УДК 004.932.4

**В.В. Кулаков, И.А. Назарова, Л.П. Фельдман**
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра прикладной математики и информатики

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ЛЭР ДЛЯ ОДУ

*Аннотация*

***Кулаков В.В., Назарова И.А., Фельдман Л.П.,И исследование эффективности метода ЛЭР для ОДУ.*** *Рассмотрены различные методы численного решения ОДУ, рассмотрены методы ЛЭР для решения ОДУ, проанализированы зависимости эффективности применения метода ЛЭР от различных конфигураций таких схем, включая использование различных числовых последовательностей для разбиения базового шага в метода ЛЭР. Выработаны зависимости числа операций от различных параметров схем ЛЭР в однопоточной реализации для дальнейшего использования их в качестве эталонных показателей при разработке и анализе параллельных алгоритмов, реализующих ЛЭР*.

*Ключевые слова: локальная экстраполяция Ричардсона, ОДУ, методы Рунге-Кутты, метод Эйлера.*

Постановка проблемы. Экстраполяционные методы Ричардсона предназначены для получения высокоточного решения задачи Коши и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) со сложными правыми частями. Практическое применение экстраполяционных методов затруднено в связи с большой вычислительной сложностью их последовательных реализаций. Кроме того, использование технологии локальной экстраполяции на основе явных опорных схем ограничивает использование методов областью нежестких задач. Поэтому построение эффективных параллельных блочных неявных методов локальной экстраполяции Ричардсона – один из наиболее реальных способов сокращения времени интегрирования многомерных жестких начальных задач.

Цель статьи - исследование эффективности метода локальной экстраполяции Ричардсона для численного решения однородных дифференциальных уравнений.

Описание локальной экстраполяции. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка рассматривается при переходе из точки $x_n$ в точку $x_{n+1} = x_n + H$, где $H$ – базовая длина шага. Выбирается ряд натуральных чисел $P_i = \{ n_1, n_2, ..., n_k, ..\}$, $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ и, соответственно, последовательность шагов интегрирования: $h_1 > h_2 > \ldots > h_{k-1} > h_k > \ldots$, где $h_i = H / n_i$. Задается опорный численный метод порядка $r_0$ и вычисляются приближенные решения исходной задачи Коши в точке $x_{n+1}$: $T_{i,1} = \bar{y}_{h_i}(x_n + H) = \bar{y}_{n+1}^{(i)}, i = \overline{1,k}$. Выполнив вычисления для ряда последовательных значений $i$, по рекуррентному соотношению, определяют значения для произвольных $i, j$ по схеме локальной полиномиальной экстраполяции Эйткена-Невилла.

$$T_{i,j+1} := T_{i,j} + \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{(n_i / n_{i-j})^b - 1}.$$

**Определение зависимостей.** Рассмотрим зависимость времени работы алгоритма от порядка базового метода и требуемого порядка точности для алгоритма в целом.

На рисунке 1 приведен график этой зависимости при использовании в качестве числовой последовательности гармонического ряда. Время вычисления правой части условно взято за единицу. В качестве опорного метода используется метод Рунге-Кутты порядка $r_0$.

Далее построим аналогичный график для метода ЛЭР, используя последовательность Ромберга (ряд, состоящий из степеней двойки).

С одной стороны, использование последовательности Ромберга повлечет значительное увеличения необходимого числа операций, но с другой - даст возможность использовать симметричные методы. В этом случае каждый шаг экстраполяции будет увеличивать итоговый порядок не на 1, а на 2, что в свою очередь поможет сократить число операций.

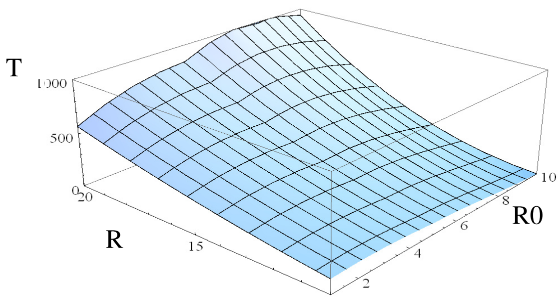


Рисунок 1 - График зависимости для гармонического ряда

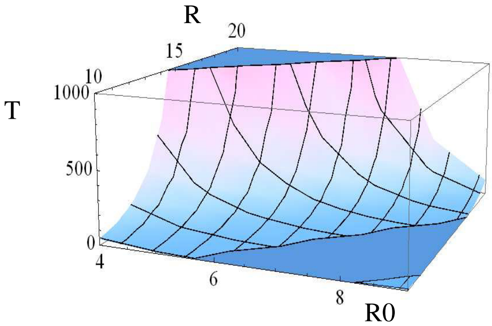


Рисунок 2 - График зависимости для последовательности Ромберга

Анализируя график стоит заметить, что при маленьком порядке опорного метода, для выполнения ЛЭР требуется огромное число операций. Однако для больших порядков опорного метода применение данной последовательности вполне оправдано в сравнении с гармоническим рядом (для некоторого диапазона итогового порядка метода ЛЭР).

