УДК 519.176

А.В. Білик, І.С. Грунський, Н.В. Ногіна
Донецький національний технічний університет, м. Донецьк
кафедра програмного забезпечення інформаційних систем

МЕТОД ПОБУДОВИ НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ У ДВОРІВНЕВОМУ ГРАФІ

Анотація

Білик А.В., Грунський І.С., Ногіна Н.В. Метод побудови найкоротших шляхів у дворівневому графі. *Запропоновано новий метод пошуку найкоротших шляхів у дворівневому графі з поміченими вершинами і дугами. Він дозволяє знаходити помітки найкоротших шляхів та якість цих шляхів. Метод орієнтований на дворівневий граф, де кожна вершина графа першого рівня є графом другого рівня. Метод заснований на локальній редукції графа [1], тобто на послідовному виключені його вершин та дуг.*

Ключові слова: *метод побудови найкоротших шляхів, дворівневий граф, локальна редукція графа.*

Постановка проблеми. Проблема пошуку найкоротших шляхів у графі є загально відомою та важливою для різних застосовань. Існує ряд алгоритмів для вирішення цієї задачі [2, 3]. В останній час ця проблема інтенсивно вивчається для графів складної багаторівневої структури [4]. У даній роботі розглядається задача пошуку найкоротших шляхів у поміченому дворівневому графі від початкової вершини до деякої фінальної.

Актуальність проблеми для таких складних графів полягає в тому, що в прикладних задачах найкоротші шляхи потрібно знаходити для перевезень, які проходять через шляхи, міста, складні транспортні розв'язки. Тому тематика даної роботи достатньо актуальна.

Ціль статті – розробити метод пошуку найкоротших шляхів у дворівневому графі з поміченими вершинами і дугами, який дозволяв би знаходити помітки найкоротших шляхів та якість цих шляхів.

Постановка задачі. Розглядаються зв′язні неорграфи [2] зі скінченими множинами вершин Q і ребер E, що не мають петель. Ребро – це є пара вершин (q, u). Ребра графа G відмічено мітками з множини Y, виділено початкову вершину та множину фінальних вершин. Таким чином, $G=(Q, E, Y, \rho, q_0, F)$, де:

Q – скінченна множина вершин графа G ;

E – множина ребер графа G;

Y – множина поміток ребер графа G;

$\rho: E\rightarrow Y$ – функція розмітки ребер графа G;

q_0 – початкова вершина графа G;

F–множина фінальних вершин графа G.

Граф G будемо називати графом першого рівня. Кожна вершина $q \in Q$ графа G є графом G_i – графом другого рівня без петель і кратних дуг, в якому вершини і ребра відмічено мітками з множин M і P відповідно. Так, $G_i =(T_i, D_i, M_i, P_i, \mu , \tau, n_0, f_i)$, де:

T_i – скінченна множина вершин графа G_i;

D_i – множина дуг графа G_i;

M_i – множина поміток вершин графа G_i;

P_i – множина поміток дуг графа G_i;

$\mu: T \rightarrow M$ – функція розмітки вершин графа G_i;

$\tau: D \rightarrow P$ – функція розмітки дуг графа G_i;

n_0 – початкова вершина графа G_i;

f_i – фінальна вершина графа G_i.

Вершина графа G_i має наступний вигляд: $(q_i; t_j)$, де q_i – номер вершини графа G, а t_j – номер вершини графа G_i. Дуга графа G з′єднує унікальну пару вершин різних графів G_i.

Кожній вершині q_i графа G поставимо у відповідність число $Z(q_i)$ – якість цієї вершини.

Шляхом у графі G назвемо скінченну послідовність $l = q_1 e_1 q_2 e_2 \ldots e_{k-1} q_k$, де $q_k \in Q$, а e_i – дуга, початком якої є вершина q_i, а кінцем – q_{i+1}.

Шляхом у графі G_i. назвемо скінченну послідовність $s = (q_1; t_i) d_1 (q_2; t_j) d_2 \ldots d_{k-1} (q_k; t_n)$, де $(q_i; t_j) \in T_i$, а d_i – дуга, початком якої є вершина $(q_i; t_j)$, а кінцем – $(q_{i+1}; t_n)$.

