Пикар и метод Римана

Косолапов Ю.Ф., Мамичева В.Д.
Донецкий национальный технический университет

В статті на прикладі так званого телеграфного рівняння розглядається внесок Пікара в розвиток і популяризацію методу Рімана для розв'язування задачі Коші для гіперболічних рівнянь з частинними похідними

Предыдущие статьи настоящего исследования посвящены работам Пикара по задаче Коши, характеристической задаче для линейного и квазилинейного гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, а также некоторым другим краевым задачам для линейного уравнения. Еще одно обращение Пикара к теории гиперболических уравнений связано с решением задачи Коши для так называемого телеграфного уравнения

$$z_{tt} - z_{xx} = z, \qquad (1)$$

которое описывает электрические колебания в проводах, колебания струны в сопротивляющейся среде и другие колебательные процессы. Этим уравнением занимались Эйлер [l], Лаплас [2, 3], Пуассон [4, 5], Дюбуа Реймон [6].

Лаплас впервые показал, что линейное уравнение

$$z_{xy} = az_x + bz_y + cz \qquad (2)$$

в случае, если коэффициенты a, b, c постоянны, можно простой подстановкой свести к виду (1). Пуассон интегрировал уравнение (1) в об-щем виде посредством степенных рядов с неопределенными коэффициентами. Дюбуа Реймон, исследуя задачу Коши для уравнения (2) методом Римана, нашел в явном виде функцию Римана как решение характеристической задачи как для уравнения (1), так и для некоторых более общих уравнений. В случае уравнения (1) он, не ограничиваясь формальными построениями, проверил, что полученная функция удовлетворяет уравнению и условиям на характеристиках, и тем самым непосредственной проверкой доказал разрешимость характеристической задачи. Правда, он не доказывал непрерывного примыкания решения к данным на характеристиках, но подобными вопросами и в то время, да и в последующем фактически никто не занимался. Насколько нам известно, впервые подобные вопросы начали достаточно строго исследоваться в работах А. М. Ляпунова и В.А.Стеклова.

Непосредственным поводом, побудившим Пикара заняться телеграфным уравнением, явилась заметка Пуанкаре [7], посвященная изучению скорости и характера распространения колебаний электрического потенциала в проводе, передающем электрические сигналы[1]. Пуанкаре изучал уравнение

$$AV_{tt} + 2BV_t = CV_{xx}, \tag{3}$$

где V -искомый потенциал[2] преобразовывая его сначала (изменением масштабов осей) к уравнению

$$U_{tt} + 2U_t = U_{xx}, \tag{4}$$

а затем путем подстановки

$$U = ze^{-t} \tag{5}$$

- к уравнению (1). Для последнего он решал задачу Коши с начальными условиями вида

$$z(x,0) = f(x), z_t(x,0) = g(x). \tag{6}$$

Путем довольно сложных и тонких рассуждений, основанных на методах интеграла Фурье и теории аналитических функций, он пришел к следующим выводам.

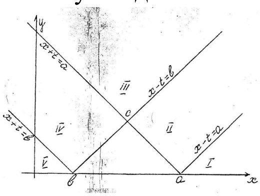


Рис. 1

Пусть начальное возмущение сосредоточено на некотором отрезке $[b,a]$, то есть функции $f(x), g(x)$ тождественно равны нулю вне $[b,a]$[3]. Проведем (рис. 1) через точки $(b;0),(a;0)$ характеристики $x \pm t = a, \quad x \pm t = b$

[1] Более подробное изложение содержится в лекционном курсе Пуанкаре [8] по аналитической теории теплоты.

[2] A, B, C, согласно Пуанкаре, - постоянные, первая из которых обусловлена самоиндукцией, вторая – омическим сопротивлением, последняя – емкостью провода. Очевидно, здесь пренебрегается потерями через изоляцию. Если этого не делать, уравнение (3) заменяется более общим, например $CLV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV = V_{xx}$ [9, стр. 31], где R, L, C, G - рассчитанные на единицу длины сопротивление и коэффициенты самоиндукции, емкости и утечки. Впрочем, последнее уравнение также легко приводится к виду (1).

