Характеристическая задача для квазилинейного гиперболического уравнения в работах Пикара

Косолапов Ю.Ф., Мамичева В.Д

Донецкий национальный технический университет

В статті розглядається внесок Еміля Пікара в теорію характеристичної задачі для квазілінійного диференціального гіперболічного рівняння другого порядку в частинних похідних. Детально аналізуються як сильні сторони, так і не дуже помітні з першого погляду недоліки пікарівського дослідження.

Первые четыре статьи нашего исследования творчества Пикара в области гиперболических уравнений с частными производными второго порядка [1 - 4] были посвящены решению Пикаром [5, 6] задачи Коши и характеристической задачи для линейного уравнения второго порядка

$$z_{xy} = az_x + bz_y + cz \qquad (1)$$

относительно искомой функции $z(x,y)$. Коэффициенты уравнения $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ предполагались непрерывными в прямоугольнике $R = \{(x,y) : x_0 \le x \le x_B, y_0 \le y \le y_B\}$ с левой нижней вершиной $A(x_0, y_0)$. Если изучалась задача Коши [5], то на нехарактеристической кривой *AB*, допускающей представления как уравнением $y = y(x)$, так и уравнением $x = x(y)$, задавались условия Коши в «форме Пикара»

$$z_x\Big|_{y=y(x)} = \varphi(x),\ z_y\Big|_{x=x(y)} = \phi(y),\ z(x_0, y_0) = z_0 \qquad (2)$$

с функциями $\varphi(x), \phi(y)$, непрерывными соответственно на отрезках $[x_0, x_B], [y_0, y_B]$. При рассмотрении характеристической задачи [5, 6] предполагались известными значения искомой функции на характеристиках $x = x_0, y = y_0$

$$z(x, y_0) = \varphi(x), z(x_0, y) = \phi(y), \varphi(x_0) = \phi(y_0), \qquad (3)$$

причем функции $\varphi(x), \phi(y)$ предполагались непрерывными на $[x_0, x_B]$, $[y_0, y_B]$ и дифференцируемыми на $(x_0, x_B), (y_0, y_B)$ соответственно.

Наряду с линейным случаем Пикар рассматривал [6] характеристическую задачу для квазилинейного уравнения

$$z_{xy} = F\left(x, y, z, z_x, z_y\right) \qquad (4)$$

Он ограничился (ради простоты) заданием нулевых значений искомой функции на характеристиках $x = 0,\, y = 0\ \left(x_0 = y_0 = 0\right)$

$$z(x,0) = 0,\, z(0,y) = 0, \qquad (5)$$

а функцию F подчинил условию непрерывности на множестве

$$G = \left\{(x, y, z, u, v) : (x, y) \in R, |z| \le a, |u| \le b, |v| \le b\right\}$$

и условию Липшица по трем последним аргументам

$$\left|F\left(x, y, z', u', v'\right) - F\left(x, y, z, u, v\right)\right| < k_1\left|z' - z\right| + k_2\left|u' - u\right| + k_3\left|v' - v\right|,$$

где $0 < k_i = const, i = 1, 2, 3$. Начав, как обычно, с последовательности задач

$$\begin{cases} \left(z_1\right)_{xy} = F\left(x, y, 0, 0, 0\right), \\ \left(z_n\right)_{xy} = F\left(x, y, z_{n-1}, \left(z_{n-1}\right)_x, \left(z_{n-1}\right)_y\right), n = 2, 3, \ldots, \\ z_n(x,0) = 0,\, z_n(0,y) = 0,\, n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \qquad (6)$$

разрешимых посредством формулы

$$z = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} f(x,y)\,dxdy, \qquad (7)$$

решающей вспомогательную характеристическую задачу

$$z_{xy} = f(x,y),$$
$$z\left(x_0, y\right) = 0,\, z\left(x, y_0\right) = 0,$$

он по существу указал путь доказательства сходимости итерационной последовательности $\left(z_n\right)$, или, что то же, ряда

$$z_1 + \sum_{2}^{\infty}\left(z_n - z_{n-1}\right) \qquad (8)$$

к искомому решению задачи[1].