Теперь рассмотрим схему ЛЭР с использованием последовательности Бурлиша, в которой чередуются степени двойки с $1.5*2^k$

(1,2,3,4,6,8,12,16).

График зависимости необходимого числа операций от порядка опорного метода и требуемого порядка точности для последовательности Бурлиша приведен на рисунке 3.

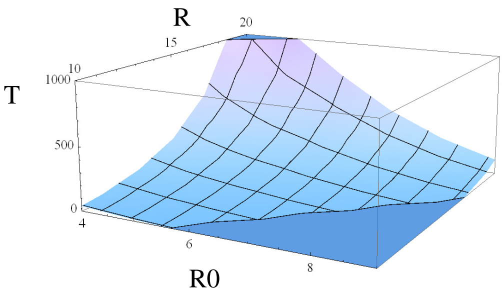


Рисунок 3 - График зависимости для последовательности Бурлиша

Очевидно, использование последовательности Бурлиша дает сокращение числа необходимых операций по сравнению с последовательностью Ромберга.

Рассмотренные выше схемы используют в качестве опорных явные методы Рунге-Кутты. Для жестких же задач следует применять неявные опорные методы.

Для этих методов на каждой стадии коэффициенты необходимо находить численными методами. В основном для этого используют метод простой итерации. При удачном подборе первого приближения, коэффициенты будут найдены за 2-3 итерации. Т.е. для каждого вычисления неявного опорного метода потребуется в 2-3 раза больше операций чем для явных методов.

Несмотря на это, привлекательность неявных методов состоит в том, что при всех $s$ существуют такие методы, которые имеют порядок $p = 2s$.

Ж. Кунцман (1961) и Дж. Бутчер (1964) показали, что такой порядок $p$ достигается путем специального выбора коэффициентов $c_i$.

Построим графики зависимости числа операций от порядка базового метода и требуемого итогового порядка, аналогичные приведенным ранее, но в качестве опорных методов будем использовать неявные методы.

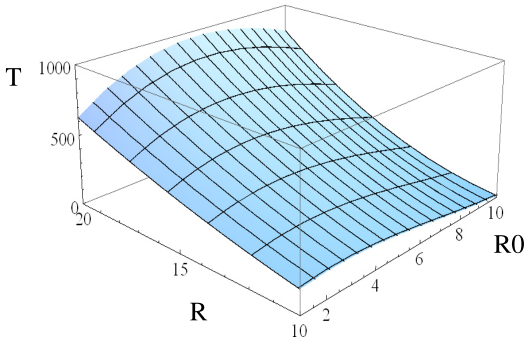


Рисунок 4 - Гармонический ряд, неявные методы, 2 итерации

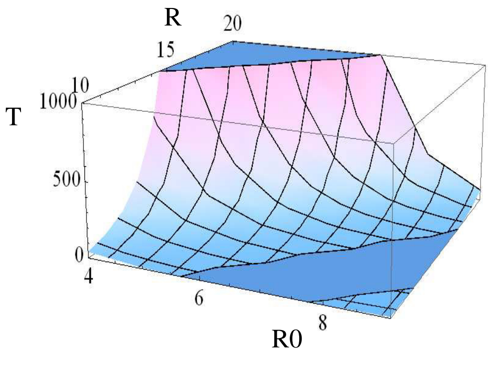


Рисунок 5 - Последовательность Ромберга, неявные методы, 2 итерации

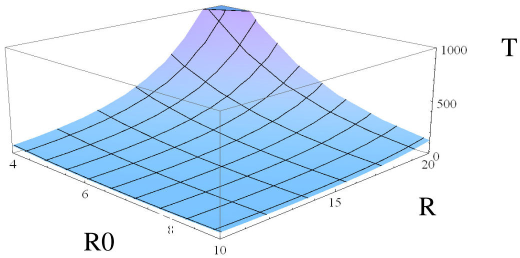


Рисунок 6 - Последовательность Бурлиша, неявные методы, 2 итерации

Анализируя графики можно заметить, что использование неявных методов в совокупности с последовательностью Ромберга имеет смысл при довольно высоких порядках опорного метода. Однако для неявных методов Рунге-Кутты в отличие от явных, это не является проблемой.

