Пикар и общие вопросы теории гиперболических уравнений

Косолапов Ю.Ф., Мамичева В.Д.

Донецкий национальный технический университет

Розглядаються деякі загальні питання теорії гіперболічних рівнянь з частинними похідними в роботах Пікара. Дається загальна характеристика внеску Пікара в теорію гіперболічних рівнянь.

Нам осталось рассмотреть еще одну работу Пикара по теории гиперболических уравнений. Речь идет о небольшой по объему, но чрезвычайно важной в теоретическом отношении заметке [13], где освещаются некоторые общие вопросы теории задач Коши и характеристической для линейного уравнения

$$z_{xy} = az_x + bz_y + cz \qquad (1)$$

- о существовании и единственности решения задачи Коши и в связи с этим о взаимоотношении методов Римана и последовательных приближений, о "связывании" решений двух характеристических задач для одного уравнения вдоль общей характеристики.

Пикар отмечает, что метод последовательных приближений хорошо решает проблему существования решения задачи как Коши, так и характеристической. С другой стороны, метод Римана для задачи Коши очень удобен для установления единственности решения, но не проверки того, что формула Римана действительно дает искомое решение. Поэтому параллельное рассмотрение обоих методов в случае задачи Коши для линейного уравнения (1) позволяет успешно решать оба вопроса - и о существовании, и о единственности. Но при этом начальная кривая, несущая данные Коши, должна подчиняться непременному условию - пересекаться с характеристиками уравнения не более одного раза. Для выяснения характера «неприятностей», могущих возникнуть в случае нарушения этого требования, Пикар рассматривает пример кривой *MSP*, изображенной на рис. 3, с концами *M*, *P*, лежащими на оси *x* ее с обеих сторон от оси *y* , и наивысшей точкой *S*, принадлежащей оси *y*. Как метод Римана, так и метод итераций однозначно определяют решения u_1 и u_2 задачи Коши в каждой из частей *OPS* и O*SM* с начальными кривыми *PS* и *MS*, непрерывные, как доказывается в методе итераций, вместе

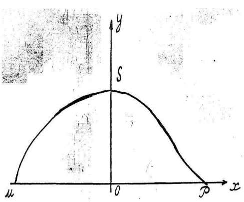


Рис. 3

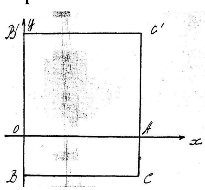
с частными производными первого порядка. Однако, с одной стороны, функции u_1 и u_2, вообще говоря, не «связываются» вдоль оси *y*, то есть значения функции u_1 и ее первых частных производных вдоль оси *y* не совпадают с соответствующими значениями функции u_2 и ее частных производных[1]. С другой стороны, продолжение по непрерывности (вместе с частными производными первого порядка) решения u_1, найденного методом Римана, в область *OSM* через ось *y* дает в *OSM* функцию, вообще говоря, не совпадающую с решением u_2, найденным тем же методом.

Приведенные рассуждения Пикара были продолжены французскими учеными Жаком Адамаром [2] и Эдуардом Гурса [3], показавшими, что достаточно на одной из кривых *PS* или *SM* задать условия Коши, а на другой - только значения искомой функции, чтобы получить разрешимую (так называемую смешанную) задачу.

Переходя к характеристической задаче для уравнения (1), Пикар подчеркнул невозможность задания условий Коши на характеристиках. Так, например, задав значения искомой функции z на характеристике $y = const$, мы однозначно определили бы вдоль нее частную производную z_x и, с точностью до произвольной постоянной, - частную производную z_y как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(z_y\right)_x = bz_y + \left(az_x + c\right).$$

Поэтому задание на упомянутой характеристике значений z и значения производной z_y в одной точке однозначно определит z_y вдоль всей характеристики.



Рассмотрим теперь вместе с Пикаром задачу для уравнения (1) с известными значениями искомой функции на двух пересекающихся в точке O отрезках BB' и OA характеристик (рис. 4). Обозначим чрез u, u_1, u_2 решения данной и двух других характеристических задач с теми же значе-

[1] Расшифровка "то есть" соответствует пикаровскому пониманию связывания. На самом деле здесь нужно говорить о предельных значениях, но основная идея Пикара остается справедливой.

Рис. 4 ниями искомой функции вдоль OB', OA в первом случае и вдоль OB, OA во втором. Функции u, u_1, u_2 определены соответственно в прямоугольниках $BCC'B', OAC'B', OACB$ и, на основании сделанного замечания по поводу характеристик, u_1, u_2 «связываются» вдоль OA (в указанном выше смысле), образуя вместе функцию, определенную в прямоугольнике $BCC'B'$ и совпадающую там с функцией u.

Мы проанализировали исследования Пикара по линейным и квазилинейным гиперболическим уравнениям второго порядка с двумя независимыми переменными, посвященные задаче Коши, характеристической задаче и линейным задачам со значениями искомой функции на двух прямых.

Основным методом доказательства существования решения рассматриваемых задач является метод последовательных приближений, по сравнению с известным методом мажорантных функций нуждающийся, как показал Пикар, в минимальных условиях непрерывности на рассматриваемые уравнения и дополнительные условия.

