виде прямоугольника, шаг сканирования и допустимая погрешность δ , которая представляет собой критерий идентичности сравниваемых гармонических составов.

Если гармонический состав изучаемого режима не задан, но указана одна из точек его области притяжения, то производится численное решение дифференциального уравнения для этой точки, выбираемой в качестве начальной, и определение гармонического состава решения на последнем

промежутке интегрирования равном периоду T исследуемого режима. При достаточном значении $N \cdot T$ переходной процесс завершается и полученный таким образом гармонический состав используется в дальнейшем.

Анализ области сканирования проводится следующим образом. Производится выбор пробной (начальной) точки из заданной зоны, после этого система уравнений решается заданным методом и с заданным шагом. После получения решения системы производится спектральный анализ численного решения на последнем промежутке интегрирования равном периоду T . Далее, производится сравнение последнего полученного спектрального состава с заданным. Если составы отличаются по норме не более, чем на величину δ , то выбранная начальная точка считается принадлежащей области притяжения заданного режима. В качестве нормы используется один из вариантов p – нормы, а именно, $p = \infty$, т.е., $\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$. Описанная процедура повторяется для каждой следующей точки из зоны сканирования. После анализа всех точек они выводятся на фазовую плоскость с пометкой (например, цветом) какой области притяжения принадлежит каждая точка. Таким образом получается графическое представление сечения области притяжения данного режима.

С использованием описанной программы было проведено построение сечения ($t_0 = 0$) области притяжения решения задачи (1), (2). Результаты показаны на рис. 2, где точками отмечены наборы начальных условий, при которых в системе устанавливаются колебания с периодом равным периоду параметрического возбуждения. Построение проводилось путем сканирования начальных условий $x(0)$, $\dot{x}(0)$ с шагом 0.1 по каждой из фазовых координат и последующего интегрирования уравнения (1) решателем ode45. Для определения гармонического состава исследуемого режима была выбрана начальная точка $x(0) = -2.0$, $\dot{x}(0) = -6.0$. Значение параметра δ было установлено равным 1.5. Наличие отдельных пустот внутри области притяжения на рис. 2, несмотря на визуальную близость численного и изучаемого режимов, вызывает определённые вопросы и требует дополнительного изучения.

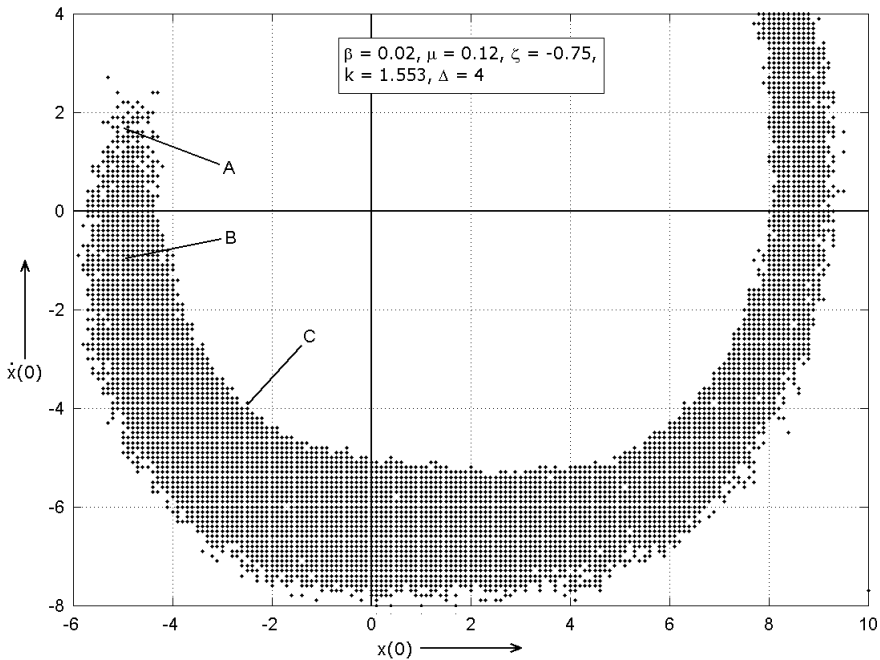


Рис. 2. Сечение ($t_0 = 0$) областей притяжения периодических режимов

Оказывается, что «спорная» точка $x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = 1.75$, на рис. 2 она обозначена буквой *A*, расположена вблизи границы области притяжения, и это наталкивает на следующую мысль. В какой-то момент времени структура сечения областей притяжения становится достаточно тонкой и при малых, но разных по знаку, погрешностях численных решений решателей ode45 и ode113 соответствующие фазовые точки оказываются в зонах притяжения различных периодических режимов. После чего, через соответствующий переходной процесс фазовые траектории численных решений ode45, ode113 притягиваются к различным периодическим аттракторам. Если эта гипотеза имеет под собой какие-либо основания, то различные результаты решателей ode45 и ode113 можно ожидать и в других приграничных точках, и наоборот, во внутренних, – следует ожидать согласующихся результатов.