Відмітка шляху s – це послідовність відміток $w(s)=m_1 p_1 m_2 p_2 \ldots p_{k-1} m_k$, де $m_i= \mu(T_i)$, $p_i = \tau(d_i)$.

Генеральним шляхом назвемо послідовність $I= (q_1; t_i) x_1 (q_2; t_j) x_2 \ldots x_{k-1}(q_k; t_n)$, де $(q_i; t_j) \in T_i$, а x_i може бути дугою e_i графа G або дугою d_i графа G_i.

Відмітка шляху I – це послідовність відміток $w(I)=a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots b_{k-1} a_k$, де $a_i= \mu(T_i)$, $b_i = \rho(e_i)$ або $b_i = \tau(d_i)$.

Вагою генерального шляху I між вершинами q_i та q_j, будемо називати вагу шляху між вершинами $(q_i; t_n)$та $(q_j; t_m)$ і визначимо її величину за наступною формулою:

$$dis(I) = \sum_{i=0}^{k} b_i \qquad (1)$$

Якість генерального шляху I визначимо через величину $dis\ (I)$ за наступною формулою:

$$QPath\left(I\right)=\sum_{i=0}^{k} Z(q_i)+dis(I) \qquad (2)$$

Для вершини q_i визначимо множину $Pre(q_i) = (q_j \mid (q_j, q_i)=e_i)$ та множину $Post(q_i) = (q_j \mid (q_i, q_j)=e_i)$.

Визначимо операцію з′єднування поміток різних дуг і шляхів. Коли з′єднуються помітки різних дуг, то між ним ставиться оператор об′єднання «∇», який у подальшому замінюється відповідно правилам:

а) якщо оператор «∇» з′єднує помітки двох однакових вершин: $(q_i,t_n)x_w\boldsymbol{(q_j,t_m)\nabla(q_j,t_m)}x_v\ (q_k,t_p)$, то замінюємо ці помітки разом з оператором на одну помітку: $(q_i,t_n)\ x_w\ \boldsymbol{(q_j,t_m)}\ x_v\ (q_k,t_p)$;

б) якщо оператор «∇» з′єднує помітки двох різних вершин: $(q_i,t_n)x_w\ \boldsymbol{(q_j,t_m)\nabla(q_k,t_m)}$, але існує дуга або шлях між цими вершинами: $(q_j,t_m)x_v\ (q_k,t_m)$, то замінюємо ці помітки разом з оператором на помітку знайденої дуги або шляху: $(q_i,t_n)\ x_w\ \boldsymbol{(q_j,t_m)x_v(q_k,t_m)}$;

в) якщо пункти *а* або *б* не виконуються, то операція з′єднування не можлива.

Метод побудови найкоротших шляхів у дворівневому графі.

Вхідні дані: помічений дворівневий граф G з початковою і множиною фінальних вершин.

Вихідні дані: одна або декілька поміток найкоротших шляхів, якість цих шляхів.

Крок 1.

1.1) Для неорієнтованих графів G для кожного ребра між парою вершин q_i та q_j вводиться дві дуги: (q_i,q_j) та (q_j,q_i).

1.2) У список вершин графа G вводиться фіктивна кінцева вершина *fin*, а в список дуг – дуга з кожної фінальної вершини q_i у вершину *fin*. Ця дуга позначається відміткою $\mu(q_i;t_j)$.

1.3) Створюємо представлення графа G у вигляді списку дуг з їх відмітками і вагою, при цьому відмітки відповідних вершин графів G_i. переносяться на дуги графа G (наприклад, якщо помітками двох вершин і дуги між ними будуть відповідно $(q_i,t_n),(q_j,t_m)$ та x_w, то після перенесення поміток вершин на дугу, помітка дуги матиме наступний вигляд: $(q_i,t_n)\ x_w\ (q_j,t_m))$.

1.4) Для кожного ребра графа G_i між парою вершин $(q_i;\ t_n)$ та $(q_j;\ t_m)$ вводиться дві дуги: $((q_i;\ t_n);(q_j;\ t_m))$ та $((q_j;\ t_m);((q_i;\ t_n))$, при цьому відмітки вершин переносяться на дуги.

Крок 2. If в графі G існує хоч одна вершина, що не є початковою або фінальною, з якої виходить хоч одна дуга в фінальну, then go to Крок 3, else go to Крок 7.

