

О математике в системе наук

Петренко А.Д.

Донецкий национальный технический университет

Розглянуто суть математики як інструменту для розв'язання практичних задач та як світогляду. Обмірковуються питання викладання математики в інженерному вузі.

С математикой знакомы все, кто учился хотя бы в начальной школе, и поэтому судить о ней может буквально каждый. При этом, к сожалению, следует признать, что множество людей утверждают, что не понимают и не любят математику. В то же время многие из них с удовольствием решают математические или логические задачи, не подозревая, что это и есть математика. В этом плане довольно показательной является следующая история, рассказанная известным математиком Р.Смаллианом. Его книгу, посвященную решению достаточно сложных математических задач и парадоксов, с интересом прочитал десятилетний мальчик, предложивший, в свою очередь, весьма оригинальную и изящную задачу. Автор сразу же позвонил отцу мальчика, но тот, прежде чем позвать сына к телефону, сказал: «Ему страшно нравится твоя книга. Но когда будешь с ним толковать, не проговорись, что эта штука называется математикой – в школе он ее просто ненавидит. Чуть заподозрит, что твоя книжка математическая, тут же забросит ее подальше».

Что же такое математика? К некоторым понятиям мы настолько привыкаем, что не находим нужным лишний раз задуматься, что за ними стоит. Однако, если попросить кого-либо (разумеется, кроме профессионалов) сформулировать предмет и суть математики, то вряд ли мы получим внятный ответ. И этому есть причина, поскольку дать краткое определение математики действительно не так просто. Перечисление ее составляющих не дает ясного представления о сути математики и об ее отношении к окружающему нас миру. Наиболее известное и ставшее классическим определение математики было дано Ф.Энгельсом в работе «Анти-Дюринг»: «...чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира». К этому, казалось бы, нечего добавить, поскольку здесь не только указывается предмет исследования, но и его происхождение. Однако с развитием естествознания с одной стороны и самой математики «изнутри» появились ее новые области (например, математическая логика), не связанные непосредственно ни с количественными отношениями, ни с геометрическими формами. Группа французских математиков, известная под псевдонимом Никола Бурбаки, утверждала, что «единственными

математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры», которые могут создаваться независимо от реального мира. Тем самым под математикой следует понимать науку о математических структурах. Такое тавтологическое определение означает только одно: математика изучает то, чем она занимается.

Как видим, по сравнению с другими науками математика занимает особое место. Известный датский физик Нильс Бор говорил, что математика является значительно большим, чем наука – она является языком науки. И, наверное, поэтому до настоящего времени среди философов нет единого мнения о том, является ли математика наукой в общепринятом смысле (заметим, что приведенных определениях слова «наука» нет). Действительно, что такое наука? Согласно словарю С.И.Ожегова: «Наука – система знаний о закономерностях развития природы, общества и мышления». Иначе, наука – это сфера человеческой деятельности, функция которой – выработка и теоретическая систематизация объективных знаний о действительности. Ее цель – описание, объяснение и предсказание процессов и явлений материального мира. Характерными признаками науки являются определение реального предмета исследования (в отличие, например, от религии), четкая формулировка проблемы, сбор данных, их систематизация и описание, эксперимент, предсказание, специальные методы исследования и т.п., или как раз то, чего в большинстве своем в математике нет. В этом плане характерно высказывание известного английского философа Бертрانا Рассела: «Чистая математика – это такой предмет, где мы не знаем, о чем мы говорим, и не знаем, истина ли то, что мы говорим».