В 1890 г. Пикар доказал существование решения задачи Коши и характеристической задачи для линейного уравнения с непрерывными коэффициентами. В задаче Коши с помощью двух непрерывных функций задавались значения частных производных первого порядка от искомой функции вдоль некоторой кривой, не пересекающейся характеристиками более чем в одной точке, и значение искомой функции в одной точке кривой. Уравнение кривой предполагалось представимым непрерывными монотонными функциями по каждой из двух независимых переменных. В характеристической задаче данные на характеристиках задавались непрерывно дифференцируемыми функциями.

Характеристическую задачу для квазилинейного уравнения Пикар рассмотрел в 1896 г. Предполагая нелинейный член уравнения непрерывным по пяти и удовлетворяющим условию Липшица по трем (без двух независимых переменных) аргументам, он свел доказательство существования к линейному случаю, а последний попытался исследовать, сочетая итерационный метод с элементами теории аналитических функций. Интересная сама по себе идея доказательства была только намечена, но доведение ее до конца нуждаемся в весьма тонком и технически сложном исследовании, явно уступавшим простому пути, найденному в 1890 г. Методы обеих работ позволяют доказать разрешимость задачи Коши для квазилинейного уравнения при тех же, что и в характеристической задаче, условиях непрерывности. Некоторое внимание Пикар уделил (1894, 1896 гг.) краевым задачам для линейного, уравнения, когда задаются значения искомой функции на двух прямых – характеристике и биссектрисе координатного угла или на двух лучах, исходящих из начала координат. Использование краевых условий во второй задаче потребовало решения некоторого функционального уравнения. В 1899 г. Пикар указал случай неразрешимости второй задачи, когда начальные лучи разделяются характеристикой. Несколько позже линейные и квазилинейные задачи с заданными значениями искомых функций на двух произвольных прямых или кривых стали предметом исследований Адамара и Гурса. Первый исходил из метода Римана, второй использовал как итерационный метод, так и (в жестких условиях аналитичности) метод мажорантных функций.

В 1893 г., исследуя колебания электрического потенциала в проводе, Пуанкаре методом интеграла Фурье решил задачу Коши для телеграфного уравнения и описал процесс распространения колебаний. Пикар (1894 г.) показал, что физическая картина явления может быть выяснена значительно проще с помощью метода Римана - фундаментального, по его выражению, метода в теории гиперболических уравнений с частными производными второго порядка. Пуанкаре и Пикар установили наличие в колеблющейся системе остаточных колебаний, имеющих место по прохождении основной волны, и нарушение в связи с этим принципа Гюйгенса. Эти исследования были продолжены в 1901 г., Адамаром для произвольного линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

В 1899 г. Пикар обсудил некоторые общие вопросы теории задач Коши и характеристической для линейного уравнения: о существовании и единственности решений, о взаимоотношении методов Римана и последовательных приближений, о задании краевых условий на начальной кривой, пересекающейся с характеристиками более одного раза, а также "связывании" решений двух характеристических задач для одного уравнения вдоль общей характеристики. В существенной части идеи Пикара были вскоре развиты Адамаром и Гурса.

Таким образом, Пикар доказал (или указал путь доказательства) существование и единственность решения задачи Коши и характеристической задачи для линейного и квазилинейного гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Его работы несомненно способствовали широкому проникновению в современную математику итерационных методов. Основываясь на его идеях, ряд математиков начала XX в. (Адамар, Кулон и др.) решили задачу Коши для некоторых уравнений второго порядка с большим, чем два, количеством независимых переменных, в частности, для квазилинейного уравнения с волновым оператором и нелинейным членом, зависящим от производных первого порядка. В то же время Пикар никоим образом не способствовал ослаблению внимания исследователей и к другие методам, в частности, методу Римана для линейных гиперболических уравнений.

Как известно, в конце 80-х и первой половине 90-х годов XIX в. появилось немало работ, посвященных развитию и обобщению метода Римана. Упомянем прежде всего работы Дюбуа Реймона, Дарбу, Дини, Деласье, Николетти, Леру, Вольтерра, Тедоне, Бьянки. Делались попытки обобщения метода некоторые на нелинейные уравнения, уравнения высших порядков, не обязательно гиперболические, на системы уравнений. Но все результаты исследователей носили в основном частный характер. Основной трудностью было отыскание функции Римана. И уже Дюбуа Реймон и особенно Дарбу начали понимать принципиальный характер этой трудности, состоящий в том, что найти функцию Римана как решениё характеристической задачи, вообще говоря, ничуть не легче, чем решить исходную задачу Коши. В развитии метода Римана назревал своеобразный тупик.

Работы Пикара, в которых доказывалась разрешимость характеристической задачи, а следовательно, и существование функции Римана, а заодно и решения задачи Коши, означали выход из тупика в ином направлении, и в этом отношении они оказались весьма актуальными. Более того, метод Римана применим, как правило, только к линейным уравнениям, а Пикар добивался успеха даже в квазилинейном случае. И тем не менее, мы подчеркнем это еще раз, он ни в коей мере не пытался абсолютизировать метод последовательных приближений в ущерб другим методам, в том числе методу Римана. В настоящее время, как мы знаем, широко применяются как итерационные методы, так и методы, являющиеся результатом широкого обобщения метода, идущего от Римана.

Литература

1. Picard E. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. – Bull.d.sci.math., 1899, **(2)23**, p. 150 – 153.

2. Hadamard J. Sur l'intégrale résiduelle. – Bull.d.l.soc.mathém.d. France, 1900, **28**, p. 69 – 90.

3. Goursat E. Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (second mémoire). Ann.Fac.d.sci. Tou-louse, 1904, **(2)6**, p. 117 – 144.