ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2008. Вып. 16

УДК 517.5

©2008. **Н.П. Волчкова**

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

Изучаются асимптотические свойства функций Лежандра $P^{\mu}_{\lambda}(t)$ при $\lambda \to \infty$. Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для $t \in (1; +\infty)$.

Асимптотические свойства различных специальных функций играют важную роль в анализе и приложениях. В настоящее время развиты некоторые общие методы, позволяющие существенно продвинуться в этом направлении (см., например, [1]). Вместе с тем, остается еще много вопросов, требующих выяснения. В частности, в некоторых задачах интегральной геометрии важное значение имеет нахождение асимптотических рядов типа Бесселя для функций Лежандра P^{ν}_{μ}, когда $t \in (-1; 1)$ или $t \in (1; +\infty)$ (см. [2, часть 2]). В работе [3] построен такой асимптотический ряд для функций Лежандра на $(-1; 1)$. Цель данной работы – изучение случая $t \in (1; +\infty)$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r \in (0, \pi)$ положим

$$d_k(r) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{cth} r}{k+1}, & \text{если } k \text{ нечетно}, \\ \frac{1}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно}, \ k \neq 0, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

$$A_0 = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}},$$

$$A_p = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}+\mu\right)_m}{m!} \sum_{k_1+\ldots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\ldots k_m!} d_{k_1}(r)\ldots d_{k_m}(r),$$

где $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0, \pi)$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение*

$$P^{\mu}_{\mathrm{i}\lambda-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} r) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)(\operatorname{sh} r)^{-\mu}} \times$$

$$\left(\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}} + \right. \tag{2}$$

$$\left. \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}} \right).$$

Частные случаи теоремы 1 были известны ранее. Например, в [2, часть 2, формула (2.14)] было выписано два члена асимптотического разложения (2). Этот результат затем использовался для изучения некоторых вопросов интегральной геометрии на гиперболическом пространстве. Относительно других частных случаев теоремы 1 и близких вопросов см. [4, часть 2], [5, глава 6, § 3].

Доказательство теоремы 1.

Пусть сначала $\mathrm{Re}\mu < \frac{1}{2}$. Тогда по формуле Мелера-Дирихле (см. [6, 3.7 (27)])

$$P^{\mu}_{\mathrm{i}\lambda-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} r) = \frac{(\operatorname{sh} r)^{\mu}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}\int_{-r}^{r} e^{i\lambda t}(\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} t)^{-\mu-\frac{1}{2}}dt. \tag{3}$$

Обозначим

$$I(\lambda) = \int_{-r}^{r} e^{i\lambda t}(\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} t)^{-\mu-\frac{1}{2}}dt.$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [1, глава 2, § 10, пункт 10.3, теорема 10.2]) имеем

$$I(\lambda) \sim e^{i\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\mu\right)-\lambda r\right)}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,\frac{\Gamma\left(p-\mu+\frac{1}{2}\right)}{p!}\frac{A_p}{(i\lambda)^{p-\mu+\frac{1}{2}}}+$$

$$e^{i\lambda r}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(p-\mu+\frac{1}{2}\right)}{p!}\frac{A_p}{(i\lambda)^{p-\mu+\frac{1}{2}}},$$

где

$$A_p = \frac{d^p}{dt^p}\left(\left(\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t}\right)^{-\mu-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{t=0}, \quad p \geq 0.$$

Отсюда

$$I(\lambda) \sim 2\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(1-2\mu)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!}\frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{1}{2}}}+$$

$$2\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1-2\mu)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(3-2\mu)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu-\mu+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!}\frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu-\mu+\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Вычислим A_p. По формуле Тейлора

$$\frac{\cos r - \cos(t-r)}{t} = \frac{\operatorname{ch} r(1-\operatorname{ch} t)+\operatorname{sh} t\operatorname{sh} r}{t} =$$

$$\frac{1}{t}\left(-\operatorname{ch} r\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}+\operatorname{sh} r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} b_k(r), \tag{5}$$

где

$$b_k(r) = \begin{cases} -\operatorname{ch} r, & k \ - \text{нечетно}, \\ \operatorname{sh} r, & k \ - \text{четно}, \ k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