Общепринято, что математика, как и остальные науки, возникла и развивается на основе практических потребностей людей. С этим трудно не согласиться, но несомненным является и тот факт, что значительным стимулом к развитию математики являются духовные потребности человека, его стремление к гармонии и красоте так же, как в живописи, музыке и вообще в искусстве. В качестве примера можно привести хорошо известное «число зверя» - 666. Арифметические свойства этого числа весьма необычны: число зверя является суммой квадратов первых семи простых: $666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$; число зверя есть сумма первых 36 натуральных чисел: $666 = 1 + 2 + 3 + \dots + 36$; число зверя можно записать девятью цифрами двумя способами в возрастающем порядке и одним – в убывающем порядке: $666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21$. Понятно, что никакие жизненные потребности не могли привести к изучению этого числа и, кроме того, от всего этого нет никакой практической пользы. Поэтому еще Аристотель говорил: «Математика выявляет порядок, симметрию и определенность, а это – важнейшие виды прекрасного», а пифагорейцы ставили перед собой грандиозную задачу с помощью чисел установить всеобщую гармонию мироздания.

Таким образом, в значительной степени математика «замкнута на себя», она представляет собой логически непротиворечивую структуру, основанную на совокупности аксиом, и трудно назвать более абстрактную науку, чем математика. Однако это ни в коей мере не означает ее оторванности от процессов реального мира, и в качестве аргумента можно привести множество примеров.

Каждому первокурснику известно число «е», как некоторый предел, который вводится формально. Но, как оказывается, с этим числом связаны изменение силы тока в электрических цепях, демографические процессы, протекание ядерных реакций, размножение бактерий и многое другое. Более того, число «е» связано с другим «фундаментальным числом» π простым соотношением: $e^{i\pi} = -1$.

Еще в V в. до н. э. древнегреческий скульптор Фидий при строительстве храма Парфенон в Афинах использовал число $\Phi = (\sqrt{5} + 1) / 2 = 1,6118034\dots$, представляющее собой отношение длин отрезков в пятиконечной звезде (пентаграмме). Как показали многочисленные исследования, соразмерность, выражаемая этим числом, наиболее приятна для глаза и считается также, что с ним связаны идеальные пропорции человеческого тела. Деление отрезка в отношении Φ принято называть «золотым сечением», и оно широко используется художниками, скульпторами и архитекторами.

Известный экономист, лауреат Нобелевской премии Эрроу, используя законы математической логики, доказал невозможность абсолютно демократических выборов.

Если математика хоть и в какой-то мере является игрой ума, то зачем ее все учат? Банальными уже стали утверждения о том, что математика – царица наук, без математики нет инженера, знание только тогда становится наукой, когда пользуется математикой и т.п. Что касается ее самого примитивного уровня – простого счета, арифметики, то здесь трудно что-либо возразить, однако, речь естественно, должна идти не о таком знании.

Считается, что глубоко изучать математику необходимо каждому человеку независимо от рода его деятельности, поскольку это учит его думать. И поэтому, наверное, еще до недавнего времени в средней школе математику изучали все в полном, и надо сказать в достаточно приличном объеме, по-видимому, с целью «организации ума» учащихся. В то же время, очевидно, что многим из выпускников школ в таком объеме эти знания не никогда не понадобятся и, более того, математика способна даже блокировать интуитивное, образное мышление. Поэтому в последнее время появились гуманитарные гимназии, классы и т.п.

Другое дело, если человек хочет посвятить себя научной (не обязательно естественным наукам) или инженерной деятельности.

Математика охватила все многообразие проблем естествознания и техники и без нее в принципе не возможно их развитие. «Великая книга Природы написана языком математики» (Галилей), поэтому и прочитать ее может только тот, кто знает этот язык. Некоторые люди, не знающие нотной грамоты, могут подобрать на слух незатейливую мелодию, но они никогда не сыграют и тем более не напишут крупное произведение. Подобным образом и в технике – можно в чем-то разбираться, быть неплохим организатором, но не быть специалистом в истинном значении этого слова. Поэтому знать математику не только необходимо для выполнения тех или иных расчетов, но и полезно с тем, чтобы лучше ориентироваться в окружающем мире.