Крок 3. Вибираємо $q_i \in Pre(fin)$; $q := q_i$.

Крок 4. If $q \neq q_0$ then видаляємо вершину q та усі вхідні та вихідні з неї дуги. If при цьому є деякий шлях $q_i\ e_k\ q\ e\ q_j$, де $q_i \in Pre(q)$ та $q_j \in Post(q)$, then у граф додається дуга (q_i, q_j) з відміткою $e_k \nabla e$, отриманою за допомогою операції з′єднування.

Else, якщо $q = q_0$ go to Крок 2.

Крок 5. Видаляємо ті петлі, в помітках яких початок і кінець співпадає.

Крок 6. Заміна оператора з′єднування.

На кроках 4 – 6 відбувається видалення однієї вершини.

Для вершин, помітки яких з′єднані оператором «∇» (наприклад, $(q_i; t_n)\nabla(q_i; t_m)$) працює алгоритм [5], який шукає оптимальний шлях між цими вершинами (наприклад, між t_n і t_m, де t_n – визначимо як початкову вершину, а t_m – як фінальну). Для цього створюємо представлення відповідного графа G_i (t_n, $t_m \in G_i$) у вигляді списку дуг з їх відмітками і вагою.

If в результаті роботи алгоритму [5] оптимальний шлях знайдено, then поміткою цього шляху замінюємо оператор «∇» разом з двома помітками, які він з′єднує.

If оптимальних шляхів декілька, then в список дуг графа G додається така ж сама дуга, але, відповідно, з іншою поміткою.

Else, якщо шляху не існує, then видаляємо дугу (q_i, q_j).

Крок 7. Видаляємо усі вершини, що не є початковою або фінальною та усі вхідні та вихідні з них дуги. В результаті одержуємо граф, що складається лише з двох вершин: початкової та фінальної.

Обчислюємо якість шляху *QPath* для усіх дуг графа G, які з′єднують ці вершини. Оберемо найменше значення *QPath,* яке і визначає оптимальний шлях у графі. Якщо найменших значень *QPath* декілька, то результатом буде декілька шляхів з цими значеннями.

Висновки. Запропоновано новий метод пошуку найкоротших шляхів у дворівневому графі з поміченими вершинами і дугами, який працює з дворівневим графом G без необхідності приводити його до стандартного вигляду однорівневого графа, але при цьому використовується метод локальної редукції графа.

В результаті застосування методу отримуємо одну або декілька поміток для оптимальних шляхів і якість цих шляхів у графі G.

Легко бачити, що у випадку, коли всі графи G_i мають по одній вершині, розроблений метод співпадає з раніше розробленим алгоритмом пошуку найкоротшого шляху у поміченому графі методом локальної редукції графа [5]. Таким чином, запропонований метод є суттєвим узагальненням раніше розробленого алгоритму. Узагальнення полягає у наступному.

1) Кожна вершина графа G є графом G_i.

2) Проводиться обчислення якості шляху з урахуванням ваги помітки кожної вершини у цьому шляху та помітки ваги кожного ребра у той час, як у [5] виконується тільки обчислення ваги позначок ребер у шляху.

3) Використовується алгоритм [5] для графів G_i.

Список літератури

1. Ногина Н.В. Синтез регулярного выражения языка, порожденного помеченным графом, методом его локальной редукции / Н.В. Ногина, И.С. Грунский // Искусственный интеллект. – 2012. – №3. – С. 348-353.

2. Кристофидес, Н. Теория графов: алгоритмический подход / Н. Кристофидес. — М.: Мир, 1978. — 430 с.

3. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

4. Батищев Д.И. Многоуровневая декомпозиция гиперграфовых структур / Батищев Д.И., Старостин Н.В., Филимонов А.В. // Прилож. к журналу «Информационные технологии» №5(141). – М.: Новые технологии. – 2008. – 32 с.

5. Ногина Н.В. Построение кратчайшего пути в помеченном графе при помощи локальной редукции графа / Н.В. Ногина, А.В. Билык // Сучасна інформаційна Україна: інформатика, економіка, філософія: матеріали доповідей конференції, 26 квітня 2012 року. – Донецьк, 2012. – 316 с. – С. 76-79.