УДК 004.932.2+004.932.72'1

**Е.С. Левицкая**
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
Кафедра программного обеспечения интеллектуальных систем

# ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ РАСКРАСКА ГРАФОВ

***Аннотация***
***Левицкая Е.С. Детерминированная раскраска графов.*** *Реализован алгоритм детерминированной раскраски графа. Выбран оптимальный алгоритм для поиска наименьшего количества цветов раскраски графа 2-окрестности. Произведено теоретическое обоснование выбранных методов для работы с графом и реализации алгоритма.*
***Ключевые слова:*** *детерминированная раскраска графа, эвристический метод, 2-дистанционный граф, мобильный робот.*

**Постановка проблемы.** В настоящее время роботы все больше и больше проникают во все сферы жизни человека: их устанавливают в развлекательных заведениях, на производстве, роботы осваивают космос. Развитие роботов не стоит на месте, однако это является очень сложной задачей. Актуальной проблемой в области разработки программного обеспечения мобильных роботов является представление навигации в операционной среде. В качестве модели рабочей среды мобильных роботов будем рассматривать конечные связные неориентированные графы, вершины которых должны быть помечены метками из некоторого множества точек.

Актуальной задачей является разработка алгоритма построения топологической модели неизвестной мобильному роботу среды, в условиях, когда естественные ориентиры роботы недоступны. В итоге в определенной области устанавливаются искусственные ориентиры так, что мобильный робот-агент может осуществлять навигацию по путям, описываемым цепочками этих ориентиров. Для реализации нужно выполнить следующие этапы:

- найти матрицу смежности графа;
- найти матрицу смежности смежных вершин;
- задать список меток для разметки графа;
- раскрасить граф.

**Анализ литературы.** Проведен анализ методов раскраски графов [1]. Существует множество точных и неточных алгоритмов. Однако за основу взят эвристический метод. Проанализирован эвристический метод окраски вершин графа, метод неявного перебора [2]. Изучены методы 2-дистанционной раскраски графа [3].

**Цель статьи** – разработать алгоритм детерминированной раскраски графа и исследовать его свойства.

**Постановка задачи исследования.** Мобильный робот устанавливается в произвольную вершину неизвестного связного неориентированного простого графа. Все вершины изначально не помечены (или помечены, но все одной меткой). Робот наблюдает 3-окрестность вершины, в которой находится. Он может передвигаться по ребрам между смежными вершинами. Также при передвижении робот помечает текущую вершину меткой (искусственным ориентиром) из некоторого множества меток (в данном алгоритме за метки будут приниматься цвета). При этом установленные цвета робот менять не может. Роботу передается последовательность меток вершин, описывающая путь по графу[5].

Необходимо разобрать алгоритм перемещения робота по графу и разметки пройденных вершин. Необходимо, чтобы полученная разметка позволяла роботу, наблюдающему за 2-окресностью текущей вершины, осуществлять прохождение по графу.

**Решение задач и результаты исследований.** Помеченный граф G с детерминированной функцией разметки вершин будем называть детерминированным или Д-графом. Мобильный робот осуществляет навигацию по графу тогда и только тогда, когда количество вершин больше трех, а количество ребер больше двух[4].

Детерминированная раскраска графа – это раскраска вершин окрестностью два (2-дистанционная раскраска) разными цветами, при условии, что этих цветов должно быть минимальное количество. Вершины окрестностью два – это смежные вершины текущей вершины и смежных вершины всех смежных вершин текущей (помеченной) вершины.

Под 2-дистанционной раскраской графа G будем понимать такую раскраску его вершин, при которой любые две вершины, находящиеся на расстоянии не более 2, окрашены в различные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-дистанционным хроматическим числом графа G и обозначается через X2(G).

Квадратом G2 графа G называется граф с множеством вершин V(G), в котором вершины и и v смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии не более 2 в графе G. Понятно, чтоXi(G) =x(G2) и d2(v) = dG2(v) для любой вершины v £ V(G). При этом любая 2-дистанционная раскраска графа G является правильной раскраской вершин графа G2 и наоборот[4].

