Связь предела с бесконечно малой функцией и формула Тейлора

Ехилевский С.Г.
Полоцкий государственный университет (Беларусь)
Фоменко Т.П.
Донецкий государственный технический университет

В работе предложен способ получения формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа, не требующий привлечения эвристических гипотез или искусственных приемов. Отмечено несовпадение области определения остаточного члена с интервалом сходимости степенного ряда.

Методически верное (систематическое) изложение любой науки предполагает неукоснительно мотивированное введение новых понятий. Необходимость их появления естественным путем должна вытекать из всего предыдущего рассмотрения. На вопрос «Зачем?» нельзя отвечать «Узнаете потом». В таком случае процесс мышления и развитие способностей к исследовательской работе тоже откладывается на потом (правильнее сказать навсегда). В частности, крайне нежелательно для доказательства теорем или вывода формул пользоваться искусственными приемами, оставляя в тени то, как до них догадались.

Чтобы не быть голословным, приведем пример неудачного подхода. Обычно для получения формулы Тейлора функцию аппроксимируют полиномом, а выражение для остаточного члена выводят с помощью громоздкой вспомогательной функции [1]. Первое остается никак не мотивированным, а второе - совершенно искусственно. Ниже показано, как те же результаты можно получить естественным путем.

По теореме о связи предела с бесконечно малой функцией, из определения производной следует равенство

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha(x), \qquad (1)$$

в котором $\alpha(x)$ - функция бесконечно малая в окрестности точки x_0. При этом из существования $f''(x_0)$ следует непрерывность $\alpha(x)$ в точке x_0, т.е.

$$\alpha(x_0) = 0. \qquad (2)$$

Для дальнейшего (1) удобно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0). \quad (3)$$

Заметим, что с учетом (2)

$$\alpha(x)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

По аналогии с (3), учтя при этом (2), запишем

$$\alpha(x) = \alpha'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta(x) \cdot (x - x_0), \quad (4)$$

где

$$\beta(x_0) = 0. \quad (5)$$

Чтобы определить $\alpha'(x_0)$ дважды продифференцируем (3) по x

$$f''(x) = \alpha''(x)(x - x_0) + 2\alpha'(x) \Rightarrow \alpha'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}. \quad (6)$$

Подставив (4) и (6) в (3) получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \beta(x)(x - x_0)^2. \quad (7)$$

где согласно (5) $\beta(x) \cdot (x - x_0)^2 = o((x - x_0)^2)$.

Продолжив без комментариев начатую процедуру

$$\beta(x) = \beta'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0), \quad \gamma(x_0) = 0,$$

$$f'''(x) = \beta'''(x)(x - x_0)^2 + 6\beta''(x)(x - x_0)^2 + 6\beta'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta'(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{6}, \quad (8)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \gamma(x)(x - x_0)^3,$$

$$\gamma(x)(x - x_0)^3 = o\left((x - x_0)^3\right),$$

нетрудно заметить закономерность

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_0)^k + R_n, \quad (9)$$

где $R_n = o((x - x_0)^n)$ - остаточный член в форме Пеано.

Формула Тейлора (9) используется в приближенных вычислениях. Для оценки их погрешности удобно связать R_n с $f(x)$. С этой целью воспользуемся теоремой Лагранжа

$$\alpha(x)-\alpha(x_0)=\alpha(x)=\alpha'(\xi_1)(x-x_0)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0), \qquad (10)$$

где $\xi_1 \in (x, x_0)$. Справедливость первого равенства в (10) следует из (2), а третьего - из того, что (6) доказано для произвольной точки (в том числе и для ξ_1).

Подставив (10) в (3), получим

$$R_1=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)^2 \qquad (11)$$

аналогично (см. (5) и (8))

$$\beta(x)=\beta'(\xi_2)(x-x_0)=\frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-x_0),$$

Что после подстановки в (7) дает

$$R_2=\frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-x_0)^3. \qquad (12)$$

Обобщив (11), (12), получим остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (13)$$

Пусть для определенности $x > x_0$, тогда формулы (9), (13) справедливы, если $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема на (x_0, x) и непрерывна на $[x_0, x]$ вместе со своими производными до n – го порядка включительно.

Значение ξ_n, как внутренней точки интервала (x, x_0), очевидно является функцией x и x_0. Вид $\xi_n(x, x_0)$ в неявной форме определяется системой уравнений (9), (13). Существование решения доказано выше, что позволяет интерпретировать формулу Тейлора как тождество

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi(x,x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (14)$$

Проиллюстрируем (14) на примере $f(x)=\ln(1+x)$. Для $x_0=0$ и $n=0$ с учетом (9), (13) получим

$$\ln(1+x)=\ln 1+R_0=\frac{x}{1+\xi_0},$$

откуда

$$\xi_0(x,0)=\frac{x}{\ln(1+x)}-1,$$

что после подстановки в предыдущее равенство, обращает его в тождество, являющееся частным случаем (14).

Пусть для определенности $x>0$, тогда $0<\xi_0(x,0)<x$ в полном соответствии с теоремой Лагранжа. Действительно, левое неравенство очевидно следует из определения $\xi_0(x,0)$, а для доказательства правого перепишем его в виде

$$\varphi(x)=\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)=\psi(x).$$

Очевидно $\varphi(0)=\psi(0)$, и для $x>0$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}<\frac{1}{(1+x)}=\psi'(x),$$

что и доказывает требуемое утверждение. Заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\xi_0(x,0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\ln(1+x)}-1\right]=1-1=0,$$

как это и должно быть.

Устремив в (9) n к бесконечности, получим степенной ряд. В интервале его сходимости

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\equiv\frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x,x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=R_n(x,x_0),$$

$$x\in(x_0-l,x_0+l). \tag{15}$$

Вне интервала это не так. Тем не менее, даже в случае расходимости соответствующего ряда, при выполнении оговоренных выше условий формула Тейлора верна, как и теорема Лагранжа, обобщением которой она, в сущности, и является. Например

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}x^k+R_n(x),\qquad (x>-1) \tag{16}$$

где x ограничено только областью определения функции $\ln(1+x)$. Но

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}x^k \qquad (17)$$

лишь в интервале сходимости $(-1<x\le 1)$.

Заметим, однако, что вне интервала (15) формулу Тейлора нельзя применить для сколь угодно точного вычисления $f(x)$. Действительно, согласно (14)

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0)=f(x)-f(x_0)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\neq 0\,, \qquad (18)$$

т.к. фигурирующий в (18) ряд не сходится к своей функции.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1985. - 430с.