Паніотов Ю. М.,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики ім. В. В. Пака,
Міньковська М. В.,
кандидат економічних наук,
доцент кафедри менеджменту і господарчого права,
Донецький національний технічний університет.
(м. Донецьк, Україна)

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

При изучении свойств определенного интеграла полез-но привес-ти обобщенную теорему «о среднем».

Т.1. Если $g(x)$ не меняет знак на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad (1)$$

где $c \in [a,b]$. При $g(x)=1$ получаем обычную теорему «о среднем».

Эта теорема позволяет без труда получить остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Приращение функции на отрезке $[x, x+h]$ представим интегралом :

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(s)ds \qquad (2)$$

Заменив s на $x+h-t$ и интегрируя по частям, получим

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-t)dt = f'(x)h + \int_0^h f''(x+h-t)tdt =$$

$$= f'(x)h + \frac{1}{2!} f''(x)h^2 + \frac{1}{2!}\int_0^h f'''(x+h-t)t^2dt \text{ и т.д.} \qquad (3)$$

Используя формулу (1) для остаточного члена получим

$$\frac{1}{3!} f'''(c)h^3 \qquad (4)$$

где $c \in [x, x+h]$.

Эти формулы могут быть использованы для оценки точности численных методов интегрирования [1].

Например:

$$\int_x^{x+h} f(s)ds = f(x)h + \frac{1}{2!} f'(x)h^2 + \frac{1}{2!}\int_0^h f''(x+h-t)t^2dt \qquad (5)$$

Выразим $f'(x)$ из (3) и подставим в (5):

$$\int_x^{x+h} f(s)ds = \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x)] + \frac{1}{2}\int_0^h f''(x+h-t)(t^2 - ht)dt =$$

$$= \frac{1}{2!}[f(x+h) + f(x)] - \frac{1}{12} f''(c)h^3 \qquad (6)$$

Отсюда можно получить формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_3 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) + R_{тр} \qquad (7)$$

где

$$|R_{тр}| < \frac{M_2 h^3 n}{12} \qquad (8)$$

Здесь M_2 - наибольшее значение модуля второй производной на отрезке $[a,b]$. Аналогично получаются оценки для улучшенной формулы трапеций и формулы Симпсона.

Литература:

1. *Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, М., «Наука»,1967,780с.*