Там, где не хватает информации, появляются мифы. Одним из них является миф о всеисильности математики. Поэтому на практике ее нередко используют в качестве одного из основных критериев научности: много формул в работе (дипломе, диссертации) – хорошо, мало – научная ценность сомнительна. Здесь следует сказать, что «математизация» часто скрывает эвристическую суть по настоящему хорошей работы. Более того, в ряде случаев математика является богатой упаковкой к дешевому товару и с ее помощью получают результаты, которые либо очевидны, либо могли бы быть получены более простым путем, либо просто ошибочны.

Иллюстрацией этому может служить следующий простой пример. Пусть исследование модели некоторого процесса свелось к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1,0001y = 2,0001 \end{cases}$$

Ее решение находится точно: $x=1$, $y=1$. В реальных задачах параметры модели, являются эмпирическими величинами, измеренными с определенной точностью. Поэтому во втором уравнении системы незначительно (на 0,005%) изменим правую часть:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1,0001y = 2,0002 \end{cases}$$

В результате получаем новое решение, существенно отличающееся от предыдущего: $x=0$, $y=2$. Таким образом, формальное использование точных математических методов может создать иллюзию достоверности полученных результатов, в то время, очевидно, что для реальной задачи оба полученные «точные решения» лишены всякого смысла (в математике такого рода задачи относятся к некорректным).

Умышленно или нет, но часто общественное мнение вводят в заблуждение теми или иными средними показателями: средняя продолжительность жизни, средняя зарплата, средняя обеспеченность

жилем и т.п. Полученные с помощью точных математических методов (используются понятия математического ожидания, репрезентативности выборки, оценивается степень достоверности результатов и т.п.), в ряде случаев соответствующие показатели оказываются бессмысленными по существу. В частности, например, зарплата отдельных работников на предприятии может отличаться в разы, и даже десятки раз. Поэтому здесь бы уместнее было использовать такие понятия, как мода или медиана.

Среди точных наук математика занимает лидирующее положение. Однако здесь следует указать, что точные результаты в математике возможны лишь в простейших случаях, которые практически никогда не реализуются при исследовании моделей реальных научных или технических проблем. Поэтому аналитическое решение той или иной практической задачи не всегда отвечает его ценности, оно может быть и ошибочными в случае, если модель неадекватна исследуемому процессу.

Известно, например, что экономика, как наука, состоялась с появлением математического программирования. Однако, вот как этот предмет определяет один из известных зарубежных специалистов по исследованию операций Т.Л.Саати – это искусство «...давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другим методами».

Таким образом, математике при решении тех или иных технических или научных задач математике следует отвести то и только то место, которое она занимает, и успехи, достигнутые при этом, следует связывать не с математикой, а с людьми, которые создают соответствующие модели и исследуют их с помощью строгих математических методов.

Нередко математику рассматривают как некое подобие кулинарной книги, где на все случаи жизни можно найти готовые рецепты и надо лишь уметь отыскать необходимый материал. Однако математика – это и мировоззрение, образ мышления. Здесь достаточно вспомнить известное высказывание М.В.Ломоносова «А математику затем учить надо, что она в порядок ум приводит». Для многих отраслей знания математика стала не только орудием исследования количественных отношений, но также методом четкой формулировки проблем и поиска их решений. Известны примеры, когда математики и физики публиковали замечательные работы по философии, экономике, другим весьма далеким от их основной деятельности наукам. Так, например, советский математик Канторович получил Нобелевскую премию по экономике, по сути, за одну работу «Математические методы организации и планирования производства», опубликованную в 1939г., которая положила начало экономике, как науке.

После изучения математики, прежде всего, остается то, что называется аналитическим стилем мышления – умение абстрагироваться,

точность, логическая стройность, без которых невозможна профессиональная деятельность исследователя.

Кроме того, математика является частью общечеловеческой культуры и поэтому на вопрос о том, для чего изучают математику, ответил еще в XIII веке английский философ и естествоиспытатель Р.Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества».