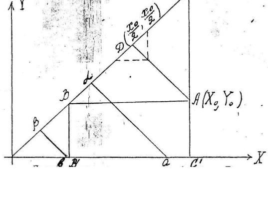
[3] Внутри отрезка Пуанкаре для простоты считает их многочленами.

уравнения (1). Тогда области I $(x > a + t)$ и V $(x < b - t)$ будут свободны от колебаний. В области II $(b + t < x < a + t)$ распространяется вправо прямая волна (представленная функцией аргумента $a - t$), в области IV $(b - t < x < a - t)$ - влево обратная волна (представленная функцией аргумента $a + t$), так что в пересечении этих двух областей - характеристическом треугольнике abc - распространяются и прямая, и обратная волны. Наконец, в области III $(b + t < x < a - t)$ устанавливается остаточное смещение, не имеющее характера ни передней, ни задней волн.

Колебания распространяются с определенной скоростью, образуя четкий передний фронт, в полном соответствии с законами распространения света или звука. Однако после прохождения прямой или обратной волны колебания не прекращаются в силу отличия от нуля решения задачи (1),(6) в области III. Этот остаток (по выражению Пуанкаре) тем значительней, чем шире промежуток начального возмущения, и, наоборот, может стать пренебреженно малым при достаточном сближении точек a и b. Его наличие вносит в результаты экспериментов по определению скорости распространения электричества возмущения, которые следует учитывать.

Пуанкаре описал также асимптотику колебаний, показав, что при $t \to \infty$ решение задачи Коши для уравнения (4) ведет себя как $1/\sqrt{t}$.

Результат Пуанкаре произвел на Пикара большое впечатление, но слишком сложный математический аппарат вызвал возражения и желание найти более простой и прямой путь выяснения физической картины изучаемого явления. И такой путь нашелся: им оказался метод Римана - фундаментальный, по выражению Пикара, метод в теории гиперболических уравнений с частными производными второго порядка.



Заменой переменных

$2X = x + t, 2Y = x - t$

Рис. 2 Пикар [10, 11] свел задачу (1), (6) к задаче Коши для уравнения

$$\tilde{z}_{XY}+\tilde{z}=0 \quad \left(\tilde{z}(X,Y)=z(x,t)\right) \tag{8}$$

с известными значениями искомой функции и ее первых производных на прямой $Y=X$ плоскости XY

$$\tilde{z}\big|_{Y=X}=f(2X),\tilde{z}_X\big|_{Y=X}=f'(2X)+g(2X),\tilde{z}_Y\big|_{Y=X}=f'(2X)-g(2X), \tag{9}$$

тождественно равными нулю вне отрезка $\alpha\beta,\alpha(a/2;a/2),\beta(b/2;b/2)$ (рис. 2). Применив к задаче метод Римана, он получил решение, представленное формулой

$$\begin{gathered}\tilde{z}_A=\tilde{z}(X_0,Y_0)=\frac{(u\tilde{z})_B+(u\tilde{z})_C}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{CB}\varphi(\lambda)(\tilde{z}_X-\tilde{z}_Y)dX+\\+\frac{X_0-Y_0}{2}\int\limits_{CB}\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\tilde{z}dX,\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\lambda=(X-X_0)(Y-Y_0),$$

а

$$u(X,Y;X_0,Y_0)=\varphi(\lambda)=J_0\left(2\sqrt{\lambda}\right)$$

- функция Римана (J_0 - цилиндрическая функция первого рода нулевого порядка), принимающая вдоль характеристик $Y=Y_0,X=X_0$ и в точке $A(X_0;Y_0)$ значения, равные единице.

Функция $J_0\left(2\sqrt{\lambda}\right)$ представлена у Пикара рядом

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{(n!)^2},$$

дающим решение уравнения $\lambda\varphi''+\varphi'+\varphi=0$, удовлетворяющее условию $\varphi(0)=1$. Точно такой же ряд для функции Римана был ранее получен и Дюбуа Реймоном [6]. Если воспользоваться условиями (9), перейти в (10) от криволинейного интеграла к определенному и после подстановки $2X=x$ под знаком интеграла заменить $2X_0,2Y_0$ через x_0+t_0,x_0-t_0 соответственно, получим для решения задачи хорошо известную формулу[4]

$$z(x_0,t_0)=\frac{f(x_0+t_0)+f(x_0-t_0)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0}J_0\left(\sqrt{(x-x_0)^2-t_0^2}\right)g(x)dx+ \\ +\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0}J_0\left(\sqrt{(x-x_0)^2-t_0^2}\right)\frac{f(x)}{\sqrt{(x-x_0)^2-t_0^2}}dx. \qquad (11)$$