---

[1] У Пикара, очевидно, по недосмотру утверждается, что решение задачи, если оно существует, должно, как и раньше, представляться рядом $\sum\limits_{1}^{\infty} z_n$.

Прежде всего в случае выполнения условий

$$M\rho\rho' < a, M\rho < b, M\rho' < b \tag{9}$$

значения функций z_n и их двух первых производных $(z_n)_x, (z_n)_y$ не превосходят по абсолютной величине чисел *a, b, b* соответственно; здесь *M* - максимум модуля функции *F* в *G*, ρ, ρ' - измерения произвольного прямоугольника R', содержащегося в R, имеющего ту же левую нижнюю вершину *A* и стороны, лежащие на характеристиках $x = 0, x = \rho, y = 0, y = \rho'$. Соответствующие 5-мерные точки

$$\left(x, y, z_n, (z_n)_x, (z_n)_y\right)$$

не выйдут тогда за пределы *G,* и к функции *F* приложимо условие Лип-шица. Члены ряда (8) представляют собой выраженные с помощью формулы (7) решения последовательности задач

$$\begin{cases} (z_1)_{xy} = F(x, y, 0, 0, 0), \\ (z_2 - z_1)_{xy} = F\left(x, y, z_1, (z_1)_x, (z_1)_y\right) - F(x, y, 0, 0, 0), \\ (z_n - z_{n-1})_{xy} = F\left(x, y, z_{n-1}, (z_{n-1})_x, (z_{n-1})_y\right) - \\ \quad - F\left(x, y, z_{n-2}, (z_{n-2})_x, (z_{n-2})_y\right), n = 3, 4, \dots \\ z_1\big|_{x=0} = 0,\ z_1\big|_{y=0} = 0, \\ (z_n - z_{n-1})\big|_{x=0} = 0, (z_n - z_{n-1})\big|_{y=0} = 0, n = 2, 3, \dots \end{cases} \tag{10}$$

и вместе с двумя первыми производными по абсолютной величине не превосходят, в силу условия Липшица, решений и их первых производных последовательности задач

$$\begin{cases} (u_1)_{xy} = M, \\ (u_n)_{xy} = k_1 u_{n-1} + k_2 (u_{n-1})_x + k_3 (u_{n-1})_y, n = 2, 3, \dots \\ u_n(0, y) = 0, u_n(x, 0) = 0, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{11}$$

Задача свелась к доказательству сходимости рядов

$$\sum_1^\infty u_n, \sum_1^\infty (u_n)_x, \sum_1^\infty (u_n)_y, \tag{12}$$

которые являются мажорантными соответственно для ряда (8) и двух рядов, получающихся из него почленным дифференцированием по *x* и по y:

$$(z_1)_x + \sum_2^{\infty} (z_n - z_{n-1})_x, (z_1)_y + \sum_2^{\infty} (z_n - z_{n-1})_y. \qquad (13)$$

Исследование же сходимости рядов (12) не представляет, по Пикару, затруднений, в силу линейности уравнений (11), заменивших собой нелинейные уравнения (10). Пикар не указывает метода исследования, что ввиду его предыдущей неудачи с линейной характеристической задачей (1), (3) несколько настораживает. Ведь от уравнений (11) мож-но, полагая $k = max(k_1, k_2, k_3)$, перейти к рассмотренным ранее задачам, для которых ряды, по форме совпадающие с (12), будут мажорировать ряды (8), (13). Но, как мы видели, метод, примененный Пикаром в заметке [6] не привел его к строгому доказательству разрешимости исходной задачи. Между тем, поступая таким же образом, как и при рассмотрении задачи Коши (1)- (2), он мог легко прийти к цели, причем даже двумя способами - оценивая по модулю члены рядов (8), (13) или члены рядов (12). В первом случае, не требующем перехода к задачам (11), он бы мажорировал ряды (8), (13) геометрической прогрессией со знаменателем $q = k_1\rho\rho' + k_2\rho' + k_3\rho$, так что измерения прямоугольника R' существования решения исходной задачи определялись бы условиями (9) и условием $q < 1$. Что касается рядов (12), связанных с задачами (11), то они также мажорируются геометрической прогрессией с тем же знаменателем. Какой из названных путей - строгий, данный в статье [5], или нестрогий путь заметки [6] - избрал бы Пикар в данном случае, сказать трудно. Скорее всего, по крайней мере в заметке [6], - второй, что не дало бы ему возможности получить строгое доказательство.

