Улітін Г. М.,
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики ім. В. В. Пака,
Донецький національний технічний університет.
(м. Донецьк, Україна)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора является важным моментом дифференциального исчисления, что объясняется её широким применением во многих вопросах математического анализа. Новым подходам к выводу этой формулы и остаточного члена для функции одной переменной посвящен ряд работ, например, Ехилевского С. Г.и Беловодского В. Н..

В настоящей работе предложен новый способ вывода этой формулы для функции двух переменных, основанный на применении теоремы Лагранжа и обобщенной теоремы о среднем.

Функция $z = f(x,y)$ удовлетворяет всем необходимым условиям формулы Тейлора для случая $n = 2$. Если применить теорему Лагранжа для производных $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ и полученные равенства проинтегрировать при фиксированных соответствующих переменных, то можно получить соотношения:

$$f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) = f''_{xx}(\xi,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2},$$

$$x_0 < \xi < x;$$

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = f''_{yy}(x_0,k)\frac{(y-y_0)^2}{2},$$

$$y_0 < k < y;$$

Из данных равенств с помощью теоремы Лагранжа и обобщенной теоремы о среднем можно получить выражение

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ f''_{xx}(\xi,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f''_{yy}(x_0,k)\frac{(y-y_0)^2}{2} + f''_{xy}(x_0,\nu)(x-x_0)(y-y_0) +$$
$$+ f'''_{xxy}(\xi,\eta)(y-y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}, \quad y_0 < \nu < y;\ y_0 < \eta < y.$$

Применяя теорему о пределе функции к $f''_{xx}(\xi,y_0)$, $f''_{yy}(x_0,\kappa)$, $f''_{xy}(x_0,\nu)$, приходим к выражению :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ f''_{xx}(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f''_{yy}(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2} +$$
$$+ f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f'''_{xxy}(\xi,\eta)(y-y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} +$$
$$+ \alpha_1(x-x_0)^2 + \alpha_2(y-y_0)^2 + \alpha_3(x-x_0)(y-y_0),$$

где $\alpha_1 = o(x-x_0);\ \alpha_{2,3} = o(y-y_0)$.

Если отбросить последние три члена, которые являются безконечно малими величинами более высокого порядка, чем остальные слагаемые, то получим формулу Тейлора

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ f''_{xx}(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f''_{yy}(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2} +$$
$$+ f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f'''_{xxy}(\xi,\eta)(y-y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Точность вычислений по данной формуле определяется значением $\delta = M(y - y_0)\dfrac{(x - x_0)^2}{2}$, где $M = \max\left| f'''_{xxy}(\xi, \eta) \right|$, $x_0 < \xi < x,\ y_0 < \eta < y$.

Ещё проще можно рассмотреть аналогичный случай для функции одной переменной.