С ее помощью легко получить все результаты Пуанкаре относительно процесса распространения колебаний. Однако Пикар, имея в виду не столько получить окончательную формулу, сколько доказать значительно более легкую по сравнению с методом Пуанкаре возможность выяснения физической сущности результата, поступил несколько иначе. Он не вводил явным образом начальные условия (6), (9), а, введя обозначения

$$\chi(X)=\tilde{z}\big|_{CB},\phi(X)=(\tilde{z}_X-\tilde{z}_Y)\big|_{CB},$$

где $\chi(X),\phi(X)$ - известные функции, аннулирующиеся вне отрезка $[-b/2,b/2]$, просто записал

$$z(x_0,t_0)=\frac{(u\tilde{z})_B+(u\tilde{z})_C}{2}-\frac{1}{2}\int_{X_0}^{Y_0}\varphi(\lambda_1)\phi(X)dX+t_0\int_{X_0}^{Y_0}\varphi'(\lambda_1)\chi(X)dX \qquad (12)$$

$\left(\lambda_1=\lambda\big|_{Y=X}\right)$[5]. Волны, определяемые внеинтегральным членом формулы (12), он назвал регулярными. В таком случае слагаемое

$$\frac{1}{2}(u\tilde{z})_B=\frac{1}{2}\tilde{z}_B=\frac{1}{2}\tilde{z}(X_0,Y_0)=\frac{1}{2}f(x_0-t_0)$$

определяет прямую регулярную волну, а слагаемое

---

[4] См., например,[9, стр. 137, формула (34)для задачи (22),(23)]

[5] Внешний вид формулы (12) несколько отличается от оригинала [10]. Там функции $z(x,t)$ и $\tilde{z}(x,t)$ обозначены одной буквой, что не совсем удобно (например, для самой записи формулы). Кроме того, у Пикара вместо интегралов по отрезку $[X_0,Y_0]$ фигурируют интегралы $\int_{C'}^{B'}...$, где C',B' - проекции C,B на OX (стр.6). Такая запись может привести к неверному истолкованию этих интегралов как криволинейных, если учесть, что криволинейный интеграл по CB обозначен у Пикара $\int_C^B...$, а в данном случае интегралы по CB и $C'B'$ не совпадают.

$$\frac{1}{2}(u\tilde{z})_C = \frac{1}{2} f(x_0 + t_0)$$

- обратную.

Замену величин X_0, Y_0 через $\frac{1}{2} f(x_0 + t_0), \frac{1}{2} f(x_0 - t_0)$ Пикар предполагал, но фактически не произвел, немедленно перейдя к физическому анализу решения задачи (1), (6) с помощью формулы (12). Возможность такого, в определенном смысле косвенного, анализа основана таком соображении. Сделанная выше замена переменных взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость $t \geq 0$ плоскости xt на нижнюю полуплоскость $Y \leq X$ плоскости XY, причем так, что при движении точки (x_0, t_0) вверх вдоль луча $x = x_0, t \geq t_0$, начиная со значения $t = t_0$, соответствующая точка (X_0, Y_0) пробегает сверху вниз луч $X_0 + Y_0 = x_0/2, Y_0 \leq x_0/2$, перпендикулярный к прямой $Y = X$, начиная с точки $(x_0/2; x_0/2)$. Равенство или неравенство нулю значения $z(x_0, t_0)$ искомой функции определяется тем, пустым или непустым является пересечение стороны BC подвижного треугольника ABC с отрезком $\alpha\beta$.

Пикар остановился только на одном случае, когда $x_0 > a$.

В точке с абсциссой x_0 до момента времени $t_0 = x_0 - a$ колебания отсутствуют, $z(x_0, t_0) = 0$, так как $[BC] \cap [\alpha\beta] = \varnothing$.