Строим матрицу смежности – A, с целью получения списка смежных вершин. Для получения матрицы смежности смежных вершин – матрица B, возведем матрицу A в квадрат. В результате на пересечении i-й и j-й вершины получим количество возможных вариантов раскраски соответствующих вершин окрестности два.

Для получения матрицы C, в которой будут отображены на пересечении соответствующих вершин смежные и смежные смежных вершин, сложим матрицу A (матрица инцидентности) и B( матрица смежности смежных вершин). C = A+B.

За основу раскраски взят неявный перебор вершин и эвристический метод окраски вершин графа.

Неявный перебор: Назначим каждой вершине свой номер ($x_i$ — i-я вершина). Получаем первоначальную раскраску:

1. Окрашиваем $x_i$ в цвет 1.
2. Каждую из оставшихся вершин окрашивать последовательно: вершина $x_i$ окрашивается в цвет с наименьшим возможным «номером» (т. е. выбираемый цвет должен быть первым в данном упорядочении цветом, не использованным при окраске какой-либо вершины, инцидентной $x_i$).

Далее улучшаем раскраску. Отыскиваем первую по номеру вершину с максимальным цветом. Из неё делаем шаг возвращения:

1. Находим смежную вершину с максимальным номером, который меньше, чем у нее.
2. Пытаемся перекрасить её в цвет больший собственного, но меньший, чем максимальный цвет в графе.
3. Если это не удается, то делаешь шаг возвращения из этой вершины.
4. Если это удаётся, то по правилу первой фазы перекрашиваем вершины с большим номером.
5. Если при перекрашивании какая-то вершина затребовала максимальный цвет, от которого мы пытаемся избавиться, то делаем шаг возврата из неё.
6. Если достигнута первая вершина, то завершаем работу.

Эвристический метод

1. Вначале выбираем первый цвет.
2. Сортируем вершины по количеству неокрашенных смежных вершин.
3. Последовательно окрашиваем вершины в выбранный цвет. Если у вершины уже есть смежная вершины с выбранный цветом, то оставляем ее неокрашенной.
4. Если остались неокрашенные вершины, то выбираем следующий цвет и переходим к пункту 1.

Алгоритм неявного перебора должен давать правильный решение, поскольку во время шага возвращения происходит движение по дереву поиска в ширину.

Эвристический метод дает приемлемый результат, поскольку вначале окрашивает вершины с максимальной степенью.

Результаты работы алгоритма представлены на ри.1, рис.2.