Действительно, проведённые контрольные расчёты, это предположение подтверждают. Так, на рис. 3 приведены их результаты для точек *B* ($x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = -1.0$) и *C* ($x(0) = -2.6$, $\dot{x}(0) = -3.9$), указанных на рис. 2. Таким образом приграничные точки следует рассматривать как точки, формирующие зону неопределённости системы.

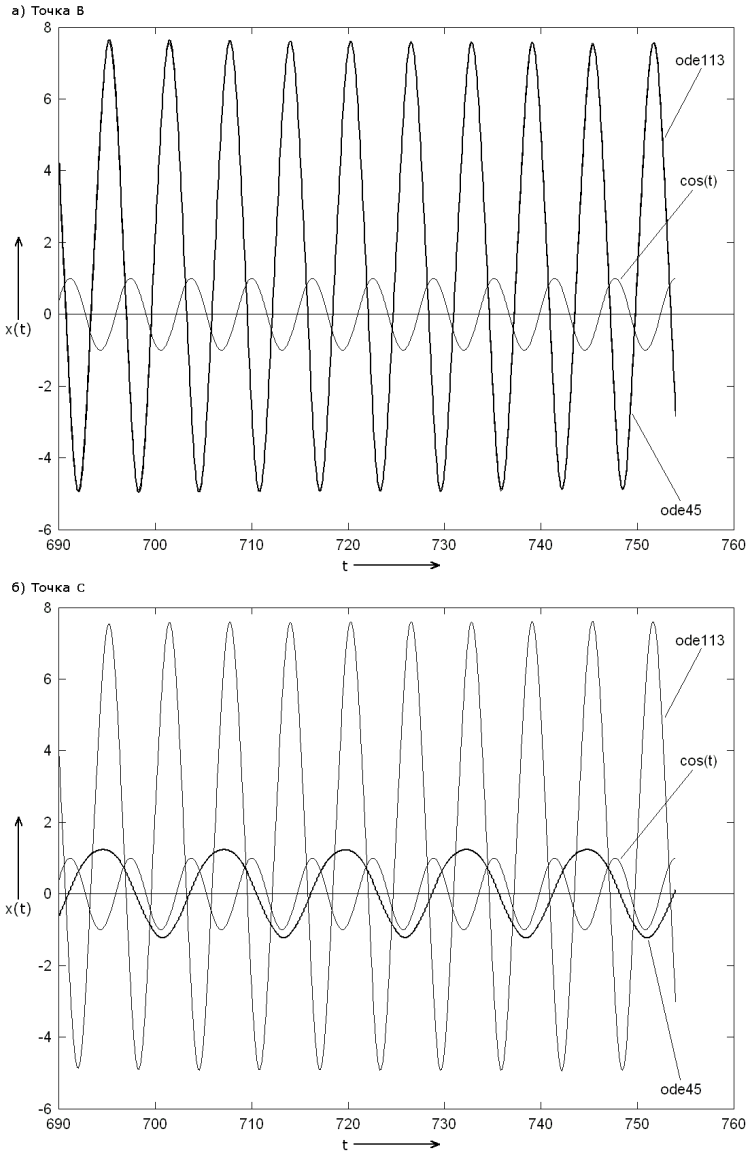


Рис. 3. Стационарные решения, полученные решателями ode45, ode113 в точках B ($x(0) = -5.0$, $\dot{x}(0) = -1.0$) и C ($x(0) = -2.6$, $\dot{x}(0) = -3.9$)

Выводы. Изложенные результаты позволяют сделать следующие заключения.

1. В ряде случаев, в поведении нелинейных динамических систем, сохраняется элемент неопределённости, в частности, это выражается в том, что при определённых начальных условиях стационарные режимы движений наверняка установлены быть не могут. Такие начальные точки располагаются вблизи границ областей притяжения.

2. В практических приложениях, рекомендуемые начальные условия целесообразно выбирать с определённой отстройкой от этих границ, чтобы обеспечить совпадение результатов расчёта, полученных различными методами.

Литература

1. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. Особенности численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – Збірник науково-методичних робіт. – Вип. 3. – Донецьк: ДонНТУ, 2005. – с. 20-26.