Косолапов Ю.Ф.,
кандидат фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики ім. В. В. Пака,
Ляшенко С. В.,
студент факультету економіки та менеджменту
Донецький національний технічний університет.
(м. Донецьк, Україна)

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Дельта-функция (δ-функция) является одной из простейших обобщенных функций современной математики, которая успешно используется во многих прикладных исследованиях.

Пусть $\delta_\varepsilon(x)$ - некоторая непрерывная неотрицательная функция, которая тождественно равна нулю вне интервала $(-\varepsilon,\varepsilon)$ и график которой вместе с осью Ox образует криволинейную трапецию единичной площади. Пусть теперь $f(x)$ - произвольная функция, непрерывная в некоторой окрестности точки $x=0$ (так называемая пробная функция). Если $\varepsilon\to+0$, то на основании второй теоремы о среднем получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b f(x)\delta_\varepsilon(x)dx=\begin{cases} f(0), & 0\in(a,b),\\ 0, & 0\notin(a,b).\end{cases}$$

Истолкуем использованный предельный переход как результат стремления функции $\delta_\varepsilon(x)$ к некоторой экзотической функции $\delta(x)$ (δ-функции Дирака), которая определяется равенствами

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx=\begin{cases} f(0), & если \quad 0\in(a,b),\\ 0, & если \quad 0\notin(a,b).\end{cases}$$ или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Аналогично вводится δ-функция $\delta(x-x_0)$, устанавливаются некоторые связанные с δ-функцией формулы, в частности, формулы линейной замены переменной и дифференцирования.

Наряду с δ-функцией мы используем также единичную функцию Хевисайда $I(t)$. Между нею и δ-функцией существует тесная связь

$$I(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt', \quad I'(t)=\delta(t)$$

(в смысле одинакового действия $I(t)$ и $\delta(t)$ на пробную функцію).

Далее мы рассматриваем некоторые примеры применения дельта-функции в физике и теории вероятностей. Так, плотность массы m, сосредоточенной в одной точке $x=x_0$ оси Ox, равна $\gamma(x)=m\delta(x-x_0)$.

Охлаждение однородного тонкого стержня, теплоизолированного сбоку, описывается задачей Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Применение δ-функции к известной формуле, дающей решение задачи, позволяет выяснить физический смысл решения как результата суперпозиции мгновенных тепловых источников.

Рассмотрим задачу о колебаниях однородной бесконечной струны

$$\left.\begin{aligned} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad a > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = g(x). \end{aligned}\right\}$$

Пусть струна выводится из состояния равновесия $(f(x) \equiv 0)$ за счет начальной скорости

$$u'_t(x,0) = g(x)\delta(x - x_0).$$

Решение

$$u = u(x, x_0, t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\delta(\xi - x_0)d\xi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2a} g(x_0), & x - at < x_0 < x + at, \\ 0, & x_0 < x - at, \quad x_0 > x + at. \end{cases},$$

получаемое из известной формулы Даламбера, трактуется как результат действия импульса, который получила струна в начальный момент благодаря начальной скорости, сообщенной ей в точке x_0, а колебания струны – как результат суперпозиции импульсов.

В качестве примеров применения дельта-функции в теории вероятностей мы рассматриваем обобщение понятия плотности распределения на случай дискретной случайной величины, нахождение плотности распределения функции случайной величины и некоторые другие вопросы.