В течение промежутка времени $x_0 - a < t_0 < x_0 - b$ проходит прямая волна, $z(x_0, t_0) \neq 0$, так как $[BC] \cap [\alpha\beta] \neq \varnothing$. Прямая волна состоит из регулярной

$$z_B = 0.5 f(x_0 - t_0)$$

и волны, определенной интегралами формулы (12). В том, что интегралы дают именно прямую волну, легко убедиться при помощи формулы (11), в которой (при $x_0 > a$) интегралы берутся от $x_0 - t_0$ до a. Отсюда, а также из формулы (12), где

$$z_C = 0.5 f(x_0 + t_0) = 0 \; (C \notin [\alpha\alpha]),$$

видно, что через точку $x_0 > a$ обратная волна не проходит.

Наконец, при $t_0 > x_0 - b$ имеем остаточное смещение: хотя $z_B = 0$, но $z(x_0, t_0) \neq 0$, так как $[BC] \cap [\alpha\beta] \neq \varnothing$, $B \notin [\alpha\beta]$). Оно определяется только интегралами формулы (12), взятыми по отрезку $[b/2, a/2]$.

Таким образом, детально рассмотрев один из трех возможных случаев ($x_0 > a, x_0 < b, b \leq x_0 \leq a$), Пикар удостоверился, что получающаяся картина колебаний такова же, как и у Пуанкаре. Поэтому он, подчеркнув преимущество метода Римана перед методом Пуанкаре, закончил на этом свои рассмотрения. По поводу асимптотики решения задачи Коши для уравнения (4) он только отметил, что она естественно вытекает из асимптотики функции Римана.

Итак, Пикар, впервые после Дюбуа Реймона, ограничившегося только отысканием функции Римана, полностью решил задачу Коши для телеграфного уравнения методом Римана (при начальной кривой частного вида) и доказал большую пригодность метода для получения ясной физической трактовки изучаемого явления по сравнению с тяжеловесными построениями Пуанкаре.

Поставленный Пуанкаре и Пикаром вопрос об остаточных сме-щениях в колеблющееся системе после прохождения через нее основных волн имеет самое непосредственное отношение к теории распространения волн (диффузия волн, принцип Гюйгенса, проблема передачи неискажающихся или мало искажающихся сигналов и т.п.). Одним из первых ученых, продолживших эти исследования, был Жак Адамар. Так, в большой статье [12] он исследовал природу остаточных колебаний, описываемых линейным уравнением (2), с точки зрения принципа Гюйгенса и установил условие их отсутствия.

Литература

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 3. - М.: Наука, 1972, гл. 9, с. 431-432.

2. Laplace P.S. Mémoire sur les suites. – Histoire de l'acad.r.d.sci.d. Paris, (1779)1782, 207 – 309.=Oeuvres, t. 10, Paris, 1894, p. 1 – 89.

3. Sommerfeld A. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. – Encyklop.math.Wissensch. Bd. 2, H. 4. Leipzig, 1900, 504 – 570.

4. Poisson S.D. Mémoire sur le solutions particuliaires des équations différentielles et des équations aux différences. – Journ.d.l’école polyt., 1806, t. 6, ch. 13, p. 60 – 125.

5. Poisson S.D. Mémoire sur l’intégration... . – Mémoires de l’acad.d. sci. de l’Institute de France, (1818)1820, **3**, p. 121 – 176.

6. Bois-Reymond P.du. Über lineare partielle Differentialgleichungen... – Journ. für Mathem. 1889, **104**, p. 241 – 301.

7. Poincaré H. Sur le propagation de l’électricité. – Comptes Rendus ... d.l’acad.d.sci.d.Paris, 1893, **117**, p. 1027 – 1032.

8. Poincaré H. Théorie analytique de la propagation de la chaleur. – Paris, 1895.

9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966, 724 с.

10. Picard E. Sur l’équation aux dérivées partielles que se rencontre dans la théorie de la propagation de l’électricité. - Comptes Rendus ... d.l’acad.d.sci.d.Paris, 1894, **118**, p. 16 – 17.

11. Picard E. Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l’électricité. – Bull.d.l.soc.mathém.d.France, 1894, **22**, p. 2 -8.

12. Hadamard J. Sur l’intégrale résiduelle. – Bull.d.l.soc.mathém.d. France, 1900, **28**, p. 69 – 90.