Как и в случае с явными методами, использование последовательности Бурлиша в схеме ЛЭР благоприятно сказывается на вычислительной сложности алгоритма, однако для очень больших порядков метода ЛЭР это утверждение не есть справедливым. Аналитические представления зависимостей для рассмотренных случаев приведены в таблице 1.

Таблица 1

| | |
|---|---|
| Гармонический ряд, явные методы | $k = r - r_0 + 1$<br>$T = (r_0 + 2 + correction(r_0)) * \left(\frac{k^2 + k}{2}\right)$ |
| Последовательность Ромберга, явные методы | $k = r - 2 * r_0 + 1$<br>$T = (2^{k-1}) * (r_0 + 2 + correction(r_0)) * \left(\frac{k^2 + k}{2}\right)$ |
| Последовательность Бурлиша, явные методы | $k - r - 2 * r_0 \mid 1$<br>$\begin{cases} \left(2^{\frac{k}{2}+1} - 1 + 1.5\left(2^{\frac{k-1}{2}+1} - 2\right)\right) * (r_0 + correct(r_0)) + \left(\frac{k^2 + k}{2}\right), k - \text{четн.} \\ \left(2^{\frac{k-1}{2}+1} - 1 + 1.5\left(2^{\frac{k}{2}+1} - 2\right)\right) * (r_0 + correct(r_0)) + \left(\frac{k^2 + k}{2}\right), k - \text{нечетн.} \end{cases}$ |
| Гармонический ряд, неявные методы, 3(2) итерации | $k = r - r_0 + 1$<br>$T = \left(\frac{r_0 * 3(2)}{2} + 2\right) * \left(\frac{k^2 + k}{2}\right)$ |
| Последовательность Ромберга, неявные методы, 3(2) итерации | $k = r - 2 * r_0 + 1$<br>$T = (2^k - 1) * \left(\frac{r_0 * 3(2)}{2} + 2\right) * \left(\frac{k^2 + k}{2}\right)$ |
| Последовательность Бурлиша, неявные методы, 3(2) итерации | $k - r - 2 * r_0 \mid 1$<br>$\begin{cases} \left(2^{\frac{k}{2}+1} - 1 + 1.5\left(2^{\frac{k-1}{2}+1} - 2\right)\right) * \left(\frac{r_0 * 3(2)}{2}\right) + \left(\frac{k^2 + k}{2}\right), k - \text{четн.} \\ \left(2^{\frac{k-1}{2}+1} - 1 + 1.5\left(2^{\frac{k}{2}+1} - 2\right)\right) * \left(\frac{r_0 * 3(2)}{2}\right) + \left(\frac{k^2 + k}{2}\right), k - \text{нечетн.} \end{cases}$ |

Зависимости числа операций для различных последовательностей имеют различный характер.

Так, для гармонического ряда рост временной сложности принимает вид, аппроксимируемый к квадратичному. Для последовательностей Ромберга и Бурлиша больше подходит экспоненциальный характер роста числа вычислений.

**Выводы.** Было произведено исследование эффективности применения различных конфигураций схем локальной экстраполяции Ричардсона.

Было рассмотрено влияние различных факторов на время выполнения действий по алгоритму ЛЭР.

Были проведены исследования по применению различных числовых последовательностей в схеме ЛЭР.

Также были рассмотрены варианты применения неявных опорных методов Рунге-Кутты для получения возможности решать жесткие задачи с помощью метода экстраполяции.

Были выявлены некоторые закономерности, которые могут быть применены для оптимизации построения схем ЛЭР исходя из требований к жесткости задачи и требуемому порядку точности решения.

## Список литературы

1. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 512с.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир,1999. – 685с.
3. Назарова И.А. Эффективность применения технологии локальной экстраполяции в параллельных алгоритмах численного решения задачи Коши // Научно-теоретический журнал ИПИИ НАН Украины «Искусственный интеллект», №3, 2006. – Донецк: ИПИИ, 2006. – С. 192–202.
4. Фельдман Л.П., Назарова И.А. Применение технологии локальной экстраполяции для высокоточного решения задачи Коши на SIMD-структурах // Научные труды Донецкого национального технического университета. Выпуск 70. Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2003) – Донецк: ДонНТУ, 2003. – С. 98-107.