Условие Липшица, которое выше накладывалось на функцию F, заведомо выполняется, если функция $F(x, y, z, p, q)$ непрерывна в R при $a = b = \infty$ и обладает равномерно ограниченными производными по трем последним аргументам. В этом случае, указывает Пикар, решение существует во всем прямоугольнике R. В качестве примера он приводит характеристическую задачу для уравнения

$$z_{xy} = az_x + bz_y + c\sin z$$

(функции $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ непрерывны в R), в частности, характеристическую задачу для уравнения

$$z_{xy} = \sin z,$$

ранее исследованную (также методом итераций) итальянским матема-тиком Бьянки [7] в связи с одной задачей теории поверхностей постоянной кривизны. Следует, однако, отметить, что для существования ре-шения измерения α, β прямоугольника R должны удовлетворять условию

$$\alpha\beta + \alpha + \beta < 1/N ,$$

где N - верхняя грань значений производных F_z, F_p, F_q. Поэтому лучше здесь говорить не об R, а о содержащемся в нем прямоугольнике

$$\{(x, y): 0 \le x \le \alpha, 0 \le y \le \beta\}$$

с измерениями $\alpha \le x_B, \beta \le y_B$.

Говоря о сходимости рядов (12), Пикар не словом не упомянул о доказательстве того, что сумма z ряда (8) обладает второй смешанной производной и удовлетворяет уравнению (4). Ведь рассуждения, проведенные выше для линейного уравнения (1), здесь неприменимы. Между тем, пользуясь условием Липшица, нетрудно оценить левые части уравнений (10) и в результате мажорировать геометрической прогрессией с тем же, что и выше, знаменателем $q = k_1\rho\rho' + k_2\rho' + k_3\rho$ ряд из вторых производных

$$(z_1)_{xy} + \sum_2^{\infty} (z_n - z_{n-1})_{xy} , \tag{14}$$

а затем перейти к пределу при $n \to \infty$ в уравнении

$$(z_n)_{xy} = F(x, y, z_{n-1}, (z_{n-1})_x, (z_{n-1})_y).$$

Не исключено, что эти рассуждения Пикар просто опустил.

Мы подробно осветили пикаровский подход к решению характеристической задачи для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка, основанный на методе последовательных приближений «в форме Пикара». Пикар не упустил из поля зрения также задачу Коши для этого уравнения. Об этом, о некоторых других рассмотренных им краевых задачах для гиперболических уравнений, а также о не-которых общих вопросах теории таких уравнений мы будем говорить в последующих статьях.

Литература

1. Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О. Хорунжая О.И. Задача Коши в работах Пикара. //Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 2.-Донецьк:

ДонНТУ, 2004.-с. 120-126.

2. Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И. Задача Коши в работах Пикара. Часть 2: Проблема обоснования метода последовательных приближений//Збірник науково-методичних робіт.-Вип. 2. -Донецьк: ДонНТУ, 2004. -с. 126-132.

3. Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И. Эмиль Пикар и характеристическая задача для линейного уравнения второго порядка //Збірник науково-методичних робіт.- Вип. 2.-Донецьк: ДонНТУ, 2004.-с. 132-138.

4. Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И. Характеристическая задача в работах Пикара. Проблема обоснования метода //Збірник науково-методичних робіт.- Вип. 2.-Донецьк: ДонНТУ, 2004.-с. 138-143.

5. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées par-tielles...- Journ. de math., 1890, (4)6, p. 145 – 210.

6. Picard E. Sur les méthodes...- В кн.: Darboux G. Leçons sur la théorie...des surfaces... Part 4, Paris, 1896, p. 353 – 367.

7. Bianchy L. Appicazioni geometriche del metodo delle approssima-zioni successive... – Rend. accad. linc., 1894, (5)3.1, 143 – 150.