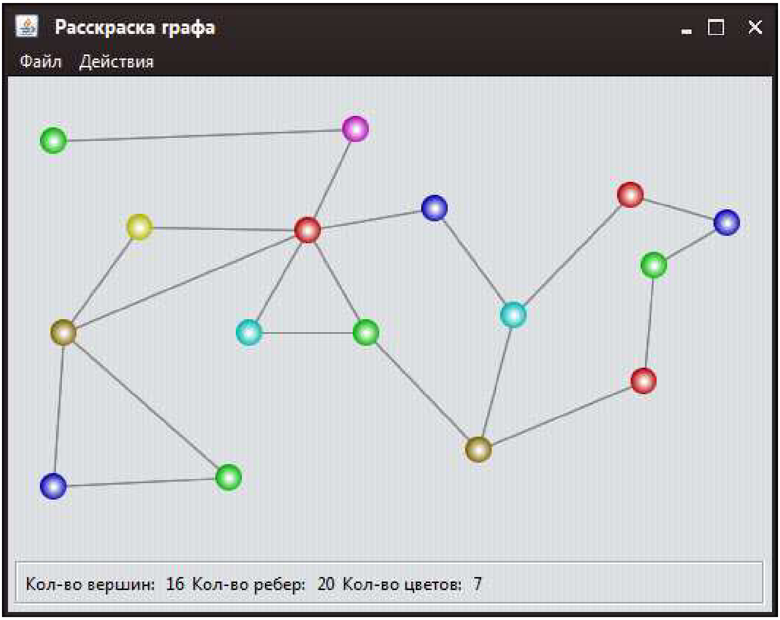



Рисунок 1 – результат работы алгоритма

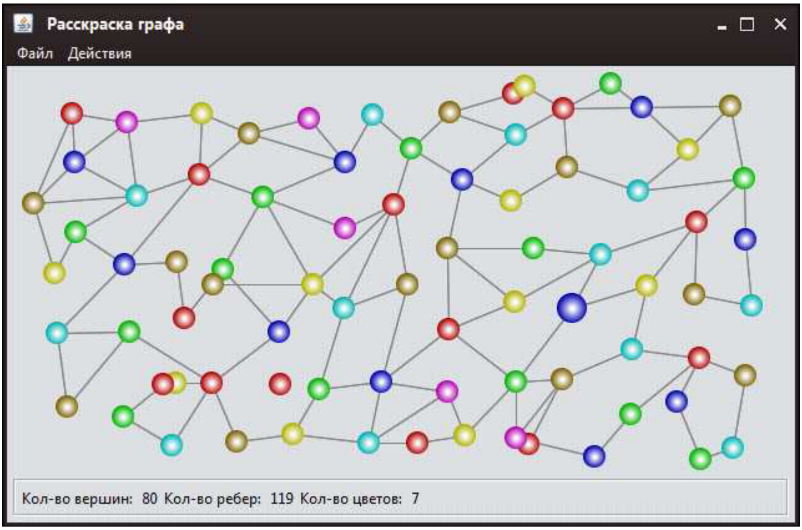
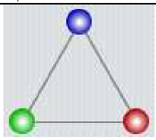
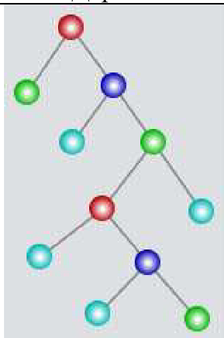
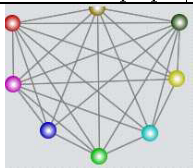
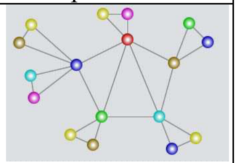



Рисунок 2 – результат работы алгоритма на большом количестве вершин

Таблица 1 – Варианты раскраски различных видов графа

| Цикличный | Дерево | Полный граф | Хордальный |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

**Выводы.** В работе был проведен анализ методов построения топологических карт в задачах навигации мобильных роботов. Разработан и исследован эвристический алгоритм построения карты на основе 2-дистанционной детерминированной раскраски графа. Анализ работы алгоритма показал, что алгоритм отлично работает на любом ацикличном графе. Сравнительный анализ показал, что выбранный алгоритм детерминированной раскраски графа для построения топологических карт оптимально производит раскраску.

## Список литературы

1. «Дискретная математика: алгоритмы. Раскраски.» [электронный ресурс] / СПбГУ ИТМО; А. Горюнов, Т. Коломейцева; Режим доступа: http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/theory/graph-coloring-layout/coloring-2004/ , свободный. – Загл. с экрана.

2. «Дискретная математика: алгоритмы. Раскраска графа методом неявного перебора.» [электронный ресурс] / СПбГУ ИТМО; К. Лысенко; Режим доступа: http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/vis/graph-coloring-layout/coloring-2003/ , свободный. – Загл. с экрана.

3. Сапунов С.В. Неотличимость вершин помеченных графов/ С.В. Сапунов// Труды ИПММ. – 2008. 189с.

4. Грунский И.С., Сапунов С.В. Восстановление графа операционной среды мобильного робота путем разметки вершин, пригодной для дальнейшей навигации. -2012.- 422-427с.

5. Сапунов С.В. Определение положения мобильного робота в топологической среде. – 2008.- 558-565.