Перепишем (5) в виде

$$\frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(t-r)}{t} = \operatorname{sh} r \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} c_k(r) \right) = \operatorname{sh} r (1 + \tau(t)), \tag{6}$$

где

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!(k+1)} c_k(r), \quad c_k(r) = \begin{cases} -\operatorname{cth} \mathrm{r}, & k \ - \text{нечетно}, \\ \ 1, & k \ - \text{четно}, \ k \neq 0, \\ \ 0, & k = 0, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots.$

Положим $F(x) = (1+x)^{-\mu-\frac{1}{2}}$. Тогда (см. (6))

$$A_p = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \ \frac{d^p}{dt^p} \left((1+\tau(t))^{-\mu-\frac{1}{2}} \right) \Big|_{t=0} = (\operatorname{sh} r)^{-\mu-\frac{1}{2}} \ \frac{d^p}{dt^p} \left(F(\tau(t)) \right) \Big|_{t=0}.$$

Используем формулу

$$(F(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^{p} \frac{F^{(m)}(\tau(t))}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (\tau(t))^k (\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p \geq 0$$

(см. [7, доказательство теоремы 2.11]). Поскольку $\tau(0) = 0$,

$$(F \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} (\tau^m)^{(p)}(0), \quad p \geq 1. \tag{7}$$

Положив в формуле

$$(f_1 \ldots f_m)^{(p)} = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = p} \frac{p!}{k_1! \ldots k_m!} f_1^{(k_1)} \ldots f_m^{(k_m)}$$

$f_1 = \ldots = f_m = \tau$, получим

$$(\tau^m)^{(p)} = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = p} \frac{p!}{k_1! \ldots k_m!} \tau^{(k_1)} \ldots \tau^{(k_m)}, \quad m \geq 1. \tag{8}$$

Из (7) и (8) находим

$$(F\circ\tau)^{(p)}(0)=\sum_{m=1}^{p}\frac{F^{(m)}(0)}{m!}\sum_{k_1+\dots+k_m=p}\frac{p!}{k_1!\dots k_m!}\,\tau^{(k_1)}(0)\dots\tau^{(k_m)}(0),\quad p\geq 1.$$

Таким образом,

$$A_p=(\operatorname{sh}r)^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{p}\frac{F^{(m)}(0)}{m!}\sum_{k_1+\dots+k_m=p}\frac{p!}{k_1!\dots k_m!}\,\tau^{(k_1)}(0)\dots\tau^{(k_m)}(0),\quad p\geq 1.$$

Учитывая, что

$$F^{(m)}(0)=(-1)^m\left(\frac{1}{2}+\mu\right)_m$$

и

$$\tau^{(k)}(0)=\frac{1}{k+1}\,c_k(r)=d_k(r),$$

из (3) и (4) получаем (2) для $\mathrm{Re}\mu<\frac{1}{2}$. Общий случай следует отсюда стандартным методом продолжения по параметру (см. [6, 2.8 (30)] и [1, глава 2, § 10, пункт 10.3, доказательство формулы (10.61)]). Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. – Рига: Зинатне, 1974. – 272 с.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
3. *Волчкова Н.П.* Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Феррерса //
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.
5. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций – М: ИЛ, 1952. – 476 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
7. *Nessel R.J., Wickeren E.* Local Multiplier Criteria in Banach Spaces // Mathematica Balkanica. New Series. – 1988. – V. 2. – Fasc. 2-3. – P. 114-132.

Донецкий национальный технический университет
v.volchkov@mail.donnu.edu.ua

Получено 20.04.11

Аннотация

Н.П. Волчкова

Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса

Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса

Ключевые слова: функции Лежандра, функции Ферререса, асимптотический ряд

Abstract

N.P. Volchkova

An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Ferrers functions

An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Ferrers functions is obtained

Key words: the Legendre functions, the Ferrers functions, asymptotic expansion

Анотація

Н.П. Волчкова

Аналог асимптотичного ряду Бесселя для функцій Ферререса

Одержано аналог асимптотичного ряду Бесселя для функцій Ферререса

Ключові слова: функції Лежандра, функції Ферререса, асимптотичний ряд