Проблема преподавания математики так же стара, как и сама математика, поэтому первый вопрос, который здесь возникает, а можно ли ей научить любого человека? Здесь уместно провести некоторую аналогию математикой и шахматами, которые согласно Г.Лейбницу также служат «для усовершенствования искусства умозаключения и сообразительности». Известно, что в шахматы умеют играть многие, однако по известной характеристике шахматистов, данной Стефаном Цвейгом, «Это особые гении, которым воображение, настойчивость и точная техника свойственны в такой же степени, как математикам, поэтам и композиторам, только в других соотношениях и с иной направленностью». Очевидно, что речь здесь идет о разных категориях игроков – профессионалах и любителях и, если начинающему шахматисту все ясно в позиции, для мастера все полно тайны. В этом смысле выдающиеся математики – они, наверное, действительно от Бога, а на уровне пользователя математику может изучить практически каждый.

Следует заметить, что математические способности среди учащихся встречаются значительно чаще, чем об этом принято считать, однако постоянно встречаются люди, сомневающиеся, в большинстве случаев без достаточных оснований, в своих возможностях. Зачастую неудачи с изучением вузовского курса математики связаны не с отсутствием способностей, а с недостатками начального образования. Это и нередко сложившийся в средней школе стереотип о математике, как о сухой и догматической науке, отсутствием привычки систематически работать, доводить изучаемый материал до уровня понимания, а не запоминания, пробелы в знаниях отдельных частей математики, которые являются основой новых изучаемых разделов и т.п. Свидетельством этому служит и тот факт, что, некоторые учащиеся, набив руку в использовании определенных алгоритмов решения задач вступительных экзаменов, без проникновения в их смысл, став студентами, оказываются беспомощными при изучении курса высшей математики. В связи с этим следует сказать также, что плохие успехи при изучении математики еще не обязательно что-либо означают; интерес к ней возникнет, когда появятся первые положительные результаты, но для этого необходима большая работа, возможно, даже скучная и утомительная.

Представляется очевидным, что всю математику (как, впрочем, и любую другую науку) изучить невозможно даже в принципе. Поэтому

возникает проблема, какими разделами, в каком объеме и насколько глубоко необходимо владеть специалисту в конкретной области с тем, чтобы успешно в ней работать?

Известно, что основные понятия математики установлены уже в давние времена, и этот курс читается во всем мире и в тысячах учебных заведениях согласно установившимся канонам. В то же время особенно в последние годы широко распространилась практика непрерывного изменения учебных программ, и, прежде всего, это связано с увеличением числа читаемых дисциплин. Но, поскольку учащегося «нельзя перегружать» (основной тезис т.н. западной системы образования), то это приводит к уменьшению объема материала фундаментальных дисциплин, в частности, математики. При этом возникает много вопросов, и, прежде всего, что изучать (вернее не изучать)? Ответ на него кажется очевидным: необходимо опустить те разделы, которые не понадобятся при изучении специальных дисциплин. Однако, кто может быть уверенным в том, что сегодня кому-то представляется не важным, завтра станет одной из теоретических основ данной отрасли знаний.

Для тех, кто будет использовать математику в сугубо практических целях для изучения давно устоявшихся моделей можно ограничиться ознакомлением с основными ее понятиями, поскольку теоремы, а тем более их доказательства, им ничего не добавляют. Однако тем специалистам, хотя, возможно, и немногим, которым в практической деятельности придется столкнуться с разработкой новых моделей, математика понадобится уже не как метод расчета, но как метод мышления. В этом смысле владение математикой это не только и даже не столько знание каких-то теорем или умение выполнять те или иные вычисления, оно предполагает высокую культуру: понимание важности точных формулировок, смысла ограничений при формулировке теорем, их эвристическую суть. Поэтому математическое образование любого человека, в каком бы объеме оно не было бы получено, всегда необходимо рассматривать лишь как основу к дальнейшему и постоянному обучению.

«Математический язык ... чудесный дар, который мы не понимаем и которого мы не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося не только радость, но и новые головоломные проблемы» (Ю. Вигнер).